



UNIVERSITÉ DE MOHAMED BOUDIAF- M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Équations aux dérivées partielles et applications

Par

Mohamed Dilmi

Sujet

*Solution auto-similaire pour un
système de type milieu poreux*

Devant le jury :

N. Benhamidouche

Prof. Université de M'sila

Président

Y. Arioua

MAA. Université de M'sila

Rapporteur

A. Sengouga

MCB. Université de M'sila

Examineur

Promotion 2014/2015

Remerciements

*Je remercie tout d'abord mon **Dieu** qui m'a donné
la force pour terminer ce modeste travail.*

*Je tiens à remercier mes promoteurs : le professeur
Mr : Y. Arioua, qui m'a dirigé pour réaliser
efficacement ce travail.*

*Je remercie aussi tous les membres du Jury pour
l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger
ce modeste travail.*

*Un grand merci à mes amis et plus
particulièrement **Makdeur Achraf, Reguigue
Amira, Ferahtia Amar.***

*Enfin, je remercie tous ceux ou celles qui m'ont
aidé à réaliser ce travail.*

A tous : merci, thanks, gracia, شكرا...

Table des matières

Introduction	3
1 Notions élémentaires	5
1.1 Quelques définitions	5
1.1.1 Equation aux dérivées partielles	5
1.1.2 Solution auto similaire	6
1.1.3 Solution globale et solution explosion	7
1.1.4 L'exposant critique de l'existence globale et de type Fujita	7
1.2 Définition du système des milieux poreux	7
2 Existence de solution auto similaire du système des milieux poreux	9
2.1 Théorème de l'existence	9
2.2 Solution auto similaire du système	11
2.2.1 Type explosion	11
2.2.2 Type classique	14
2.2.3 Type exponentielle	18
2.3 Solution explicite (cas particulier)	20
3 Existence globale et explosion	23
3.1 Existence et unicité	23
3.2 Résultats principaux	28
3.3 Preuve des résultats principaux	32
3.3.1 L'existence globale	32

TABLE DES MATIÈRES

3.3.2	Explosion en temps fini	34
3.3.3	Courbe critique de type Fujita	37
3.3.4	L'ensemble d'explosion	43
	Conclusion	46
	Bibliographie	46

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont omniprésentes dans toutes les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides. Une grande majorité des problèmes non linéaires sont décrits par des systèmes des équations aux dérivées partielles d'évolution non linéaires, ces modèles jouent un rôle très important dans l'étude de plusieurs phénomènes physiques, par exemple réactions chimiques, traitement de l'image...etc. Il y a plusieurs méthodes pour étudier ces systèmes, par exemple les solutions similaires, les solutions de similitude dans les premières années ont été trouvées par des moyens physiques directs et arguments dimensionnels. Les deux exemples les plus célèbres sont les problèmes d'explosion et implosion (Taylor (1950), Sedov (1959), Guderley (1942)). Les systèmes paraboliques parmi les systèmes non linéaires qui sont étudiés par plusieurs mathématiciens comme (Julio.Rossi, Fujita, ...), et le but principal de cette étude consiste dans la plupart des cas à déterminer l'exposant critique de type Fujita, qui a proposé à la premier fois par Fujita avant les années 1970 dans une discussion sur l'équation de la chaleur avec une condition non-linéaire. Au cours de ces dernières années il y a eu un certain nombre de prolongements de résultat de Fujita dans diverses directions.

Dans ce mémoire nous allons étudier des solutions non négatives du système parabolique des milieux poreux :

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} \\ v_t = (v^n)_{xx} \end{cases}$$

avec des conditions aux limites non linéaires :

$$\begin{cases} -(u^m)_x(0, t) = v^p(0, t) \\ -(v^n)_x(0, t) = u^q(0, t) \end{cases}$$

et conditions initiales $u_0(x), v_0(x)$ non triviales, non négatives à support compact.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre on va donner quelques définitions importantes (solution auto similaire, solution globale, solution explosion, ...etc) et on définit le système que nous avons étudié.

Dans le deuxième chapitre on va étudier l'existence de la solution auto similaire pour déterminer l'exposant critique de l'existence globale et de type Fujita, et trouver la solution auto similaire en cas particulier.

Dans le troisième chapitre on étudie l'existence et l'unicité du problème dans le cas des conditions initiales égales à zéro et nous montrons que la solution du problème augmente avec le temps pour certaines conditions initiales, et on met en évidence quelques résultats du problème, finalement nous montrons les résultats mentionnés dans ce chapitre, c'est-à-dire on montre l'exposant critique de l'existence globale et de type Fujita et on montre dans le dernière chapitre l'ensemble de l'explosion (blow up).

Chapitre 1

Notions élémentaires

1.1 Quelques définitions

1.1.1 Equation aux dérivées partielles

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles ou équation différentielle partielle (**EDP**) est une équation mathématique contenant plusieurs variables indépendantes $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et une ou plusieurs dérivées partielles.

Définition 1.1.1 (Equation aux dérivées partielles)

Une (**EDP**), est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles, qu'on peut écrire sous la forme :

$$P(x_1, x_2, \dots, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_1 x_1}, u_{x_2 x_2}, \dots) = 0.$$

Il y a deux types importants d'EDPs : les équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires. Dans certains cas, on rencontre des équations aux dérivées partielles non linéaires, c'est-à-dire que la relation entre les fonctions et leurs dérivées partielles est non linéaire, la plupart du temps, comme exemple l'équation milieu poreux.

Définition 1.1.2 L'équation de " **milieu poreux** " (*porous media*), est une équation aux dérivées partielles parabolique non linéaire définie comme suite :

$$u_t = (u^m)_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad m > 1.$$

Notre objectif consiste à étudier un système de deux EDPs non linéaire de milieu poreux qui s'appelle " **système des milieux poreux** ".

1.1.2 Solution auto similaire

On appelle " **solution auto similaire** " d'une équation aux dérivées partielles est une fonction de deux variables sous forme spéciale, transforme une EDP en EDO, il y a plusieurs formes ou bien types, par exemple :

1. $u(x, t) = t^\alpha f\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$, type classique.
2. $u(x, t) = (T - t)^\alpha f\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right)$, type blwo up.
3. $u(x, t) = e^{t\alpha} f\left(\frac{x}{e^{t\beta}}\right)$, type exponentielle.
4. $u(x, t) = c(t) f\left(\frac{x}{a(t)}\right)$, type général.

Tels que α et β des constantes réelles appelées paramètres de la solution, et $a(t)$, $c(t)$ des fonctions réelles dépendent de t , et f est une fonction d'une seule variable appelée "profil", cette fonction est une solution de l'EDO.

La condition pour qu'une équation aux dérivées partielles admette une solution auto similaire est donnée par :

si

$$P(t, x, u, u_x, \dots) = 0$$

une équation aux dérivées partielles, alors P admet une solution auto similaire si et seulement si elle est invariante sous l'action de dilatation (invariance d'échelle).

C'est-à-dire si l'on remplace :

$$u \rightarrow a^\lambda u$$

$$x \rightarrow a^s x$$

$$t \rightarrow a^\gamma t$$

alors

$$P(a^\gamma t, a^s x, a^\lambda u, a^{\lambda-s} u_x, \dots) = 0$$

avec $s, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$.

1.1.3 Solution globale et solution explosion

Soit P une équation aux dérivées partielles.

On dit que $u(x, t)$ est une " **solution globale** " de l'équation aux dérivées partielles P , si $u(x, t)$ est définie $\forall t \in]0, \infty[$.

On dit que $u(x, t)$ est une " **solution explosion** " (solution blow up) de l'équation aux dérivées partielles P si :

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|u(x, t)\|_{\infty} = +\infty$$

et $u(x, t)$ est définie $\forall t \in]0, T[$, tel que $T < \infty$.

Dans ce cas il n'y a pas d'existence globale.

1.1.4 L'exposant critique de l'existence globale et de type Fujita

Nous allons pour la suite définir l'exposant critique de l'existence globale et l'exposant critique de type Fujita.

Définition 1.1.3 (L'exposant critique de l'existence globale)

On dit que p_0 est un exposant critique de l'existence globale s'il a la propriété suivante : si $0 < p \leq p_0$, toute les solutions sont globales et si $p > p_0$, il existe des solutions blow up.

Définition 1.1.4 (L'exposant critique de type Fujita)

On dit que p_c est un exposant critique de type Fujita s'il a la propriété suivante : si $p_0 < p \leq p_c$, les solutions est blow up et si $p > p_c$, il existe des solutions globales pour petites conditions initiales, et solutions blow up pour des conditions initiales assez grandes.

1.2 Définition du système des milieux poreux

Soit le système des milieux poreux suivant :

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} \\ v_t = (v^n)_{xx} \end{cases}, \quad x > 0, \quad t \in]0, T[\quad (1.2.1)$$

tels que $m, n > 1$, on complète le système par les conditions aux limites non linéaires suivantes :

$$\begin{cases} -(u^m)_x(0, t) = v^p(0, t) \\ -(v^n)_x(0, t) = u^q(0, t) \end{cases}, \quad x > 0, \quad t \in]0, T[\quad (1.2.2)$$

avec $p, q > 0$, et les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{cases}, \quad x > 0 \quad (1.2.3)$$

telle que $u_0(x), v_0(x)$, sont des fonctions continues non négatifs à supports compacts c-à-d: $\text{supp}(u_0(x)) \subset \mathbb{R}_+$, $\text{supp}(v_0(x)) \subset \mathbb{R}_+$. Ce système apparait dans plusieurs branches d'applications mathématiques. Ils ont été utilisés pour modéliser, par exemple, réactions chimiques, le transfert de chaleur, la dynamique des populations.

Comme nous le verrons, pour certaines conditions, les solutions de ce problème peuvent devenir une boude dans un temps fini, ce phénomène est connu comme Blow up et a été observé dans plusieurs équations scalaires depuis les travaux de Fujita [2].

Comme un précédent, nous avons le travail de Galaktionov et Levine [8], l'étude du problème scalaire de milieu poreux :

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} \\ -(u^m)_x(0, t) = u^p(0, t) \quad , \quad x > 0, \quad t \in]0, T[, \quad m > 1, \quad p > 0. \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Ils montrent que :

- ▶ Si $0 < p \leq p_0 = \frac{m+1}{2}$, chaque solution est globale dans le temps.
- ▶ Si $p > p_0 = \frac{m+1}{2}$, il y a des solutions blow up de temps fini, et p_0 est un exposant critique de l'existence globale.

D'autre part, ils prouvent que $p_c = m + 1$ est un exposant critique de type Fujita. Par définition, cela signifie que p_c possède les propriétés suivantes :

- ▶ Si $p_0 < p \leq p_c$, alors $u(x, t) \not\equiv 0$ et $u(x, t)$ est blows up ($\forall u_0$ non triviale).
- ▶ Si $p > p_c$, alors $u(x, t)$ est globale en temps pour petite $u_0 \not\equiv 0$, et $u(x, t)$ est blwo up pour u_0 assez grand.

Chapitre 2

Existence de solution auto similaire du système des milieux poreux

Dans ce chapitre on cherche des solutions auto-similaires de types différents du système des milieux poreux. Pour montrer l'existence de ce type de solutions, on utilise un résultat de Gilding et Peletier.

2.1 Théorème de l'existence

Soit le problème suivant :

$$(f^m)''(\eta) + a\eta f'(\eta) = bf(\eta), \quad \forall 0 < \eta < +\infty \quad (2.1.1)$$

$$f(0) = U \quad (2.1.2)$$

$$(f^m)'(0) = V \quad (2.1.3)$$

tel que $a, b \in \mathbb{R}$ et $m > 1$.

Définition 2.1.1 (Solution classique)

On dit que la fonction f est une solution classique du problème (2.1.1) – (2.1.3) dans un domaine Q de \mathbb{R}_+ si f est une fonction de classe C^2 de η , dans Q et si elle satisfait (2.1.1) – (2.1.3) point par point dans Q .

Définition 2.1.2 (Solution faible)

On dit que la fonction f est une solution faible du problème (2.1.1) – (2.1.3) si :

1. f est bornée, continue et non négative.
2. (f^m) admet une dérivée continue.
3. f vérifie l'identité :

$$\int_0^{\infty} \varphi' [(f^m)' + a\eta f'] d\eta + (a+b) \int_0^{\infty} \varphi f d\eta = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1(0, +\infty).$$

Dans la suite, on donner le théorème de Gilding et Peletier (voir [3], [5], [6]).

Théorème 2.1.1 Soit $a, b, V \in \mathbb{R}$ et $U \geq 0$, on fixe a et b . Soit S_A l'ensemble des valeurs (U, V) telle qu'il existe une solution faible f non négative à support compact de (2.1.1) – (2.1.3), et soit S_B l'ensemble des valeurs (U, V) pour qu'il existe une solution classique f , positive de (2.1.1) – (2.1.3).

a) Si $b < 0$ et $2a + b < 0$, alors :

$$S_A = \{(0, 0)\} \quad \text{et} \quad S_B = \emptyset.$$

b) Si $b < 0$ et $2a + b = 0$, alors :

$$S_A = \{(0, V) : 0 \leq V < +\infty\} \quad \text{et} \quad S_B = \emptyset.$$

c) Si $b \leq 0$ et $2a + b > 0$, alors $\exists! V_*$, tel que :

$$S_A = \left\{ \left(U, U^{\frac{m+1}{2}} V_* \right) : 0 \leq U < +\infty \right\},$$

et

$$S_B = \left\{ (U, V) : 0 \leq U < +\infty, U^{\frac{m+1}{2}} V_* < V < +\infty \right\},$$

avec

$$V_* > 0 \text{ si } a + b < 0, V_* = 0 \text{ si } a + b = 0, \text{ et } V_* < 0 \text{ si } a + b > 0.$$

d) Si $b > 0$ et $a \geq 0$, alors $\exists! V_* < 0$, telle que :

$$S_A = \left\{ \left(U, U^{\frac{m+1}{2}} V_* \right) : 0 \leq U < +\infty \right\} \quad \text{et} \quad S_B = \emptyset.$$

e) Si $b > 0$ et $a < 0$, ou $b = 0$ et $a \leq 0$, alors :

$$S_A = \{(0, 0)\},$$

et il existe un unique V_* , tel que :

$$S_B = \left\{ \left(U, U^{\frac{m+1}{2}} V_* \right) : 0 \leq U < +\infty \right\},$$

avec

$$V_* < 0 \text{ si } b > 0 \text{ et } V_* = 0 \text{ si } b = 0.$$

Remarque 2.1.1 Dans le cas $a = ((m - 1) / 2) b > 0$, on obtient $V_* = -1$.

Ce cas est une conséquence de l'existence de solution auto-similaire de la forme exponentielle du problème (1.2.4) avec $p = \frac{m+1}{2}$, (voir [8]).

Remarque 2.1.2 Les solutions sont en principe faibles. Toute fois, si elles sont positives dans le cas globale, elles sont aussi classiques.

2.2 Solution auto similaire du système

2.2.1 Type explosion

Maintenant, nous allons chercher la solution auto similaire du problème (1.2.1) – (1.2.2) sous la forme explosion (blow up).

Théorème 2.2.1 Soit :

$$\begin{cases} u(x, t) = (T - t)^{\alpha_1} f(\xi), & \xi = x / (T - t)^{\beta_1} \\ v(x, t) = (T - t)^{\alpha_2} g(\zeta), & \zeta = x / (T - t)^{\beta_2}. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Si

$$pq > \left(\frac{m+1}{2} \right) \left(\frac{n+1}{2} \right) \quad (2.2.2)$$

alors il existe une solution auto-similaire (blow up) du problème (1.2.1) – (1.2.2), de la forme (2.2.1).

De plus, le support de f est \mathbb{R}_+ si $\beta_1 > 0$, et compact si $\beta_1 \leq 0$. De même, le support de g est \mathbb{R}_+ si $\beta_2 > 0$, et compact si $\beta_2 \leq 0$.

Preuve. On considère la solution donnée de la forme (2.2.1), on remplace dans les équations (1.2.1) on obtient :

$$\begin{cases} -\alpha_1 (T-t)^{\alpha_1-1} f(\xi) + \beta_1 \xi (T-t)^{\alpha_1-1} f'(\xi) = (T-t)^{m\alpha_1-2\beta_1} (f^m)''(\xi) \\ -\alpha_2 (T-t)^{\alpha_2-1} g(\zeta) + \beta_2 \zeta (T-t)^{\alpha_2-1} g'(\zeta) = (T-t)^{n\alpha_2-2\beta_2} (g^n)''(\zeta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 f(\xi) + \beta_1 \xi f'(\xi) = (T-t)^{m\alpha_1-2\beta_1-\alpha_1+1} (f^m)''(\xi) \\ -\alpha_2 g(\zeta) + \beta_2 \zeta g'(\zeta) = (T-t)^{n\alpha_2-2\beta_2-\alpha_2+1} (g^n)''(\zeta) \end{cases}$$

alors les conditions des similarités données par :

$$\begin{cases} m\alpha_1 - \alpha_1 - 2\beta_1 + 1 = 0 \\ n\alpha_2 - \alpha_2 - 2\beta_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 1 = m\alpha_1 - 2\beta_1 \\ \alpha_2 - 1 = n\alpha_2 - 2\beta_2 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

et si on remplace (2.2.1) dans les conditions aux limites (1.2.2) on obtient :

$$\begin{cases} -(T-t)^{m\alpha_1-\beta_1} (f^m)'(0) = (T-t)^{p\alpha_2} (g)^p(0) \\ -(T-t)^{n\alpha_2-\beta_2} (g^n)'(0) = (T-t)^{q\alpha_1} (f)^q(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\alpha_1 - \beta_1 = p\alpha_2 \\ n\alpha_2 - \beta_2 = q\alpha_1. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

La résolution du système linéaire (2.2.3) – (2.2.4), on trouve $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ donnés comme :

$$\begin{pmatrix} (m-1) & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n-1) & -2 \\ m & -1 & -p & 0 \\ -q & 0 & n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-(n+1)}{(m+1)(n+1)-4pq} & \frac{-2p}{(m+1)(n+1)-4pq} & \frac{2(n+1)}{(m+1)(n+1)-4pq} & \frac{4p}{(m+1)(n+1)-4pq} \\ \frac{-(m(1+n)-2pq)}{(m+1)(n+1)-4pq} & \frac{p(1-m)}{(m+1)(n+1)-4pq} & \frac{m-n+mn-1}{(m+1)(n+1)-4pq} & \frac{-2p(1-m)}{(m+1)(n+1)-4pq} \\ \frac{-2q}{(m+1)(n+1)-4pq} & \frac{-(m+1)}{(m+1)(n+1)-4pq} & \frac{4q}{(m+1)(n+1)-4pq} & \frac{2(m+1)}{(m+1)(n+1)-4pq} \\ \frac{q(1-n)}{(m+1)(n+1)-4pq} & \frac{-(n(1+m)-2pq)}{(m+1)(n+1)-4pq} & \frac{-2q(1-n)}{(m+1)(n+1)-4pq} & \frac{-(m-n-mn+1)}{(m+1)(n+1)-4pq} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\alpha_1 = \frac{2p + n + 1}{(m + 1)(n + 1) - 4pq}, \quad \alpha_2 = \frac{2q + m + 1}{(m + 1)(n + 1) - 4pq} \quad (2.2.5)$$

$$\beta_1 = \frac{p(m - 1 - 2q) + (n + 1)m}{(m + 1)(n + 1) - 4pq}, \quad \beta_2 = \frac{q(n - 1 - 2p) + (m + 1)n}{(m + 1)(n + 1) - 4pq}. \quad (2.2.6)$$

On a $\alpha_1, \alpha_2 < 0$ ssi $pq > \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)$. D'autre part les profils f et g vérifient :

$$\begin{aligned} (f^m)''(\xi) - \beta_1 \xi f'(\xi) &= -\alpha_1 f(\xi) \\ (g^n)''(\zeta) - \beta_2 \zeta g'(\zeta) &= -\alpha_2 g(\zeta) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

et les conditions :

$$\begin{aligned} -(f^m)'(0) &= (g)^p(0) \\ -(g^n)'(0) &= (f)^q(0). \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Comme f et g satisfaisant (2.1.1) tel que les coefficients $a_1 = -\beta_1$, $b_1 = -\alpha_1$ et $a_2 = -\beta_2$, $b_2 = -\alpha_2$ (respectivement).

D'après le théorème 2.1.1 partie (*d*) si $\beta_1, \beta_2 \leq 0$ et ((*e*) si $\beta_1, \beta_2 > 0$) il existe un paramètre U_1 de solution f de (2.1.1) vérifie :

$$\begin{aligned} f(0) &= U_1 \\ (f^m)'(0) &= U_1^{\frac{m+1}{2}} V_{*1} \end{aligned}$$

tel que ($V_{*1} < 0$, car $-\alpha_1 > 0$) et le profil f à support compact si $\beta_1 \leq 0$, et il est positif dans \mathbb{R}_+ si $\beta_1 > 0$, car : pour $\beta_1 \leq 0$, $S_A = \left\{ \left(U, U^{\frac{m+1}{2}} V_* \right) : 0 \leq U < +\infty \right\}$, $S_B = \emptyset$, et pour $\beta_1 > 0$, $S_A = \{(0, 0)\}$, $S_B = \left\{ \left(U, U^{\frac{m+1}{2}} V_* \right) : 0 \leq U < +\infty \right\}$. De même, il existe un paramètre U_2 de solution g de (2.1.1) vérifie :

$$\begin{aligned} g(0) &= U_2 \\ (g^n)'(0) &= U_2^{\frac{n+1}{2}} V_{*1} \end{aligned}$$

tel que ($V_{*2} < 0$, car: $-\alpha_2 > 0$) et le profil g à support compact si $\beta_2 \leq 0$, et il est positif dans \mathbb{R}_+ si $\beta_2 > 0$. D'après les conditions aux limites (2.2.8), U_1, U_2 vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} -U_1^{\frac{m+1}{2}} V_{*1} &= U_2^p \\ -U_2^{\frac{n+1}{2}} V_{*2} &= U_1^q. \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{cases} V_{*1} < 0 \\ V_{*2} < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} -U_1^{\frac{m+1}{2}} V_{*1} > 0 \\ -U_2^{\frac{n+1}{2}} V_{*2} > 0 \end{cases}$$

donc si on passe logarithme on obtient :

$$\begin{cases} \ln \left(-U_1^{\frac{m+1}{2}} V_{*1} \right) = \ln (U_2^p) \\ \ln \left(-U_2^{\frac{n+1}{2}} V_{*2} \right) = \ln (U_1^q) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{2} \ln (U_1) - p \ln (U_2) = -\ln (|V_{*1}|) \\ \frac{n+1}{2} \ln (U_2) - q \ln (U_1) = -\ln (|V_{*2}|) . \end{cases}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} \frac{m+1}{2} & -p \\ -q & \frac{n+1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln (U_1) \\ \ln (U_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ln (|V_{*1}|) \\ -\ln (|V_{*2}|) \end{pmatrix} . \quad (2.2.9)$$

On a le système (2.2.9) admet une solution unique ssi :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{m+1}{2} & -p \\ -q & \frac{n+1}{2} \end{pmatrix} \neq 0$$

c-à-d

$$\left(\frac{m+1}{2} \right) \left(\frac{n+1}{2} \right) - pq \neq 0 \Leftrightarrow pq \neq \left(\frac{m+1}{2} \right) \left(\frac{n+1}{2} \right) .$$

■

2.2.2 Type classique

Dans la suite, nous allons chercher la solution auto similaire du problème (1.2.1) – (1.2.2) sous la forme classique.

Théorème 2.2.2 *Soit :*

$$\begin{cases} u(x, t) = t^{\alpha_1} f(\xi), \quad \xi = x/t^{\beta_1} \\ v(x, t) = t^{\alpha_2} g(\zeta), \quad \zeta = x/t^{\beta_2} . \end{cases} \quad (2.2.10)$$

a) Si

$$pq < \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (2.2.11)$$

alors il existe deux fonctions f et g positives dans \mathbb{R}_+ , tel que (u, v) donnés comme (2.2.10) est une solution auto-similaire globale du problème (1.2.1) – (1.2.2), les conditions initiales sont identiquement nulles. Cette solution existe pour $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $\beta_1, \beta_2 > 0$.

b) Si

$$\alpha_1 + \beta_1 > 0 \text{ et } \alpha_2 + \beta_2 > 0$$

alors il existe des fonctions f et g à supports compacts dans \mathbb{R}_+ , tel que (u, v) donnés comme (2.2.10) est une solution auto-similaire globale du problème (1.2.1) – (1.2.2). Cette solution existe pour $\alpha_1, \alpha_2 < 0$ et $\beta_1, \beta_2 > 0$, et elle tend vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. Par conséquent les supports augmentent avec le temps.

Remarque 2.2.1 Si

$$\alpha_1 + \beta_1 \leq 0 \text{ ou } \alpha_2 + \beta_2 \leq 0,$$

il n'y a aucun profil $f, g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ tel que (u, v) donnés comme (2.2.10), en effet

$$\int_0^{+\infty} u(x, t) dx = t^{\alpha_1 + \beta_1} \int_0^{+\infty} f(\xi) d\xi.$$

Alors si $\alpha_1 + \beta_1 \leq 0$, la masse de u n'augmenterait pas.

On a $u(x, t)$ augmente avec le temps c-à-d :

$$t_1 > t_0 \Rightarrow u(x, t_1) \geq u(x, t_0) \Rightarrow \int_0^{+\infty} u(x, t_1) dx \geq \int_0^{+\infty} u(x, t_0) dx,$$

mais si $f, g \in L^1(\mathbb{R}_+)$, alors :

$$\int_0^{+\infty} u(x, t) dx = t^{\alpha_1 + \beta_1} C / C = \int_0^{+\infty} f(\xi) d\xi,$$

donc

$$t_1 > t_0 \Rightarrow t_0^{\alpha_1 + \beta_1} C \geq t_1^{\alpha_1 + \beta_1} C \Rightarrow \int_0^{+\infty} u(x, t_0) dx \geq \int_0^{+\infty} u(x, t_1) dx.$$

Contradiction.

Preuve. On suppose que la solution donnée de la forme (2.2.10). On remplace dans les équations (1.2.1) on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_1 t^{\alpha_1-1} f(\xi) - \beta_1 \xi t^{\alpha_1-1} f'(\xi) = t^{m\alpha_1-2\beta_1} (f^m)''(\xi) \\ \alpha_2 t^{\alpha_2-1} g(\zeta) - \beta_2 \zeta t^{\alpha_2-1} g'(\zeta) = t^{n\alpha_2-2\beta_2} (g^n)''(\zeta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 f(\xi) - \beta_1 \xi f'(\xi) = t^{m\alpha_1-\alpha_1+1-2\beta_1} (f^m)''(\xi) \\ \alpha_2 g(\zeta) - \beta_2 \zeta g'(\zeta) = t^{n\alpha_2-\alpha_2+1-2\beta_2} (g^n)''(\zeta). \end{cases}$$

Alors les conditions des similarités données par :

$$\begin{cases} \alpha_1 - 1 = m\alpha_1 - 2\beta_1 \\ \alpha_2 - 1 = n\alpha_2 - 2\beta_2 \end{cases}$$

et si on remplace (2.2.10) dans les conditions aux limites on obtient :

$$\begin{cases} m\alpha_1 - \beta_1 = p\alpha_2 \\ n\alpha_2 - \beta_2 = q\alpha_1. \end{cases}$$

Donc on trouve le même système linéaire (2.2.3) – (2.2.4) et par suite α_1, α_2 et β_1, β_2 donnés comme (2.2.5) – (2.2.6).

Les conditions aux limites des profils sont encore données par (2.2.8) :

$$\begin{aligned} -(f^m)'(0) &= (g)^p(0) \\ -(g^n)'(0) &= (f)^q(0). \end{aligned}$$

Les équations des profils sont maintenant différentes :

$$\begin{aligned} (f^m)''(\xi) + \beta_1 \xi f'(\xi) &= \alpha_1 f(\xi) \\ (g^n)''(\zeta) + \beta_2 \zeta g'(\zeta) &= \alpha_2 g(\zeta). \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Ainsi, f et g satisfaisant (2.1.1) avec les coefficients $a_1 = \beta_1$, $b_1 = \alpha_1$ et $a_2 = \beta_2$, $b_2 = \alpha_2$ (respectivement).

a) Si $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ c-à-d (2.2.11) vérifiée, alors $\beta_1, \beta_2 > 0$.

On applique le théorème 2.1.1 partie (d). Comme preuve du théorème 2.2.1.

Donc, il existe un paramètre U_1 de solution f de (2.1.1) vérifie :

$$\begin{aligned} f(0) &= U_1 \\ (f^m)'(0) &= U_1^{\frac{m+1}{2}} V_{*1} \end{aligned}$$

tel que ($V_{*1} < 0$, car $\alpha_1 > 0, \beta_1 \geq 0$).

De même, il existe un paramètre U_2 de solution g de (2.1.1) vérifie :

$$\begin{aligned} g(0) &= U_2 \\ (g^n)'(0) &= U_2^{\frac{n+1}{2}} V_{*1} \end{aligned}$$

tel que ($V_{*2} < 0$, car $\alpha_2 > 0, \beta_2 \geq 0$), alors U_1 et U_2 vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} -U_1^{\frac{m+1}{2}} V_{*1} &= U_2^p \\ -U_2^{\frac{n+1}{2}} V_{*2} &= U_1^q. \end{aligned}$$

On passe logarithmes on obtient (2.2.9) c-à-d :

$$\begin{pmatrix} \frac{m+1}{2} & -p \\ -q & \frac{n+1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln(U_1) \\ \ln(U_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ln(|V_{*1}|) \\ -\ln(|V_{*2}|) \end{pmatrix}.$$

Le système (2.2.9) admet une solution unique ssi :

$$pq \neq \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

donc, nous obtenons qu'il existe des profils positifs f et g des problèmes (2.2.12) et satisfaisant (2.2.8).

b) Si $\alpha_1, \alpha_2 < 0$ (c-à-d $pq > \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$) et $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ et $\alpha_2 + \beta_2 > 0$.

On applique le théorème 2.1.1 partie (c). Comme preuve du théorème 2.2.1.

Donc, il existe un paramètre U_1 de solution f et un paramètre U_2 pour g vérifie :

$$\begin{aligned} -U_1^{\frac{m+1}{2}} V_{*1} &= U_2^p \\ -U_2^{\frac{n+1}{2}} V_{*2} &= U_1^q \end{aligned}$$

tel que ($V_{*1}, V_{*2} < 0$, car $\alpha_1 + \beta_1 > 0, \alpha_2 + \beta_2 > 0$). On a : $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ et $\alpha_2 + \beta_2 > 0$ alors $\alpha_1 + 2\beta_1 > 0$ et $\alpha_2 + 2\beta_2 > 0$.

Enfin, si on passe logarithme on trouve le système (2.2.9) qui admet une solution unique ssi

$$pq \neq \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Donc, il existe des profils f et g à support compact satisfaisant (2.2.12) et (2.2.8).

► Si ($\alpha_1 + \beta_1 < 0$ et $\alpha_2 + \beta_2 < 0$) donc $V_* > 0$, alors le système :

$$\begin{aligned} -U_1^{\frac{m+1}{2}} V_{*1} &= U_2^p \\ -U_2^{\frac{n+1}{2}} V_{*2} &= U_1^q \end{aligned}$$

n'admet pas une solution. ■

2.2.3 Type exponentielle

Dans la suite, nous allons chercher la solution auto similaire du problème (1.2.1) – (1.2.2) sous la forme exponentielle.

Théorème 2.2.3 *Soit*

$$\begin{cases} u(x, t) = e^{t\alpha_1} f(\xi), \quad \xi = x/e^{t\beta_1} \\ v(x, t) = e^{t\alpha_2} g(\zeta), \quad \zeta = x/e^{t\beta_2}. \end{cases} \quad (2.2.13)$$

Si

$$pq = \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Alors $\forall \alpha_1 > 0$, il existe une solution auto similaire globale du problème (1.2.1) – (1.2.2), de la forme (2.2.13), avec :

$$\alpha_2 = \left(\frac{m+1}{2p}\right) \alpha_1, \quad \beta_1 = \left(\frac{m-1}{2}\right) \alpha_1, \quad \beta_2 = \left(\frac{m+1}{2p}\right) \left(\frac{n-1}{2}\right) \alpha_1. \quad (2.2.14)$$

De plus, les supports des f et g sont compacts.

Preuve. On suppose que les solutions de la forme (2.2.13), on remplace (2.2.13) dans les conditions aux limites (1.2.2), on obtient encore la relation (2.2.4), et si on remplace (2.2.13) dans les équations (1.2.1) on trouve des relations différentes à savoir :

$$\begin{cases} \alpha_1 e^{t\alpha_1} f(\xi) - \beta_1 \xi e^{t\alpha_1} f'(\xi) = e^{mt\alpha_1 - 2t\beta_1} (f^m)''(\xi) \\ \alpha_2 e^{t\alpha_2} g(\zeta) - \beta_2 \zeta e^{t\alpha_2} g'(\zeta) = e^{nt\alpha_2 - 2t\beta_2} (g^n)''(\zeta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 f(\xi) - \beta_1 \xi f'(\xi) = e^{(m\alpha_1 - \alpha_1 - 2\beta_1)t} (f^m)''(\xi) \\ \alpha_2 g(\zeta) - \beta_2 \zeta g'(\zeta) = e^{(n\alpha_2 - \alpha_2 - 2\beta_2)t} (g^n)''(\zeta) \end{cases}$$

alors les conditions des similarités données comme :

$$\begin{cases} m\alpha_1 - 2\beta_1 = \alpha_1 \\ n\alpha_2 - 2\beta_2 = \alpha_2. \end{cases} \quad (2.2.15)$$

D'après (2.2.4) – (2.2.15), on a :

$$\begin{cases} m\alpha_1 - p\alpha_2 = \beta_1 \\ n\alpha_2 - q\alpha_1 = \beta_2 \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} m\alpha_1 - 2(m\alpha_1 - p\alpha_2) = \alpha_1 \\ n\alpha_2 - 2(n\alpha_2 - q\alpha_1) = \alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m\alpha_1 + 2p\alpha_2 = \alpha_1 \\ -n\alpha_2 + 2q\alpha_1 = \alpha_2 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} (m+1)\alpha_1 - 2p\alpha_2 = 0 \\ (n+1)\alpha_2 - 2q\alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m+1 & -2p \\ -2q & n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.16)$$

Alors, il existe une solution non triviale (α_1, α_2) de (2.2.16) ssi $pq = \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$. Dans ce cas on trouve une relation (2.2.14) entre α_1 et α_2 , β_1, β_2 comme suit :

1. $(m+1)\alpha_1 - 2p\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \left(\frac{m+1}{2p}\right)\alpha_1$.
2. $m\alpha_1 - p\left(\frac{m+1}{2p}\right)\alpha_1 = \beta_1 \Rightarrow \beta_1 = \left(\frac{m-1}{2}\right)\alpha_1$.
3. $\beta_2 = \left(\frac{n-1}{2}\right)\alpha_2 \Rightarrow \beta_2 = \left(\frac{m+1}{2p}\right) \left(\frac{n-1}{2}\right)\alpha_1$.

Les conditions aux limites des profils sont encore données par (2.2.8), tandis que les équations des profils sont données par (2.2.12).

Si $\alpha_1 > 0$ alors $\alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$, dans ce cas on applique le Théorème 2.1.1 partie (d), et à l'aide de Remarque 2.1.1, on trouve $(V_{*1} = V_{*2} = -1$ car $\beta_1 = \left(\frac{m-1}{2}\right)\alpha_1, \beta_2 = \left(\frac{n-1}{2}\right)\alpha_2$) alors le système (2.2.9) donné comme :

$$\begin{pmatrix} \frac{m+1}{2} & -p \\ -q & \frac{n+1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln(U_1) \\ \ln(U_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admet une solution non triviale (U_1, U_2) ssi $pq = \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$.

Donc nous obtenons qu'il existe des profils f, g à support compact vérifiant (2.2.12) et (2.2.8). ■

2.3 Solution explicite (cas particulier)

Maintenant, nous allons chercher la solution du problème (1.2.1) – (1.2.2) sous la forme (2.2.1), c-à-d on cherche la solution auto similaire de type " **blow up** " dans le cas $(\beta_1, \beta_2 = 0)$. La recherche d'une solution auto similaire en général n'est pas facile, car la résolution d'EDOs est très difficile en général, mais pour certain cas on peut trouver des solutions explicites.

Soit l'équation suivante :

$$\begin{aligned} (f^m)''(\eta) + a\eta f'(\eta) &= bf(\eta), \quad \forall 0 < \eta < +\infty \\ f(0) &= U \\ (f^m)'(0) &= V. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Si $a = 0$ et $b > 0$, la solution de (2.3.1) donnée comme :

on pose

$$g(\eta) = (f^m)(\eta) \Rightarrow f(\eta) = g^{\frac{1}{m}}(\eta)$$

alors

$$g''(\eta) = bg^{\frac{1}{m}}(\eta)$$

$$g'g''(\eta) = bg'g^{\frac{1}{m}}(\eta)$$

donc

$$g' = \left(\frac{2bm}{m+1} \right)^{\frac{1}{2}} g^{\frac{m+1}{2m}}$$

alors

$$g(\eta) = \left(\left(\frac{m-1}{2m} \right) \left(\left(\frac{2bm}{m+1} \right)^{\frac{1}{2}} \eta + C \right) \right)^{\frac{2m}{m-1}}, \quad \text{tel que } C \in \mathbb{R}$$

donc

$$f(\eta) = \left(\left(\frac{m-1}{2m} \right)^2 \left(\frac{2bm}{m+1} \right) (C_m - \eta)^2 \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

avec

$$C_m = \frac{U^{\frac{m-1}{2}}}{\left(\left(\frac{m-1}{2m} \right)^2 \left(\frac{2bm}{m+1} \right) \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si on pose :

$$A_m = \frac{(m-1)^2}{2m} \left(\frac{b}{m+1} \right)$$

donc :

$$f(\eta) = \begin{cases} \left(A_m \left(\frac{U^{\frac{m-1}{2}}}{(A_m)^{\frac{1}{2}}} - \eta \right)^2 \right)^{\frac{1}{m-1}} & \text{si } 0 \leq \eta \leq \frac{U^{\frac{m-1}{2}}}{(A_m)^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & \text{si } \eta > \frac{U^{\frac{m-1}{2}}}{(A_m)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} (f^m)'(0) &= V \Rightarrow V = V_* U^{\frac{m+1}{2}} \\ \text{tel que : } V_* &= -\sqrt{\frac{2m \cdot b}{m+1}}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.2.1, les profils f et g vérifient :

$$\begin{aligned} -(f^m)'(0) &= g^p(0) \\ -(g^n)'(0) &= f^q(0) \end{aligned}$$

tel que :

$$\begin{cases} f(0) = U_1, (f^m)'(0) = V_{*1} U_1^{\frac{m+1}{2}} \\ g(0) = U_2, (g^n)'(0) = V_{*2} U_2^{\frac{n+1}{2}}. \end{cases}$$

Si

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{m-1} \Rightarrow -\alpha_1 > 0 \\ \beta_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{n-1} \Rightarrow -\alpha_2 > 0 \end{cases}$$

dans ce cas

$$\begin{cases} V_{*1} = -\sqrt{\frac{2m}{m^2-1}} \\ V_{*2} = -\sqrt{\frac{2n}{n^2-1}}. \end{cases}$$

Le système (2.2.9) sera comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{m+1}{2} & -p \\ -q & \frac{n+1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln(U_1) \\ \ln(U_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\ln\left(\sqrt{\frac{2m}{m^2-1}}\right) \\ -\ln\left(\sqrt{\frac{2n}{n^2-1}}\right) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \ln(U_1) \\ \ln(U_2) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) - pq} \begin{pmatrix} \frac{n+1}{2} & p \\ q & \frac{m+1}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\ln\left(\sqrt{\frac{2m}{m^2-1}}\right) \\ -\ln\left(\sqrt{\frac{2n}{n^2-1}}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \ln(U_1) = -\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\ln\sqrt{\frac{2m}{m^2-1}}\right)+p\left(\ln\sqrt{\frac{2n}{n^2-1}}\right)}{\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)-pq} \\ \ln(U_2) = -\frac{\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\ln\sqrt{\frac{2n}{n^2-1}}\right)+q\left(\ln\sqrt{\frac{2m}{m^2-1}}\right)}{\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)-pq} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_1 = e^{-\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\ln\sqrt{\frac{2m}{m^2-1}}\right)+p\left(\ln\sqrt{\frac{2n}{n^2-1}}\right)}{\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)-pq}} \\ U_2 = e^{-\frac{\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\ln\sqrt{\frac{2n}{n^2-1}}\right)+q\left(\ln\sqrt{\frac{2m}{m^2-1}}\right)}{\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)-pq}} \end{cases}$$

donc les profils f et g donnés comme suit :

$$\begin{cases} f(\xi) = \left(\frac{(m-1)}{(2m(m+1))} \left(U_1^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{(2m(m+1))}{(m-1)} \right)^{\frac{1}{2}} - \xi \right)^2 \right)^{\frac{1}{m-1}}, & \text{si } 0 \leq x \leq U_1^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{(2m(m+1))}{(m-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & , \text{ si } x > U_1^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{(2m(m+1))}{(m-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(\zeta) = \left(\frac{(n-1)}{(2n(n+1))} \left(U_2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{(2n(n+1))}{(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}} - \zeta \right)^2 \right)^{\frac{1}{n-1}}, & \text{si } 0 \leq x \leq U_2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{(2n(n+1))}{(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & , \text{ si } x > U_2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{(2n(n+1))}{(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

La solution auto-similaire sous la forme (2.2.1) du problème (1.2.1) – (1.2.2) dans le cas

$(\beta_1, \beta_2 = 0)$ donnée comme :

$$\begin{cases} u(x, t) = (T - t)^{\frac{-1}{m-1}} \left(\frac{(m-1)}{(2m(m+1))} \left(U_1^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{(2m(m+1))}{(m-1)} \right)^{\frac{1}{2}} - x \right)^2 \right)^{\frac{1}{m-1}}, & 0 \leq x \leq U_1^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{(2m(m+1))}{(m-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ v(x, t) = (T - t)^{\frac{-1}{n-1}} \left(\frac{(n-1)}{(2n(n+1))} \left(U_2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{(2n(n+1))}{(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}} - x \right)^2 \right)^{\frac{1}{n-1}}, & 0 \leq x \leq U_2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{(2n(n+1))}{(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Chapitre 3

Existence globale et explosion

3.1 Existence et unicité

En suite, nous traitons le problème de l'existence et l'unicité du système (1.2.1) – (1.2.3), dans le cas les conditions initiales ($u_0 \equiv v_0 \equiv 0$). On comence par les définitions suivantes :

Définition 3.1.1 (Subsolution)

On dit que le couple $(\underline{u}, \underline{v})$ est une subsolution de (1.2.1) – (1.2.2), si elle satisfait :

$$\begin{cases} \underline{u}_t \leq (\underline{u}^m)_{xx} , x > 0 \\ \underline{v}_t \leq (\underline{v}^n)_{xx} , t \in]0, T[\\ \\ \begin{cases} -(\underline{u}^m)_x(0, t) \leq \underline{v}^p(0, t) \\ -(\underline{v}^n)_x(0, t) \leq \underline{u}^q(0, t) \end{cases} , t \in]0, T[. \end{cases}$$

Définition 3.1.2 (Supersolution)

On dit que le couple (\bar{u}, \bar{v}) est une supersolution de (1.2.1) – (1.2.2), si elle satisfait :

$$\begin{cases} \bar{u}_t \geq (\bar{u}^m)_{xx} , x > 0 \\ \bar{v}_t \geq (\bar{v}^n)_{xx} , t \in]0, T[\\ \\ \begin{cases} -(\bar{u}^m)_x(0, t) \geq \bar{v}^p(0, t) \\ -(\bar{v}^n)_x(0, t) \geq \bar{u}^q(0, t) \end{cases} , t \in]0, T[. \end{cases}$$

Avec ces définitions de super et subsolution, nous pouvons affirmer un lemme de comparaison.

Lemme 3.1.1 *Soit (\bar{u}, \bar{v}) supersolution et $(\underline{u}, \underline{v})$ subsolution.*

Si

$$\underline{u}(x, 0) \leq \bar{u}(x, 0), \quad \underline{v}(x, 0) \leq \bar{v}(x, 0),$$

avec

$$\underline{u}(0, 0) < \bar{u}(0, 0), \quad \underline{v}(0, 0) < \bar{v}(0, 0),$$

alors

$$\underline{u}(x, t) \leq \bar{u}(x, t), \quad \underline{v}(x, t) \leq \bar{v}(x, t).$$

Proposition 3.1.1 *Soit (\bar{u}, \bar{v}) supersolution et $(\underline{u}, \underline{v})$ subsolution.*

Si

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(x, 0) \geq u_0(x) \\ \bar{v}(x, 0) \geq v_0(x) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0(x) \geq \underline{u}(x, 0) > 0 \\ v_0(x) \geq \underline{v}(x, 0) > 0 \end{array} \right.$$

alors la solution (u, v) du problème (1.2.1) – (1.2.3) vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t) \\ \underline{v}(x, t) \leq v(x, t) \leq \bar{v}(x, t). \end{array} \right.$$

Théorème 3.1.1

a) *Soit $pq < \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$. Alors il existe une solution non triviale avec les conditions initiales égales zéro qui devient positive à $x = 0$ instantanément, il n'y pas l'unicité pour le problème (1.2.1) – (1.2.3) avec les conditions initiales égales zéro.*

b) *Soit $pq \geq \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$. La solution de (1.2.1) – (1.2.3) avec les conditions initiales égales zéro est unique.*

Preuve. a) Les solutions auto-similaires construites au théorème 2.2.2 deviennent positives à $x = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = t^{\alpha_1} f\left(\frac{x}{t^{\beta_1}}\right) \\ v(x, t) = t^{\alpha_2} g\left(\frac{x}{t^{\beta_2}}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = t^{\alpha_1} f(0) \\ v(0, t) = t^{\alpha_2} g(0). \end{array} \right.$$

On a les profils f et g existent pour $f(0) = U_1 \geq 0$ et $g(0) = U_1 \geq 0$, alors $u(0, t) \geq 0$ et $v(0, t) \geq 0$.

Il n'y a pas l'unicité car $\exists f_1, g_1$, tel que :

$$\begin{cases} u_1(x, t) = t^{\alpha_1} f_1\left(\frac{x}{t^{\beta_1}}\right) & / f_1(0) = 0 \\ v_1(x, t) = t^{\alpha_2} g_1\left(\frac{x}{t^{\beta_2}}\right) & / g_1(0) = 0 \end{cases}$$

et $\exists f_2, g_2$, tel que :

$$\begin{cases} u_2(x, t) = t^{\alpha_1} f_2\left(\frac{x}{t^{\beta_1}}\right) & / f_2(0) = U_1 > 0 \\ v_2(x, t) = t^{\alpha_2} g_2\left(\frac{x}{t^{\beta_2}}\right) & / g_2(0) = U_2 > 0 \end{cases}$$

dans les deux cas $u_0(x) = v_0(x) = 0$.

b) Nous pouvons construire de petites supersolutions à l'aide des solutions auto-similaire de forme exponentielle.

Tout d'abord, on choisit $\tilde{q} \leq q$, tel que :

$$p\tilde{q} = \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

et soit :

$$\begin{cases} \bar{u}(x, t) = e^{\alpha_1(t+T)} f(\xi) & / \xi = \frac{x}{e^{\beta_1(t+T)}} \\ \bar{v}(x, t) = e^{\alpha_2(t+T)} g(\zeta) & / \zeta = \frac{x}{e^{\beta_2(t+T)}}. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \bar{u}_t &= \alpha_1 e^{\alpha_1(t+T)} f(\xi) - \beta_1 \xi e^{\alpha_1(t+T)} f'(\xi) \\ (\bar{u}^m)_{xx} &= e^{(m\alpha_1 - 2\beta_1)(t+T)} (f^m)''(\xi) \\ \bar{v}_t &= \alpha_2 e^{\alpha_2(t+T)} g(\zeta) - \beta_2 \zeta e^{\alpha_2(t+T)} g'(\zeta) \\ (\bar{v}^n)_{xx} &= e^{(n\alpha_2 - 2\beta_2)(t+T)} (g^n)''(\zeta) \end{aligned}$$

on a (\bar{u}, \bar{v}) supersolution, c-à-d :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (\bar{u}^m)_{xx} \leq \bar{u}_t \\ (\bar{v}^n)_{xx} \leq \bar{v}_t \\ -(\bar{u}^m)_x(0, t) \geq \bar{v}^p(0, t) \\ -(\bar{v}^n)_x(0, t) \geq \bar{u}^{\tilde{q}}(0, t) \geq \bar{u}^q(0, t) \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} e^{(m\alpha_1 - 2\beta_1)(t+T)} (f^m)''(\xi) \leq \alpha_1 e^{\alpha_1(t+T)} f(\xi) - \beta_1 \xi e^{\alpha_1(t+T)} f'(\xi) \\ e^{(n\alpha_2 - 2\beta_2)(t+T)} (g^n)''(\zeta) \leq \alpha_2 e^{\alpha_2(t+T)} g(\zeta) - \beta_2 \zeta e^{\alpha_2(t+T)} g'(\zeta) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -e^{(m\alpha_1 - \beta_1)(t+T)} (f^m)'(0) \geq e^{p\alpha_2(t+T)} g^p(0) \\ -e^{(n\alpha_2 - \beta_2)(t+T)} (g^n)'(0) \geq e^{\tilde{q}\alpha_1(t+T)} f^{\tilde{q}}(0) \geq e^{q\alpha_1(t+T)} f^q(0). \end{cases}$$

On note :

$$\begin{cases} m\alpha_1 - 2\beta_1 = \alpha_1 \\ n\alpha_2 - 2\beta_2 = \alpha_2 \\ m\alpha_1 - \beta_1 = p\alpha_2 \\ n\alpha_2 - \beta_2 = \tilde{q}\alpha_1. \end{cases}$$

Donc (\bar{u}, \bar{v}) est une supersolution si f et g vérifient :

$$\begin{cases} (f^m)''(\xi) + \beta_1 \xi f'(\xi) \leq \alpha_1 f(\xi) \\ (g^n)''(\zeta) + \beta_2 \zeta g'(\zeta) \leq \alpha_2 g(\zeta) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -(f^m)'(0) \geq g^p(0) \\ -(g^n)'(0) \geq f^{\tilde{q}}(0) \geq f^q(0). \end{cases}$$

D'après le théorème 2.2.3, les profils f et g existent $\forall \alpha_1 > 0$ et $\alpha_2, \beta_1, \beta_2$ donnés comme (2.2.14).

Nous observons que ce couple (\bar{u}, \bar{v}) est une supersolution tant que $\bar{u}(0, t) \leq 1$, car :

$$\bar{u}^{\tilde{q}}(0, t) \geq \bar{u}^q(0, t) \text{ et } \tilde{q} \leq q.$$

D'autre part on a :

$$\begin{cases} 0 \equiv u_0(x) \leq \bar{u}(x, 0) \\ 0 \equiv v_0(x) \leq \bar{v}(x, 0) \end{cases}$$

par la comparaison du lemme 3.1.1, nous obtenons que chaque solution des conditions initiales égale zéro satisfait :

$$\begin{cases} u(x, t) \leq \bar{u}(x, t) \\ v(x, t) \leq \bar{v}(x, t). \end{cases}$$

Comme (\bar{u}, \bar{v}) peut être choisi aussi petits (on choisissant T négative et assez grand), nous concluons que $u \equiv v \equiv 0$. ■

Maintenant, nous indiquons un lemme qui garantit que, pour certaines conditions initiales, la solution de (1.2.1) – (1.2.3), croissante avec le temps c-à-d ($u_t \geq 0$, $v_t \geq 0$).

Lemme 3.1.2 Soit (u_0, v_0) les conditions initiales du problème (1.2.1) – (1.2.3), tel que u_0 et v_0 sont lisses, satisfaisant à la condition de compatibilité à la limite c-à-d :

$$\begin{cases} -(u_0^m)_x(0) = v_0^p(0) \\ -(v_0^n)_x(0) = u_0^q(0) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (u_0^m)_{xx} \geq 0 \\ (v_0^n)_{xx} \geq 0. \end{cases}$$

Alors u et v sont croissantes avec le temps ($u_t, v_t \geq 0$).

Preuve. On pose $z = u_t$ et $w = v_t$, comme les solutions sont lisses, nous pouvons faire la dérivée par rapport à t , donc

$$\begin{aligned} z_t &= (u_t)_t \\ &= ((u^m)_{xx})_t \\ &= ((u^m)_t)_{xx} \\ &= (m \cdot u_t \cdot u^{m-1})_{xx} \\ &= (m \cdot u^{m-1} z)_{xx} \end{aligned}$$

de même pour w

$$w_t = (n \cdot v^{n-1} w)_{xx}$$

et les conditions aux limites données par :

$$\begin{cases} -(m \cdot u^{m-1} z)_x(0, t) = p \cdot v^{p-1} w(0, t) \\ -(n \cdot v^{n-1} w)_x(0, t) = q \cdot u^{q-1} z(0, t). \end{cases}$$

Donc on obtient que (z, w) est une solution de :

$$\begin{cases} z_t = (m \cdot u^{m-1} z)_{xx} \\ w_t = (n \cdot v^{n-1} w)_{xx} \\ \begin{cases} -(m \cdot u^{m-1} z)_x(0, t) = p \cdot v^{p-1} w(0, t) \\ -(n \cdot v^{n-1} w)_x(0, t) = q \cdot u^{q-1} z(0, t). \end{cases} \end{cases}$$

Les conditions initiales satisfont :

$$\begin{cases} u_t(x, 0) = (u_0^m)_{xx}(x, 0) \geq 0 \\ v_t(x, 0) = (v_0^n)_{xx}(x, 0) \geq 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} z(x, 0) \geq 0 \\ w(x, 0) \geq 0. \end{cases}$$

Pour conclure la preuve, nous appliquons le principe du maximum. ■

Remarque 3.1.1 *Si les conditions initiales sont à support compact, la solution (u, v) si elle est à support compact, la longueur des supports est plus grande car :*

$$u(x, t) \geq u_0(x), v(x, t) \geq v_0(x).$$

3.2 Résultats principaux

Dans cette section nous représentons quelques résultats pour le problème (1.2.1) – (1.2.3).

Théorème 3.2.1 (I) *Si $pq \leq \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$, chaque solution non négative de (1.2.1)–(1.2.3) est globale dans le temps.*

(II) *Si $pq > \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$, le système (1.2.1) – (1.2.3) admet une solution blow up dans un temps fini.*

Théorème 3.2.2 *Supposons que $pq > \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$.*

(III) *Si $\min \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2\} > 0$, alors il existe une solution globale du système (1.2.1) – (1.2.3).*

(IV) *Si $\max \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2\} < 0$, alors chaque solution non triviale et non négative est blow up.*

Par conséquent, l'exposant critique de l'existence globale est :

$$pq = \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

et l'exposant critique de type Fujita est :

$$\min \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2\} = 0.$$

Remarque 3.2.1 *Les valeurs, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont les exposants des solutions auto-similaire au problème (1.2.1) – (1.2.2) dans le chapitre 2, et données comme (2.2.5) et (2.2.6).*

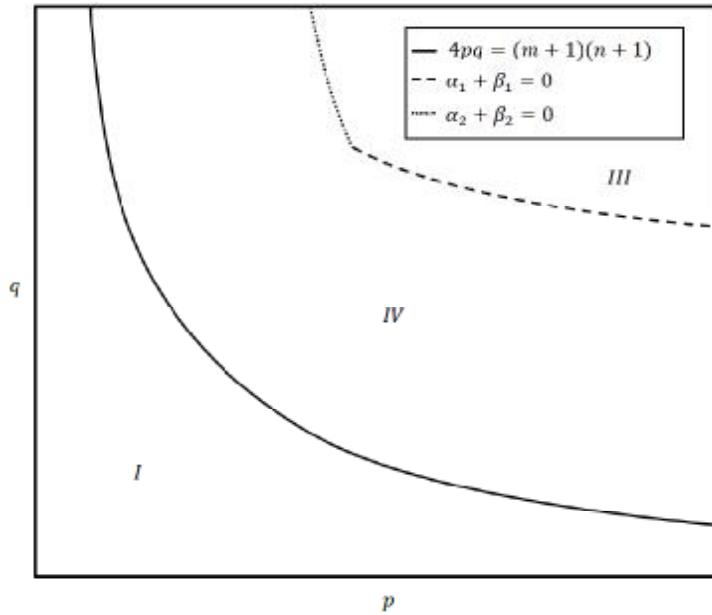


Figure 3.2.1 : Les courbes critiques de l'existence globale et de type Fujita

Dans la Figure 3.2.1, nous représentons en termes de p et q pour m et n fixe, les courbes critiques et les régions I, IV et III délimitées par eux. Ces régions correspondent aux comportements (I), (IV) et (III) dans le théorème 3.2.1 et le théorème 3.2.2.

On remarque également que le théorème 3.2.1 et le théorème 3.2.2 contient un cas particulier, le résultat de [15], en effet la solution de (1.2.4) produit une solution (u, u) à problème (1.2.1) – (1.2.3), avec $n = m$, $q = p$, et $u_0(x) = v_0(x)$.

Théorème 3.2.3 *Soit (u, v) une solution blow up de (1.2.1) – (1.2.3), augmente avec le temps c-à-d vérifie que $(u_t, v_t \geq 0)$. Alors il existe des constantes positives c, C telles que :*

$$\begin{aligned} c(T-t)^{\alpha_1} &\leq \|u(\cdot, t)\|_{\infty} \leq C(T-t)^{\alpha_1} \\ c(T-t)^{\alpha_2} &\leq \|v(\cdot, t)\|_{\infty} \leq C(T-t)^{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Nous rappelons que, dans le cas blow up $pq > ((m+1)/2)((n+1)/2)$, c-à-d $\alpha_1, \alpha_2 < 0$.

La preuve du théorème (voir [12]).

Définition 3.2.1 (L'ensemble d'explosion)

L'ensemble d'explosion (blow up) d'une fonction u , noté par $B(u)$ et définie par :

$$B(u) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ : \limsup_{t \rightarrow T^-} u(x, t) = +\infty \right\}.$$

En ce qui concerne l'ensemble des blow up de problème (1.2.1) – (1.2.3), nous prouvons le théorème suivant, qui est une conséquence directe des résultats connus sur blow up de frontière, (voir [13] et [4]).

Théorème 3.2.4 Soit (u, v) une solution blow up de (1.2.1) – (1.2.3), et soit $B(u)$, $B(v)$ les ensembles des blow up.

S'il existe $c, C > 0$, tel que :

$$\begin{aligned} c(T-t)^{\alpha_1} &\leq u(0, t) \leq C(T-t)^{\alpha_1} \\ c(T-t)^{\alpha_2} &\leq v(0, t) \leq C(T-t)^{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Alors les ensembles des blow up peuvent être déterminées suivant le signe de β_1, β_2 .

- ▶ Si $\beta_1 > 0$, $B(u) = \{0\}$.
- ▶ Si $\beta_1 = 0$, $B(u)$ est un intervalle borné contenant 0.
- ▶ Si $\beta_1 < 0$, $B(u) = \mathbb{R}_+$.
- ▶ Si $\beta_2 > 0$, $B(v) = \{0\}$.
- ▶ Si $\beta_2 = 0$, $B(v)$ est un intervalle borné contenant 0.
- ▶ Si $\beta_2 < 0$, $B(v) = \mathbb{R}_+$.

Remarque 3.2.2 Comme un corollaire du théorème 3.2.3 et théorème 3.2.4, nous obtenons nouveaux résultats pour le problème scalaire (1.2.4), à savoir, le taux de blow-up pour augmenter les solutions est $(T-t)^{1/(m+1-2p)}$, et l'ensemble de blow-up est \mathbb{R}_+ si $(m+1)/2 < p < m$, un intervalle borné si $p = m$ et $x = 0$ si $p > m$.

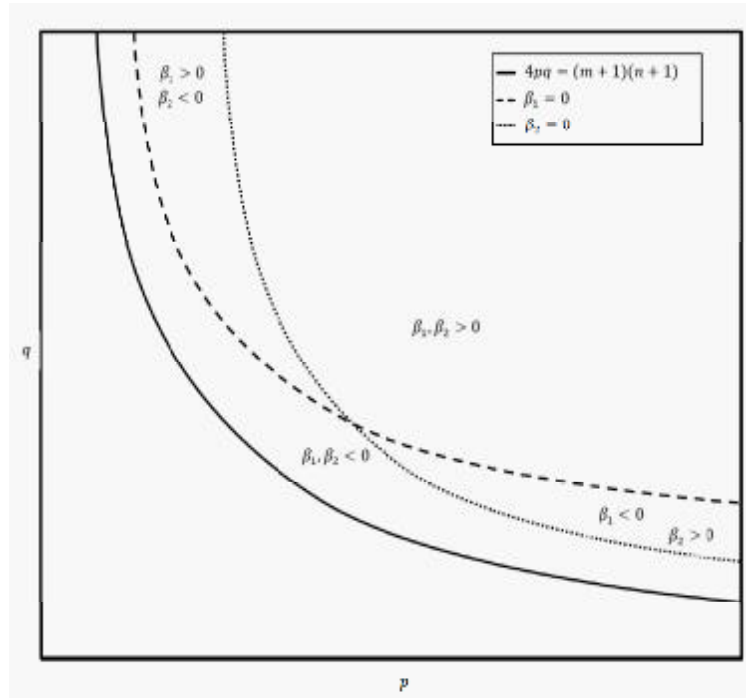


Figure 3.2.2 : Les régions des ensembles Blow up

Dans la Figure 3.2.2, nous représentons pour m et n fixe, les courbes qui séparent les différents comportements de la Blow-up définie.

Nous observons qu'il y a neuf régions différentes :

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| (1) $\beta_1, \beta_2 > 0,$ | (2) $\beta_1, \beta_2 < 0,$ | (3) $\beta_1 > 0, \beta_2 < 0,$ |
| (4) $\beta_1 < 0, \beta_2 > 0,$ | (5) $\beta_1 = 0, \beta_2 > 0,$ | (6) $\beta_1 = 0, \beta_2 < 0,$ |
| (7) $\beta_1 < 0, \beta_2 = 0,$ | (8) $\beta_1 > 0, \beta_2 = 0,$ | (9) $\beta_1 = \beta_2 = 0.$ |

Donc il y a six **(6)** possibilités :

1. Deux fonctions blow-up pour $x = 0$, $(\beta_1, \beta_2 > 0)$.
2. Une fonction blow-up pour $x = 0$ et une autre dans un intervalle borné, $(\beta_1 = 0, \beta_2 > 0$ ou $\beta_1 > 0, \beta_2 = 0)$.
3. Une fonction blow-up pour $x = 0$ et une autre fonction blow-up dans \mathbb{R}_+ , $(\beta_1 < 0, \beta_2 > 0$ ou $\beta_1 > 0, \beta_2 < 0)$.

4. Deux fonctions blow-up dans un intervalle borné, $(\beta_1 = \beta_2 = 0)$.
5. Une seule fonction blow-up dans un intervalle et l'autre en \mathbb{R}_+ , $(\beta_1 < 0, \beta_2 = 0$ ou $\beta_1 = 0, \beta_2 < 0)$.
6. Deux fonctions blow-up dans \mathbb{R}_+ , $(\beta_1, \beta_2 < 0)$.

Remarque 3.2.3 *D'après la solution explicite, pour $(\beta_1 = \beta_2 = 0)$ on a deux fonctions blow up dans un intrvalle borné et on a :*

$$\left[0, U_1^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{(2m(m+1))}{(m-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \subseteq B(u)$$

$$\left[0, U_2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{(2n(n+1))}{(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \subseteq B(v).$$

3.3 Preuve des résultats principaux

Dans cette section nous allons montrer le théorème 3.2.1 et le théorème 3.2.2, nous allons organiser la preuve dans plusieurs lemmes. Les méthodes des preuves sont basées sur la construction des solutions auto similaire et sur les arguments de comparaison, et enfin on montre le théorème 3.2.4, c-à-d on montre l'ensemble des Blow up (explosion des solutions).

3.3.1 L'existence globale

Notre premier lemme démontre la partie (I) du théorème 3.2.1.

Preuve. Il suffit de construire une supersolution globale avec les conditions initiales plus grandes que nécessaire, à l'aide des solutions auto similaires de forme exponentielle, tout d'abord nous choisissons $\tilde{q} \geq q$, tel que :

$$p\tilde{q} = \left(\frac{m+1}{2} \right) \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

et soit :

$$\begin{cases} \bar{u}(x, t) = e^{\alpha_1(t+T)} f(\xi) & / \xi = \frac{x}{e^{\beta_1(t+T)}} \\ \bar{v}(x, t) = e^{\alpha_2(t+T)} g(\zeta) & / \zeta = \frac{x}{e^{\beta_2(t+T)}}. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} (\bar{u}^m)_{xx} \leq \bar{u}_t \\ (\bar{v}^n)_{xx} \leq \bar{v}_t \\ -(\bar{u}^m)_x(0, t) \geq \bar{v}^p(0, t) \\ -(\bar{v}^n)_x(0, t) \geq \bar{u}^{\tilde{q}}(0, t) \geq \bar{u}^q(0, t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{(m\alpha_1 - 2\beta_1)(t+T)} (f^m)''(\xi) \leq \alpha_1 e^{\alpha_1(t+T)} f(\xi) - \beta_1 \xi e^{\alpha_1(t+T)} f'(\xi) \\ e^{(n\alpha_2 - 2\beta_2)(t+T)} (g^n)''(\zeta) \leq \alpha_2 e^{\alpha_2(t+T)} g(\zeta) - \beta_2 \zeta e^{\alpha_2(t+T)} g'(\zeta) \\ -e^{(m\alpha_1 - \beta_1)(t+T)} (f^m)'(0) \geq e^{p\alpha_2(t+T)} g^p(0) \\ -e^{(n\alpha_2 - \beta_2)(t+T)} (g^n)'(0) \geq e^{\tilde{q}\alpha_1(t+T)} f^{\tilde{q}}(0) \geq e^{q\alpha_1(t+T)} f^q(0). \end{cases}$$

On note :

$$\begin{cases} m\alpha_1 - 2\beta_1 = \alpha_1 \\ n\alpha_2 - 2\beta_2 = \alpha_2 \\ m\alpha_1 - \beta_1 = p\alpha_2 \\ n\alpha_2 - \beta_2 = \tilde{q}\alpha_1. \end{cases}$$

Donc (\bar{u}, \bar{v}) est une supersolution si f et g vérifient :

$$\begin{cases} (f^m)''(\xi) + \beta_1 \xi f'(\xi) \leq \alpha_1 f(\xi) \\ (g^n)''(\zeta) + \beta_2 \zeta g'(\zeta) \leq \alpha_2 g(\zeta) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -(f^m)'(0) \geq g^p(0) \\ -(g^n)'(0) \geq f^{\tilde{q}}(0) \geq f^q(0). \end{cases}$$

D'après le théorème 2.2.3, les profils f et g existent $\forall \alpha_1 > 0$ et $\alpha_2, \beta_1, \beta_2$ donnés comme (2.2.14).

Maintenant, nous observons que ce couple (\bar{u}, \bar{v}) est une supersolution de (1.2.1)–(1.2.2), tant que $\bar{u}(0, t) \geq 1$, car :

$$\bar{u}^{\tilde{q}}(0, t) \geq \bar{u}^q(0, t) \text{ et } \tilde{q} \geq q.$$

Cela peut être fait en choisissant T assez grand.

Donc toujours on suppose que :

$$\begin{cases} e^{\alpha_1 T} f\left(\frac{x}{e^{\beta_1 T}}\right) = \bar{u}(x, 0) \geq u_0(x) \\ e^{\alpha_2 T} g\left(\frac{x}{e^{\beta_2 T}}\right) = \bar{v}(x, 0) \geq v_0(x). \end{cases}$$

Alors par la comparaison de lemme 3.1.1, nous obtenons que chaque solution est globale. ■

3.3.2 Explosion en temps fini

Pour prouver la non existence des solutions globales, nous construisons une subsolution auto-similaire blow up du système (1.2.1) – (1.2.3).

Lemme 3.3.1 Soit $pq > \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$.

Alors il existe des fonctions v_1 et v_2 à support compact tel que :

$$\begin{cases} u = (T-t)^{\alpha_1} v_1(\xi) & / \xi = \frac{x}{(T-t)^{\beta_1}} \\ v = (T-t)^{\alpha_2} v_2(\zeta) & / \zeta = \frac{x}{(T-t)^{\beta_2}} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

est une subsolution de (1.2.1) – (1.2.2).

Preuve. Le couple $(\underline{u}, \underline{v})$ est une subsolution de (1.2.1) – (1.2.2), c-à-d :

$$\begin{cases} \underline{u}_t \leq (\underline{u}^m)_{xx} \\ \underline{v}_t \leq (\underline{v}^n)_{xx} \\ -(\underline{u}^m)_x(0, t) \leq \underline{v}^p(0, t) \\ -(\underline{v}^n)_x(0, t) \leq \underline{u}^q(0, t) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} -\alpha_1 (T-t)^{\alpha_1-1} v_1(\xi) + \beta_1 \xi (T-t)^{\alpha_1-1} v_1'(\xi) \leq (T-t)^{m\alpha_1-2\beta_1} (v_1^m)''(\xi) \\ -\alpha_2 (T-t)^{\alpha_2-1} v_2(\zeta) + \beta_2 \zeta (T-t)^{\alpha_2-1} v_2'(\zeta) \leq (T-t)^{n\alpha_2-2\beta_2} (v_2^n)''(\zeta) \\ - (T-t)^{m\alpha_1-\beta_1} (v_1^m)'(0) \leq (T-t)^{p\alpha_2} (v_2)^p(0) \\ - (T-t)^{n\alpha_2-\beta_2} (v_2^n)'(0) \leq (T-t)^{q\alpha_1} (v_1)^q(0) \end{cases}$$

On note :

$$\begin{cases} \alpha_1 - 1 = m\alpha_1 - 2\beta_1 \\ \alpha_2 - 1 = n\alpha_2 - 2\beta_2 \\ m\alpha_1 - \beta_1 = p\alpha_2 \\ n\alpha_2 - \beta_2 = q\alpha_1. \end{cases}$$

On observe que le couple $(\underline{u}, \underline{v})$ est une subsolution si v_1 et v_2 satisfais :

$$\begin{cases} -\alpha_1 v_1(\xi) + \beta_1 \xi v_1'(\xi) \leq (v_1^m)''(\xi) \\ -\alpha_2 v_2(\zeta) + \beta_2 \zeta v_2'(\zeta) \leq (v_2^n)''(\zeta) \\ -(v_1^m)'(0) \leq (v_2)^p(0) \\ -(v_2^n)'(0) \leq (v_1)^q(0) \end{cases}$$

et on remarque que l'inégalité :

$$\begin{cases} (v^m)''(\eta) \geq M.v'(\eta) \\ -(v^m)'(0) \leq c \end{cases}$$

admet des solutions sous la forme :

$$v(\eta) \geq A(a - \eta)_+^{\frac{1}{m-1}}.$$

Nous choisissons :

$$\begin{cases} v_1(\xi) = A_1(a_1 - \xi)_+^{\frac{1}{m-1}} = \max\left(0, A_1(a_1 - \xi)_+^{\frac{1}{m-1}}\right) \\ v_2(\zeta) = A_2(a_2 - \zeta)_+^{\frac{1}{n-1}} = \max\left(0, A_2(a_2 - \zeta)_+^{\frac{1}{n-1}}\right) \end{cases}$$

avec a_1, a_2, A_1, A_2 des constantes, on peut les déterminer.

Alors on a :

$$\begin{cases} (v_1^m)'(\xi) = -\frac{m}{m-1} A_1^m (a_1 - \xi)_+^{\frac{1}{m-1}} \\ (v_1^m)''(\xi) = \frac{m}{(m-1)^2} A_1^m (a_1 - \xi)_+^{\frac{2-m}{m-1}} \\ (v_2^n)'(\zeta) = -\frac{n}{n-1} A_2^n (a_2 - \zeta)_+^{\frac{1}{n-1}} \\ (v_2^n)''(\zeta) = \frac{n}{(n-1)^2} A_2^n (a_2 - \zeta)_+^{\frac{2-n}{n-1}} \end{cases}$$

cette insertion dans la première inégalité nous permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \frac{m}{(m-1)^2} A_1^m (a_1 - \xi)_+^{\frac{2-m}{m-1}} \geq -\alpha_1 A_1 (a_1 - \xi)_+^{\frac{1}{m-1}} - \frac{\beta_1}{(m-1)} \xi A_1 (a_1 - \xi)_+^{\frac{2-m}{m-1}} \\ \frac{n}{(n-1)^2} A_2^n (a_2 - \zeta)_+^{\frac{2-n}{n-1}} \geq -\alpha_2 A_2 (a_2 - \zeta)_+^{\frac{1}{n-1}} - \frac{\beta_2}{(n-1)} \zeta A_2 (a_2 - \zeta)_+^{\frac{2-n}{n-1}} \end{cases}$$

$$0 \leq \xi \leq a_1, 0 \leq \zeta \leq a_2$$

donc

$$\begin{cases} (a_1 - \xi)_+^{\frac{2-m}{m-1}} \left[\frac{m}{(m-1)^2} A_1^{m-1} + \alpha_1 (a_1 - \xi)_+ + \frac{\beta_1}{(m-1)} \xi \right] \geq 0 \\ (a_2 - \zeta)_+^{\frac{2-n}{n-1}} \left[\frac{n}{(n-1)^2} A_2^{n-1} + \alpha_2 (a_2 - \zeta)_+ + \frac{\beta_2}{(n-1)} \zeta \right] \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{(m-1)^2} A_1^{m-1} \geq -\alpha_1 (a_1 - \xi)_+ - \frac{\beta_1}{(m-1)} \xi, \quad \forall \xi \in [0, a_1] \\ \frac{n}{(n-1)^2} A_2^{n-1} \geq -\alpha_2 (a_2 - \zeta)_+ - \frac{\beta_2}{(n-1)} \zeta, \quad \forall \zeta \in [0, a_2] \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{(m-1)^2} A_1^{m-1} \geq -\alpha_1 a_1 + \alpha_1 \xi - \frac{\beta_1}{(m-1)} \xi & \dots (1) \\ \frac{n}{(n-1)^2} A_2^{n-1} \geq -\alpha_2 a_2 + \alpha_2 \zeta - \frac{\beta_2}{(n-1)} \zeta \end{cases} \\
 &\begin{cases} \frac{2m}{(m-1)^2} A_1^{m-1} \geq -\alpha_1 a_1 & \dots (2) \\ \frac{2n}{(n-1)^2} A_2^{n-1} \geq -\alpha_2 a_2 \end{cases} \\
 (2) - (1) &\Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{(m-1)^2} A_1^{m-1} \geq -\alpha_1 \xi + \frac{\beta_1}{(m-1)} \xi \quad \forall \xi \in [0, a_1] \\ \frac{n}{(n-1)^2} A_2^{n-1} \geq -\alpha_2 \zeta + \frac{\beta_2}{(n-1)} \zeta \quad \forall \zeta \in [0, a_2] \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{(m-1)^2} A_1^{m-1} \geq -\alpha_1 a_1 + \frac{|\beta_1|}{(m-1)} a_1 \\ \frac{n}{(n-1)^2} A_2^{n-1} \geq -\alpha_2 a_2 + \frac{|\beta_2|}{(n-1)} a_2 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} c_1 A_1^{m-1} \geq a_1, \quad /c_1 = \frac{m}{-\alpha_1(m-1)^2 + |\beta_1|(m-1)} > 0 \\ c_2 A_2^{n-1} \geq a_2, \quad /c_2 = \frac{n}{-\alpha_2(n-1)^2 + |\beta_2|(n-1)} > 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Si on remplace v_1 et v_2 dans les conditions aux limites on trouve :

$$\begin{cases} \frac{m}{(m-1)} A_1^m a_1^{\frac{1}{m-1}} \leq A_2^p a_2^{\frac{p}{n-1}} \\ \frac{n}{(n-1)} A_2^n a_2^{\frac{1}{n-1}} \leq A_1^q a_1^{\frac{q}{m-1}} \end{cases}$$

en cas particulier, si :

$$\begin{cases} c_1 A_1^{m-1} = a_1 \\ c_2 A_2^{n-1} = a_2 \end{cases}$$

donc on a :

$$\begin{cases} \frac{m}{(m-1)} A_1^{m+1} c_1^{\frac{1}{m-1}} \leq A_2^{2p} c_2^{\frac{p}{n-1}} \\ \frac{n}{(n-1)} A_2^{n+1} c_2^{\frac{1}{n-1}} \leq A_1^{2q} c_1^{\frac{q}{m-1}}. \end{cases}$$

La condition $(2p)(2q) > (m+1)(n+1)$, implique que A_1 et A_2 assez grands. ■

Corollaire 3.3.1 *Si $pq > \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$.*

Alors il existe des solutions blow up de (1.2.1) – (1.2.3).

Preuve. D'après le lemme 3.3.1, nous prenons les conditions initiales assez grandes tels que :

$$\begin{cases} u_0(x) \geq \underline{u}(x, 0) = T^{\alpha_1} v_1\left(\frac{x}{T^{\beta_1}}\right) \\ v_0(x) \geq \underline{v}(x, 0) = T^{\alpha_2} v_2\left(\frac{x}{T^{\beta_2}}\right). \end{cases}$$

Donc il suffit d'appliquer le lemme 3.1.1, on obtient $(\underline{u}, \underline{v})$ est une subsolution de (1.2.1) – (1.2.3), et par conséquence (u, v) est blow up. ■

Remarque 3.3.1 *Le mot " grand " dans ce corollaire signifie que au moins les valeurs des $u_0(x)$ et $v_0(x)$ sont grandes ou bien les supports des $u_0(x)$ et $v_0(x)$ sont grands.*

Soit :

$$\begin{cases} u_0(x) \geq G_1 > 0, \text{ sur } [0, x_1] \\ v_0(x) \geq G_2 > 0, \text{ sur } [0, x_2] \end{cases}$$

$\forall x_1, x_2 > 0$, on peut choisir $T > 0$ assez petit tel que :

$$\begin{cases} a_1 = c_1 A_1^{m-1} \leq \frac{x_1}{T^{\beta_1}} \\ a_2 = c_2 A_2^{n-1} \leq \frac{x_2}{T^{\beta_2}}. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

D'autre part :

$$\begin{cases} u_0(x) \geq \underline{u}(x, 0), \forall x > 0 \\ v_0(x) \geq \underline{v}(x, 0), \forall x > 0 \end{cases}$$

pour un petit T fixe, on trouve G_1, G_2 assez grands tel que :

$$\begin{cases} T^{\alpha_1} A_1 c_1^{\frac{1}{m-1}} \leq G_1 \\ T^{\alpha_2} A_2 c_2^{\frac{1}{n-1}} \leq G_2 \end{cases} \quad (3.3.3)$$

mais on a (3.3.3) est vraie $\forall G_1, G_2$ pour T assez grand, et si (3.3.3) est vraie pour un grand T fixe, alors (3.3.2) est vraie pour x_1, x_2 sont grands.

3.3.3 Courbe critique de type Fujita

Maintenant, nous traitons les résultats du type de Fujita. C'est-à-dire, nous montrons quand toutes les solutions de (1.2.1) – (1.2.3) blow up dans un temps fini ou les solutions globales et non-existent globales.

Lemme 3.3.2 *Si $pq > \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$, et $\min\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2\} > 0$. Alors il existe une solution globale de (1.2.1) – (1.2.3).*

Preuve. On considérons les fonctions auxiliaires :

$$\begin{cases} \bar{u}(x, t) = (\tau + t)^{\alpha_1} f(\xi), \quad / \xi = (\tau + t)^{\beta_1} \\ \bar{v}(x, t) = (\tau + t)^{\alpha_2} g(\zeta), \quad / \zeta = (\tau + t)^{\beta_2}. \end{cases}$$

Si on montre que (\bar{u}, \bar{v}) est une supersolution de (1.2.1) – (1.2.2) on obtient que :

$$\begin{cases} \alpha_1 - 1 = m\alpha_1 - 2\beta_1 \\ \alpha_2 - 1 = n\alpha_2 - 2\beta_2 \\ m\alpha_1 - \beta_1 = p\alpha_2 \\ n\alpha_2 - \beta_2 = q\alpha_1 \end{cases}$$

et par conséquence f et g vérifient :

$$\begin{cases} (f^m)''(\xi) + \beta_1 \xi f'(\xi) - \alpha_1 f(\xi) \leq 0 \\ (g^n)''(\zeta) + \beta_2 \zeta g'(\zeta) - \alpha_2 g(\zeta) \leq 0 \\ -(f^m)'(0) \geq g^p(0) \\ -(g^n)'(0) \geq f^q(0). \end{cases} \quad (3.3.4)$$

On remarque que l'inégalité :

$$\begin{cases} (f^m)''(\eta) \leq M. (\eta f(\eta))' \\ -(f^m)'(0) \geq c \end{cases}$$

admet une solution sous la forme :

$$f(\eta) \leq A (C^2 - (\eta + a)^2)_+^{\frac{1}{m-1}}.$$

On choisit :

$$\begin{cases} f(\xi) = A_1 (d_1^2 a_1^2 - (\xi + a_1)^2)_+^{\frac{1}{m-1}} \\ g(\zeta) = A_2 (d_2^2 a_2^2 - (\zeta + a_2)^2)_+^{\frac{1}{n-1}} \end{cases}$$

avec $d_i > 1$ et A_i, d_i, a_i des constantes, $i = 1, 2$.

Alors :

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \frac{-2m}{m-1} A_1 (\xi + a_1) (d_1^2 a_1^2 - (\xi + a_1)^2)_+^{\frac{2-m}{m-1}} \\ (f^m)''(\xi) &= \frac{-2m}{m-1} A_1^m (d_1^2 a_1^2 - (\xi + a_1)^2)_+^{\frac{1}{m-1}} + \frac{4m}{(m-1)^2} A_1^m (\xi + a_1)^2 (d_1^2 a_1^2 - (\xi + a_1)^2)_+^{\frac{2-m}{m-1}} \\ g'(\zeta) &= \frac{-2n}{n-1} A_2 (\zeta + a_2) (d_2^2 a_2^2 - (\zeta + a_2)^2)_+^{\frac{2-n}{n-1}} \\ (g^n)''(\zeta) &= \frac{-2n}{n-1} A_2^n (d_2^2 a_2^2 - (\zeta + a_2)^2)_+^{\frac{1}{n-1}} + \frac{4n}{(n-1)^2} A_2^n (\zeta + a_2)^2 (d_2^2 a_2^2 - (\zeta + a_2)^2)_+^{\frac{2-n}{n-1}}. \end{aligned}$$

D'autre part, si on remplace f et g dans (3.3.4), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4m}{(m-1)^2} A_1^{m-1} (\xi + a_1)^2 - \frac{2\beta_1}{m-1} \xi (\xi + a_1) \\ \quad - \left(\frac{2m}{m-1} A_1^{m-1} + \alpha_1 \right) (d_1^2 a_1^2 - (\xi + a_1)^2)_+ \leq 0 \\ \\ \frac{4n}{(n-1)^2} A_2^{n-1} (\zeta + a_2)^2 - \frac{2\beta_2}{n-1} \zeta (\zeta + a_2) \\ \quad - \left(\frac{2n}{n-1} A_2^{n-1} + \alpha_2 \right) (d_2^2 a_2^2 - (\zeta + a_2)^2)_+ \leq 0 \end{array} \right. \quad (3.3.5)$$

tels que

$$0 \leq \zeta, \xi \leq (d_i - 1) a_i, \quad i = 1, 2.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2m}{m-1} A_1^m (d_1^2 - 1)^{\frac{1}{m-1}} a_1^{\frac{m+1}{m-1}} \geq A_2^p (d_2^2 - 1)^{\frac{p}{n-1}} a_2^{\frac{2p}{n-1}} \\ \frac{2n}{n-1} A_2^n (d_2^2 - 1)^{\frac{1}{n-1}} a_2^{\frac{n+1}{n-1}} \geq A_1^q (d_1^2 - 1)^{\frac{q}{m-1}} a_1^{\frac{2q}{m-1}}. \end{array} \right.$$

Si on pose $\eta_1 = \xi + a_1$, $\eta_2 = \zeta + a_2$, $m_1 = m$, $m_2 = n$. Alors l'inégalité (3.3.5) sera :

$$\left(\frac{2m_i(m_i+1)}{(m_i-1)^2} A_i^{m_i-1} - \frac{1}{(m_i-1)} \right) \eta_i^2 + \frac{2\beta_i a_i}{m_i-1} \eta_i - \left(\frac{2m_i}{m_i-1} A_i^{m_i-1} + \alpha_i \right) d_i^2 a_i^2 \leq 0 \quad (3.3.6)$$

tels que :

$$a_i \leq \eta_i \leq d_i^2 a_i^2, \quad i = 1, 2.$$

(on utilise : $\alpha_1 - 1 = m\alpha_1 - 2\beta_1$ et $\alpha_2 - 1 = n\alpha_2 - 2\beta_2$).

Donc $\forall \eta_i \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction :

$$g_i(\eta_i) = \frac{1}{(m_i-1)} \left(\frac{2m_i(m_i+1)}{(m_i-1)} A_i^{m_i-1} - 1 \right) \eta_i^2 + \frac{2\beta_i a_i}{m_i-1} \eta_i - \left(\frac{2m_i}{m_i-1} A_i^{m_i-1} + \alpha_i \right) d_i^2 a_i^2$$

et par suite :

$$g'(\eta_i) = \frac{2}{(m_i-1)} \left(\frac{2m_i(m_i+1)}{(m_i-1)} A_i^{m_i-1} - 1 \right) \eta_i + \frac{2\beta_i a_i}{m_i-1}.$$

Si $\min\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2\} > 0$, alors $\beta_1 > -\alpha_1$ et $\beta_2 > -\alpha_2$. La preuve de (3.3.6), on peut dire qu'il y a deux cas :

► **Cas 1:** $-\alpha_i < \frac{1}{m_i+1}$. Nous pouvons prendre A_i tel que :

$$(-\alpha_i) \frac{m_i-1}{2m_i} < A_i^{m_i-1} < \frac{m_i-1}{2m_i(m_i+1)},$$

par conséquence

$$\frac{2m_i(m_i+1)}{m_i-1}A_i^{m_i-1} < 1,$$

ce qui implique que $g_i(\eta_i)$ atteint le maximum en η_i^*

$$g_i'(\eta_i^*) = 0 \Rightarrow \eta_i^* = \frac{\beta_i a_i (m_i - 1)}{(m_i - 1) - 2m_i(m_i + 1)A_i^{m_i-1}}.$$

Comme $g_i(\eta_i) \leq g_i(\eta_i^*) \leq 0$, alors :

$$\frac{\beta_i^2}{(m_i - 1) - 2m_i(m_i + 1)A_i^{m_i-1}} - \left(\frac{2m_i}{(m_i - 1)}A_i^{m_i-1} + \alpha_i \right) d_i^2 \leq 0,$$

on choisit :

$$d_i^2 > \max \left\{ \frac{\beta_i^2}{(m_i - 1) - 2m_i(m_i + 1)A_i^{m_i-1}} \left(\frac{2m_i}{(m_i - 1)}A_i^{m_i-1} + \alpha_i \right)^{-1}, 1 \right\},$$

donc, en particulier l'inégalité (3.3.6) est vérifiée.

► **Cas 2:** $-\alpha_i \geq \frac{1}{m_i+1} \Rightarrow \beta_i > \frac{1}{m_i+1}$, alors A_i vérifie :

$$\frac{m_i - 1}{2m_i(m_i + 1)} < A_i^{m_i-1} < \frac{m_i - 1}{2m_i}\beta_i,$$

donc

$$\frac{m_i - 1}{2m_i(m_i + 1)}A_i^{m_i-1} > 1,$$

ceci implique que $g_i'(\eta_i) > 0$, $\forall \eta_i \in \mathbb{R}_+$, de plus $\forall \eta_i \in [a_i, d_i a_i]$, ($i = 1, 2$).

Alors $g_i(\eta_i)$ est croissant et par conséquence $g_i(\eta_i)$ admet une maximum en $\eta_i^* = d_i a_i$ tel que $g_i(\eta_i) \leq g_i(\eta_i^*) \leq 0$, donc (en utilisant $\alpha_i(m_i - 1) = 2\beta_i - 1$) on obtient :

$$\left(\frac{2m_i}{(m_i - 1)}A_i^{m_i-1} - \beta_i \right) d_i + \beta_i \leq 0.$$

On prend

$$d_i > \max \left\{ \beta_i \left(\beta_i - \frac{2m_i}{(m_i - 1)}A_i^{m_i-1} \right)^{-1}, 1 \right\},$$

par conséquence (3.3.6), vérifiée pour A_i et d_i .

Dans les deux cas (1, 2), l'inégalité (3.3.6) est vraie pour A_i et d_i stable, si on fixe A_i et d_i dans les conditions aux limites, la condition $(2p)(2q) > (m+1)(n+1)$, implique que a_1, a_2 sont petits. Finalement, on choisit les conditions initiales u_0, v_0 assez petites tel que :

$$\begin{cases} u_0(x) \leq \bar{u}(x, 0) = \tau^{\alpha_1} f\left(\frac{x}{\tau^{\beta_1}}\right) \\ v_0(x) \leq \bar{v}(x, 0) = \tau^{\alpha_2} g\left(\frac{x}{\tau^{\beta_2}}\right). \end{cases}$$

On applique le lemme 3.1.1, on trouve :

$$\begin{cases} u(x, t) \leq \bar{u}(x, t) \\ v(x, t) \leq \bar{v}(x, t) \end{cases}$$

alors (u, v) est globale avec petite condition initiale. ■

Remarque 3.3.2 Le mot " *petit* " dans ce lemme signifie que les valeurs des u_0, v_0 sont petites et les supports des u_0, v_0 sont petits aussi.

Soit

$$\begin{cases} 0 < u_0(x) \leq G_1, \text{ sur } [0, x_1] \\ 0 < v_0(x) \leq G_2, \text{ sur } [0, x_2] \end{cases}$$

$\forall x_1, x_2 > 0$, on peut choisir τ assez grand tel que :

$$\begin{cases} \frac{x_1}{\tau^{\beta_1}} \leq ((d_1^2 - 1) a_1^2) \\ \frac{x_2}{\tau^{\beta_2}} \leq ((d_2^2 - 1) a_2^2). \end{cases} \quad (3.3.7)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{cases} u_0(x) \leq \bar{u}(x, 0), \forall x > 0 \\ v_0(x) \leq \bar{v}(x, 0), \forall x > 0 \end{cases}$$

pour τ assez grand on trouve G_1, G_2 assez petits tel que :

$$\begin{cases} G_1 \leq \tau^{\alpha_1} \left(((d_1^2 - 1) a_1^2)^{\frac{1}{m-1}} \right) \\ G_2 \leq \tau^{\alpha_2} \left(((d_2^2 - 1) a_2^2)^{\frac{1}{n-1}} \right). \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Si τ assez petit alors (3.3.7) est vraie pour x_1 et x_2 sont petits, mais on a (3.3.8) est vraie $\forall \tau > 0$ ceci implique que G_1, G_2 sont petits et x_1, x_2 sont petits aussi.

Lemme 3.3.3 Si $pq > \left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)$, et $\max\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2\} < 0$, alors chaque solution non triviale et non négative est blow up.

Preuve. Nous construisons une solution auto similaire (profil de Barenblatt).

$$\begin{cases} u_B(x, t) = (\tau + t)^{\frac{-1}{m+1}} h(\xi) / \xi = x(\tau + t)^{\frac{-1}{m+1}} \\ v_B(x, t) = (\tau + t)^{\frac{-1}{n+1}} h(\zeta) / \zeta = x(\tau + t)^{\frac{-1}{n+1}} \end{cases}$$

tel que :

$$\begin{cases} h(\xi) = c(m) (c^2 - \xi^2)_+^{\frac{1}{m-1}}, & /c(m) = \left(\frac{m-1}{2m(m+1)}\right)^{\frac{1}{m-1}} \\ h(\zeta) = c(n) (c^2 - \zeta^2)_+^{\frac{1}{n-1}}, & /c(n) = \left(\frac{n-1}{2n(n+1)}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $h(\xi)$, $h(\zeta)$ satisfont :

$$\begin{aligned} (h^m)''(\xi) + \frac{\xi}{m+1} h'(\xi) + \frac{1}{m+1} h(\xi) &= 0, \quad /h'(0) = 0 \\ (h^n)''(\zeta) + \frac{\zeta}{n+1} h'(\zeta) + \frac{1}{n+1} h(\zeta) &= 0, \quad /h'(0) = 0 \end{aligned}$$

ce qui implique cela :

$$\begin{cases} (u_B)_t = (u_B^m)_{xx}, & \forall x > 0, t > 0 \\ -(u_B^m)_x(0, t) = 0 \\ (v_B)_t = (v_B^n)_{xx}, & \forall x > 0, t > 0 \\ -(v_B^n)_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

D'autre part, $u(x, t)$, $v(x, t)$, sont non triviaux et non négatifs, nous voyons $u(0, t_0)$, $v(0, t_0) > 0$, pour $t_0 > 0$ (rivalisent avec une solution de Barenblatt des équations correspondantes).

Il est à noter que $u(x, t_0)$, $v(x, t_0) > 0$, sont continus, alors il existe $\tau > 0$ assez grand et c assez petit tels que les solutions auto-similaires (u_B, v_B) , est une subsolution de (1.2.1) – (1.2.3) en $]0, +\infty[\times [t_0, T[$, et par conséquent :

$$\begin{cases} u(x, t) \geq u_B(x, t), & \forall x > 0, t \geq t_0. \\ v(x, t) \geq v_B(x, t) \end{cases}$$

Si $\max\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2\} < 0$, alors $\beta_1 < -\alpha_1$, $\beta_2 < -\alpha_2$, donc $\forall T$ assez grand on a :

$$\begin{aligned} T^{\beta_1} &\ll T^{-\alpha_1} \\ T^{\beta_2} &\ll T^{-\alpha_2}. \end{aligned}$$

Donc il existe $t^* \geq t_0$ tels que :

$$\begin{aligned} T^{\beta_1} &\ll (\tau + t^*)^{\frac{1}{m+1}} \ll T^{-\alpha_1} \\ T^{\beta_2} &\ll (\tau + t^*)^{\frac{1}{n+1}} \ll T^{-\alpha_2}. \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Soit $\underline{u}(x, t)$, $\underline{v}(x, t)$ être défini par (3.3.1) dans le lemme 3.3.1 c-à-d :

$$\begin{aligned}\underline{u}(x, t) &= (T - t)^{\alpha_1} A_1 (a_1 - \xi)_+^{\frac{1}{m-1}} \\ \underline{v}(x, t) &= (T - t)^{\alpha_2} A_2 (a_2 - \zeta)_+^{\frac{1}{n-1}},\end{aligned}$$

les inégalités (3.3.9) impliquent cela :

$$\begin{aligned}T^{\alpha_1} A_1 \left(a_1 - \frac{x}{T^{\beta_1}}\right)^{\frac{1}{m-1}} &\leq (\tau + t^*)^{\frac{-1}{m+1}} c(m) \left(c^2 - \left(x(\tau + t^*)^{\frac{-1}{m+1}}\right)^2\right)^{\frac{1}{m-1}} \leq u(x, t^*) \\ T^{\alpha_2} A_2 \left(a_2 - \frac{x}{T^{\beta_2}}\right)^{\frac{1}{n-1}} &\leq (\tau + t^*)^{\frac{-1}{n+1}} c(n) \left(c^2 - \left(x(\tau + t^*)^{\frac{-1}{n+1}}\right)^2\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq v(x, t^*)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{u}(x, 0) \leq u_B(x, t^*) \leq u(x, t^*) \\ \underline{v}(x, 0) \leq v_B(x, t^*) \leq v(x, t^*) \end{cases}, \quad \forall x > 0$$

donc d'après le principe de comparaison :

$$\begin{cases} \underline{u}(x, t) \leq u(x, t + t^*) \\ \underline{v}(x, t) \leq v(x, t + t^*) \end{cases}, \quad \forall x > 0, \quad \forall t > 0.$$

Comme la preuve du lemme 3.3.1, nous voyons (u, v) blow up à temps fini T , par conséquent (u, v) blow up en temps fini qui n'est pas plus grand que $(T + t^*)$.

On observe que cela (3.3.9) est vrai pour non triviale (u_0, v_0) , nous savons cela à chaque solution non négative et non triviale de (1.2.1) – (1.2.3), est Blow up. ■

Remarque 3.3.3 *Si $\alpha_1 + \beta_1 = 0$ ou $\alpha_2 + \beta_2 = 0$ la solution est Blow up. Le principe de la preuve est à supposer que la solution est globale et le résultat est contradiction (Voir [12]).*

3.3.4 L'ensemble d'explosion

Dans la suite, nous prouvons le théorème 3.2.4, en décrivant l'ensemble d'explosion (blow up) pour u et v en ce qui concerne les paramètres p, q, m, n . Pour ce faire, nous utilisons le théorème 3.2.3 et un résultat de [4], voir aussi [7], [1].

Dans [4] étudie le Blow up pour une équation de milieu poreux :

$$w_t = (w^b)_{xx}, \tag{3.3.10}$$

avec une condition aux limite de type :

$$w(0, t) = \Psi(t), \quad (3.3.11)$$

où $\lim_{t \rightarrow T} \Psi(t) \rightarrow +\infty$, et une condition initiale non négative :

$$w(x, 0) = w_0(x). \quad (3.3.12)$$

Premièrement, ils prouvent que le Blow up pour w est un intervalle, éventuellement sont bornés contenant $\{x = 0\}$.

Pour le cas particulier $\Psi(t) = \Psi_0(T - t)^{-a}$, avec $a > 0$ et Ψ_0 est constante, ils prouvent le résultat suivant :

Théorème 3.3.1 *Soit $w(x, t)$ une solution de (3.3.10) – (3.3.12). Alors :*

(a) *Si $a < 1/(b - 1)$, l'ensemble de Blow up est $B(w) = \{0\}$.*

(b) *Si $a = 1/(b - 1)$, l'ensemble de Blow up est un intervalle, de plus :*

$$\left[0, v\Psi_0^{\left(\frac{b-1}{2}\right)}\right) \subseteq B(w) \subseteq \left[0, v\Psi_0^{\left(\frac{b-1}{2}\right)}\right]$$

$$\text{avec } v = \left(\frac{2b(b+1)}{b-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(c) *Si $a > 1/(b - 1)$, alors $B(w) = \mathbb{R}_+$.*

Pour prouver le théorème 3.2.4, il suffit d'appliquer le théorème 3.3.1.

Preuve. (du Théorème 3.2.4)

Soit $b = m, a = -\alpha_1$, Soit $w_1(x, t)$ (resp w_2) les solutions de (3.3.10) – (3.3.12) avec $\Psi_0 = c$ (resp $\Psi_0 = C$) et le condition initiale $w_1(x, 0) = w_2(x, 0) = u_0(x)$, on a :

$$c(T - t)^{\alpha_1} \leq u(0, t) \leq C(T - t)^{\alpha_1}.$$

Par la comparaison nous savons que :

$$w_1(x, t) \leq u(x, t) \leq w_2(x, t).$$

Par conséquent :

$$B(w_1) \subseteq B(u) \subseteq B(w_2)$$

donc

1. Si $-\alpha_1 < \left(\frac{1}{m-1}\right)$, l'ensemble de Blow up de u est $B(u) = \{0\}$.
2. Si $-\alpha_1 = \left(\frac{1}{m-1}\right)$, l'ensemble de Blow up de u est un intervalle contenant 0, de plus :

$$\left[0, vC^{\left(\frac{m-1}{2}\right)}\right) \subseteq B(w) \subseteq \left[0, vC^{\left(\frac{m-1}{2}\right)}\right]$$

avec $v = \left(\frac{2m(m+1)}{m-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

3. Si $-\alpha_1 > \left(\frac{1}{m-1}\right)$, alors $B(u) = \mathbb{R}_+$.

De même pour v .

Il nous reste à observer que le signe de β_1, β_2 est le même que le signe de $\left(\alpha_1 + \frac{1}{m-1}\right)$ resp $\left(\alpha_2 + \frac{1}{n-1}\right)$, de plus :

$$\begin{cases} \beta_1 = \left(\alpha_1 + \frac{1}{m-1}\right) \left(\frac{m-1}{2}\right) \\ \beta_2 = \left(\alpha_2 + \frac{1}{n-1}\right) \left(\frac{n-1}{2}\right). \end{cases}$$

■

Conclusion

Dans notre travail on a étudié des solutions non négatives du système des milieux poreux, en présentant les travaux de F.Quirós et J.Rossi (*voir* [12]), et en détaillant tous les calculs. L'objectif de cette étude n'est pas trouver une solution explicite mais déterminer l'exposant critique de l'existence globale et de type Fujita, en construisant une supersolution auto similaire et subsolution pour les déterminer.

On constate que la solution auto similaire joue un rôle important pour étudier l'existence de la solution, globale ou bien locale du système parabolique (1.2.1) – (1.2.3), ce système apparait dans plusieurs branches d'applications mathématiques et explique plusieurs phénomènes physiques. Ils ont été utilisés pour modéliser, où $u(x, t)$ et $v(x, t)$ représentent les densités de deux biologique, par exemple la dynamique de population, réactions chimiques.

Bibliographie

- [1] C.BOTAO, Y.MI, C.MU, *Global existence and nonexistence for adoubly degenerate parabolic system, coupled via Nonlinear boundary flux.* 2011, 13B(2)
- [2] H.FUJITA, *On the blwing up of solutions of the cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$,*J.Fac.Sci.Unv. Tokyo Sec. IA Math.16 (1966).
- [3] B.H.GILDING,*On a class of similarity solutions of the porous median equation* III.J.Math.Anal.Appl.77(1980).
- [4] B.H.GILDING & M.A.HERRERO, *Localization and blow up of thermal waves in non-linear heat conduction with peking,* Math.Ann.282(1988).
- [5] B.H.GILDING & L.A.PELETIER,*On a class of similarity solution of the porous median equation,*J.Math.Anal,Appl,55(1976).
- [6] B.H.GILDING,*Ona class of similarity solution of the porous median equation,*J.Math.Anal,Appl,57(1977).
- [7] V.A.GALAKTIONOV, *Heat localization in nonlinear media, differentsial'n ye Uravneniya* 17(1981).
- [8] V.A.GALAKTIONOV & H.A.LEVINE, *On critical Fujita exponents for heat equations with nonlinear flux boundary condition on the boundary.*J.Math.94 (1996).
- [9] W.HUANG, J.YINET, Y.WANG, *On critical Fujita exponents for the porous mediun equation with a nonlinear boundary condition,* J.Math.Anal. Appl, 286 (2003).

-
- [10] K.LUST & C.W.ROWLEY & I.G.KEVREKIDIS. *On the computation and stability analysis of self-similar solutions.*
- [11] C.V.PAO, *Nonlinear Parabolic and Elliptic equation, plenum press.* New york (1992).
- [12] F.QUIRÓS & J.D.ROSSI, *Blow up sets and Fujita type Curves for a degenerate parabolic system with Nonlinear boundary condition.* Indiana. 1 (2001).
- [13] A.A.SAMARSKII,V.A.GALAKTIONOV, S.P.MIKHAILOV, *Blow up in problems for Quasilinear Parabolic Equation,* Nauka,Moscow,(1987)(Russian).
- [14] P.L.SACHDEV. *Self-similarity and beyond,* boca raton landon new york washington, D.C (1993).
- [15] S.XU & Z.SONG, *Critical parameter equation for degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux,* Springer (2011).
- [16] XU.XIANGMIN, *A Moving collocation scheme for fourth order evolutionary PDEs,* B.Sc.,Xin Yang normal University, (1995).
- [17] Z.XIANG, C.MU, *Blow up behaviors for degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux,* June (2007).
- [18] Z.XIANG, Q.CHEN, C.MU, *Critical curves for degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux.* 189 (2007).
- [19] S.ZHENG, X.SONG, Z.JIANG, *Critical Fujita exponents for degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux,* J.Math.Anal.Appl, 298(2004)

الملخص:

في هذه المذكرة درسنا الحلول المماثلة الذاتية لمعادلتين من نوع وسط مسامي مع شروط حدودية غير خطية و شروط ابتدائية ذات حامل متراص. غير بديهية و غير سالبة. حيث وجدنا ثلاثة مناطق محددة بمنحنين أحدهما من نوع فوجيتا. حيث في المنطقة الأولى أي حل هو حل عام. في المنطقة الثانية أي حل غير بدهي هو حل منفجر. في المنطقة الأخيرة يوجد حلول عامة مع شروط ابتدائية صغيرة وحلول منفجرة مع شروط ابتدائية كبيرة.

الكلمات المفاتيح: حل مائل ذاتي، عام، نظام، منحنى فوجيتا، حل منفجر، وسط مسامي...

Résumé :

Dans ce mémoire nous avons étudiés des solutions auto-similaires des deux équations de milieu poreux avec condition aux limites non linéaire et conditions initiales non trivial non négative a support compact. Nous trouvant trois régions délimitées par deux courbes, dont une courbe de type Fujita. Dans la première région chaque solution est global, Dans le deuxième tout solution non trivial est blow-up, dans la dernier il existe des solutions globales pour petites conditions initiales, et solutions blow up pour des conditions initiales assez grandes.

Les mots clés: solution auto-similaire, globale, système, courbe de type Fujita, solution d'explosion, milieu poreux...

Abstract:

In this these we study self-similar solution of two porous medium equations with nonlinear coupled boundary conditions and nonnegative nontrivial compactly supported initial data. We find three regions, bounded by two curves. One of them is a Fujita type curve. In the first region every solution is global, in the second every nontrivial solution blows up, and in the last one both behaviors coexist.

The Key words: self-similar solution, global, system, Fujita type curve, blow-up solution, porous medium...