



N° d'ordre : .....

**UNIVERSITE DE M'SILA**  
**FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE**  
**Département de Mathématique**

**MEMOIRE**

**Présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère**

**Spécialité : mathématiques**

**Option : mathématiques appliquées**

**Par :**

**BEDDIAR Kamal.**

**SUJET**

**REGULERISATION FOURIER  
POUR UNE CLASSE DE PROBLEME MAL POSES**

**Soutenu publiquement le : 30/06/2011 devant le jury composé de :**

<b>Mr. A. Aibèche</b>	<b>Prof.</b>	<b>Université de Sétif</b>	<b>Président</b>
<b>Mr. M. Denche</b>	<b>Prof</b>	<b>Université de Constantine</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Mr. L. Mezrag</b>	<b>Prof</b>	<b>Université de M'sila</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr. C. Saidouni</b>	<b>MC</b>	<b>Université de Constantine</b>	<b>Examineur</b>

**Promotion : 2006 /2007**

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Notions préliminaires</b>	<b>6</b>
I.1	Notions préliminaires . . . . .	7
I.2	Problèmes bien et mal posés . . . . .	7
I.3	Exemples de problèmes mal posés . . . . .	10
I.4	Méthodes de régularisation . . . . .	15
<b>II</b>	<b>Stabilisation d'un problème parabolique mal posé par la méthode de Tikhonov</b>	<b>17</b>
II.1	Introduction . . . . .	18
II.2	Position du problème . . . . .	18
II.3	Régularisation de Tikhonov . . . . .	22
II.4	L'estimation d'erreur . . . . .	27
<b>III</b>	<b>Stabilisation d'un problème parabolique mal posé par la méthode de régularisation de Fourier</b>	<b>30</b>
III.1	Introduction . . . . .	31
III.2	Méthode de régularisation de Fourier . . . . .	31
III.2.1	Estimation d'erreur . . . . .	32
III.3	La méthode de régularisation de Fourier pour résoudre la flux de la chaleur pour un problème oblique . . . . .	35
III.3.1	Approximation de fourier pour le flux de chaleur et estimation d'erreur . . . . .	37
	<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

## Introduction

Hadamard a introduit dès 1923 [18] la notion de problème bien posé, il s'agit d'un problème dont :

- la solution existe.
- elle est unique.
- elle dépend continûment des données.

Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (et des topologies) dans lesquels les données et la solution évoluent.

Dans ce même livre [18] Hadamard laissait entendre (et c'est une opinion répandue jusqu'à récemment) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique. Après tout, ces trois conditions semblent très naturelles.

-Un modèle physique étant fixé, les données expérimentales dont on dispose sont en général bruitées, et rien ne garantit que de telles données proviennent de ce modèle, même pour un autre jeu de paramètres.

-Si une solution existe, il est parfaitement concevable que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.

-Dans le cas où la solution d'un problème n'existe pas, cela n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématiques).

-La non-unicité est un problème plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires (une information a priori).

-Le manque de continuité est sans doute le plus problématique, en particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il n'est pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème mal posé, puisque les données disponibles soit donc proches, mais différentes, des données "réelles".

Un problème qui n'est pas bien posé au sens de la définition ci-dessus est dit "mal posé". Nous allons en voir un exemple physique de tels problèmes.

Considérons un système physique évoluant dans le temps : Un problème essentiel consiste à atteindre au bout d'un temps  $T$  (ou dans un voisinage de  $T$ ) un objectif donné. Cela

peut, par exemple, être théoriquement obtenu en injectant certaines conditions initiales. Malheureusement les difficultés de réalisabilité parfaite de telles conditions entraînent des perturbations (donc des écarts par rapport aux conditions idéales).

Deux problèmes se posent

-apprecier l'influence de ces "écarts" sur la solution, si on laisse évoluer le système livré à lui-même.

-Corriger l'évolution du système, c'est-à-dire contrôler le processus physique, donc effectuer des actions entre les instants zéro et T, non seulement pour compenser les écarts initiaux, mais aussi d'autres perturbations, aléatoires ou non, pouvant intervenir en cours du processus. Ces actions visent toutes à améliorer la qualité de l'objectif visé (ou les conditions pour l'atteindre) .

-Bien entendu la situation finale peut être définie de façon complexe. En outre il peut y avoir des contraintes tant sur les conditions injectées que sur les contrôles en cours de processus, ou sur le phénomène lui-même.

Le présent travail est consacré à l'étude de certaines classes de problèmes paraboliques mal posés. Il est composé d'une introduction et de trois chapitres. Dans le premier on commence tout d'abord par rappeler la notion de problème mal posé, en l'illustrant par des exemples simples , enfin on termine par quelques méthodes connues de régularisation de ces problèmes.

Au deuxième chapitre, on étudiera un problème parabolique par la méthode de régularisation de Tikhonov. c-a-d on étudiera le problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u, & x > 0, t > 0 \\ u(1, t) = g(t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

Où :

$$a(x) \in C^2(\mathbb{R}^+), b(x) \in C^1(\mathbb{R}^+), c(x) \in C(\mathbb{R}^+)$$

sont des fonctions, telles que pour certains

$$\eta, \gamma > 0, \eta \leq a(x) \leq \gamma, c(x) \leq 1$$

Cela est un problème sévèrement mal-posé : De petites perturbations dans la donnée  $g$  peut causer de larges erreurs dans la solution  $u(x, t)$  pour  $x \in [0, 1]$  (voir [1,2,4,7,9,10,16]). Les résultats disponibles dans les études de problème inverse de conduction de chaleur sont principalement fidèles pour l'équation de la chaleur standard à un coefficient constant pour lequel on peut seulement trouver une représentation explicite de la solution( voir[4,9,10,19-23]).

Dans ce chapitre, on étudiera aussi l'existence et l'unicité de la solution et enfin on étudiera l'estimation de l'erreur obtenue.

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude du même problème mais avec la méthode de régularisation de Fourier. Puis on abordera le même problème avec des coefficients constants :  $a(x) = 1, b(x) = 1, c(x) = 1$ .

**CHAPITRE I**

**NOTIONS PRÉLIMINAIRES**

## I.1 Notions préliminaires

Ce chapitre est constitué d'une introduction sur la notion des problèmes bien-posés (dits correctement posés) au sens d'Hadamard. On rappelle en bref certaines notions sur les problèmes mal posés. On donne des exemples concrets de tels problèmes et enfin on présente quelques méthodes de régularisation.

## I.2 Problèmes bien et mal posés

La formulation mathématique des problèmes qui se posent dans plusieurs domaines des sciences appliquées se ramène à une équation de la forme

$$Ax = y. \tag{I.1}$$

Où  $A$  est un opérateur défini sur un espace métrique  $E$  à valeurs dans un autre espace métrique  $F$ .

En 1923 le mathématicien français Jacques Hadamard a défini les conditions à vérifier par le problème (I.1) pour qu'il soit bien posé

### Définition 1.1

On dit que l'équation (I.1) représente un problème bien posé selon le sens de Hadamard si l'opérateur  $A$  possède un inverse continu de  $F$  dans  $E$ .

D'une autre manière si les conditions suivantes sont satisfaites

1. Pour tout élément  $y \in F$  il existe une solution  $x$  dans  $E$ .

$$\forall y \in F, \exists x \in E : Ax = y.$$

2. Pour tout élément  $y \in F$  il existe un seul  $x \in E$  qui satisfait l'équation (I.1).

$$\forall x_1, x_2 \in E : Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

3. Le problème est stable sur les espaces  $E$  et  $F$ , c'est à dire qu'une petite perturbation du second membre  $y$  donne une petite perturbation de la solution  $x$ . i.e (la solution dépend continûment des données).

$$\|x - \hat{x}\| \text{ tend vers } 0 \text{ lors que } \|y - \hat{y}\| \text{ tend vers } 0.$$

**Remarque**

La condition pour que  $E$  et  $F$  soient des sous-espaces de l'espace fonctionnel classique est due à ceci : les espaces sont totalement naturels de l'équation différentielle partielle et mathématiquement physique.

Il reflète des réalités physiques et sert de base aux algorithmes computationnels.

**Définition 1.2**

On dit que l'équation (I.1) est un problème mal posé si les conditions (2) et (3) ne sont pas satisfaites (selon Hadamard).

**Remarque**

On remarque que les conditions sont des degrés d'importances totalement différents si l'un ne peut garantir la solution unique sous n'importe quel choix raisonnable de  $E$ , donc le problème ne fait pas beaucoup de sens, on espère pas à la manipuler, et la condition (1) n'est pas restrictive, donc sans cette condition une seule condition donne un algorithme numérique stable.

En plusieurs cas le problème inverse est important car ne peut pas être décrit à  $\{Ax\}$ , et sans la condition (3) le problème (I.1) n'est pas physique (selon Hadamard 1923) car pratiquement, on ne peut savoir exactement les données des erreurs des dimensions. Par contre, un emploi raisonnable de convergence et un changement de  $x$  peuvent réparer la situation.

Tikhonov a reformulé en 1943 la définition d'un problème bien posé, élargissant ainsi la classe des problèmes bien posés selon Tikhonov.

**Définition 1.3**

On dit que l'équation (I.1) représente un problème bien posé selon le sens de Tikhonov si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. La solution du problème (I.1) existe et appartient à un ensemble donné a priori  $M$  inclus dans  $E$  par une classe de données dans  $F$ .
2. Cette solution est unique dans la classe  $M$ .
3. A une altération infiniment petite de second membre telle que la solution reste dans  $M$  correspond une variation infiniment petite de cette solution.

**Lemme 1.4**

Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution de l'équation (I.1) est donnée par le texte de Picard.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k^{-2} |(y, b_k)_F|^2 < +\infty \quad (\text{I.2})$$

### Preuve

on suppose que la solution de (I.1) existe.

Soit  $b_k = \|Aa_k\|^{-1}Aa_k$  telle que  $a_k$  est une base orthonormé dans  $X$  et  $\|b_k\| = 1$ , on pose  $\lambda_k = \|Aa_k\|$ .

On remarque

$$\begin{aligned} \langle b_k, b_k \rangle_F &= \langle \|Aa_k\|^{-1}Aa_k, \|Aa_k\|^{-1}Aa_k \rangle \\ &= \langle \lambda_k^{-1}Aa_k, \lambda_k^{-1}Aa_k \rangle \\ &= \langle A^*Aa_k, \lambda_k^{-2}a_k \rangle \\ \Rightarrow A^*Aa_k &= \lambda_k^{-2}a_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle b_k, b_k \rangle_F &= \langle \lambda_k^{-1}Aa_k, b_k \rangle \\ &= \langle Aa_k, \lambda_k^{-1}b_k \rangle \\ \Rightarrow Aa_k &= \lambda_k b_k. \end{aligned}$$

Puis  $A^*Ax = Ay$ , on calcules le produit scalaire de premieres parties de cette égalité avec  $a_k$  on obtient

$$\langle A^*Ax, a_k \rangle_E = \langle A^*y, a_k \rangle_E = \langle y, Aa_k \rangle_F = \lambda_k \langle y, b_k \rangle.$$

De puis  $a_k$  est une base orthonormale dans  $X$  alors on peut écrire  $x$  comme la somme des séries convergentes de  $(x, a_k)$  et  $\|x\|_E^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(x, a_k)_E|^2$

$$\begin{aligned} \|x\|_E^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} |(x, a_k)_E|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(x, \lambda_k^{-2}A^*Aa_k)_E|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^{-4} |(x, A^*Aa_k)_E|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^{-2} |(Ax, \lambda_k^{-1}A^*Aa_k)_F|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^{-2} |(Ax, b_k)_F|^2. \end{aligned}$$

On utilise  $A^*Aa_k = \lambda_k^2 a_k$ ,  $Aa_k = \lambda_k b_k$  et ensuite la définition de l'opérateur adjoint  $(Ax, y)_F = (x, A^*y)_E$  tel que  $Ax = y$  en obtient.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^{-2} |(y, b_k)|^2 < +\infty \tag{I.3}$$

d'une façon on assume (I.3), soit  $x = \sum \|Aa_k\|_F^{-1} (y, b_k)_F a_k$

la convergence de séries  $\|Aa_k\|_F^{-1} |(y, b_k)_F a_k|^2$  on suit la condition (I.3) et l'égalité  $\|Aa_k\|_F^2 = (Aa_k, Aa_k)_F = (A^*Aa_k, a_k)_E = (\lambda_k^2 a_k, a_k) = \lambda_k^2$ .

Donc,  $x \in E$  par emploi de la définition  $b_k$  il n'est pas difficile de comprendre que  $Ax = y$ .

◇

### I.3 Exemples de problèmes mal posés

#### Exemple 1

La différentiation et l'intégration sont deux problème inverses l'un de l'autre. Il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct, et a l'intégration comme problème inverse. En fait, l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui conduisent à la considérer comme le problème dérect. et la différentiation est le problème mal posé, comme nous allons le voir. Considérons l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ , et l'opérateur intégral  $A$  défini par

$$Af(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Il est facile de voir directement que  $A \in \mathcal{L}^2([0, 1])$ . Cet opérateur est injectif par contre son image est le sous espace vectoriel

$$\text{Im}A = \{f \in H^1([0, 1]), f(0) = 0\}.$$

Où  $H^1([0, 1])$  est l'espace de Sobolev.

En effet l'équation

$$Af = g$$

est équivalente à  $f(x) = g'(x)$  et  $g(0) = 0$

L'image de  $A$  n'est pas fermée dans  $\mathcal{L}^2([0, 1])$  (elle l'est dans  $H^1([0, 1])$ ).

En conséquence l'inverse de  $A$  n'est pas continu sur  $\mathcal{L}^2([0, 1])$  comme le montre l'exemple suivant considérons une fonction  $f \in C^1([0, 1])$ , et  $n \in N$ , soit

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$$

alors

$$f'_n(x) = f'(x) + n \cos(n^2 x).$$

un simple calcul montre que

$$\|f - f_n\|_2 = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

alors

$$\|f' - f'_n\|_2 = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = o(n).$$

Ainsi la différence entre  $f$  et  $f_n$  peut être arbitrairement grande. Alors même que la différence entre  $f$  et  $f'$  est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de  $A$ ) n'est donc pas continu.

### Exemple 2

Notons par  $D = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ ,  $\Omega = D \times (0, T)$  et  $\Gamma_d = \Gamma_B + \Gamma_F$ , ou  $\Gamma_B = \partial D \times [0, T]$ ,  $\Gamma_F = D \times \{T\}$ .

Aussi on note par  $x' = (x_1, x_2)$  et  $x = (x_1, x_2, t)$ .

Pour  $n \in N$ , la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma_B, \\ u(x) = \exp(-2n^2 T) \sin(nx_1) \sin(nx_2), & x \in \Gamma_F \end{array} \right.$$

est donnée par

$$u^{(n)}(x) = \exp(-2n^2 t) \sin(nx_1) \sin(nx_2).$$

On choisit dans  $L_2$  les deux normes suivantes

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{L_2(\Gamma_F)} = \left( \int_D u^2(x', T) dx' \right)^{\frac{1}{2}},$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} \|u^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (\exp(-2n^2t) \sin(nx_1) \sin(nx_2))^2 dx \\ &= \int_0^T (\exp 4n^2(T-t) dx \int_D (\exp(-2n^2t) \sin(nx_1) \sin(nx_2))^2 dx' \\ &= \frac{1}{4n^2} (\exp 4n^2T - 1) \|u_F^{(n)}\|_{L_2(\Gamma_F)}^2 \end{aligned}$$

puisque pour tout  $C > 0$ , il existe  $n \in N$  telle que

$$\frac{1}{2n} \sqrt{(\exp 4n^2T - 1)} > C.$$

Alors, on trouve que l'inégalité

$$\|u^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^2 > \|u_F^{(n)}\|_{L_2(\Gamma_F)}^2$$

est vérifiée pour chaque  $C > 0$ . Cela veut dire que la solution ne dépend pas continûment de la donnée finale, d'où le problème est mal posé.

**Remarque**

Dans le cas de dimension finie par exemple si  $A : R^n \rightarrow R^n$  est une matrice ( $n \times n$ ) alors

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax = y \\ \text{bien posé} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A^{-1} \text{ existe} \\ \det A \neq 0 \\ Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array} \right.$$

**Exemple 3**

Considérons l'espace de Hilbert  $l^2$  de dimension infinie telle que

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty.$$

Soit  $A : l^2 \rightarrow l^2$  un opérateur diagonal dans  $l^2$  telle que

$$Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots).$$

Considérons le problème

$$Ax = y$$

l'inverse  $A^{-1}$  de  $A$  est donné par

$$A^{-1}y = (y_1, 2y_2, \dots, ny_n, \dots).$$

Donc on a l'existence de la solution de ce problème pour un certain  $y \in l^2$ .

On peut encore montrer facilement l'unicité de la solution. Prenons maintenant

$$y_n = (0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots),$$

donc  $y_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , mais

$$\|A^{-1}y_n\| = \sqrt{n} \rightarrow \infty.$$

Donc on n'a pas la stabilité de la solution d'où le problème est mal posé.

**Exemple 4**

Un exemple classique d'un problème mal posé est le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x), (x, t) \in \Pi = (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u/\partial\Pi = 0 \end{cases}$$

qui peut être écrit dans  $L_2(\Pi)$  sous la forme opérationnelle

$$A_\alpha u = f$$

puisque  $A$  admet un système complet orthonormal dans  $L_2(\Pi)$  de fonctions propres

$$\Phi_{k,j}^\alpha = \frac{2}{\pi} \sin(kt) \sin(jx),$$

où les valeurs propres correspondantes sont

$$\lambda_{k,j}^\alpha = j^2 - \alpha^2 k^2, k, j \in N$$

alors toute solution de problème peut être écrite comme suit

$$u(x, t) = \sum_{k,j=1, j \neq \alpha k}^{\infty} \frac{(f, \Phi_{k,j}^\alpha)_{L_2(\Pi)}}{j^2 - \alpha^2 k^2} \Phi_{k,j}^\alpha + \sum_{k,j=1, j = \alpha k}^{\infty} u_{k,j}(x, t) \Phi_{k,j}^\alpha$$

on trouve que

1. Si  $\alpha$  est un nombre rationnel alors le problème est résoluble si et seulement si

$$(f, \Phi_{k,j}^\alpha)_{L_2(\Pi)} = 0, k, j \in N : j = \alpha k.$$

Si la solution existe alors elle n'est pas unique.

2. Si  $\alpha$  est un nombre irrationnel et satisfait pour certaines constantes  $c > 0, p \geq 0$

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \geq \frac{c}{n^{p+2}}, n, m \in N,$$

alors le problème a une solution unique dans  $L_2(\Pi)$  si

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} k^{2p+2} \frac{|(f, \Phi_{k,j}^\alpha)_{L_2(\Pi)}|}{(j + \alpha k)^2} < \infty,$$

qui est satisfaite si, par exemple  $f \in W_2^p(\Pi)$ . Donc le problème n'est pas stable à de petites variations du paramètre  $\alpha$ . D'où il est mal posé au sens de Hadamard.

#### I.4 Méthodes de régularisation

Nous citons quelques méthodes de régularisation pour les problèmes linéaires mal posés. Régulariser un problème mal posé, c'est le remplacer par un autre bien posé de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité.

On rappelle régularisation de (I.1) toute famille d'opérateurs linéaires bornés  $R_\alpha : F \rightarrow E$  telle que  $x \in E$  on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha(Au) = g$$

le paramètre  $\alpha$  est appelé le paramètre de la régularisation.

On présente maintenant une introduction aux méthodes de régularisation les plus courantes, à savoir la méthode de Tikhonov, et la méthode de Lavrentiev.

- Soit  $A$  un opérateur linéaire compact d'un espace de Hilbert  $E$  dans un espace de Hilbert  $F$ , et considérons l'équation

$$Au = g$$

1. Tikhonov a proposé une méthode pour résoudre l'instabilité du problème (I.1), cette méthode est basée sur la minimisation de la fonctionnelle suivante

$$J(u) = \|Au - g\|_F^2 + \alpha \|u\|_E^2.$$

Donc la solution régularisée du problème (I.1) est

$$u_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*g$$

qui converge vers  $u$  quand  $\alpha \rightarrow 0$ , dans ce cas la famille d'opérateurs  $R_\alpha$  est donnée par

$$R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*$$

et comme l'opérateur  $(\alpha I + A^*A)$  admet un inverse borné on trouve que ce problème proche est bien posé. On note ici que si le paramètre de régularisation  $\alpha$  est choisi convenablement en fonction de  $\xi$ , de telle sorte que pour  $\xi \rightarrow 0$  on a aussi  $\alpha \rightarrow 0$  et  $\xi^2 \alpha^{-1} \rightarrow 0$

2. Si  $A$  est un opérateur auto adjoint positif une méthode proposée par M. Lavrentiev pour la régularisation du problème (I.1) consiste à introduire une équation auxiliaire

$$(A + \alpha I)u_\alpha = \tilde{g}$$

telle que l'opérateur  $A$  est auto-adjoint positif ( $A = A^* \geq 0$ ). En choisissant le paramètre de régularisation  $\alpha$  en fonction de  $\xi$  de telle sorte que  $u_\alpha$  tende vers  $u$  pour  $\xi \rightarrow 0$ . Cela est possible, en se donnant quelques restrictions supplémentaires.

Plus exactement on a le théorème suivant

***Théorème 1.5***

Supposons que l'opérateur  $A$  vérifie pour tout  $\alpha > 0$ , la condition

$$\|(A + \alpha I)\|^{-1} \leq \frac{C}{\alpha}$$

supposons aussi que  $g \in D(A^2)$ .

Si le paramètre de régularisation  $\alpha > 0$  est choisi en fonction de  $\xi$  de telle sorte que pour  $\xi \rightarrow 0$  on a aussi  $\alpha \rightarrow 0$  et  $\xi\alpha^{-1} \rightarrow 0$ . Alors  $u_\alpha \rightarrow u$ , pour  $\xi \rightarrow 0$ , si  $\alpha = 0(\xi^{\frac{1}{3}}) \rightarrow 0$  pour  $\xi \rightarrow 0$ , alors

$$\|u_\alpha - u\| = 0(\xi^{\frac{1}{3}})$$

**CHAPITRE II**

**STABILISATION D'UN PROBLÈME  
PARABOLIQUE MAL POSÉ PAR LA  
MÉTHODE DE TIKHONOV**

## II.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à l'étude d'un problème parabolique mal posé [8,11,16].

Tout d'abord on établit l'existence et l'unicité de la solution. Puis une deuxième partie sera largement consacrée à une méthode de régularisation de ce problème, on s'intéressera plus particulièrement à l'existence de la régularisation.

Finalement, nous étudierons la convergence de la solution régularisée ainsi que l'estimation de l'erreur obtenue.

## II.2 Position du problème

Considérons le problème (II.1) qui consiste de trouver  $u \in L^2(\mathbb{R})$  telle que

$$\begin{cases} u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u, & x > 0, t > 0 \\ u(1, t) = g(t), & t \geq 0, u(x, t) |_{x \rightarrow \infty} \text{ borné} \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Où

$$a(x) \in C^2(\mathbb{R}^+), b(x) \in C^1(\mathbb{R}^+), c(x) \in C(\mathbb{R}^+)$$

sont des fonction.

Si on suppose  $a(x) = 1, b(x) = 0, c(x) = 0$  on obtient le problème parabolique (l'équation de chaleur standard )

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u(1, t) = g(t), & t \geq 0, u(x, t) |_{x \rightarrow \infty} \text{ borné} \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Ce genre de problème a été discutés par plusieurs auteurs [4,5,6,9,10,14,15,21,22].

Si on suppose  $a(x) = 1, b(x) = 1, c(x) = 0$  on obtient le problème parabolique male posé

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x, & x > 0, t > 0 \\ u(1, t) = g(t), & t \geq 0, u(x, t) |_{x \rightarrow \infty} \text{ borné} \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

qui a été discuté aussi par plusieurs auteurs [12,13,24].

Dans ce chapitre on étudiera le problème parabolique (II.1)

$$\begin{cases} u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u, & x > 0, t > 0 \\ u(1, t) = g(t), & t \geq 0, u(x, t) |_{x \rightarrow \infty} \text{ borné} \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des fonctions connues qui satisfont quelques conditions [8,11,16] pour  $\eta, \gamma > 0, \eta \leq a(x) \leq \gamma, c(x) \leq 1$ . on veut connaitre  $u(x, t)$  pour  $x \in [0, 1]$ .

pour cela on va définir quelques notions que nous utiliserons à trouver la solution.

On considère le problème dans  $L^2(\mathbb{R})$ . En respectant le variable  $t$ , on prolongeant  $u(x, \cdot)$ ,  $g(\cdot) = u(1, \cdot)$ ,  $f(\cdot) = u(0, \cdot)$ , et d'autres fonctions figurant dans le document égale à zéro pour  $t < 0$ .

Les notations  $\|\cdot\|$ ,  $(\cdot, \cdot)$  désignent  $L^2$  norme et le produit scalaire dans  $L^2(\mathbb{R})$ , respectivement, et

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi t} h(t) dt \quad (\text{II.4})$$

est la transformation de Fourier de la fonction  $h(t)$ .

On suppose qu'il existe une limite à la fonction  $f(t) = u(0, t)$

$$\|f\| \leq E \quad (\text{II.5})$$

telle que

$$\|f\|_p \leq E, \quad p \geq 0 \quad (\text{II.6})$$

où  $\|f\|_p$  est définie par

$$\|f\|_p = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)^p |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{II.7})$$

Le problème direct correspondant au problème (II.1) est le problème de valeur initiale suivant

$$\begin{cases} u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u, & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = f(t), & f \in L^2(\mathbb{R}), t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

On utilise la transformation de Fourier par rapport à  $t$  on obtient

$$\begin{cases} \hat{u}_t = a(x)\hat{u}_{xx} + b(x)\hat{u}_x + c(x)\hat{u}, & x > 0, t > 0 \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi), & f \in L^2(\mathbb{R}), t \geq 0 \\ \hat{u}(x, 0) = 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Supposons que ce problème (II.9) a une solution  $u$ , puis

$$\hat{u}(x, \xi) = v(x, \xi)\hat{f}(\xi). \quad (\text{II.10})$$

Où  $v(x, \xi)$  la solution du problème de la valeur limite suivante

$$\begin{cases} i\xi v(x, \xi) = a(x)v_{xx} + b(x)v_x + c(x)v, & x > 0, \xi \in \mathbb{R} \\ v(0, \xi) = 1 & \xi \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} v(x, \xi) = 0, & \xi \neq 0 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Pour  $\xi = 0$  on exige que  $v(x, 0)$  soit bornée lorsque  $x$  tend vers  $\infty$ .

On utilise la transformée de Fourier inverse sur (II.10), on obtient

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} v(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi, \quad x > 0. \quad (\text{II.12})$$

En raison de (II.10) si  $x = 1$  on a

$$\hat{g}(\xi) = v(1, \xi)\hat{f}(\xi) \quad (\text{II.13})$$

alors

$$\hat{u}(x, \xi) = \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)} \hat{g}(\xi). \quad (\text{II.14})$$

Par (II.14) on sait que la solution exacte de problème (II.1) est donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)} \hat{g}(\xi) d\xi.$$

La question qui se pose maintenant : Est-ce-que ce problème est stable ?

i.e :  $\|u(x, t)\| \leq C \|g(t)\|$  où  $C$  est un constante absolue.

On a

$$\hat{u}(x, \xi) = \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)} \hat{g}(\xi)$$

ce qui implique que

$$\|u(x, t)\|^2 = \|\hat{u}(x, t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)} \right|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi.$$

On utilise les deus lemmes [16] pour continuer notre travail

**Lemme 2.1**

S'il existe deux constantes  $C_1, C_2$  telles que, pour  $x \in [0, 1]$  et  $|\xi|$  assez suffisant, par exemple  $|\xi| \geq |\xi_0|$ , on a

$$C_1 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \leq |v(x, \xi)| \leq C_2 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \quad (\text{II.15})$$

où

$$A(x) = \int_0^x \left( \frac{1}{\sqrt{a(s)}} \right) ds.$$

**Lemme 2.2**

Si le problème de valeur limite

$$\begin{cases} a(x)v_{xx} + b(x)v_x + c(x)v = 0, & x > 0 \\ v(0) = 1, & v(x)|_{x \rightarrow \infty} \text{ borné} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

a une solution unique, alors il existe deux constantes  $C'_1, C'_2$ , telle que

$$C'_1 e^{-A(1)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \leq |v(1, \xi)| \leq C'_2 e^{-A(1)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (\text{II.17})$$

On continue le travail. On a

$$\begin{aligned}
 \|u(x, \cdot)\|^2 &= \|\hat{u}(x, \xi)\|^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)} \right|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{|\xi| \geq \xi_0} \left| \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)} \hat{g}(\xi) \right|^2 d\xi + \int_{|\xi| < \xi_0} \left| \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)} \hat{g}(\xi) \right|^2 d\xi \\
 &\geq \int_{|\xi| \geq \xi_0} \left| \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)} \hat{g}(\xi) \right|^2 d\xi \\
 &\geq \int_{|\xi| \geq \xi_0} \left| \frac{C_1 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}}{C'_2 e^{-A(1)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}} \right|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{|\xi| \geq \xi_0} \left| \frac{c_1}{c'_2} e^{(A(1)-A(x))\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \right|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
 &\geq \int_{|\xi| \geq \xi_0} \left| \frac{c_1}{c'_2} \right|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \left| \frac{c_1}{c'_2} \right|^2 \|\hat{g}(\xi)\|^2 \\
 &= C^2 \|\hat{g}(\xi)\|^2
 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|u(x, t)\|^2 \geq C^2 \|g(t)\|^2 \quad \text{pour } |\xi| \geq \xi_0.$$

Donc pour  $|\xi| \geq \xi_0$  le problème n'est pas stable. De petites perturbations dans les résultats  $g$  peuvent causer de larges erreurs dans la solution  $u(x, t)$  pour  $x \in [0, 1]$ .

### II.3 Régularisation de Tikhonov

Comme notre approximation de  $u(x, t)$  pour  $0 \leq x < 1$ , on cherche une fonction  $h(x, t)$  (solution de minimisation de Tikhonov) qui minimise la quantité

$$\|k(x)h - g_\delta\|^2 + \left(\frac{\delta}{E}\right)^2 \|h\|^2. \quad (II.18)$$

Où  $h(x, \cdot)$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $E$  est donnée par (II.5) et  $g_\delta(t)$  la donnée mesurée qui est simplement dans  $L^2(\mathbb{R})$  satisfait

$$\|g - g_\delta\| \leq \delta. \quad (II.19)$$

Soit  $g(t)$  est la valeur exacte de la solution  $u(x, t)$  de problème (II.8) à  $x = 1$  et à partir de (II.14) on a

$$\frac{v(1, \xi)}{v(x, \xi)} \hat{u}(x, \xi) = \hat{g}(\xi). \quad (II.20)$$

On définit l'opérateur  $k(x) : u(x, \cdot) \mapsto g(\cdot)$  par (II.20) pour  $0 \leq x < 1$ , puis le problème (II.1) peut être réécrit comme suit

$$k(x)u(x, t) = g(t) \quad 0 \leq x < 1. \quad (II.21)$$

On utilise la transformation de Fourier pour obtenir une représentation de la solution approximative de l'équation (II.21)

$$\widehat{k(x)u}(x, t) = \frac{v(1, \xi)}{v(x, \xi)} \hat{u}(x, \xi) \quad 0 \leq x < 1. \quad (II.22)$$

Soit  $I$  identité d'opérateur dans  $L^2(R)$  et  $K^*(x)$  l'adjoint de  $K(x)$ , par le théorème 2.11 dans [6], la solution unique du problème de minimisation (II.18) est donnée par

$$h = [k^*(x)k(x) + \alpha^2 I]^{-1} k^*(x)g_\delta. \quad (II.23)$$

Par formule de Parseval, on a

$$\left( \widehat{k(x)u}, \hat{v} \right) = (k(x)u, v) = (u, k^*(x)v) = \left( \hat{u}, \widehat{k^*(x)v} \right)$$

et par (II.22) on a

$$\left( \frac{v(1, \xi)}{v(x, \xi)} \hat{u}, \hat{v} \right) = \left( \hat{u}, \frac{\overline{v(1, \xi)}}{v(x, \xi)} \hat{v} \right)$$

et alors

$$\widehat{k^*(x)v} = \frac{\overline{v(1, \xi)}}{v(x, \xi)} \hat{v} \quad (II.24)$$

et

$$\left( k^*(x) \widehat{k(x)u} \right) = \frac{\overline{v(1, \xi)}}{v(x, \xi)} \widehat{k(x)u} = \left| \frac{v(1, \xi)}{v(x, \xi)} \right|^2 \hat{u}. \quad (II.25)$$

En raison de (II.23) on a

$$(k^*(x)k(x) + \alpha^2 I) h = k^*(x)g_\delta$$

et

$$\left( k^*(x) \widehat{k(x)h} \right) + \alpha^2 \hat{h} = k^*(x) \widehat{g_\delta} \quad (II.26)$$

de (II.24), (II.25) et (II.26) on obtient

$$\left( \left| \frac{v(1, \xi)}{v(x, \xi)} \right|^2 + \alpha^2 \right) \hat{h} = \frac{\overline{v(1, \xi)}}{v(x, \xi)} \hat{g}_\delta.$$

Donc

$$\hat{h}(x, \xi) = \frac{\left[ \frac{\overline{v(1, \xi)}}{v(x, \xi)} \right] \hat{g}_\delta}{\left| \frac{v(1, \xi)}{v(x, \xi)} \right|^2 + \alpha^2} = \frac{\left[ \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)} \right] \hat{g}_\delta}{1 + \alpha^2 \left| \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)} \right|^2} \quad (II.27)$$

et par l'inverse de transformation de Fourier on a

$$h(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} \frac{\left[ \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)} \right] \hat{g}_\delta(\xi)}{1 + \alpha^2 \left| \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)} \right|^2} d\xi \quad (II.28)$$

où

$$\alpha = \frac{\delta}{E}.$$

Par (II.14) on sait que la solution exacte de problème (II.1) est donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)} \hat{g}(\xi) d\xi \quad (II.29)$$

il est intéressant de comparer la formule (II.29) de la solution exacte avec la formule (II.28) de l'approximation de Tikhonov  $h(x, t)$ , d'une manière claire, on note les inégalités

(II.15) et (II.17) et la définition de fonction  $A(x)$ , la procédure de régularisation consiste à remplacer l'inconnue  $\hat{g}(\xi)$  avec la transformation de Fourier de données de bruit  $g_\delta(\xi)$  filtré et approprié. le filtre dans (II.28) atténue la haute fréquence dans  $\hat{g}_\delta(\xi)$  de façon consistant à minimiser (II.21).

Par cette idée on peut utiliser le meilleur filtre  $\frac{1}{1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2}$  pour remplacer le filtre  $\frac{1}{1+\alpha^2\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2}$  et introduire une autre approximation  $u_\delta(x, t)$  de solution  $u(x, t)$ .

### Définition 2.3

Soit

$$u_\delta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} \frac{\left(\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right) \hat{g}_\delta(\xi)}{1 + \alpha^2 \left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2} d\xi \quad (II.30)$$

il rappelle l'approximation simplifiée de Tikhonov de la solution  $u(x, t)$  de problème (II.1) ou (II.18).

Pour l'approximation simplifiée de Tikhonov, on peut établir un ordre optimal d'estimation d'erreur avec la continuité de Hölder, le lemme suivant est la base d'autres estimations.

### Lemme 2.4

On a les inégalités suivantes

$$\sup_{s \geq 0} \frac{e^{(A(1)-A(x))s}}{1 + \alpha^2 e^{2A(1)s}} \leq \alpha^{\frac{(A(1)-A(x))}{A(1)}} \quad (II.31)$$

$$\sup_{s \geq 0} \frac{e^{(2A(1)-A(x))s}}{1 + \alpha^2 e^{2A(1)s}} \leq \alpha^{\frac{(A(x)-2A(1))}{A(1)}} \quad (II.32)$$

### Preuve

Soit

$$p(s) = \frac{e^{(A(1)-A(x))s}}{1 + \alpha^2 e^{2A(1)s}}$$

puis

$$p'(s) = \frac{\left[ (1 + \alpha^2 e^{2A(1)s}) (A(1) - A(x)) - 2A(1)\alpha^2 e^{2A(1)s} \right] e^{(A(1)-A(x))s}}{(1 + \alpha^2 e^{2A(1)s})^2}$$

Pour  $p'(s) = 0$  on a

$$(A(1) - A(x)) - \alpha^2 e^{2A(1)s} (A(1) + A(x)) = 0.$$

Noté que  $A(1) > 0$ ,  $A(1) \geq A(x) \geq 0$  pour  $0 \leq x \leq 1$  il est facile de voir que  $p(s)$  a une valeur unique maximale  $s^*$  qui satisfait

$$\alpha^2 e^{2A(1)s^*} = \frac{A(1) - A(x)}{A(1) + A(x)} \tag{II.33}$$

et

$$e^{2A(1)s^*} = \alpha^{-2} \frac{A(1) - A(x)}{A(1) + A(x)} \leq \alpha^{-2}.$$

Donc

$$\left( e^{2A(1)s^*} \right)^{\frac{(A(1)-A(x))}{2A(1)}} \leq \alpha^{\frac{-2(A(1)-A(x))}{2A(1)}}$$

i.e

$$e^{(A(1)-A(x))s^*} \leq \alpha^{\frac{(A(x)-A(1))}{A(1)}}. \tag{II.34}$$

Par (II.33) on sait

$$1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*} = \frac{2A(1)}{(A(1) + A(x))}$$

et donc

$$\frac{1}{1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*}} = \frac{A(1) + A(x)}{2A(1)} \leq 1. \tag{II.35}$$

En combinant (II.34) avec (II.35) on a

$$\sup_{s \geq 0} \frac{e^{(A(1)-A(x))s}}{1 + \alpha^2 e^{2A(1)s}} \leq \frac{e^{(A(1)-A(x))s^*}}{1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*}} \leq \alpha^{\frac{(A(x)-A(1))}{A(1)}}$$

la prouve d' inégalité (II.31) est complétée et l'inégalité peut être prouvée simultanément.  $\diamond$

## II.4 L'estimation d'erreur

### *Théorème 2.5*

On suppose que le problème (II.16) a une solution unique, soit  $u(x, t)$  la température exacte a  $x$ ,  $0 \leq x < 1$ , donné par (II.29) et  $u_\delta(x, t)$  soit l'approximation simplifiée et régularisée de Tikhonov pour  $u(x, t)$  donné par (II.30), la température mesurée (donnée de bruit) a  $x = 1$ ,  $g_\delta(t)$  satisfait (II.19) et la condition (II.5) est valide, on a

$$\|u_\delta(x, \cdot) - u(x, \cdot)\| \leq C \delta^{\frac{A(x)}{A(1)}} E^{1 - \frac{A(x)}{A(1)}} \quad 0 < x < 1 \quad (\text{II.36})$$

Où  $C$  est une constante indépendante de  $\delta$  et  $E$

### **Preuve**

Note (II.12) on a

$$\begin{aligned} |\hat{u}(x, \xi) - \hat{u}_\delta(x, \xi)|^2 &= \left| \frac{\left(\frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)}\right) \hat{g}(\xi) \left(1 + \alpha^2 \left|\frac{1}{v(1, \xi)}\right|^2\right) - \left(\frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)}\right) \hat{g}_\delta(\xi)}{1 + \alpha^2 \left|\frac{1}{v(1, \xi)}\right|^2} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\left(\frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)}\right) (\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi)) + \alpha^2 \left|\frac{1}{v(1, \xi)}\right|^2 \hat{g}(\xi) \frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)}}{1 + \alpha^2 \left|\frac{1}{v(1, \xi)}\right|^2} \right|^2 \\ &\leq 2 |\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi)| \frac{\left|\frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)}\right|^2}{\left(1 + \alpha^2 \left|\frac{1}{v(1, \xi)}\right|^2\right)^2} + 2\alpha^4 |\hat{f}(\xi)|^2 \left|\frac{1}{v(1, \xi)}\right|^2 \left|\frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)}\right|^2 \\ &= 2 |\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi)|^2 I_1 + 2\alpha^4 |f(\xi)|^2 I_2. \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

Par l'inégalité (II.14) et (II.17) on sait

$$\begin{aligned} \left|\frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)}\right|^2 &\leq \left(\frac{C_2 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}}{C_1' e^{-A(1)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}}\right)^2 = \left(\frac{C_2}{C_1'}\right)^2 e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}} \\ &\left|\frac{1}{v(1, \xi)}\right|^2 \geq \frac{1}{C_2'^2} e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}} \end{aligned}$$

et

$$I_1 = \frac{\left|\frac{v(x, \xi)}{v(1, \xi)}\right|^2}{\left(1 + \alpha^2 \left|\frac{1}{v(1, \xi)}\right|^2\right)^2} \leq \frac{\left(\frac{C_2}{C_1'}\right)^2 e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}}}{\left(1 + \alpha^2 \frac{1}{C_2'^2} e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}}\right)^2}$$

indique que  $C_2^1 = \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 / \min\left\{1, \frac{1}{C_2^2}\right\}^2$ , posent  $\sqrt{2|\xi|} = 2s$  et par l'inégalité (II.31) on a

$$\begin{aligned} I_1 &= C_1^2 \frac{e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}}}{\left(1 + \alpha^2 e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}}\right)^2} = C_1^2 \left(\frac{e^{(A(1)-A(x))s}}{1 + \alpha^2 e^{2A(1)s}}\right)^2 \\ &\leq C_1^2 \alpha^{2\frac{(A(x)-A(1))}{A(1)}}. \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

D'une manière analogue

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2 \left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2}{\left(1 + \alpha^2 \left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2\right)^2} \\ &\leq \frac{\left(\frac{1}{C_1}\right)^2 e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}} \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}}}{\min\left\{1, \frac{1}{C_2^2}\right\}^2 \left(1 + \alpha^2 e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}}\right)^2} \end{aligned}$$

indique que  $C_2^2 = \frac{C_2^2}{C_1^4} / \min\left\{1, \frac{1}{C_2^2}\right\}^2$ ,  $\sqrt{2|\xi|} = 2s$  et par (II.32) on a

$$\begin{aligned} I_2 &= C_2^2 \frac{e^{(2A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}}}{\left(1 + \alpha^2 e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}}\right)^2} \\ &= C_2^2 \left(\frac{e^{(2A(1)-A(x))s}}{1 + \alpha^2 e^{2A(1)s}}\right)^2 \\ &\leq C_2^2 \alpha^{2\frac{(A(x)-2A(1))}{A(1)}}. \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

On combine (II.38), (II.39) avec (II.37) on obtient

$$|\hat{u}(x, \xi) - \hat{u}_\delta(x, \xi)|^2 \leq 2|\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi)|^2 C_1^2 \alpha^{\frac{2[(A(x)-2A(1))]}{A(1)}} + 2\alpha^4 |\hat{f}(\xi)|^2 C_2^2 \alpha^{\frac{2[(A(x)-2A(1))]}{A(1)}}.$$

Donc par (II.19) et (II.5) on a

$$\begin{aligned} \|u(x, \xi) - u_\delta(x, \cdot)\|^2 &= \|\hat{u}(x, \xi) - \hat{u}_\delta(x, \cdot)\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(x, \xi) - \hat{u}_\delta(x, \xi)|^2 d\xi \\ &\leq 2C_1^2 \alpha^{\frac{2[(A(x)-2A(1))]}{A(1)}} \delta^2 + 2\alpha^4 E^2 C_2^2 \alpha^{\frac{2[(A(x)-2A(1))]}{A(1)}} \\ &= 2C_1^2 \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2\left(\frac{A(x)}{A(1)}-1\right)} \delta^2 + 2E^2 C_2^2 \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2\frac{A(x)}{A(1)}} \\ &= C^2 \delta^{2\frac{A(x)}{A(1)}} E^{2(1-\frac{A(x)}{A(1)})} \end{aligned}$$

où  $C^2 = 2(C_1^2 + C_2^2)$ . Finalement, on prend les deux racines carré de l'inégalité au-dessus on a (II.36).  $\diamond$

**Remarque**

L'inégalité (II.36) est une estimation de stabilité très importante (stabilité Hölder) dans norm- $L^2$ .

Spécialement lorsque  $a(x)$  dans (II.1) est un constant positif. L'estimation (II.36) devient

$$\|u(x, \xi) - u_\delta(x, \cdot)\|^2 = C\delta^x E^{1-x} \tag{II.40}$$

cela est un résultat aussi générale qui inclut une conclusion très connue de l'équation de côte de la chaleur standard obtenue dans [4, 7,20,22,23] et dans ce cas elle est un ordre optimal [23].

**CHAPITRE III**

**STABILISATION D'UN PROBLÈME  
PARABOLIQUE MAL POSÉ PAR LA  
MÉTHODE DE RÉGULARISATION DE  
FOURIER**

### III.1 Introduction

Dans ce chapitre, on traitera la façon de stabiliser le problème parabolique mal posé suivant [8,9,11,16]

$$\begin{cases} u_t &= a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x \geq 0 \\ u(1, t) &= g(t), & t \geq 0, u(x, t) |_{x \rightarrow \infty} \text{ borné.} \end{cases} \quad (II.1)$$

sous le condition (II.6) de façon générale. Ensuite, nous allons étudier la flux de la chaleur du problème dans un cas particulier par la méthode de régularisation de Fourier, ie : en coupant les hautes fréquences dans l'espace de Fourier, et une estimation de stabilité du type logarithmique sera également donnée.

### III.2 Méthode de régularisation de Fourier

Condition (II.6) est une condition a priori de régularité inconnue  $u(x, t)$ . Par exemple, hypothèse (II.6) veut dire que pour le problème (II.1) que

$$\|f(t)\| = \|u(0, t)\| \leq E \quad \text{dans le cas } p = 0.$$

Où

$$\|f\|_1 = \|u(0, t)\|_1 = [\|u(0, t)\|^2 + \|u_t(0, t)\|^2]^{\frac{1}{2}} \leq E \quad \text{dans le cas } p = 1$$

qui découle de la relation de Parseval

$$\|f(t)\| = \|\hat{f}(\xi)\|$$

et le théorème de la différentiation de la transformation de Fourier.

La même condition (II.6) pour tout entier  $p \geq 0$  constant pour ces fonctions dérivées par a pour à  $t$  de ordre  $\leq p$  et  $x = 0$  sont limitées dans  $L^2(\mathbb{R})$ . La plus grande valeur  $p$ , la condition (II.6) est plus restrictive en raison des inégalités (II.15) et (II.17) on détient

$$\left| \frac{V(x, \xi)}{V(1, \xi)} \right| \geq \frac{C_1}{C_2'} e^{(A(1)-A(x))\frac{\sqrt{|\xi|}}{2}} \quad \text{pour } |\xi| \geq \xi_0.$$

Donc, à partir de (II.29), nous savons qu'une petite erreur dans la composante à haute fréquence est singulière et détruit complètement la solution pour  $0 \leq x < 1$ , une façon

naturelle de stabiliser le problème est d'éliminer toutes les hautes fréquences de la solution et envisager (II.29) seulement pour  $|\xi| < \xi_{\max}$ , où  $\xi_{\max}$  est une constante positive.

Soit  $x_{\max}$  être la fonction caractéristique de l'intervall  $[-\xi_{\max}, \xi_{\max}]$ .

Puis pour tout bruit de données  $g_\delta$  qui satisfait (II.19)

$$\|g - g_\delta\| \leq \delta$$

on obtient une solution approximative régularisée  $u_\delta(x, t)$

$$u_\delta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} \frac{V(x, \xi)}{V(1, \xi)} \hat{g}_\delta(\xi) x_{\max} d\xi \quad (\text{III.1})$$

et on l'appelle la solution de régularisation de Fourier de problème (II.1).

### III.2.1 Estimation d'erreur

#### *Théorème 3.1*

Supposons le problème (II.16) à une solution unique. Soit  $g_\delta(t)$  la donnée mesurée à  $x = 1$  qui satisfait (II.19) à priori la condition (II.6) pour  $p \geq 0$ .

Soit  $u_\delta(x, t)$  la solution approximative régularisé de Fourier définie par (III.1). Si on choisit

$$\xi_{\max} = 2 \left( \frac{1}{A(1)} \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) \right)^2 \quad (\text{III.2})$$

alors il est titulaire d'estimation de l'erreur.

$$\|u(x, \cdot) - u_\delta(x, \cdot)\| \leq CE^{(1-\frac{A(x)}{A(1)})} \delta^{\frac{A(x)}{A(1)}} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p(1-\frac{A(x)}{A(1)})} (1 + 0(1)) \quad \text{pour } \delta \rightarrow 0 \quad (\text{III.3})$$

Où  $C$  est une constante positive indépendante de  $\delta$  et  $E$ .

#### **Preuve**

D'après (II.13), (II.15), (II.17) et les conditions (II.6) et (II.19) on a

$$\begin{aligned}
\|u(x, \cdot) - u_\delta(x, \cdot)\|^2 &= \|\hat{u}(x, \xi) - \hat{u}_\delta(x, \xi)\|^2 \\
&= \left\| \frac{V(x, \xi)}{V(1, \xi)} \hat{g}(\xi) - \frac{V(x, \xi)}{V(1, \xi)} \hat{g}_\delta(\xi) x_{\max} \right\|^2 \\
&\leq 2 \left\| \frac{V(x, \xi)}{V(1, \xi)} (\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi) x_{\max}) \right\|^2 + 2 \left\| \frac{V(x, \xi)}{V(1, \xi)} (\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi) x_{\max}) \right\|^2 \\
&= 2 \int_{|\xi| > \xi_{\max}} \left| \frac{V(x, \xi)}{V(1, \xi)} \hat{g}(\xi) \right|^2 d\xi + 2 \int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| \frac{V(x, \xi)}{V(1, \xi)} (\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi)) \right|^2 d\xi \\
&= 2 \int_{|\xi| > \xi_{\max}} \left| V(x, \xi) (1 + \xi^2)^{-\frac{p}{2}} (1 + \xi^2)^{\frac{p}{2}} \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \\
&\quad + 2 \int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} \left| \frac{V(x, \xi)}{V(1, \xi)} (\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi)) \right|^2 d\xi \\
&\leq 2C_2^2 e^{-A(x)\sqrt{2\xi_{\max}}} (\xi_{\max})^{-2p} E^2 + 2 \frac{C_2^2}{C_1^2} e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2\xi_{\max}}} \delta^2 \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned} \tag{III.4}$$

en raison (III.2) on a

$$\sqrt{2\xi_{\max}} = \frac{2}{A(1)} \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2C_2^2 e^{-2\frac{A(x)}{A(1)} \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right)} 2^{-2p} \left( \frac{1}{A(1)} \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) \right)^{-4p} E^2 \\
&= 2C_2^2 \left( \frac{E}{\delta} \right)^{-2\frac{A(x)}{A(1)}} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{4p\frac{A(x)}{A(1)}} E^2 2^{-2p} A(1)^{4p} \left( \frac{1}{\ln \left( \frac{E}{\delta} \right) + \ln \left( \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right)} \right)^{4p} \\
&= 2C_2^2 \left( \frac{A(1)}{\sqrt{2}} \right)^{4p} E^{2(1-\frac{A(x)}{A(1)})} \delta^{2\frac{A(x)}{A(1)}} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{4p\frac{A(x)}{A(1)}} \frac{1}{\left( \ln \left( \frac{E}{\delta} \right) \right)^{4p}} \left( \frac{\ln \left( \frac{E}{\delta} \right)}{\ln \left( \frac{E}{\delta} \right) + \ln \left( \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right)} \right)^{4p} \\
&= 2C_2^2 \left( \frac{A(1)}{\sqrt{2}} \right)^{4p} E^{2(1-\frac{A(x)}{A(1)})} \delta^{2\frac{A(x)}{A(1)}} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-4p(1-\frac{A(x)}{A(1)})} \left( \frac{\ln \left( \frac{E}{\delta} \right)}{\ln \left( \frac{E}{\delta} \right) + \ln \left( \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right)} \right)^{4p} \tag{III.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2 \frac{C_2^2}{C_1'^2} e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2\xi_{\max}}\delta^2} \\
&= 2 \frac{C_2^2}{C_1'^2} e^{\frac{[2(A(1)-A(x))]}{A(1)}} \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) \delta^2 \\
&= 2 \frac{C_2^2}{C_1'^2} \left( \frac{E}{\delta} \right)^{2(1-\frac{A(x)}{A(1)})} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-4p(1-\frac{A(x)}{A(1)})} \delta^2 \\
&= 2 \frac{C_2^2}{C_1'^2} E^{2(1-\frac{A(x)}{A(1)})} \delta^{2\frac{A(x)}{A(1)}} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-4p(1-\frac{A(x)}{A(1)})}
\end{aligned} \tag{III.6}$$

la combinaison de (III.5), (III.6) à (III.4) on obtient

$$\begin{aligned}
\|u(x, \cdot) - u_\delta(x, \cdot)\|^2 &\leq \left[ 2C_2^2 \left( \frac{A(1)}{\sqrt{2}} \right)^{4p} \left( \frac{\ln \left( \frac{E}{\delta} \right)}{\ln \left( \frac{E}{\delta} \right) + \ln \left( \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right)} \right)^{4p} + 2 \frac{C_2^2}{C_1'^2} \right] \\
&\quad \times E^{2(1-\frac{A(x)}{A(1)})} \delta^{2\frac{A(x)}{A(1)}} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-4p(1-\frac{A(x)}{A(1)})}
\end{aligned} \tag{III.7}$$

notez que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \frac{E}{\delta} \right)}{\ln \left( \frac{E}{\delta} \right) + \ln \left( \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right)} = 1$$

l'estimation (III.3) est obtenue, où

$$C = \left( 2C_2^2 \left( \frac{A(1)}{\sqrt{2}} \right)^{4p} + 2 \frac{C_2^2}{C_1'^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

la preuve est terminée.  $\diamond$

### Remarque

On prend  $p = 0$ , l'estimation (III.3) devient la même que dans (II.36) avec la stabilité de Hölder, dans ce cas lorsque  $x \rightarrow 0^+$  l'exactitude de ces deux solutions régularisées deviennent progressivement inférieures.

à  $x = 0$  les estimations deviennent

$$\begin{aligned}
\|u(0, t) - u_\delta(0, t)\| &= \|f(t) - u_\delta(0, t)\| \\
&\leq CE \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-4p} (1 + o(1)) \rightarrow 0 \quad \text{pour } \delta \rightarrow 0
\end{aligned}$$

où  $p > 0$  l'estimation (III.3) est aussi un ordre optimal pour une équation de la chaleur oblique [23].

Dans ce cas pour  $p = 0$  et  $a(x) = 1$ , on sait pour (III.7) que l'estimation (III.2) contient le résultat dans [7] pour l'équation de la chaleur oblique standard par la méthode spéciale de Fourier.

La méthode de Fourier et les résultats donnés ici pour la classe générale d'équation parabolique (II.1) apparaît pour être nouvelle.

### III.3 La méthode de régularisation de Fourier pour résoudre la flux de la chaleur pour un problème oblique

On étudie le problème (II.1) dans un cas particulier pour

$$a(x) = b(x) = c(x) = 1$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = u_{xx} + u_x + u, & x > 0, t > 0 \\ u(1, t) = g(t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.8})$$

Soient  $g(t)$  et  $g_\delta(t)$  de façon exacte et la donnée mesurée à  $x = 1$  de la solution  $u(x, t)$  respectivement, qui satisfont

$$\|g_\delta - g\| \leq \delta.$$

Où  $\|\cdot\|$  noté la norm  $L^2(\mathbb{R})$ .

il est facile de voir en prenant la transformation de fourier de la variable  $t$  dans (III.8) que la fréquence de domaine de solution  $u(x, t)$  du problème (III.8), si elle existe, elle satisfait au problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{u}_{xx}(x, \xi) + \hat{u}_x(x, \xi) + (1 - i\xi)\hat{u}(x, \xi) = 0 & x > 0, \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(1, \xi) = \hat{g}(\xi) & \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}|_{x \rightarrow \infty} & \text{borné} \end{array} \right. \quad (\text{III.9})$$

l'équation caractéristique de l'équation différentielle ordinaire dans (III.9) est

$$\lambda^2 + \lambda + (1 - i\xi) = 0$$

et par conséquent, les racines de cette équation sont

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 + i4\xi}}{2}.$$

Où  $\sqrt{-3 + i4\xi}$  indique la principale racine carrée de  $-3 + i4\xi$  et

$$\sqrt{-3 + i4\xi} = \sqrt[4]{9 + 16\xi^2} e^{i\frac{1}{2}\arg(-3+i4\xi)} \quad (\text{III.10})$$

car

$$\sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}\log(z)} = e^{\frac{\ln(r)}{n} + i\frac{\alpha}{n}}.$$

où

$$\log(z) = \ln(r) + i\alpha, \quad \alpha = \arg(z), r \text{ modul de } z$$

et

$$\tan(\theta) = \frac{-4\xi}{3}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Par conséquent (III.10) peut être écrite comme

$$\sqrt{-3 + i4\xi} = \sqrt[4]{9 + 16\xi^2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{III.11})$$

et il est facile de calculer que

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{9 + 16\xi^2} - 3}}{\sqrt{2} \sqrt[4]{9 + 16\xi^2}}, \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (\text{III.12})$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \delta \frac{\sqrt{\sqrt{9 + 16\xi^2} + 3}}{\sqrt{2} \sqrt[4]{9 + 16\xi^2}}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \delta = \text{sing}(\xi) \quad (\text{III.13})$$

Prenant note de la condition de la limite dans (III.9), nous pouvons obtenir que la solution unique du problème (III.9) est

$$\hat{u}(x, \xi) = e^{(1-x)\frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt[4]{9+16\xi^2} (\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}) \right]} \hat{g}(\xi) \quad (\text{III.14})$$

On note

$$\theta(\xi) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt[4]{9 + 16\xi^2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (\text{III.15})$$

ensuite, l'expression (III.14) peut être apportée comme

$$\hat{u}(x, \xi) = e^{(1-x)\theta(\xi)} \hat{g}(\xi) \quad (\text{III.16})$$

ou encore, la solution  $u(x, t)$  du problème (III.8) peut être exprimée comme

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} e^{(1-x)\theta(\xi)} \hat{g}(\xi) d\xi \quad (\text{III.17})$$

et naturellement, le flux de chaleur  $u_x$  a la représentation suivante

$$u_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} (-\theta(\xi)) e^{(1-x)\theta(\xi)} \hat{g}(\xi) d\xi \quad (\text{III.18})$$

il est facile de voir à partir de (III.16) qu'il détient,

$$\hat{f} = e^{\theta(\xi)} \hat{g} \quad (\text{III.19})$$

### III.3.1 Approximation de fourier pour le flux de chaleur et estimation d'erreur

Notant que  $\theta(\xi)$  a une partie réelle positive et  $u(x, \cdot), u_x(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$

Par conséquent  $\hat{g}(\xi)$  dans (III.17) et (III.18) tend vers zero que  $\xi \rightarrow +\infty$ , toute fois  $g_\delta(t)$  est une donnée mesurée, sa transformation de fourier  $\hat{g}_\delta(t)$  est simplement dans  $L^2(\mathbb{R})$ , telles que les intégrales dans (III.17) et (III.18) ne peuvent être pas convergentes.

Dans une façon naturelle afin de stabiliser le problème on élimine toutes les composantes de hautes fréquences et on considère à la place (III.17) et (III.18) seulement pour  $|\xi| \leq \xi_{\max}$ . Où  $\xi_{\max}$  est une constante positive, et on définit la régularisation de fourier de  $u(x, t)$  et  $u_x(x, t)$  comme

$$u^\delta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} e^{(1-x)\theta(\xi)} \hat{g}_\delta(\xi) x_{\max} d\xi \quad (\text{III.20})$$

et

$$u_x^\delta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -\theta(\xi) e^{i\xi t} e^{(1-x)\theta(\xi)} \hat{g}_\delta(\xi) x_{\max} d\xi \quad (\text{III.21})$$

respectivement,  $x_{\max}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[-\xi_{\max}, \xi_{\max}]$ .

Cette idée est également apparue dans [9] plus tôt pour un problème simple.

Maintenant, on considère l'approximation (III.21).

### ***Théorème 3.2***

Soit  $g(t)$ ,  $g_\delta(t)$  de façon exacte et la donnée mesurée à  $x = 1$ . respectivement, qui satisfait la condition (II.19). Soit  $u_x^\delta(x, t)$  définit par (III.21) l'approximation de régularisation de fourier pour flux de chaleur  $u_x(x, t)$  donnée par (III.18).

1. Si la formule (II.6) lorsque  $p = 0$ , et on sélectionne le paramètre de régularisation  $\xi_{\max}$  comme

$$\xi_{\max} = 2 \ln \left( \frac{E}{\delta} \right)^2 \quad (\text{III.22})$$

alors on détient l'estimation

$$\|u_x(x, \cdot) - u_x^\delta(x, \cdot)\| \leq E^{1-x} \delta^x \left[ \max \left\{ \frac{\sqrt{2}}{x}, \sqrt{2} \ln \frac{E}{\delta} + 2 \right\} + e^{\frac{3}{2}} \left( \sqrt{2} \ln \frac{E}{\delta} + 2 \right) \right] \quad (\text{III.23})$$

2. Si la formule (II.6) lorsque  $p > \frac{1}{2}$  et on suppose que

$$\xi_{\max} = 2 \left( \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) \right)^2 \quad (\text{III.24})$$

alors on détient l'estimation

$$\begin{aligned} \|u_x(x, \cdot) - u_x^\delta(x, \cdot)\| &\leq E^{1-x} \delta^x \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{2px} \left[ 2^{\frac{1}{2}-p} \left( \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) \right)^{1-2p} \right. \\ &\quad + 2^{1-p} \left( \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) \right)^{-2p} \\ &\quad \left. + e^{\frac{3}{2}} \left( \sqrt{2} \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) + 2 \right) \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right] \quad (\text{III.25}) \end{aligned}$$

### Preuve

D'après la formule de Parseval et (III.19) on a

$$\begin{aligned} \|u_x(x, \cdot) - u_x^\delta(x, \cdot)\| &= \|\hat{u}_x(x, \cdot) - \hat{u}_x^\delta(x, \cdot)\| \\ &= \|\theta(\xi) e^{(1-x)\theta(\xi)} \hat{g}(\xi) - \theta(\xi) e^{(1-x)\theta(\xi)} \hat{g}_\delta(\xi) x_{\max}\| \\ &= \|\theta(\xi) e^{(1-x)\theta(\xi)} [(\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi) x_{\max}) + (\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi)) x_{\max}]\| \\ &\leq \|\theta(\xi) e^{(1-x)\theta(\xi)} (\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi) x_{\max})\| + \|\theta(\xi) e^{(1-x)\theta(\xi)} (\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi)) x_{\max}\| \\ &= \left( \int_{|\xi| > \xi_{\max}} |\theta(\xi) e^{(1-x)\theta(\xi)} \hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} |\theta(\xi) e^{(1-x)\theta(\xi)} (\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi))|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{|\xi| > \xi_{\max}} |\theta(\xi) e^{-x\theta(\xi)} \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} |\theta(\xi) e^{(1-x)\theta(\xi)} (\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi))|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{|\xi| > \xi_{\max}} |\theta(\xi) e^{-x\theta(\xi)} (1 + \xi^2)^p (1 + \xi^2)^p \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} |\theta(\xi) e^{(1-x)\theta(\xi)} (\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi))|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{|\xi| > \xi_{\max}} |\theta(\xi) e^{-x\theta(\xi)}| |\xi|^{-p} \left( \int_{|\xi| > \xi_{\max}} (1 + \xi^2)^p |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \sup_{|\xi| \leq \xi_{\max}} |\theta(\xi) e^{(1-x)\theta(\xi)}| \left( \int_{|\xi| \leq \xi_{\max}} |\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On utilise le lemme suivant pour continuer notre travail.

**Lemme 3.3**

Soit  $\theta(\xi)$  est donné par (III.15). Ensuite, on obtient les inégalités suivantes

$$|e^{(1-x)\theta(\xi)}| \leq e^{\frac{3}{2}} e^{(1-x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}, \quad 0 \leq x \leq 1, \xi \in \mathbb{R} \quad (\text{III.26})$$

$$|e^{-x\theta(\xi)}| \leq e^{-x\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \quad (\text{III.27})$$

$$|\theta(\xi)| \leq \sqrt{|\xi|} + 2 \quad (\text{III.28})$$

**Preuve**

– On a

$$\begin{aligned} |e^{(1-x)\theta(\xi)}|^2 &= e^{(1-x)(\theta(\xi)+\bar{\theta}(\xi))} \\ &= e^{(1-x)\left[\sqrt[4]{9+16\xi^2}\cos\frac{\alpha}{2}+1\right]} \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{cases} \sqrt[4]{9+16\xi^2} \leq \sqrt{3} + 2\sqrt{|\xi|} \leq 2 + 2\sqrt{|\xi|} \\ \cos\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{9+16\xi^2}\cos\frac{\alpha}{2} + 1 &< \sqrt[4]{9+16\xi^2}\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ &< \sqrt{2} + \sqrt{2|\xi|} + 1 \end{aligned}$$

alors

$$\sqrt[4]{9+16\xi^2}\cos\frac{\alpha}{2} + 1 < 3 + \sqrt{2|\xi|}. \quad (\text{III.29})$$

Donc

$$\begin{aligned} |e^{(1-x)\theta(\xi)}|^2 &\leq e^{(1-x)(3+\sqrt{2|\xi|})} \\ &\leq e^3 e^{(1-x)\sqrt{2|\xi|}}, \quad 0 \leq x \leq 1, \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$|e^{(1-x)\theta(\xi)}| \leq e^{\frac{3}{2}} e^{(1-x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}, \quad 0 \leq x \leq 1, \xi \in \mathbb{R}.$$

Donc l'inégalité (III.26) est prouvée.

– Aussi sur la base de (III.29) on a

$$\begin{aligned} |e^{-x\theta(\xi)}|^2 &= e^{-x(\theta(\xi)+\bar{\theta}(\xi))} \\ &= e^{-x\left[\sqrt[4]{9+16\xi^2\cos\frac{\alpha}{2}}+1\right]} \\ &\leq e^{-x(3+\sqrt{2|\xi|})} \\ &\leq e^{-x\sqrt{2|\xi|}} \quad 0 \leq x \leq 1, \xi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ce qui implique

$$|e^{-x\theta(\xi)}| \leq e^{-x\sqrt{2|\xi|}} \quad 0 \leq x \leq 1, \xi \in \mathbb{R}$$

Donc l'inégalité (III.27) est prouvée.

– De plus, en utilisant (III.12), on a

$$\begin{aligned}
|\theta(\xi)| &= \left| \frac{1}{2} \left[ \sqrt[4]{9 + 16\xi^2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right) - 1 \right] + 1 \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{2} \left[ \sqrt[4]{9 + 16\xi^2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right) - 1 \right] \right| + 1 \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \sqrt[4]{9 + 16\xi^2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right) - 1 \right] \left[ \sqrt[4]{9 + 16\xi^2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \right) - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} + 1 \\
&= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{9 + 16\xi^2} + 1 - 2\sqrt[4]{9 + 16\xi^2} \cos \frac{\alpha}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + 1 \\
&= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{9 + 16\xi^2} + 1 - \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{9 + 16\xi^2} - 3} \right]^{\frac{1}{2}} + 1 \\
&\leq \frac{1}{2} \left[ 3 + 4|\xi| + 1 - \sqrt{2}(2\sqrt{|\xi|}) \right]^{\frac{1}{2}} + 1 \\
&\leq \frac{1}{2} [4 + 4|\xi|]^{\frac{1}{2}} + 1 \\
&\leq \frac{1}{2} [2 + 2\sqrt{|\xi|}] + 1 = 2 + \sqrt{|\xi|}
\end{aligned}$$

Donc

$$|\theta(\xi)| = 2 + \sqrt{|\xi|}$$

Donc l'inégalité (III.28) est prouvée et la démonstration du lemme est complète.  $\diamond$

On continue le travail. D'après (II.6),(II.19), (III.26), (III.27) et (III.28) on a

$$\begin{aligned}
\|u_x(x, \cdot) - u_x^\delta(x, \cdot)\| &\leq \sup_{|\xi| > \xi_{max}} |\theta(\xi) e^{-x\theta(\xi)}| |\xi|^{-p} \left( \int_{|\xi| > \xi_{max}} (1 + \xi^2)^p |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sup_{|\xi| \leq \xi_{max}} |\theta(\xi) e^{(1-x)\theta(\xi)}| \left( \int_{|\xi| \leq \xi_{max}} |\hat{g}(\xi) - \hat{g}_\delta(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \\
&\leq E \sup_{|\xi| > \xi_{max}} \left( (\sqrt{|\xi|} + 2) |\xi|^{-p} e^{-x\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \right) \\
&\quad + \delta \sup_{|\xi| \leq \xi_{max}} \left( e^{\frac{3}{2}} (\sqrt{|\xi|} + 2) e^{(1-x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \right) \tag{III.30}
\end{aligned}$$

**1<sup>er</sup> Cas**

$p = 0, 0 < x < 1$  et (III.22).

On note que

$$A(s) = (s^{\frac{1}{2}} + 2)e^{-x\sqrt{\frac{s}{2}}}, \quad s \geq 0.$$

ce qui implique

$$A'(\xi) = \frac{1}{2} \left[ (1 - \sqrt{2}x)s^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}x \right] e^{-x\sqrt{\frac{s}{2}}}$$

Pour  $A'(\xi) = 0$  on a

$$s = s_0 \left( \frac{2 - 2\sqrt{2}x}{\sqrt{2}x} \right)^2$$

et le point de valeur maximale unique de  $A(s)$ , donc

$$\sup A(s) = \begin{cases} A(s_0) = (s_0^{\frac{1}{2}} + 2)e^{-x\sqrt{\frac{s_0}{2}}} \leq (s_0^{\frac{1}{2}} + 1)e^{-x\sqrt{\frac{\xi_{\max}}{2}}} \\ \quad = \frac{\sqrt{2}}{x}e\sqrt{\frac{\xi_{\max}}{2}} \quad \text{pour } \xi_{\max} < s_0 \\ A(\xi_{\max}) = (\sqrt{\xi_{\max}} + 2)e^{-x\sqrt{\frac{\xi_{\max}}{2}}} \quad \text{pour } \xi_{\max} \geq s_0 \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

d'après (III.30), (III.31) et (III.22) on a

$$\begin{aligned} \|u_x(x, \cdot) - u_x^\delta(x, \cdot)\| &\leq E \max \left\{ \frac{\sqrt{2}}{x}, \xi_{\max}^{\frac{1}{2}} + 2 \right\} e^{-x\sqrt{\frac{\xi_{\max}}{2}}} + \delta e^{\frac{3}{2}} (\sqrt{\xi_{\max}} + 2) e^{(1-x)\sqrt{\frac{\xi_{\max}}{2}}} \\ &= E \max \left\{ \frac{\sqrt{2}}{x}, \sqrt{2\ln \frac{E}{\delta}} + 2 \right\} e^{-x\ln \frac{E}{\delta}} + \delta e^{\frac{3}{2}} \left( \sqrt{2\ln \frac{E}{\delta}} + 2 \right) e^{(1-x)\ln \frac{E}{\delta}} \\ &= E \max \left\{ \frac{\sqrt{2}}{x}, \sqrt{2\ln \frac{E}{\delta}} + 2 \right\} \delta^x E^{-x} + \delta e^{\frac{3}{2}} \left( \sqrt{2\ln \frac{E}{\delta}} + 2 \right) \left( \frac{E}{\delta} \right)^{1-x} \\ &= E^{1-x} \delta^x \left[ \max \left\{ \frac{\sqrt{2}}{x}, \sqrt{2\ln \frac{E}{\delta}} + 2 \right\} + e^{\frac{3}{2}} \left( \sqrt{2\ln \frac{E}{\delta}} + 2 \right) \right]. \end{aligned}$$

c'est l'estimation qu'on cherche.

**2<sup>ème</sup> Cas**

$p > \frac{1}{2}, 0 \leq x < 1$  et (III.24) au dessus.

Dans ce cas, à partir de (III.30) et (III.24) on a

$$\begin{aligned}
\|u_x(x, \cdot) - u_x^\delta(x, \cdot)\| &\leq E \sup_{|\xi| > \xi_{max}} \left( (\sqrt{|\xi|} + 2) |\xi|^{-p} e^{-x\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \right) \\
&+ \delta \sup_{|\xi| \leq \xi_{max}} \left( e^{\frac{3}{2}} (\sqrt{|\xi|} + 2) e^{(1-x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \right) \\
&\leq E |\xi_{max}|^{\frac{1}{2}-p} e^{-x\sqrt{\frac{|\xi_{max}|}{2}}} + 2E |\xi_{max}|^{-p} e^{-x\sqrt{\frac{|\xi_{max}|}{2}}} \\
&+ \delta e^{\frac{3}{2}} \left( |\xi_{max}|^{\frac{1}{2}} + 2 \right) e^{(1-x)\sqrt{\frac{|\xi_{max}|}{2}}} \\
&= E 2^{\frac{1}{2}-p} \left[ \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) \right]^{1-2P} \\
&+ 2^{1-p} E \left[ \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) \right]^{-2P} e^{-x \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right)} \\
&+ \delta e^{\frac{3}{2}} \left( \sqrt{2} \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) + 2 \right) e^{(1-x) \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right)} \\
&= E \left[ 2^{\frac{1}{2}-p} \left( \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) \right)^{1-2P} + 2^{1-p} \left( \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) \right)^{-2P} \right] \\
&\times \left( \frac{E}{\delta} \right)^{-x} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{+2Px} + \delta e^{\frac{3}{2}} \left( \sqrt{2} \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) + 2 \right) \\
&\times \left( \frac{E}{\delta} \right)^{1-x} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2P(1-x)} \\
&= E^{1-x} \delta^x \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{2px} \left[ 2^{\frac{1}{2}-p} \left( \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) \right) \right]^{1-2P} \\
&+ 2^{1-p} \left( \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) \right)^{-2P} \\
&+ e^{\frac{3}{2}} \left( \sqrt{2} \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) + 2 \right) \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2P} ]
\end{aligned}$$

C'est l'estimation qu'on cherche et la démonstration du théorème est complète. ◇

**Remarque**

1. L'estimation (III.23) il est évident que lorsque  $0 < x < 1$ ,  $\|u_x(x, \cdot) - u_x^\delta(x, \cdot)\| \rightarrow 0$  pour  $\delta \rightarrow 0$ .

Cependant, comme  $x \rightarrow 0$ , la précision de l'approximation de Fourier  $u_x^\delta(x, t)$  devient singulière.

Ceci est analogue au résultat obtenu par A. Carasso dans [4] en utilisant une méthode de régularisation de Tikhonov pour l'équation de la chaleur vers le côté.

2. Il est facile de voir à partir de l'estimation (III.25) que pour  $0 < x < 1$ , l'approximation de Fourier  $u_x^\delta(x, \cdot)$  converge vers  $u_x(x, \cdot)$  pour  $\delta \rightarrow 0$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

---

## Perspectives

Dans ce travail, on s'intéresse à régulariser le problème (III.8) par la méthode de régularisation de Fourier pour le paramètre de régularisation  $\xi_{\max} = 2 \ln \left( \frac{E}{\delta} \right)^2$  ou  $\xi_{\max} = 2 \left( \ln \left( \frac{E}{\delta} \left( \ln \frac{E}{\delta} \right)^{-2p} \right) \right)^2$ .

La question qui se pose. Peut-on régulariser ce problème par un autre paramètre et aussi dans le cas où les coefficients  $a(x)$ ,  $b(x)$  etc  $c(x)$  sont variables.

# Bibliographie

- [1] J. V. Beck, Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem, *Int. J Heat Mass Transfer* (13) (1970),703-716.
- [2] J. V. Beck, B. Blackwell, and S. R. Clair, *Inverse Heat Conduction : Ill-posed problems*, John Wiley and Sons, New York, 1985
- [3] F. Berntsson, A spectral method for solving the sideways heat equation, *Inverse Problems* (15) (1999) 891-906.
- [4] A. Carasso, Determining surface temperatures from interior observation, *SIAM J. Appl. Math.* 42(3)(1982), 558-574.
- [5] L. Eldén, Numerical solution of the sideways heat equation by difference approximation in time, *Inverse problems* 11(4) (1995), 913-923.
- [6] L. Eldén, solving an inverse heat conduction problem by "a method of lines," *J. Heat Transfer, Trans. ASME* (119) (1997),406-412.
- [7] L. Eldén, F. Berntsson, T. Reginska, Wavelet and Fourier methods for solving the sideways heat equation, *SIAM J. Sci.Comput.*21 (6) (2000) 2187-2205.
- [8] C. L. Fu, Simplified Tikhonov and Fourier regularization methods on a general sideways parabolic equation, *J. Comput. Appl. Math.* 167(2) (2004), 449-463.
- [9] C. L. Fu and C. Y. Qio, Wavelet and error estimation of surface heat flux, *J. Comput. Appl. Math.* 150(1) (2003), 143-155.
- [10] C. L. Fu, C. Y. Qio and Y. B. Zhu, A note on "Sideways heat equation and wavelets" and constant  $e^*$ , *Comput. Math. Appl.* (43)(2002) 1125-1134.
- [11] C. L. Fu, C. Y. Qio, and Y. B. Zhu, Wavelet regularization with error estimates on a general sideways parabolic equation, *Appl. Math. Lett.* 16(4)(2003), 475-479.
- [12] C. L. Fu, X. T. Xiong, H. F. Li and C. Y.Qio, and Y. B. Zhu, Wavelet and spectral regularization methods far a sideways parabolic equation, *Appl. Math. Comput.* 160(3)(2005), 881-908.

- 
- [13] C. L. Fu, C. Y. Qio, and Y. B. Zhu, Wavelet regularization for an inverse heat conduction problem, *J. Math. Anal. Appl.* 288(1) (2003), 212-222.
- [14] C. L. Fu, C. Y. Qio, Wavelet regularization for an ill-posed problem of the parabolic equation, *Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed.* 22(3) (2002), 361-372.
- [15] C. L. Fu, C. Y. Qio, and Y. B. Zhu, Wavelets and regularization of the sideways heat equation, *Comput. Math. Appl.* 46(5-6) (2003), 821-829.
- [16] D. D. Hào, H-J. Reinhardt, On a sideways parabolic equation, *Inverse Problems* (13) (1997) 297-309.
- [17] J. Hadamard, Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique, *Bull. Un. V. Princeton*, V. B. (1902).
- [18] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press (1923).
- [19] P. Knabner, S. Vessella, The optimal stability estimate for some ill-posed Cauchy problem for a parabolic equation, *Math. Methods Appl. Sci.* (10) (1988) 575-583.
- [20] D. A. Murio, *The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-posed Problems*, Wiley, New York, 1993.
- [21] T. Reginska, Sideways heat equation and wavelets, *J. Comput. Appl. Math.* 63(1-3) (1995), 209-214.
- [22] T. I. Seidman and L. Eldén, An "optimal filtering" method for the sideways heat equation, *Inverse problems* 6(4) (1990), 681-696.
- [23] U. Tautenhahn, Optimal stable approximations for the sideways heat equation, *J. Inverse Ill-posed problems*. 5(3) (1997), 287-307.
- [24] X. T. Xiong, C. L. Fu, and H. F. Li, Central difference schemes in time and error estimate on a non-standard inverse heat condition problem, *Appl. Math. Comput.* 157(1) (2004), 77-91.

## Abstract

In this works, we study a ill-posed parabolic problem.

We will propose two methods of regularization, the first one is due to TIKHONOV and the second one is due to FOURIER.

We will prove the convergence of these methods and we will give their error estimate.

## Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude d'un problème parabolique mal posé.

Deux méthodes de régularisation sont proposées, l'une de TIKHONOV et l'autre de FOURIER.

On montre la convergence des méthodes utilisées et des résultats d'estimations d'erreurs sont obtenues.

## ملخص

في هذا العمل سنقوم بدراسة مشكل مقعر غير موضوع جيدا. استعملنا طريقتان لتعديل المشكل، الأولى هي طريقة تيخونوف و الثانية هي طريقة فورييه. وسنبين تقارب الطريقتان المستعملتان و نتائج تقدير الأخطاء المحصل عليها.