



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématiques et numérique

Thème

Les polynomes de Lucas pour résoudre les équations
intégrales linéaires de Volterra

Présentée par: *MESSLMI Fatima Zahra*

Soutenu publiquement le: .. /06/2022.

Devant le jury composé de:

GASMI Abdelkader	Prof	Université de M'sila	Président
NADIR Mostefa	Prof	Université de M'sila	Encadreur
GAGUI Bachir	M.C.A	Université de M'sila	Examineur

Année universitaire : 2021/2022

Remerciement

Dieu tout puissant, merci de nous avoir donné le courage, la force, la patience et la détermination d'accomplir ce modeste travail.

*A notre Encadrant **Mostefa Nadir**.*

Nous avons remerciés d'avoir dirigé et veillé au bon déroulement de notre mémoire. Ce fut un grand plaisir de travailler sous votre encadrement. Nous vous exprimons notre gratitude et notre reconnaissance à travers ce travail pour l'attention, la patience et de l'implication dont vous avez fait preuve, merci pour les conseils dont nous avons pu bénéficier.

Nos remerciements s'adressent

Aux membres du jury (Président), (Rapporteur), (Examineur) et merci de nous faire honneur en faisant parti de ce jury. Nous vous exprimons reconnaissance et respect pour tout ce que vous nous avez donné afin de réaliser ce modeste travail.

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mes très chers parents **AMAR & SIHAM**, je ne pourrai jamais assez vous dire merci pour les conseils, le soutien, les encouragements

et pour les prières qui m'ont accompagnés tout au long de mes études. Ce travail est le fruit de tous vos sacrifices, que mieux que des mots

, ils traduisent tout l'amour que je ressens pour vous.

A mes chers frères : **ISHAK , MOHAMED & ABD ALAZIZ .**

A mon seul chère soeur : **SOUMIA.**

A toutes mes deux familles **MESSELMY & BOUKHABLA.**

A mes meilleurs amis : **HAYET & NASSEH.**

A tout mes collègues qui ont étudié avec moi de primaire à l'université.

&

la promotion de mathématiques **2022**

A toutes personnes que je t'aime.

Table des matières

Introduction Générale	1
I Chapitre1	3
0.1 Espaces Normés	4
0.1.0.1 Proposition	4
0.1.0.2 <i>Espaces vectoriel normé</i>	4
0.1.0.3 Suites de Cauchy	4
0.1.0.4 lemme 1	4
0.1.0.5 lemme 2	5
0.1.0.6 Espace complet	5
0.2 Espaces de Banach	5
0.2.0.7 Espaces produits	5
0.2.0.8 Normes équivalentes:	6
0.2.0.9 Espace Euclidien	6
0.2.0.10 Espace $L^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:	7
0.3 Espaces de Hilbert	7
0.3.0.11 Remarque1	7
0.3.0.12 Espace $C^l([a; b])$	8
0.4 Opérateurs continus	8
0.4.1 <i>Linéarité des opérateurs</i>	8
0.4.2 <i>Continuité des opérateurs linéaires</i>	8
0.4.3 <i>Espace isomorphes</i>	9
0.4.4 Espaces isométriques	9
0.4.4.1 <i>Dual topologique</i>	9
0.5 Opérateurs compacts	10

0.5.1	Opérateurs linéaires compacts	10
0.5.1.1	Propriétés des opérateurs compacts	10
II	Chapitre 2	14
0.6	Opérateur Intégral linéaire	15
0.6.1	Définition :(Opérateur Intégral linéaire)	15
0.6.2	Noyau d'un opérateur	15
0.6.3	Normes des opérateurs intégraux	15
0.6.4	Noyaux itérés	16
0.6.5	Equations intégrales:	16
0.6.5.1	Définition :(Equation intégral linéaire)	16
0.7	Equation de Fredholm et Volterra	17
0.7.1	les équations intégrales de Fredholm	17
0.7.2	Les équations intégrales de Volterra	18
0.8	Polynômes Orthogonaux	19
0.8.1	Définition:(Polynômes Orthogonaux)	19
0.8.2	Orthogonalité	19
0.8.2.1	Définition (Orthogonalité)	19
0.9	Etude de polynôme	19
0.9.1	Polynôme de Tchebychev :	19
0.9.2	Polynômes de Legendre :	21
0.9.3	Polynômes d'Hermite :	22
0.9.3.1	Quelques propriétés:	22
0.9.4	Polynômes de Laguerre	22
III	Chapitre 3	24
0.10	Aspects numérique	25
0.10.1	Méthode de collocation	25
0.10.2	Application la méthode de projection:	25
0.11	Méthode de Galerkin	26
0.11.1	Application de la méthode de collocation	26
0.11.2	Application de méthode de Galerkin	27
0.11.3	Solutions des équations intégrales linéaires de Volterra par la série de Lucas	29

0.12 Polynôme de Lucas	29
0.12.1 Quelques exemples pour le résultat numérique	30
0.12.1.1 Exemple 1	30
0.12.1.2 Exemple 2	31
0.12.1.3 Exemple 3	31

Introduction Générale

Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour investigation dans les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles, savoir impossible résoudre dans le passé. Ainsi, notons qu'il existe actuellement un grand nombre de méthodes numériques utilisées dans les différentes branches de la recherche scientifique, ce qui rend notre présentation ne se veut ni exhaustive, ni trop théorique. Cependant, le but de notre recherche et d'insister sur la pluridisciplinarité des méthodes rencontrées que l'on peut regrouper selon trois grands axes.

les principaux fondateurs de la théorie d'équations intégrales sont **Vito Volterra(1860,1940)**, et **Ivar Fredholm (1866-1927)**, ainsi que **David Hilbert (1862-1943)** et **Erhard Schmidt (b.1876)**. Volterra était le premier avoir identifier l'importance de la théorie et pour la considérer systématiquement, mais la contribution de Fredholm a permis le franchissement (**environ 1900**), (**plutt qu'évitant**), de la difficulté liée la disparition du déterminante des coefficients." néanmoins, la priorité de Volterra généralement aurait été reconnue si son premier papier sur le sujet (1896) avait été présenté durement. Mais Volterra au lieu de déduire ses résultats par les mêmes méthodes qu'il a employées pour leur découverte (qui étaient identiques ceux utilisées plus tard tellement avec succès par Fredholm) a simplement édité une vérification de sa solution.

Dans ce mémoire on étudie le sujet "les polynômes de Lucas pour résoudre les équations intégrales linéaires de Volterra."

La structure de mémoire est organisée comme suit:

chapitre1

Nous y rappelons quelques notions d'analyse fonctionnelle, des espaces fonctionnelles nécessaires, et la théorie des opérateurs continus et compacts avec ses propriétés.

chapitre2

On a commencé par les opérateurs intégraux .Ensuite, nous intéressons a deux types principaux des équations intégrales, de Fredholm et ceux de Volterra et l'étude de quelques polynômes.

chapitre3

Dans le dernier chapitre représente le but de ce mémoire, ou nous allons étudier l'aspect numérique de l'équation intégrale de Volterra (méthode de collocation & Galerkin) en utilisant les polynômes de Lucas avec application quelques exemples pour comparer entre la solution exacte et la solution approximative.

Partie I

Chapitre 1

Notions d'analyse fonctionnelle

Espace fonctionnelle

0.1 Espaces Normés

Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme notée $\|\cdot\|$.

0.1.0.1 Proposition

Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrisable.

0.1.0.2 *Espaces vectoriel normé*

Une norme sur un espace vectoriel E est une application notée $\|\cdot\|$ qui à tout vecteurs x associe un réel $\|x\|$ vérifiant :

1. (positivité) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ si et seulement si x est le vecteur nul.
2. (homogénéité) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in K$, $x \in E$.
3. (inégalité triangulaire) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $x, y \in E$.

Un espace E muni d'une norme est dit espace normé.

0.1.0.3 Suites de Cauchy

Soit x_n une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, on dit que la suite x_n est de Cauchy si, on a la relation suivante:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon, \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

0.1.0.4 lemme 1

Soit x_n une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ alors la suite x_n est bornée.

0.1.0.5 lemme 2

Soit x_n une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \| \cdot \|)$ contient une sous suite x_{n_k} convergente vers x alors la suite x_n est aussi convergente vers le même élément x .

0.1.0.6 Espace complet

Un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy x_n d'éléments de E est une suite convergente dans E . Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

implique l'existence d'un élément $x \in E$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

0.2 Espaces de Banach

On appelle espace de Banach $(E, \| \cdot \|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.

0.2.0.7 Espaces produits

Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , alors l'espace produit $E \times F$ défini par

$$G = E \times F = \{(x, y), \text{ tels que } x \in E \text{ et } y \in F\},$$

est un espace vectoriel normé sur K , par l'une des normes produits suivantes:

- $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F \quad \forall x \in E, y \in F.$
- $\|(x, y)\|_p = \left(\|x\|_E^p + \|y\|_F^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall x \in E, y \in F ; 1 < p < \infty.$
- $\|(x, y)\|_\infty = \max(\|x\|_E, \|y\|_F) \quad \forall x \in E, y \in F.$

0.2.0.8 Normes équivalentes:

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \| \cdot \|_1)$ et $(E, \| \cdot \|_2)$, on dit que les deux normes sont équivalentes si on peut trouver deux constantes positives α et β , telles que:

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes **si et seulement si**, l'application identité de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces normés

$$(E, \| \cdot \|_1) \text{ et } (E, \| \cdot \|_2).$$

Théorème 1

Dans un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 1

Tout sous espace F de dimension finie d'un espace normé $(E, \| \cdot \|)$ est complet

En effet, F est de dimension finie toutes ses normes sont équivalentes. De plus, F est isomorphe à \mathbb{K}^n qui est complet et par conséquent F est complet dans E .

Corollaire 2

Tout sous espace F complet d'un espace normé $(E, \| \cdot \|)$ est fermé

En effet, soit $x_0 \in F$ alors il existe une suite x_n d'éléments de F convergente vers x_0 dans E , la suite x_n convergente est de Cauchy dans F complet ce qui implique que la suite x_n est convergente dans F , la limite étant unique. D'où $x_0 \in F$. Autrement dit, $F = \bar{F}$ ou encore F fermé.

Corollaire 3

Tout sous espace F de dimension finie d'un espace normé $(E, \| \cdot \|)$ est fermé.

En effet, il est clair que l'espace F de dimension finie est complet et par conséquent F est fermé.

Théorème 2

Soient E et F deux espaces normés. L'ensemble $L(E, F)$ de tous les opérateurs A linéaires continus sur E dans F muni de la norme $\|A\|$ est un espace normé.

0.2.0.9 Espace Euclidien

un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien ou préhilbertien, on introduit la norme définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

0.2.0.10 Espace $L^2(a, b)$:

On dit qu'une fonction f est de carré intégrable sur $[a, b]$ si l'intégrale:

$$\int_a^b f^2(x) < \infty$$

L'ensemble de toutes les fonctions carré intégrable sur $[a, b]$ sera noté $L^2([a, b])$.

0.3 Espaces de Hilbert

On appelle espace de Hilbert tout espace euclidien H complet au sens de la métrique associée à sa norme.

$$p(f, g) = \|f - g\|.$$

0.3.0.11 Remarque 1

Généralement l'espace H est séparable est de dimension infinie, en d'autres termes, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans H et pour tout entier

$n \in \mathbb{N}$, il existe n vecteurs dans H linéairement indépendants.

Théorème 1

Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux.

Théorème 2 (Riesz-Fischer)

Soit $\{\varphi_k\}$ un système orthonormé dans un espace de Hilbert H , et soient les valeurs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ telles que la série $\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2$ soit convergente, alors on peut trouver un vecteur $f \in H$ tel que

$$\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle, \forall i = 1, 2, \dots$$

et de plus, on a

$$\sum_{i=1}^n |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \|f\|^2$$

0.3.0.12 Espace $C^l([a; b])$

Les éléments de cet espace sont tous les fonctions définies sur $[a; b]$ et qui ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre l . La norme d'une élément $f(x) \in C^l([a; b])$ est défini par:

$$\|f\| = \sum_{k=0}^l \max_{a \leq x \leq b} |f^k(x)|$$

0.4 Opérateurs continus**0.4.1 Linéarité des opérateurs**

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :

- *Condition additive*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

- *Condition homogène*

$$\varphi \in E, \lambda \in K = (K \text{ ou } C), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

0.4.2 Continuité des opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la propriété suivante

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A_{n \rightarrow \infty}(\lim x_n) = A(x_0).$$

théorème 1

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F , est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G .

théorème 2

Un opérateur linéaire A est continu, **si et seulement si**, il est borné.

0.4.3 Espace isomorphes

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, E et F sont dits isomorphes, s'il existe un opérateur homéomorphe A défini sur E dans F , c'est à dire

- A est bijectif sur E dans F .
- A et A^{-1} sont des opérateurs continus.

0.4.4 Espaces isométriques

Les espaces E et F sont dits linéairement isométriques, s'il existe une isométrie A appliquant E dans F , c'est à dire,

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E.$$

Remarque 1

La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

théorème 3

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire

Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé E , alors F est complet dans E .

théorème 4

Soient E et F deux espaces normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ de tous les opérateurs linéaires continus sur E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires sur E dans F de plus, $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme $\|A\|$ est un espace normé.

théorème 5

Soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

0.4.4.1 Dual topologique

On appelle dual topologique de l'espace E et que l'on note E^* l'espace de Banach des fonctionnelles linéaires continues $\mathcal{L}(E, K)$.

0.5 Opérateurs compacts

0.5.1 Opérateurs linéaires compacts

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans E à un ensemble relativement compact $A(\Omega)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $A(\Omega)$ est compact.

0.5.1.1 Propriétés des opérateurs compacts

Nous considérerons des opérateurs compacts qui cartographient l'espace sur lui-même .qui s'exprime par le théorème suivantes.

Théorème 1 (critère de compacité)

Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est compact **si et seulement si** pour toute suite bornée Φ_n de E , la suite $A\Phi_{nk}$ contient une sous suite convergente de F .

Démonstration

soit Φ_n une suite bornée dans E , puisque l'opérateur A est compact, alors l'ensemble $\langle A\Phi_n \rangle$ est relativement compact dans F ou cette propriété montre que $A\Phi_n$ contient une sous-suite convergente .

Inversement, considérons tout sous -ensemble bornée Ω dans E et soit Ψ_n quelconque suite en $A(\Omega)$. Alors il existe une suite bornée Φ_n dans Ω tel que

$$\Psi_n = A\Phi_N$$

par hypothèse, $\Psi_n = A\Phi_N$ contient une sous suite convergente Ψ_N en F . Ainsi $A(\Omega)$ est relativement compact, car pour toute suite bornée Ψ_N dans $A(\Omega)$ il existe une sous-suite convergente Ψ_N en F . Autrement dit, pour toute ensemble non bornée E , l'ensemble $A(\Omega)$ est relativement compact dans F .

Alors, A est compact.

Théorème 2

Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts A_1 et A_2 est un opérateur compact pour toute scalaire α et β .

Démonstration

Soit Φ_N une suite borné de E et soit $A\Phi_N$ une suite de F , alors

$$A\Phi_1(x) = \alpha A_1(x) + \beta A_2(x), \text{ avec } \Phi_n \in E; n \in N.$$

Les opérateurs A_1 et A_2 étant compacts, on peut extraire de $A_1\Phi_N$ et de $A_2\Phi_N$ deux sous suites convergentes qui donne par leur somme une sous suite convergente de $A\Phi_N$. donc, A est compact.

Théorème 3

Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Démonstration

Soit Φ_n un suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné la suite $B\Phi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite $A(B\Phi_{nk}(x))$ de $A(B\Phi_n(x))$ qui converge.

ce qui implique que AB est compact.

D'autres part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\Phi_n(x)$ une sous suite convergente $B\Phi_{nk}(x)$. , et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\Phi_{nk}(x))$ converge.

ce qui implique que AB est compact.

Théorème 4

Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit A_n une suite d'opérateurs compacts de E dans F , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| A_n - A \| = 0.$$

Alors, A est compact.

Théorème 5

Soit A un opérateur borné de E dans F , à image $A(E)$ de dimension finie $\dim A(E) < \infty$.

Alors , A est compact.

Théorème 6

L'opérateur identique I de E dans E est compact **si et seulement si** E est de dimension finie.

Démonstration

Soit Φ_1 un élément de E , tel que $\| \Phi_1 \| = 1$, alors $F1 = \text{span} = \langle \Phi_1 \rangle$ est un sous espace fermé de E car $G1$ est de dimension finie. D'après le lemme1, il existe un élément $\Phi_2 \in E$, tel que $\| \Phi_2 \| = 1$ et $\| \Phi_1 - \Phi_2 \| \geq \frac{1}{2}$. Prenons une deuxième fois le sous espace fermé $F2 = \text{span} \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$, il existe

alors un élément $\Phi_3 \in E$ avec $\|\Phi_2\| = 1$, $\|\Phi_1 - \Phi_2\| \geq \frac{1}{2}$. On répète la même procédure jusqu'à l'obtention d'une suite Φ_n vérifiant $\|\Phi_n\| = 1$ et $\|\Phi_m - \Phi_n\| \geq \frac{1}{2}$, pour tout $m \neq n$.

Il est à remarquer que cette suite Φ_n est bornée mais elle ne contient aucune sous suite convergente. C.Q.F.D.

Théorème 7

Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fautive.

Théorème 8

L'opérateur intégral A de $C(\Omega)$ dans $C(\Omega)$

$$A\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y)dy, x, y \in \Omega$$

à noyau continu $k(x, y)$ est un opérateur compact.

Démonstration

soit G un $C(\Omega)$ alors pour toute $\varphi \in G$; il existe $M > 0$, tel que $\|\varphi\| \leq M$. de plus, for all x and $x \in G$, we get

$$\begin{aligned} |A\varphi(x)| &= \left| \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y)dy \right| \\ &\leq \max_{x, y \in \Omega} k(x, y) M \end{aligned}$$

cela veut dire que $A(E)$ est borné.

L'opérateur $k(x; y)$ est uniformément continu sur le compact $\Omega \times \Omega$, d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, z \in \Omega, |x - y| < \delta \Rightarrow |k(x; z)k(y; z)| < \frac{\varepsilon}{M \text{mes}(\Omega)}$$

alors, pour $\varphi \in G$ et $x, y \in \Omega$; avec $|x - y| < \delta$

$$\begin{aligned} |A\varphi(x)A\varphi(y)| &= \left| \int_{\Omega} (k(x, z) - k(y, z))\varphi(z)dz \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{M \text{mes}(\Omega)} M \text{mes}(\Omega) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où $A(E)$ est relativement compact d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli.

Alors, A est compact.

Théorème 9

L'opérateur intégral A de $C(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.

Théorème 10

L'opérateur intégral A de $C(\partial\Omega)$ dans $C(\partial\Omega)$ à noyau continu ou noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur $C(\partial\Omega)$ si $\partial\Omega$ est de classe C^1 .

Partie II

Chapitre 2

0.6 Opérateur Intégral linéaire

0.6.1 Définition : (Opérateur Intégral linéaire)

soit E un espace de Banach. L'opérateur A défini par

$$\begin{aligned} A : E &\rightarrow E \\ \varphi &\longrightarrow A\varphi \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} A\varphi : [a, b] &\rightarrow C \\ x \rightarrow (A\varphi) &= \int_{\Omega} k(x, t) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

et Ω est un intervalle fermé bornée de $R = (\Omega = [a, b] \text{ ou } [a, x])$, est appelé opérateur intégral linéaire à noyau k

0.6.2 Noyau d'un opérateur

La fonction mesurable $K(x, y)$ est dite noyau de l'opérateur intégral A .

0.6.3 Normes des opérateurs intégraux

Soit A un opérateur intégral défini sur $L_P(G_1)$, alors pour tout p et q conjugués ($p + q = 1$), avec ($1 \leq p, q \leq \infty$), la norme de l'opérateur A est

donnée par

$$\left(\int_{G_1} \left(\int_{G_2} |K(x, y)|^p dy \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ Pour } 1 < p < \infty.$$

$$\| A \|_P = \int_{G_1} \text{ess sup}_{G_2} \int = \frac{1}{2} \text{ess sup}_{G_2} \int |K(x, y)| dx, \text{ pour } p = 1.$$

$$\text{ess sup}_x \int_{G_2} |K(x, y)| dy, \text{ pour } p = 1$$

où $k(x, y)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$.

Remarque

L'opérateur intégral produit $A^2\varphi(x) = A(A\varphi(x))$ admet un noyau $k_2(x, y)$ donné par:

$$k_2(x, y) = \int_E k(x, z)k_2(z, y)dz.$$

0.6.4 Noyaux itérés

Le noyau $k_n(x, y)$ de l'opérateur intégral produit $A^n\varphi(x) = A(A^{n-1}\varphi(x))$ est dit noyau itéré du noyau $k(x, y)$, donné par:

$$k_n(x, y) = \int k(x, z)k_{n-1}(z, y)dz.$$

0.6.5 Equations intégrales:

0.6.5.1 Définition :(Equation intégral linéaire)

on appelle équation intégrale linéaire , une équation fonctionnelle de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} k(x, t) \varphi(t) dt$$

où φ est l'inconnu, $k(x, t)$ appelé le noyau de l'équation intégrale et $f(x)$ sont des fonctions données.

$$\Omega = ([a, b], [a, x]).$$

λ paramètre.

ou sous forme d'opérateurs:

$$(I - \lambda A) \varphi(x) = f(x)$$

où I est l'application identité.

0.7 Equation de Fredholm et Volterra

une équation dans laquelle la fonction inconnue d'une plusieurs variables figure sous le signe intégral est dite équation intégrale. Cette définition générale tient compte de beaucoup de formes naturellement issues de la modélisation des différents problèmes de la mécanique et la physique mathématique ou par remaniement d'une importante classe problème formulé auparavant par des opérations différentiels, notamment les problèmes aux limites et ceux de Cauchy.

0.7.1 les équations intégrales de Fredholm

la forme standard des équations intégrales linéaires de Fredholm est

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt \quad \dots\dots\dots (*)$$

ou les limites de l'intégration sont des constantes .

si la fonction $h(x) = 0$,alors l'équation s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt = 0,$$

cette équation plus simple est appelée l'équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce .

si $h(x) = 1$, alors l'équation (*)devient tout simplement

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \varphi(t) dt$$

Cette équation plus simple est appelée l'équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

exemple 1

1. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = \int_0^1 (x-t) \varphi(t) dt$ est une équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce .

2. $\varphi(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} - \int_0^1 (x-t) \varphi(t) dt$ est une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce .

0.7.2 Les équations intégrales de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans lesquelles le noyau k est tel que :

$$k(x, t) = 0 \text{ pour } t > x$$

avec la limite d'intégration $b = x$.

La forme standard des équations intégrales linéaires de Volterra sont de la forme:

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt$$

Comme dans les équations de Fredholm, les équations intégrales de Volterra sont de deux types.

Si la fonction $k(x) = 1$, alors l'équation (*) devient tout simplement

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt$$

est s'appelle l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.

Si la fonction $k(x) = 0$, alors l'équation (*) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = 0$$

cette équation est appelée l'équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

Exemple 1

1. $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{1}{1+x^2} \varphi(t) dt$ est une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.

2. $x = \int_0^x \exp(x-t) \varphi(t) dt$ cette équation est appelée l'équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

0.8 Polynômes Orthogonaux

0.8.1 Définition:(Polynômes Orthogonaux)

On dit qu'une suite de polynômes $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$, où $P_n(x)$ est de degré n , est orthogonale si

$$(P_n, P_m) = \int_a^b P_n(x)P_m(x)dx = 0, \forall n \neq m$$

Une telle suite forme évidemment une base orthogonale de l'espace des polynômes et il est bien connu qu'étant donné un produit scalaire, nous pouvons en construire une, en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique des polynômes, à savoir $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$.

0.8.2 Orthogonalité

0.8.2.1 Définition (Orthogonalité)

on dit que la famille de polynômes $(\varphi_i)_{i \geq 0}$ à coefficients réels est une famille de polynômes orthogonaux sur $[a, b]$ si quelque soit $i \neq j$ on a

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0.$$

généralement on dit que la famille de polynômes $(\varphi_i)_{i \geq 0}$ est une famille de polynômes orthogonaux sur $[a, b]$ avec poids w si

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_w = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)w(x)dx = 0, \forall i \neq j$$

0.9 Etude de polynôme

0.9.1 Polynôme de Tchebychev :

En mathématique, un polynôme de Tchebychev est un terme de l'une des deux suites de polynômes orthogonaux particulières réelles a la formule de **Moivre**. Il existe

deux suites de polynômes de Tchebychev ,l'un nommée polynôme de Tchebychev de première espèce et notée T_n et l'autre nommée polynôme de Tchebychev de seconde espèce est notée U_n ,Ces les deux cas ,l'entier naturel n correspond au degré .

Ces deux suites peuvent être définies par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

et les deux premiers termes:

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ pour la suite } T$$

$$U_0 = 1, U_1 = 2X \text{ pour la suite } U$$

Chacun este suite de polynômes orhogonaux par rapport a un produit scalaire de fonctions , associé a la fonction poids $w(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ sur $[1, 1]$ ces polynômes constituent un cas pariculier des polynômes ultrasphériques

une définition alternative de ces polynômes peut être donnée par les relations trigonométriques:

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta), \text{ soit } T_n(x) = \cos(n \arccos x) \text{ et } U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$$

ce qui revient ,par exemple, a considérer $T_n(\cos \theta)$ comme le développement de $\cos(n\theta)$ sous forme de polynôme en $\cos \theta$.

contrairement a d'autre famille de polynômes orthogonaux ,tels ceux de *Legendre* ,*d'Hermite* ou *Laguerre*, les polynômes de Tchebychev n'ont pratiquement pas d'application directe en physique. En revanche, ils sont particulièrement utiles en analyse numérique pour *l'interpolation polynomiale* de fonctions. En premier lieu, en ce qui concerne le choix des points d'interpolation , comme les zéros de $T_n(x)$ ou abscisses de Tchebychev ,en vue de limiter le *phénomène de Runge*.Egalement, ils constituent une base canonique X^n de $R[X]$ des polynômes de Lagrange ,ce qui permet d'améliorer sensiblement notamment utilisés pour le calcul ephémérides astronomiques.

Equation différentielle dans les deux espèces:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, y = T_{n-1}(x)$$

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0, y = U_n(x)$$

Norme :

$$h_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n \neq 0. \\ \pi & n = 0. \end{cases}$$

$$h_n = \frac{\pi}{2}$$

0.9.2 Polynômes de Legendre :

En mathématique et en physique théorique; les polynômes de Legendre constituent l'exemple le plus simple d'une suite de polynômes orthogonaux. Ce sont des solutions polynomiale $P_n(x)$, sur l'intervalle $X \in [-1, 1]$ de l'équation différentielle de Legendre

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] + n(n+1) P_n(x) = 0$$

dans le cas particulier ou le paramètre n est un entier.

De façon équivalente, les polynômes de Legendre sont les fonctions propres de l'endomorphisme de $R[x]$ défini par:

$$P \rightarrow U(P) = \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right]$$

Pour les valeurs propres $-n(n+1)$, $n \in N$.

Ces polynômes orthogonaux ont de nombreuses applications, par exemple pour la décomposition d'une fonction en série de polynômes de Legendre, qu'en physique ou l'équation de Legendre apparaît naturellement lors de la résolution des équations de Laplace ou de Helmholtz en coordonnées sphériques.

Norme:

$$h_n = \frac{2}{2n+1}$$

0.9.3 Polynômes d'Hermite :

Les Polynômes de base d'Hermite $H_n(x)$ de degré n et sont définis par:

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} (\exp(-x^2)), n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

On trouve ainsi les premiers de ces polynômes sur l'intervalle $[-1; 1]$:

$$H_0(x) = 1.$$

$$H_1(x) = 2x.$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

Norme:

$$h_n = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

0.9.3.1 Quelques propriétés:

1. La propriété de la relation de récurrence :

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)$$

2. L'équation différentielle:

$$H_n''(x) - 2x H_n'(x) + 2n H_n(x) = 0$$

3. Aussi est une base orthonormée sur $L_2([-1; 1], \exp(-x^2)dx)$.

0.9.4 Polynômes de Laguerre

En mathématique, les polynômes de Laguerre, nommée d'après Edmond Laguerre, sont les solutions normalisées de l'équation de Laguerre :

$$x y'' + (1-x) y' + n y = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 et se réécrit sous la forme de *Sturm-Liouville* :

$$\frac{d}{dx}(x \exp(-x) \frac{dy}{dx}) = n \exp(-x)y$$

Cette équation des solutions non singulières seulement si n est un entier positif. Les solutions L_n forment une suite de polynômes orthogonaux dans $L^2(R^+, e^{-x}dx)$, et la normalisation se fait en leur imposant d'être de norme 1, donc ce former une famille orthonormale. Ils forment même une base hilbertienne de $L^2(R^+, e^{-x}dx)$.

Cette suite de polynômes peut être définie par *la formule de Rodrigues*:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

la suite des polynômes de Laguerre est une suite de *Sheffer*.

les polynômes de Laguerre apparaissent mécanique quantique dans la partie radiale de la solution de l'équation de *Schrodinger* pour un atome à un électron .

les coefficients dominants de L_n est $(-1)^n n!$, obtenant ainsi des *polynômes unitaires* .

Norme:

$$h_n = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}$$

Partie III

Chapitre 3

0.10 Aspects numérique

Il y'a plusieurs méthodes numériques pour résoudre des équations intégrales linéaires de Volterra de second espèce comme: (la méthode de Simpson, la méthode des Trapèze ...). Dans ce chapitre on va étudier la méthode de collocation et la méthode de Galerkin.

0.10.1 Méthode de collocation

0.10.2 Application la méthode de projection:

Pour résoudre l'équation de Volterra de deuxième espèce on va choisir des points distincts $x_1, x_2, \dots, x_{kn} \in D$ telle que

$$r_n(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, kn$$

ki vont déterminer les coefficients $\{c_1, \dots, c_{kn}\}$ comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{kn} C_j \left\{ \lambda \Phi_j(x_i) + \int_D k(x_i, t) \Phi_j(t) dt \right\} = f(x_i), \quad i = 1, \dots, kn$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{kn} C_j \lambda \Phi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{kn} \int_D k(x_i, t) \Phi_j(t) dt + f(x_i), \quad i = 1, \dots, kn$$

Nous introduisons un opérateur de projection $P_n : V \rightarrow V_n$ avec $V = C(D)$

Soit $u \in C(D)$ on définit P_n comme élément de V_n d'interpolation de u aux points $\{x_1, \dots, x_{kn}\}$

$$P_n u(x) = \lambda u_n(x) = \lambda \sum_{j=1}^{kn} C_j \Phi_j(x)$$

donc

$$P_n u(x_i) = \sum_{j=1}^{kn} \int_D k(x_i, t) \Phi_j(t) dt + f(x_i) = \sum_{j=1}^{kn} \lambda C_j \Phi_j(x_i), \quad i = 1, \dots, kn$$

en posant $\alpha_j = \lambda C_j$ on peut écrire :

$$P_n u(x_i) = \sum_{j=1}^{kn} \alpha_j \Phi_j(x), x \in D$$

les coefficients $\{\alpha_j\}$ sont déterminés par la résolution du système

$$\sum_{j=1}^{kn} \alpha_j \Phi_j(x_i) = u(x_i), i = 1, \dots, kn$$

Ce système admet une solution unique si

$$\det[\Phi_j(x_i)] = \det[x_i^j] \neq 0.$$

Cette condition signifie que les fonctions $\{\Phi_1, \dots, \Phi_{kn}\}$ constituent un système linéairement indépendant.

0.11 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode très générale. L'idée de la méthode est la suivante : partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie.

La méthode de Galerkin consiste donc, à chercher une approximation de la solution sur une base d'un espace d'approximation choisi.

0.11.1 Application de la méthode de collocation

soit $V = L^2(D)$ l'espace d'Hilbert des fonctions de carré intégrable sur D .

on note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire sur V .soit $\{\Phi_i\}$ un système fonctions orthogonales telle que

$$\langle r_n, \Phi_i \rangle = 0, i = 1, \dots, kn$$

comme

$$r_n(x) = \sum_{j=1}^{kn} \left[C_j \left\{ \lambda \Phi_j(x_i) + \int_D k(x_i, t) \Phi_j(t) dt \right\} \right] - f(x)$$

donc

$$\langle r_n, \Phi_i \rangle = \sum_{j=1}^{kn} \left[C_j \left\{ \lambda \Phi_j(x_i) + \int_D k(x_i, t) \Phi_j(t) dt \right\} \right] - \langle f, \Phi_i \rangle = 0, (i = 1, \dots, k_n)$$

C'est le système linéaire de Galerkin .il suffit de déterminer les coefficients C_i .

0.11.2 Application de méthode de Galerkin

soit a chercher une solution approchée de l'équation intégrale

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x, t) u(t) dt = f(x)$$

par la méthode de Galerkin .On choisit un système de fonctions $\{\Phi_j\}$ linéairement indépendantes dans $V = L^2(D)$.on cherche une solution approché sous la forme

$$u(x) = \frac{1}{\lambda} \left[f(x) + \sum_{j=1}^n A_j \Phi_j(x) \right]$$

On a le résidu

$$r_n(x) = \lambda u(x) - \int_a^b k(x, t) u_n(t) dt - f(x)$$

donc

$$r_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n A_j \Phi_j(x) - \frac{1}{\lambda} \int_a^b k(x, t) \left[f(t) + \sum_{j=1}^n A_j \Phi_j(t) \right] dt - f(x)$$

d'ou

$$r_n(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n A_j \left[\lambda \Phi_j(x) - \int_a^b k(x, t) \Phi_j(t) dt \right] - \frac{1}{\lambda} \int_a^b k(x, t) f(t) dt$$

d'après

$$\langle r_n, \Phi_i \rangle = \langle \lambda r_n, \Phi_i \rangle = \int_a^b \lambda r_n(x) \Phi_i(x) dx = 0.$$

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n A_j \left[\lambda \Phi_j(x) - \int_a^b k(x,t) \Phi_j(t) dt \right] - \int_a^b k(x,t) f(t) dt \right) \Phi_i(x) dx = 0.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n A_j \left(\lambda \int_a^b \Phi_j(x) \Phi_i(x) dx - \int_a^b \int_a^b k(x,t) \Phi_j(t) \Phi_i(x) dt dx \right) \\ = \int_a^b \int_a^b k(x,t) f(t) \Phi_i(x) dt dx. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} = \int_a^b \Phi_j(x) \Phi_i(x) dx \quad , \quad \beta_{ij} = \int_a^b \int_a^b k(x,t) \Phi_j(t) \Phi_i(x) dt dx. \\ \gamma_{ij} = \int_a^b \int_a^b k(x,t) f(t) \Phi_i(x) dt dx. \end{aligned}$$

On obtient le système suivant:

$$\sum_{j=1}^n A_j (\lambda \alpha_{ij} - \beta_{ij}) = \gamma_{ij} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad ((\star))$$

Par conséquent, les coefficients $A_j, j = 1, \dots, n$, se définissent à partir de résolution du système((\star))
si

$$D(\lambda) = \det (\lambda \alpha_{ij} - \beta_{ij}) \neq 0$$

Le système. ((\star)) détermine de façon unique les coefficients $\{A_j\}$.

0.11.3 Solutions des équations intégrales linéaires de Volterra par la série de Lucas

Dans ce travail, nous considérons l'approximation de la série de Lucas pour la solution de ces équations intégrales, certainement cette technique nous conduit aux meilleures approximations

$$u(x) - \int_a^b k(x,t) u(t) dt = f(x)$$

les fonctions $f(x)$ et $k(x;t)$ sont donnée et continues, la fonction $u(t)$ doit être déterminée comme fonction continue dans Ω . La recherche de la fonction approximative u_n de la fonction u est donnée par :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k C_k(x) = u(x) \quad **$$

ou l'expression (**) décrit la série tronquée de Lucas de la solution de l'équation (1), avec les fonctions $\{C_k\}_{0 \leq k \leq n}$ représentent les pilonnes de Lucas et $\{\alpha_k\}_{0 \leq k \leq n}$ les coefficients.

En d'autres termes, nous pouvons écrire :

$$r_n(x) = u(x) - \int_a^b k(x,t) u_n(t) dt - f(x).$$

$$r_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k C_k(t) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b k(x,t) C_k(t) dt - f(x)$$

$$r_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(C_k(t) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b k(x,t) C_k(t) dt \right) - f(x), x \in \Omega$$

0.12 Polynôme de Lucas

Les Polynômes de Lucas $C_n(x)$ sont définis par la relation de récurrence suivante:

$$C_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} x^{n-2j}$$

Les Coefficients rationnels de polynome de Lucas $C_n(x)$ est:

n	C_n
1	2
2	x
3	$x + 2$
4	$x^2 + 3x$
5	$x^3 + 4x^2 + 2$
6
.

Tableau. présente coefficients rationnels.

0.12.1 Quelques exemples pour le résultat numérique

0.12.1.1 Exemple1

Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra

$$\varphi(x) - \int_0^x (x + 6(x - y)) - 4(x - y)^2 \varphi(y) dy = -4x^2 - x - 2 + (3 - x) \exp(x)$$

la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par:

$$\varphi(x) = \exp(x)$$

:

La solution approximative $\varphi_n(x)$ de $\varphi(x)$ est obtenue par la méthode tronquée de la série de Lucas.

Tableau 1.

Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans **l'exemple 1** dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 10$ est calculée

x	solution exacte φ	solution approx φ_n	erreur	erreur[5]
0.000000	1.000000e+000	-1.000000e+000	0.0e+000	3.4e-002
0.200000	1.221403e+000	1.221402e+000	5.5e-007	6.7e-003
0.400000	1.491825e+000	1.491823e+000	1.3e-006	1.7e-002
0.6.00000	1.822119e+000	1.822116e+000	2.6e-006	3.5e-002
0.800000	2.225541e+000	2.225536e+000	4.9e-006	1.9e-002
1.000000	2.718282e+000	2.718273e+000	9.0e-006	1.0e-002

0.12.1.2 Exemple 2

Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra

$$\varphi(x) - \int_0^x (xy - xy) \varphi(y) dy = -\frac{3}{4}x^6 - \frac{1}{3}x^5 + x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x - 1$$

la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par:

$$\varphi(x) = 3x - 1$$

La solution approximative $\varphi_n(x)$ de $\varphi(x)$ est obtenue par la méthode tronquée de la série de Lucas.

Tableau 2

Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans **l'exemple 2** dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 10$ est calculée

x	solution exacte φ	solution approximative φ_n	erreur	erreur [5]
0.000000	-1.000000e+000	-1.000000e+000	1.1e-016	0.0e-000
0.200000	-4.000000e-001	-4.000000e-001	5.5e-017	4.0e-004
0.400000	2.000000e-001	2.000000e-001	1.6e-016	1.1e-003
0.600000	8.000000e-001	8.000000e-001	3.3e-016	2.9e-003
0.800000	1.400000e+000	1.400000e+000	2.2e-016	3.1e-003
1.000000	2.000000e+000	2.000000e+000	4.4e-016	9.3e-003

0.12.1.3 Exemple 3

Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra

$$\varphi(x) - \int_0^x e^{(-x+t)} \varphi(t) dt = (1-x)e^{-x}$$

la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par:

$$\varphi(x) = \exp(-x)$$

Tableau 3

Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans **l'exemple 3** dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 10$ est calculée

t	solution exacte φ	solution approximative φ_n	erreur	erreur
1	000000e-001	9.048374e-001	9.048374e-001	3.552714e-015
2	000000e-001	8.187308e-001	8.187308e-001	3.108624e-015
3	000000e-001	7.408182e-001	7.408182e-001	3.219647e-0151
4	000000e-001	6.703200e-001	6.703200e-001	3.330669e-015
5	000000e-001	6.065307e-001	6.065307e-001	3.330669e-015
6	000000e-001	5.488116e-001	5.488116e-001	3.108624e-015
7	000000e-001	4.965853e-001	4.965853e-001	3.164136e-015
8	000000e-001	4.493290e-001	4.493290e-001	2.942091e-015
9	000000e-001	4.065697e-001	4.065697e-001	3.719247e-015
10	000000e-000	3.678794e-001	3.678794e-001	6.106227e-016

conclusion

Notre but est de faire la solution des équations intégrales linéaires de Volterra par les polynôme de Lucas, Nous avons donné les principaux types de méthodes d'approximations numériques

1.La méthode de Collocation.

2.La méthode de Galerkin.

La méthode de Collocation est une application de la méthode de projection ,c'est à dire de choisir des noeud de points distincts de sorte que le résidu soit nul dans ces points.

La méthode de Galerkin dans le cas lorsque le problème posé est définie dans un espace de Hilbert , le produit scalaire des éléments de la base par le résidu soient nuls.

Bibliographie

[1] Bibliographie

[1] **A. Adawi, F. Awawdeh**, *A numerical method for solving linear integral equations*, *Int. J. Contemp. Mathematics Sciences*, 10, 2009.

[2] **A. Rahmoune**, *Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales*, *Thèse de Doctorat, Université de Batna*, 2011 .

[3] **Belghaba kacem**, *Equations intégrales de frontiere exemples de resolution numérique*, thèse de diplôme magister en math, Université de Oran ES-Senia.

[4] **Bibhuti Bhusan Saha**, *On a generation function of Hermite polynomials*, *Yokohama Mathematical Journal*, 1969,.

[5] *Polynome de Tchebytshev Sur le developpement des fonctions à une seule variable* **Bull. Acad. Sci. St. pet**

[6] **M. NADIR**, *Sur les Equations Intégrales Singulières*, *Thèse de Doctorat, Université de Biskra*, 2016.

[7] **CHEMCHAMMADANI**, *Equations Intégrales Linéaires de Volterra de Seconde Espèce et Méthode de Galerkin*, *thèse de master, Université de Biskra*, Juin 2019.

[8] **Emile Cotton** , *Approximations successives et équations différentielles*, *Mémorial des sciences mathématiques*, n=°28, 1928.

[9] **Gerge Arfken et Hans Weber**, *Mathematical Methods for physicists*, *Academic press*, 2000.

[10] **M. DILMI Mustapha** , *Méthodes numériques pour résoudre des équations intégrales linéaires de type Fredholm*, *université Msila* , 2019.

[11] **M. KRASNOV., A. KISSELEV., G. MAKARENKO**, *EQUATIONS INTEGRALES PROBLEMES ET EXERCICES*, *MIR MOSCOU*.

[12] **M. NADIR.**, *Cours d'analyse fonctionnelle*, *université de M'sila Al-gérie* 2004.

[13] **M. NADIR**, *Cours sur les équations intégrales*, *université de Msila* 2008.

[14] **M. NADIR**, Lucas polynomials for solving linear equations, *Journal of Theoretical and Applied Computer Science* Vol. 11, No. 1, 2017.

[15] **M. Nadir, A. Rahmoune**, *Modied Method for Solving Linear Volterra Integral equations of the Second Kind Using Simpsons Rule, in International Journal Mathematical Manuscripts (IJMM), 1, (2) 2007.*

[16] **Valet Ludovic**, Généralité sur les polynomes orthogonaux. DEA. Polynomes orthogonaux, 2000.

Résumé

Dans ce travail, nous recherchons la solution approchée des équations intégrales de Volterra en utilisant polynomes de Lucas et fonctions de teste données, afin de réduire ces équations à un système linéaire ou sa solution est de trouver les coefficients de Lucas et ensuite la solution de l'équation. la convergence de cette méthode est assurée et l'erreur est comparée avec d'autres méthodes.

Les mots clés

- Les équations intégrales linéaires.
- Polynomes de Lucas.
- Méthodes de Collocation
- Approximation de Sloan.

Abstract

In this work, we seek the approximate solution of Volterra integral equations using Lucas polynomials and a given test functions, in order to reduce those equations to a linear system where its solution is to find the Lucas coefficients and thereafter the solution of the equation. The convergence of this method is assured and the error is compared with other methods.

Keywords

- Linear integral equations
- Lucas polynomials.
- Collocation methods.
- Sloan approximation.

الملخص

في هذا العمل ، نسعى إلى إيجاد حل تقريبي لمعادلات فولتيرا التكاملية باستخدام معادلات لوكاس كثير الحدود ووظائف اختبار معينة ، من أجل تقليل هذه المعادلات إلى نظام خطي حيث يكون حلها هو إيجاد معاملات لوكاس وبعد ذلك حل المعادلة. يتم التأكد من تقارب هذه الطريقة و مقارنة الخطأ بالطرق الأخرى.

الكلمات الدالة

- المعادلات التكاملية الخطية .
- لوكاس متعدد الحدود .
- طرق التجميع .
- تقريب سلون .