

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

N° d'ordre :



DOMAINE : GENIE MECANIQUE

FILIERE : CONSTRUCTION MECANIQUE

OPTION : CONSTRUCTION MECANIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention

Du diplôme de Master Académique

Par: MIMOUNE Boubakeur

Intitulé

**Etude numérique du comportement dynamique
des plaques trouées en matériaux isotrope**

Soutenu devant le jury composé de:

| | | |
|----------------------|----------------------|-----------|
| Mme .BENKHARBECHÉ H | Université de M'sila | Président |
| Mr .LATRACHE Mohamed | Université de M'sila | Encadreur |
| Mr .DEBIH . A | Université de M'sila | Examineur |
| Mr .BEDDA . A | Université de M'sila | Examineur |

Année universitaire : 2017 /2018



Dedicaces

Je tiens à dédier ce travail à : Mes cher père et mère, mon beau père el l'ah yerahmou et bel mer que dieu les gardent

Ma femme pour son soutien, sa patience et son aide pour me faciliter la tâche durant toute cette période ;

Mes petits-enfants, Mohamed el amine et Mohamed akram , Alaa Elrahmane que Dieu les gardent et les orientent sur le bon chemin ;

Mes frères, Mes sœurs et leurs enfants et à toute ma famille MIMOUNE et SEDDOUK, à mes collègues de travail de l'entreprise expertise Algérie EXAL.

BOUBAKEUR

Remerciements

Je tiens profondément à remercier Dieu de nous avoir éclairci le chemin du savoir, de patience et santé. J'ai eu la chance d'évoluer parmi des personnes qui m'ont toujours assuré de leur soutien.

J'exprime ma sincère gratitude à mes parents et ma femme qui m'ont soutenu par tous les moyens afin que je puisse réussir dans mes études. Surtout, par leurs encouragements qui m'animent de volonté.

Je tiens à remercier très sincèrement :

La première personne est mon directeur de thèse MR. LATRACHE MOHAMED, de l'Université de MSILA qui, sereinement, m'a orienté, corrigé, conseillé durant ce projet. Sa rigueur a été capitale dans l'atteinte des objectifs de ma thèse.

Je manifeste mes honnêtes remerciements à madame benkharbeche. H ; enseignante au département de génie mécanique d'université de Msila pour l'honneur et le plaisir qu'elle m'a fait en acceptant de présider ce jury.

Je remercie vivement Messieurs Debih A ; Professeur au département de génie Mécanique d'université de Msila , et Monsieur BEDDA Abdelmalek professeur au département de génie mécanique d'université de Msila , qui ont accepté de juger ce travail. Je leur suis très reconnaissant d'y avoir consacré une partie de leurs temps si spéciaux.

Je suis aussi redevable à tous les enseignants et personnel administratif du Département GENIE MECANIQUE de l'Université de MSILA , qui ont instauré un environnement d'entraide et de soutien tant au plan scientifique qu'au plan humain.

Je ne saurais terminer ces remerciements sans mentionner tous mes amis et surtout ceux de l'Université de MSILA

Résumer

Ce travail concerne le comportement dynamique des structure, cas d'une plaque console (EAAA) trouée, la méthode des éléments finis est utilisée pour la simulation, la modélisation et l'analyse modale. A l'aide du logiciel ANSYS apdl. La bibliothèque de ce dernier disposant plusieurs éléments types pour modéliser les structures 2D et 3D, nous choisissons l'élément SOLID186 pour notre modélisation. Cette étude est contient une recherche bibliographique sur la théorie des plaques, la formulation des éléments finis de l'élément plaque. Deux études paramétriques différentes sont réalisées afin de comprendre le comportement dynamique d'une plaque trouée, la première concerne la taille de la troue, et la seconde correspondante aux nombre des trous dans la plaque. Les résultats obtenus sont bons et approchés aux résultats théoriques.

Mots clés: Vibration libre, Isotrope, plaque, Fréquence circulaire, Paramètres fréquentiels, Méthode des éléments finis, Méthode de Rayleigh Ritz.

Abstract: Our work consists of the analysis of the dynamic behavior of structures, as the case of a perforated consol plate, i.e, in this situation all elements are together coheren and homogeneous. The method of finite element used of simulation; the modelization and formal analysis .by using the software ANSYS apdl, the library of the previous software have several kinds of elements to perfects the structure 2D and 3D, we have chosen the factor set as SOLID 186 for our modelization. This study contains a bibliographic research on the theory of plate, The formulation of the finite element of the factor "plate". Two different paramatic studies are carried out in order to understand the dynamic behavior of a perforated plate .the first concerns the size of the holes ,and the other one is corresponding to the number of the holes in the plate,. The obtained results are good and approximate to the theoretical results.

Keywords: Free vibration, isotropic, plate, circular frequency, parameter frequency, finite element, Rayleigh – Ritz method.

ملخص

هذا العمل يتلخص في الدراسة الديناميكية للأجسام الصلبة حالة صفيحة حرة مستطيلة متجانسة مثقوبة. النمذجة والمحاكاة وتحليل عوامل الاهتزازات الصفيحة المعيارية تمت باستعمال طريقة العناصر المتناهية بواسطة برنامج ANSYS الذي يحتوي علي مكتبة جد ثرية اكثر من مئة عنصر, لمحاكاة بنية الاجسام D3, D2 اخترنا من اجل دراستنا عنصر حجمي صلب SOLID186. هذه الدراسة تحتوي علي بحث نظري حول نظرية الصفائح الصلبة, طريقة العناصر المتناهية للصفائح الصلبة

في هذا البحث قمنا بدراستين مختلفتين لعوامل الاهتزازات من اجل استيعاب شامل لسلوك صفيحة مستطيلة متجانسة مثقوبة, الدراسة الاولى تغيير حجم الثقب والدراسة الثانية تغيير عدد الثقوب المقارنة بين النتائج المتحصل عليها باستعمال العناصر المتناهية وبالنسبة للنتائج المرجعية المأخوذة من الدوريات العلمية الجادة لصفحة معيارية تأكد التوافق النسبي بدرجة مقبولة جدا

الكلمات المفتاحية: الاهتزازات الحرة، متجانسة، صفيحة، توتر طبيعي، المعاملات التوتيرية، طريقة العناصر المتناهية، طريقة ريليتج ريتز

La nomenclature :

| <i>Désignation</i> | <i>Signe</i> |
|---|---------------|
| L'amplitude du mode | A_m |
| La flèche de déplacement vertical du feuillet moyen | W |
| La direction du feuillet moyen. | Z |
| Modules d'élasticité. | λ |
| Coefficients de Lamé. | μ |
| Le module d'Young. | E |
| Le coefficient de Poisson. | ν |
| L'épaisseur de la plaque | h |
| Les contraintes dans la direction x | σ_x |
| Les contraintes dans la direction y. | σ_y |
| Les contraintes dans la direction z | σ_z |
| Contrainte de Cisaillement. | τ_{xy} |
| La déformation dans la direction x. | ϵ_x |
| Déformation angulaire. | γ_{xy} |
| La déformation dans la direction y. | ϵ_y |
| Les composants déplacements. | x, y, z |
| Les coordonnées. | u, v, w |
| La masse volumique. | ρ |
| La rotation des sections dans la direction x. | θ_x |
| Facteur d'élanement. | $\frac{a}{h}$ |

| <i>Désignation</i> | <i>Signe</i> |
|---|-----------------|
| La rotation des sections dans la direction y | θ_y |
| Tenseurs de déformation. | $[\mathcal{E}]$ |
| Tenseurs de contraintes | $[\sigma]$ |
| Efforts de tranchants. | \vec{Q} |
| La charge extérieure | $q(x,y)$ |
| Efforts de membrane. | \vec{N} |
| L'opérateur $(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})$ | ∇ |
| Moments de flexion | \vec{M} |
| Déformation dans le plan | \vec{e} |
| Courbures. | $\vec{\chi}$ |
| Déformation de cisaillement | $\vec{\lambda}$ |
| L'énergie de déformation. | U |
| Le module d'élasticité au cisaillement ou le module de glissement. | G |
| L'énergie cinétique. | T |
| Un mode d'une plaque. | (m,n) |
| La fréquence fondamentale | ω |
| Le quotient de Rayleigh | λ_R |
| L'énergie potentielle des forces extérieures. | V |

SOMMAIRE

Dédicace..... I
 Remerciements..... II
 Résumé III
 Nomenclatures..... IV
 Liste des figures..... IX
 Liste des graphes..... XII
 Liste des Tableaux..... XIII
 Introduction générale..... 2

CHAPITRE I : Recherche bibliographique sur la théorie des plaques et la méthode des éléments finis

I-1 – Introduction 4
 I-1-1 Historique des plaque 4
 I-1-2 Mission des plaques 5
 I.1-3 Définition..... 6
 I-1-4 Différents types de plaques..... 6
 I-1-4-1 Les plaques isotropes..... 6
 I-1-4-2 Les plaques orthotropes..... 6
 I-1-4-3 Les plaques anisotropes..... 6
 I-1-5 Différents types de comportements des plaques..... 6
 I-1-5-1 L'état membranaire 7
 I-1-5-2 L'état flexionnel..... 7
 I-1-5-3 L'élément de paroi 7
 I-1-5-4 L'élément de plaque 7
 I-1-5-5 L'élément de plaque membrane 7
 I.2 Hypothèses pour l'étude des plaques..... 9
 I.2-1 Théorie de Kirchhoff-Love pour les plaques minces 9
 I.2-1-1 Cinématique d'une plaque mince 10
 I.2-1-2 Déformation d'une plaque mince 12
 I.2-1-3 Tenseur de contraintes et loi de comportement 13
 I.2-1-4 Energie de déformation d'une plaque mince..... 14
 I.2-2 Théorie des plaques épaisses 14
 I.2-2-1 Hypothèses pour l'étude des plaques épaisses..... 15
 I.2-2-2 Champs de déplacement..... 15
 I.2-2-3 Champs de déformation..... 16
 I.2-2-4 Efforts résultants de membrane..... 16
 I.3 Matériau isotrope 17
 I.4 Formulation des éléments finis 18
 I.4-1 Introduction 18

| | |
|---|----|
| I.4-2 Principe de la méthode des éléments finis | 18 |
| I.4-3 Etape de la résolution d'un problème | 19 |
| I.4-4 Discrétisation | 20 |
| I.4-5 Approximation nodale..... | 21 |
| I.4-6 Élément à deux dimensions rectangulaire..... | 21 |

CHAPITRE II : Formulation du comportement statique et dynamique d'une plaque mince

| | |
|---|----|
| II-1 Introduction | 23 |
| II-2 Vibration libre..... | 23 |
| II-3 Charge répartie..... | 23 |
| II-4 L'analyse vibratoire..... | 24 |
| II-5 Equations d'équilibre | 24 |
| II-6 Calcul des moments et des efforts | 26 |
| II-7 Expressions des Conditions aux limites | 27 |
| II-8 Forme de la déflexion | 28 |
| II-9 Energie d'une plaque | 28 |
| II-10 Les méthodes énergétiques..... | 29 |
| II-10-1 Généralités | 29 |
| II-10-2 Expression de l'énergie potentielle pour les plaques minces | 29 |
| II-11 La méthode de Rayleigh..... | 30 |
| II-12 Méthode de Rayleigh-Ritz..... | 31 |
| II-12-1 Introduction..... | 31 |
| II-12-2 Equation du mouvement..... | 32 |
| II-12-3 Formulation analytique..... | 33 |
| II-13 Le quotient de Rayleigh..... | 33 |
| II-14 Méthodes pour obtenir les solutions..... | 34 |
| II- 15 Plaques rectangulaires simplement supportées sur deux bords opposés..... | 34 |
| II-16 Les différentes fonctions de formes..... | 37 |

CHAPITRE III : Modélisation et simulation des plaques par le code ANSYS

| | |
|---|----|
| III-1 Représentation graphique du logiciel ANSYS | 39 |
| III-2 Introduction au logiciel de modélisation et de calcul ANSYS | 39 |
| III-3 : Plateformes ou environnements..... | 40 |
| III-4 : Organisation de logiciel ANSYS | 40 |
| III-5 :Éléments de la géométrie du logiciel ANSYS utilisés dans la modélisation | 41 |
| III-6 :Description de l'élément utilisé pour le maillage..... | 41 |
| III-8 : Objectif du chapitre | 42 |
| III-9 : Donner analytique | 42 |
| III-9-1 : Géométrie de la plaque mince..... | 42 |

A : Cordonnées des points en mètre..... 42
 B : Condition aux limites et chargements..... 42
 C : Grandeur testées et résultats..... 43

CHAPITRE IV : Résultats et discussion

IV-1 : Introduction..... 45
 IV-2 : Comparaison des fréquences propres calculées analytiquement et les fréquences propres obtenues par le code ANSYS de la plaque mince Référence46
 IV -3 : Comparaison des fréquences propres obtenue par code ANSYS de la plaque mince référence et les résultats obtenue par code ANSYS de la plaque trouée de R=0,1m.....52
 IV -4 : Comparaison des fréquences propres obtenue par code ANSYS de la plaque mince référence et les résultats obtenue par code ANSYS de la plaque trouée de R=0,2 m..... 58
IV -5 : Comparaison des fréquences propres obtenue par code ANSYS de la plaque mince référence et les résultats obtenue par code ANSYS de la plaque trouée de R=0,3 m 64
IV -6 : Comparaison des fréquences propres par code ANSYS de la plaque mince référence et les résultats obtenue par code ANSYS de la plaque trouée de deux trous de R=0,1 m.....70.
IV -7 : Comparaison des fréquences propres obtenue par code ANSYS de la plaque mince référence et les résultats obtenue par code ANSYS de la plaque trouée de 04 trous R=0,1m 76
Conclusion générale 83
Bibliographie 85

Liste des figures :

Figure I-1 Description d'une plaque géométriquement.....7

Figure I-2a L'états membranaire du parois.....8

Figure I-2b L'états flexionnel de plaque.....8

Figure I-2c superposition des états Membranaire.....8

Figure I-2d plaque de forme courbure et flexionnel.....8

Figure I-3 déplacements du plan moyen avec mise en évidence de la rotation10

Figure I-4 Rotation d'une fibre normale selon les axes x et y mettant en évidence le relations Entre u_0, v_0 et les angles θ_x, θ_y correspondant au mouvement du plan moyen..... 11

Figure I-5 Cinématique de Reissner - Mindlin..... 15

Figure I-6 Exemples de discrétisations..... 20

Figure I-7 Fonction d'interpolation $N1$ du quadrangle. 21

Figure II-1 Forces agissant sur l'élément plaque..... :24

Figure II-2 Plaque simplement supportée sur les deux bords opposés.....34

Figure II-3 Déformée pour le mode (2,3) de la plaque simplement supportée.....36

Figure II-4 forme de plaque isotrope (AAAA , EEEE, AAEE, AEAE)37

Figure III-1 Présentation graphique de l'interface du logiciel ANSYS.....39

Figure III-2 Géométrie de l'élément de maillage de la bibliothèque du logiciel ANSYS pour la modélisation des plaques.41

Figure III-3 dimension de la plaque mince référence.....42

Liste des figures :

Fig. IV-2-1 Maillage et conditions aux limites De la plaque référence.....47

Fig. IV-2-2 Maillage et conditions aux limites De la plaque référence47

Fig. IV-2-3 figure des nœuds de la plaque référence mince.....48

Fig. IV-2-4 Du premier Mode (1,1) $m=1, n=1$ de vibration.....48

Fig. IV-2-5 le Deuxième Mode (2,1) $m=2, n=1$ de vibration49

Fig. IV-2-6 le Troisième Mode (1,2) $m=1, n=2$ de vibration49

Fig. IV -2-7 le quatrième Mode (3,1) $m=3, n=1$ de vibration50

Fig. IV-2-8 le cinquième Mode (2,2) $m=2, n=2$ de vibration50

Fig. IV-2-9 le Sixième Mode (3,2) $m=3, n=2$ de vibration51

Fig. IV-3-1 modélisation de la Plaque mince trouée de rayon $R=0.1m$ 53

Fig. IV-3-2 Maillage de la Plaque mince trouée de rayon $R=0.1m$ 53

Fig. IV-3-3 Maillage de la Plaque mince Trouée de rayon $R=0.1m$ 54

Fig. IV-3-4 le premier Mode (1,1) $m=1, n=1$ de vibration trou 0,1m54

Fig. IV-3-5 le Deuxième Mode (2,1) $m=2, n=1$ de vibration trou 0,1m55

Fig. IV-3-6 le Troisième Mode (1,2) $m=1, n=2$ de vibration trou 0,1m55

Fig. IV -3-7 le quatrième Mode (3,1) $m=3, n=1$ de vibration trou 0,1m56

Fig. IV-3-8 le cinquième Mode (2,2) $m=2, n=2$ de vibration trou 0,1m56

Fig. IV -3-9 le Sixième Mode (3,2) $m=3, n=2$ de vibration trou 0,1m57

| | |
|--|----|
| Fig. IV-4-1 modélisation de la Plaque mince Trouée de rayon $R=0.2m$ | 59 |
| Fig. IV-4-2 Maillage de la Plaque mince Trouée de rayon $R=0.2m$ | 60 |
| Fig. IV-4-3 Maillage de la Plaque mince Trouée de rayon $R=0.2m$ | 60 |
| Fig. IV-4-4 le premier Mode (1,1) $m=1,n=1$ de vibration trou $0,2m$ | 61 |
| Fig IV-4-5 le Deuxième Mode (2,1) $m=2,n=1$ de vibration trou $0,2m$ | 61 |
| Fig IV-4-6 le Troisième Mode (1,2) $m=1,n=2$ de vibration trou $0,2m$ | 62 |
| Fig. IV-4-7 le quatrième Mode (3,1) $m=3,n=1$ de vibration trou $0,2m$ | 62 |
| Fig. IV-4-8 le cinquième Mode (2,2) $m=2,n=2$ de vibration trou $0,2m$ | 63 |
| Fig. IV-4-9 le Sixième Mode (3,2) $m=3,n=2$ de vibration trou $0,2m$ | 63 |
| Fig. IV-5-1 modélisation de la Plaque trouée de rayon $R=0.3m$ | 65 |
| Fig. IV-5-2 Maillage de la Plaque mince Trouée de $R=0.3m$ | 65 |
| Fig. IV-5-3 Maillage de Plaque mince Trouée de $R=0.3m$ | 66 |
| Fig. IV-5-4 le premier Mode (1,1) $m=1, n=1$ de vibration trou $0,3m$ | 67 |
| Fig. IV-5-5 le Deuxième Mode (2,1) $m=2, n=1$ de vibration trou $0,2m$ | 67 |
| Fig. IV-5-6 le Troisième Mode (1,2) $m=1, n=2$ de vibration trou $0,3m$ | 68 |
| Fig. IV-5-7 le quatrième Mode (3,1) $m=3, n=1$ de vibration trou $0,3m$ | 68 |
| Fig. IV-5-8 le cinquième Mode (2,2) $m=2, n=2$ de vibration trou $0,3m$ | 69 |
| Fig IV-5-9 le Sixième Mode (3,2) $m=3, n=2$ de vibration trou $0,3m$ | 69 |
| Fig. IV-6-1 modélisation de la Plaque trouée 02 trous $R=0.1m$ | 71 |
| Fig IV-6-2 Maillage de la Plaque Trouée de 02 trous $R=0.1m$ | 71 |
| Fig. IV 6-3 Maillage de la Plaque Trouée de 02 trous $R=0.1m$ | 72 |

| | |
|---|----|
| Fig. IV-6-4 le premier Mode (1,1) $m=1, n=1$ de vibration 02 trous 0,1m | 73 |
| Fig. IV-6-5 le Deuxième Mode (2,1) $m=2, n=1$ de vibration 02 trous 0,1m | 73 |
| Fig. IV-6-6 le Troisième Mode(1,2) $m=1, n=2$ de vibration 02 trous 0,1m | 74 |
| Fig. IV-6-7 le quatrième Mode(3,1) $m=3, n=1$ de vibration 02 trous 0,1m | 74 |
| Fig. IV-6-8 le cinquième Mode (2,2) $m=2, n=2$ de vibration 02 trous 0,1m | 75 |
| Fig. IV-6-9 le Sixième Mode (3,2) $m=3, n=2$ de vibration 02 trous 0,1m | 76 |
| Fig. IV-7-1 Modélisation de la Plaque trouée de 04 trous rayon $R=0.1m$ | 77 |
| Fig IV-7-2 Maillage de la Plaque mince Trouée de 04 trous rayon $R=0.1m$ | 77 |
| Fig. IV-7-3 Maillage de la Plaque mince Trouée de 04 trous rayon $R=0.1m$ | 78 |
| Fig. IV-7-4 le premier Mode (1,1) $m=1, n=1$ de vibration 04 Trous 0,1m | 79 |
| Fig. IV -7-5 le Deuxième Mode (2,1) $m=2, n=1$ de vibration 04 trous 0,1m | 79 |
| Fig. IV -7-6 le Troisième Mode (1,2) $m=1, n=2$ de vibration 04 trous 0,1m | 80 |
| Fig IV-7-7 le quatrième Mode (3,1) $m=3, n=1$ de vibration 04 trous 0,1m | 80 |
| Fig. IV-7-8 le Cinquième Mode (2,2) $m=2, n=2$ de vibration 04 trous 0,1m | 81 |
| Fig. IV-7-9 le Sixième Mode (3,2) $m=3, n=2$ de vibration 04 trous 0,1m | 81 |

Liste des graphes :

Graphe 1 : Comparaison des fréquences propres calculées analytiquement d'une plaque mince encastrer d'un seule cote et les fréquences propres obtenues par le code ANSYS de la plaque mince référence.....46

Graphe 2 : Comparaison des fréquences propres obtenues par code ANSYS de la plaque mince référence et la fréquence propre par le code ANSYS de la plaque trouée $R = 0,1 \text{ m}$ 52

Graphe 3 : Comparaison des fréquences propres obtenue par le code ANSYS de la plaque mince référence et la fréquence propre par le code ANSYS de la plaque trouée $R = 0,2 \text{ m}$58

Graphe 4 : Comparaison des fréquences propres obtenue par le code ANSYS de la plaque mince référence et la fréquence propre par le code ANSYS de la plaque trouée $R = 0,3 \text{ m}$64

Graphe 5 : Comparaison des fréquences propres obtenue par le code ANSYS de la plaque mince référence et la fréquence propre par le code ANSYS de la plaque trouée de 02 trous de $R = 0,1 \text{ m}$ plaque Encastrer EAAA.....70

Graphe 6 : Comparaison des fréquences propres calculées expérimental de la plaque mince référence et la fréquence propre par le code ANSYS de la plaque trouée de 04 trous de $R = 0,1 \text{ m}$ 76

Liste des tableaux :

| | |
|--|------|
| Tableaux (1) les valeurs des fréquences propres d'une plaque référence son trou Obtenue sous code ANSYS | 46 |
| Tableaux (2) les valeurs des fréquences propres de la plaque trouée 0,1metre obtenue sous code ANSYS | 52 |
| Tableaux (3) les valeurs des fréquences propres de la plaque trouée 0,2metre obtenue sous code ANSYS..... | ..58 |
| Tableaux (4) les valeurs des fréquences propres de la plaque trouée 0,3metre obtenue sous code ANSYS..... | 64 |
| Tableaux (5) les valeurs des fréquences propres de la plaque trouée 02 trous 0,1metre obtenue sous code ANSYS..... | 70 |
| Tableaux (6) les valeurs des fréquences propres de la plaque trouée 04 trous 0,1metre obtenue sous code ANSYS..... | 76 |

Introduction générale

Introduction générale :

Les plaques Rectangulaires font partie des éléments structurels les plus couramment utilisés. L'utilisation de plus en plus importante, montre la nécessité impérieuse de l'étude de leur comportement vibratoire et devient donc d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. L'analyse vibratoire est une thématique actuelle importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle. Cette dernière touche de nombreux domaines, comme les technologies spatiales, l'ingénierie navale et civile, l'automobile, aéronautique, ainsi les ponts, les bâtiments, ou encore la génie nucléaire. [12]

Le contrôle des vibrations dans les éléments de structure comme les plaques est un problème épineux qui se pose fréquemment au chercheur et ingénieur. Pour assurer ce contrôle, la détermination des caractéristiques dynamiques des plaques est indispensable.

Durant ces décennies, le domaine des vibrations connaît un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à des niveaux d'excitations importants. C'est pour cette raison que le comportement des plaques est, depuis plus de cent ans, le sujet de recherches exhaustives.

Les travaux réalisés dans ce mémoire, s'inscrivent dans cette thématique L'étude du comportement vibratoire libre des plaques minces. L'objectif fondamental de ce travail est de résoudre le problème en vibration des plaques isotropes afin d'obtenir les fréquences et les modes propres, en utilisant l'étude analytique et méthode des éléments finis sous le code ANSYS , ayant pour but de calculer les fréquences et modes propres non amorties des vibrations en flexion d'une plaques console rectangulaires (EAAA). soumises à différentes configurations de conditions aux limites standards sur les bords .

Le travail réalisé est organisé en quatre chapitres.

chapitre 1 Recherche bibliographique sur la théorie des plaques et la méthode des éléments finie, je présenterai les différentes notions permettant d'élaborer une simulation d'une plaque mince sous les hypothèses de petits déplacements et de petites déformations. ainsi l'étude de sa cinématique, la définition de sa déformation en utilisant le tenseur de déformation de Green-Lagrange linéarisé, la définition du tenseur de contraintes, la formulation de la loi de Hooke pour une plaque mince, la définition de son énergie de déformation, et enfin la formulation de l'équation de son mouvement , ensuite des rappels théoriques sur la loi du comportement dans l'élasticité Linéaire , Formulation des éléments finis , Introduction et Principe de la méthode des éléments finis

chapitre 2: Formulation du comportement statique et dynamique d'une plaque mince

Introduction sur les Vibration libre L'analyse vibratoire et Equations d'équilibre , Calcul des moments et des efforts Expressions des Conditions aux limites , Energie d'une plaque ,Expression de l'énergie potentielle pour les plaques minces isotropes , La méthode de Rayleigh et de Rayleigh-Ritz , Equation du mouvement ,Formulation analytique , Le quotient de Rayleigh , Les différentes fonction de formes.

Dans le Chapitre 3 En aborde la Modélisation et la simulation de la plaque mince par le code ANSYS et les valeurs de fréquence propre d'une plaque encastré d'un seul côté (EAAA) .

Dans le Chapitre 4 Résultats et discussion.de différent modélisation des plaques trouée et discussions des comparaisons. Les résultats seront validés par la littérature de rigueur et montre une bonne concordance.

CHAPITRE I

*Recherche bibliographique sur la théorie
des plaques et la méthode des éléments
finis*

I-1– Introduction :

Les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions de dimensionnement ou de contrôle des vibrations. Pour mieux connaître, la réponse du comportement dynamique de la structure, il est impératif d'approcher de la manière la plus Correcte possible les phénomènes mis en jeu par les plaques qui sont plus ou moins complexes. Ainsi, un bâtiment, une caisse de voiture, une aile d'avion, un bateau ,Parmi tous ces domaines d'application, on peut distinguer plusieurs types de plaques [5],des plaques membranaires, des plaques minces, modérées et épaisses.

Dans cette étude nous occuperons que de plaques minces homogènes isotropes .La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges. Les plaques sont des éléments structuraux couramment utilisés dans différents types de plaques sont disponibles suivant les besoins du site industriel, d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle analytique d'analyse:

- a) les plaques minces avec de petites flèches (Kirchhoff) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée;
- b) les plaques minces avec de grandes flèches (Karman);
- c) les plaques modérées ou épaisses (Mindlin- Reissner) [19] où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée.

En général diverses forces de différentes natures (volumiques, surfaciques, ponctuelles) Peuvent se présenter comme source génératrice d'excitation. Les réponses conséquentes peuvent être exprimées en termes de mouvement que l'on peut décrire par des déplacements, des vitesses ou des accélérations. Dans le cas de l'analyse libre, on s'intéresse aux paramètres dynamiques naturels, afin de caractériser le comportement propre inhérent à la structure d'intérêt indépendamment des sollicitations extérieures. [12]

I-1-1 Historique des plaques:

De point de vue historique, Euler fut l'un des premiers, en 1766, à formuler le premier modèle mathématique du problème représentant le comportement d'une plaque assimilée à une membrane en vibration libre. Puis, le physicien allemand Chladni (1787) [22] découvrit les premiers modes propres de vibrations d'une plaque carrée horizontale, C'est ensuite Lagrange qui développa en 1811 la première équation différentielle correcte pour décrire les vibrations D'une plaque libre d'épaisseur constante, à laquelle doit satisfaire la flexion w , la détermination des fréquences naturelles fût une grande priorité. Sophie Germain a été récompensé en 1816 pour sa contribution au développement de l'équation de la plaque mince. Quelques temps après, Navier (1785-1836) introduit la méthode pour calculer les modes et les fréquences propres d'une plaque Ce dernier utilisa les fonctions trigonométriques découvertes par Fourier pour représenter la déformation d'une plaque. Ce n'est qu'en 1850 que Kirchhoff (1824-1887) [5] a établi de façon correcte pour la première fois des conditions aux limites en partant du principe des déplacements virtuels et de l'expression du travail des contraintes de la plaque. [14]

Lord Rayleigh (1877) ou encore Ritz (1909) [17], furent parmi les premiers à formuler la théorie qu'on connaît aujourd'hui. Ritz, a amélioré la procédure de Rayleigh en se basant sur les fonctions de forme qui caractérisent le mouvement dynamique propre, chacune avec un coefficient d'amplitude indépendant. Cette procédure est appelée « Méthode de Rayleigh Ritz ou Méthode de Ritz ». C'est la méthode approximative la plus populaire et la plus Utilisée dans l'analyse des structures en vibrations.

En 1921 Timoshenko montre que la prise en compte des effets respectifs de l'inertie rotatoire et du cisaillement ont pour incidence de réduire sensiblement les fréquences propres de vibration des poutres. Dans le même contexte, l'étude vibratoire des plaques a évolué en injectant des hypothèses supplémentaires telles que la prise en compte de l'effet de cisaillement pour le cas des plaques épaisses. Ce qui a conduit à des modèles plus raffinés comme celui de Love(1944) [5] qui appliqua les travaux de Kirchhoff aux plaque épaisses.

Depuis lors, de très nombreuses études ont été menées, surtout avec le développement des industries navales et aéronautiques. C'est ainsi que dans les années de l'après-guerre, de nouvelles théories des plaques minces élastiques furent élaborées par Reissner (1945).

Reissner [20] fut l'un des premiers à proposer une extension de la théorie des plaques avec cisaillement dans le cas statique. Ensuite, Uflyand 1948 [21] et Mindlin (1951) [19]. C'est ainsi qu'ils proposèrent pour les plaques une nouvelle approche théorique rigoureuse Waburton [23] et essentiellement Leissa (1969) [24] ont contribué d'après plusieurs travaux de recherche contemporaines à mieux appréhender le problème de vibration des plaques entenant compte des différentes hypothèses pour la prédiction sensiblement exacte du comportement dynamique inhérent aux vibrations des plaques.

En 1973 Leissa [24] proposa un catalogue élargi à différent cas d'hypothèse pour la solution des vibrations libres de plaques rectangulaires. En parallèle, Liew et al (1995) fournissent une contribution effective pour les plaques épaisses. [14]

I-1-2 Mission des plaques :

Afin de traiter des problèmes de plaques élastiques, des hypothèses doivent être imposées afin de simplifier les équations générales de l'élasticité linéaire. Dans le cas d'un problème de plaques en flexion on applique des charges normales à la surface moyenne, dans la direction de (z). Ces forces appliquées provoquent une flexion dans la plaque avec un déplacement du feuillet moyen dans la direction de z, ce déplacement vertical est habituellement appelé flèche et noté par (w).

La première mission des plaques est de résister à l'environnement dynamique. Si l'environnement dépend du temps, il faut d'abord étudier le mouvement qui en résulte. C'est le comportement dynamique. Il importe donc de maîtriser la prévision de ces phénomènes pour comprendre, remédié, optimisé : C'est l'objet de la dynamique des structures. Lorsque qu'une plaque est soumise à un environnement dynamique donné, des forces de diverses natures (volumiques, surfaciques, ponctuelles) s'appliquent sur elle et provoquant un mouvement que l'on peut décrire par des déplacements, des vitesses ou des accélérations en tous ses points. [12]

I.1-3 Définition

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface de référence plane et par une petite épaisseur (notée h) par rapport aux autres dimensions longueur et largeur (**figure I-1**), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. Une analyse élastique des plaques consiste à une analyse d'un modèle mathématique bidimensionnel ce qui nous conduit à une analyse d'un problème en élasticité plane. [12]

I.1-4 Différents types de plaques

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories;

I.1-4-1 Les plaques isotropes : elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques respectivement le module d'élasticité (E) et le coefficient de Poisson (ν) ils sont utilisés dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,...). [26]

I.1-4-2 Les plaques orthotropes : leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotrope peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, les réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art.

I.1-4-3 Les plaques anisotropes: leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

I.1-5 Différents types de comportements des plaques

L'énergie de déformation d'une plaque peut être décomposée en trois termes principaux : la flexion, la membrane et le cisaillement. Lorsqu'on fait tendre l'épaisseur vers zéro, l'énergie de cisaillement devienne négligeable et la déformation subie par la plaque appartient à l'une des trois catégories asymptotiques suivantes en fonction de la géométrie, des conditions aux limites et des forces appliquées :

- 1) La flexion dominante;
- 2) La membrane dominante;
- 3) Le cas mixte;

Dans les deux premières catégories, c'est la partie correspondante de l'énergie de déformation qui est dominante, tandis que dans les cas mixtes aucune partie n'est négligeable par rapport à l'autre. En considérant la même force, matériau et conditions aux limites, une plaque peut exhiber des comportements asymptotiques complètement différents en fonction de la nature géométrique de la surface moyenne. [12]

I-1-5-1 L'état membranaire :

S'associe aux efforts intérieurs de type force agissant dans la surface moyenne, à savoir les efforts normaux et les efforts tangentiels.

I-1-5-2 L'état flexionnel :

Regroupe les efforts intérieurs de caractère flexionnel, soit les moments de flexion, les moments de torsion et les efforts tranchants.

Selon le mode du comportement, on peut distinguer quatre types d'éléments structuraux :

I-1-5-3 L'élément de paroi :

est défini par la géométrie plane de surface moyenne (plan moyen) et par son épaisseur : sollicitée par des charges agissant dans son plan moyen, il résiste par un état membranaire (**figure I-2a**); les efforts normaux et tangentiels résultent d'ailleurs de l'état plan de contrainte.

I-1-5-4 L'élément de plaque :

Est défini par la géométrie plane de sa surface moyenne (plan ou feuillet moyen); il résiste aux charges agissant normalement à son plan moyen par un état flexionnel (**figure I-2b**).

I-1-5-5 L'élément de plaque membrane :

C'est la superposition des deux cas précédents et réunit donc l'état membranaire de paroi et l'état flexionnel de plaque (**figure I-2c**); bien que plan, il se comporte de manière spatiale, pouvant être soumis à des charges quelconques, tant parallèles que perpendiculaires à son plan moyen; il constitue la base des structures plissées.

En fin l'élément structural, nature, courbe spatiale; il utilise les deux états d'effort, membranaire et flexionnel, pour s'opposer aux actions arbitraires pouvant le solliciter (**figure I-2d**); exceptionnellement grâce à sa courbure, une plaque peut ne résister aux charges que par l'état membranaire (structure gonflable, textile, peau, etc...).

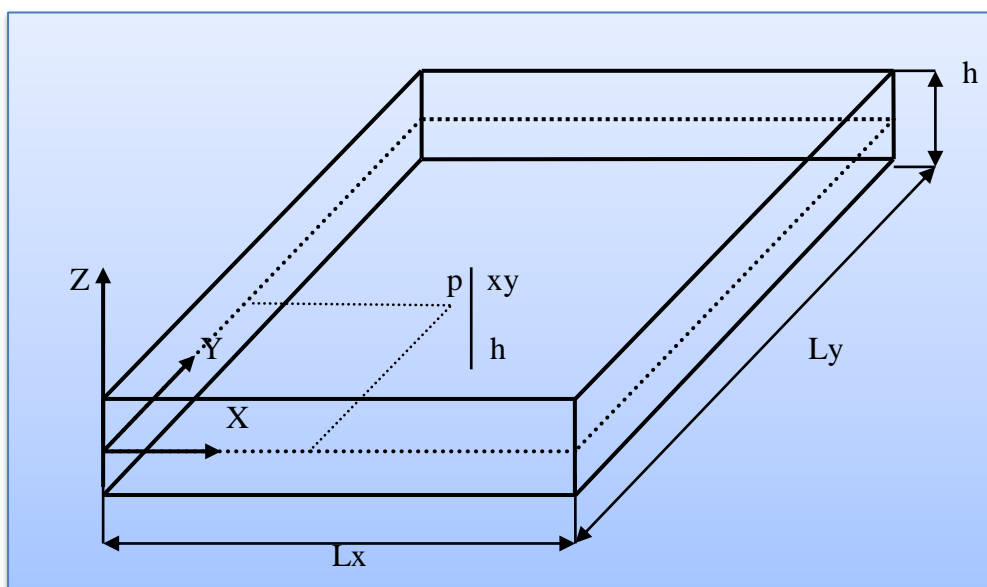
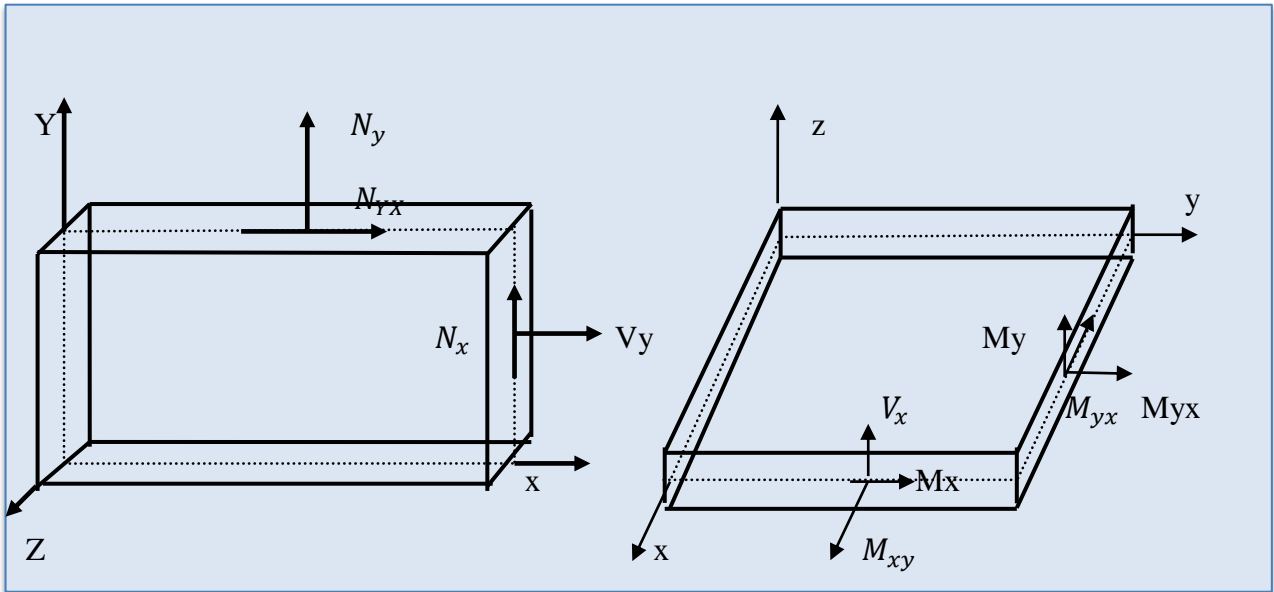
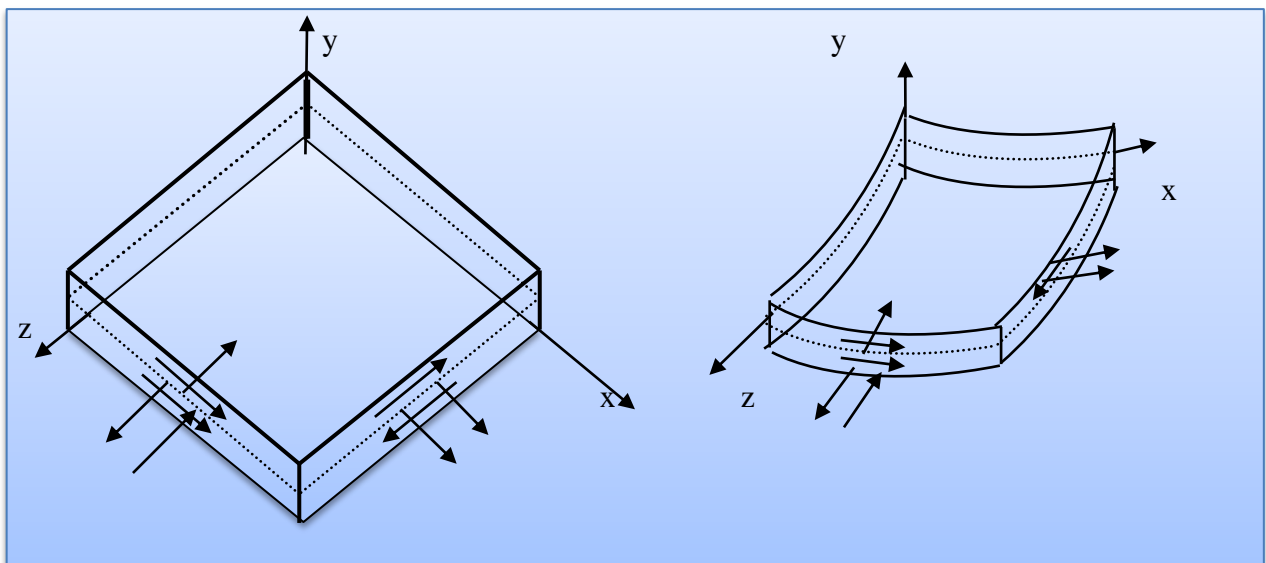


Fig. I-1 Description d'une plaque géométriquement



(Figure I-2a) L'état membranaire du paroi

(figure I-2b) L'états flexionnel de plaque



(Figure I-2c) superposition des états Membranaire

(figure I-2d) plaque de forme courbure et flexionnel

I.2 Hypothèses pour l'étude des plaques

L'étude du comportement d'une plaque [12] suit ensuite l'approche classique de la MMC. Le tenseur de contrainte (σ) en un point de la structure est ainsi relié au tenseur de déformation par la loi de comportement du matériau, et le champ de tenseurs des déformations est relié au champ des déplacements (u) par sa formulation établie en fonction du gradient du déplacement. Dans le cas d'un matériau isotrope linéaire, nous considérons la loi de Hooke généralisée

De plus, dans le cadre de petites perturbations avec des petits déplacements, nous pouvons considérer le **tenseur de déformation de Green-Lagrange linéarisé** défini par

$$\varepsilon^y = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^1 + \mathbf{U})$$
 Avec \mathbf{U} le gradient du déplacement. A noter que l'étude du comportement d'une plaque est séparée en deux parties :

- ❖ Pour l'étude de la **flexion de la plaque** (c'est-à-dire le fait que la structure soit courbée), nous considérons uniquement les charges perpendiculaires aux faces, c'est à-dire correspondant à une force appliquée de la forme $F = (0, 0, F)$.

- ❖ Pour les charges situées dans le plan des faces, nous parlons d'**efforts de membranes**. Dans ce cas, nous considérons que les efforts perpendiculaires sont nuls [12].

I.2-1 Théorie de Kirchhoff-Love pour les plaques minces.

La théorie de Kirchhoff-Love est employée pour l'étude de plaques minces. Elle énonce les hypothèses suivantes :

- ❖ le plan moyen est initialement plan, c'est-à-dire qu'il ne présente pas de courbure.
- ❖ le feuillet moyen ne subit pas de déformation dans son plan, c'est-à-dire que nous ne

Considérons que le déplacement transversal (w) des points du feuillet moyen.

- ❖ les sections normales au feuillet moyen restent normales lors de la déformation, c'est à-dire que nous pouvons négliger le cisaillement.

- ❖ l'épaisseur de la plaque est faible.

- ❖ la déformation est nulle impliquant que les contraintes dans cette direction peuvent être négligées.

- ❖ et nous nous plaçons en petites déformations. [5]

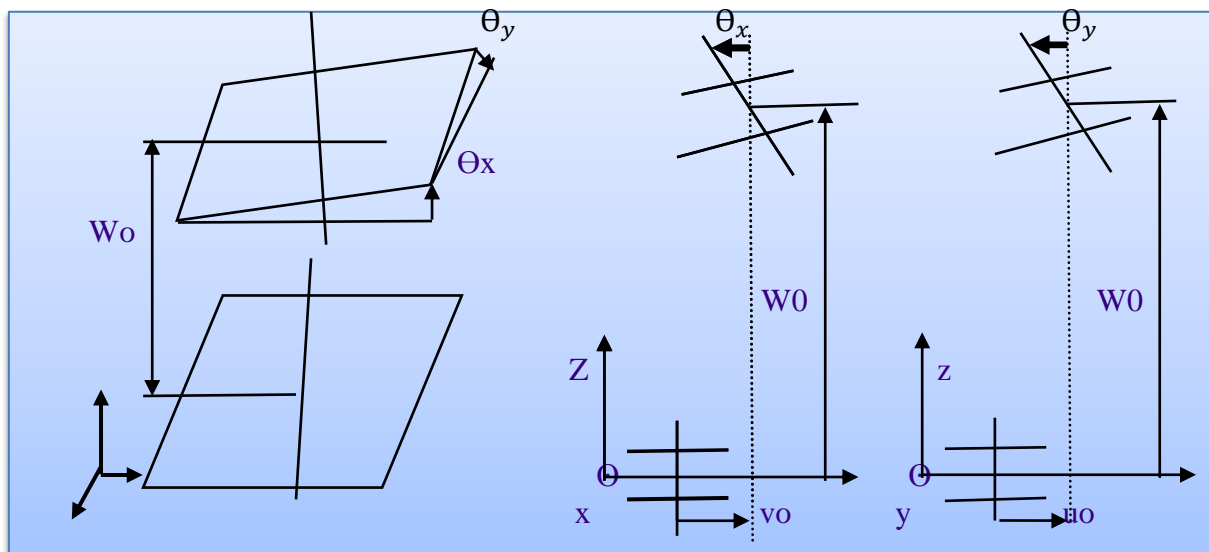
I.2-1-1 Cinématique d'une plaque mince

Nous considérons pour décrire le mouvement de la plaque, le repère local associé au plan moyen. La position de tout point de la plaque au repos est alors décrite par ses coordonnées cartésiennes exprimées dans ce repère avec $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)^T = (x, y, z)^T$. Suite à la déformation appliquée à la plaque, le déplacement (U) de ce point est défini par $u = (U_1, U_2, U_3)^T = (u, v, w)^T$ correspondant au déplacement du point de la plaque entre l'état de référence et l'état déformé de la plaque. Les composantes du déplacement dépendent ainsi de la position du point de la plaque considéré dans l'état de référence. [12] Autrement dit, les composantes (u, v, w) sont définies en fonction des composantes (x, y, z)

Ensuite dans le même esprit que pour l'étude des poutres, nous allons exprimer ce déplacement en fonction du mouvement du plan moyen de la plaque. Ce mouvement peut être décomposé en une translation et une rotation. Nous désignons par $\vec{U}_0(u_0(x, y, z), v_0(x, y, z), w_0(x, y, z))^T$ le déplacement par translation du plan moyen. Les composantes u_0, v_0 correspondent ainsi au déplacement du plan moyen dans le plan $(0, x, y)$. Le plan moyen étant positionné en $z = 0$, elles ne dépendent ainsi que de x et y avec $u_0(x, y, z) = u_0(x, y)$ et $v_0(x, y, z) = v_0(x, y)$.

La composante w_0 correspond quant à elle, au déplacement du plan moyen dans la direction z . Selon les hypothèses de Kirchhoff-Love, les déplacements verticaux sont les mêmes pour tous les points d'une fibre normale positionnée en (x, y) dans le plan $(0, x, y)$ du plan moyen. Nous savons ainsi que la composante w_0 ne dépend que de x et y avec $w_0(x, y, z) = w_0(x, y)$. Selon cette même hypothèse, nous savons également que pour tout point de la plaque $w(x, y, z) = w_0(x, y, z) = w_0(x, y)$. Etudions désormais la rotation du plan moyen en notant par θ_x, θ_y ses rotations par rapport aux axes (x et y). Ainsi une fibre normale au plan moyen positionnée en $(x, y)^T$ dans le plan $(0, x, y)$ tourne de l'angle θ_x autour de l'axe x et de l'angle θ_y autour de l'axe y .

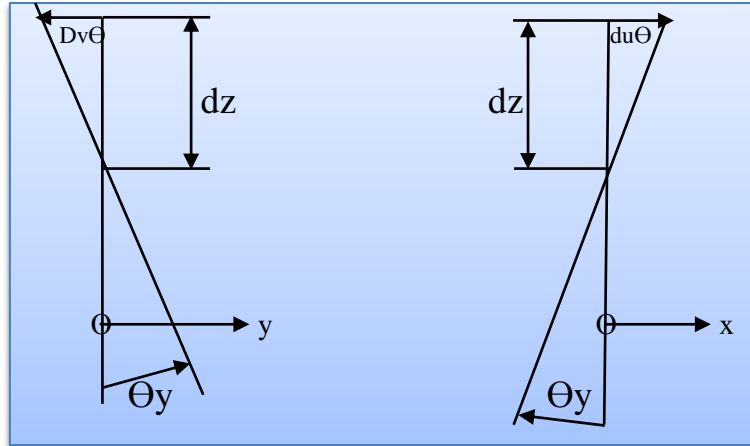
Toutes ces notions et notations sont illustrées [5] par la (Fig.I-3)



(FigI-3) déplacements du plan moyen avec mise en évidence de la rotationnel

Etant en petites déformations, l'arc de cercle décrit lors de la rotation de la fibre Normale en considérant un point situé sur celle-ci, est assimilable à un segment de droite. Ainsi en observant la (Fig. I-4), nous écrivons facilement les relations suivantes :

$$\text{Tag } \theta_x = -\frac{dv_0}{dz} \quad \text{Tag } \theta_y = -\frac{du_0}{dz} \quad (\text{I-1})$$



(Figure I-4) Rotation d'une fibre normale selon les axes x et y mettant en évidence le relations Entre u_0, v_0 et les angles θ_x, θ_y correspondant au mouvement du plan moyen

Toujours sous l'hypothèse de petites déformations, les tangentes des angles θ_x, θ_y peuvent être assimilées à leurs angles. Les relations précédentes deviennent ainsi :

$$\theta_x = -\frac{dv_0}{dz} \quad \theta_y = \frac{du_0}{dz} \quad (\text{I-2})$$

Le mouvement induit par la rotation du plan moyen est ainsi exprimé par $\theta_y(x, y)$ selon l'axe x et par $\theta_x(x, y)$ selon l'axe y pour le point (x, y, z) dans l'état de référence. La relation précédente permet également d'écrire [12]:

$$\theta_x = -\frac{\partial v_0}{\partial z} \quad \theta_y = \frac{\partial u_0}{\partial z} \quad (\text{I-3})$$

La (Fig I-4) met également en évidence le fait que les tangentes des angles θ_x, θ_y représentent aussi la pente que prend le feuillet moyen. Ceci induit les relations suivantes :

$$\text{Tag } \theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad \text{Tag } \theta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{I-4})$$

$$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad \theta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{I-5})$$

Au final, si nous considérons la translation et la rotation du plan moyen, le déplacement U de tout point de la plaque de position $(x, y, z)^T$ dans l'état de référence, s'exprime sous la forme suivante

$$\vec{U} \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uo(x, y) \\ vo(x, y) \\ wo(x, y) \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} \Theta_y(x, y) \\ -\Theta_x(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I-6})$$

Nous avons les relations suivantes pour les coordonnées du **déplacement de la Plaque mince** \vec{U}

$$u(x, y, z) = uo(x, y) + Z \Theta_y(x, y) \quad (\text{I-7})$$

$$v(x, y, z) = vo(x, y) - z\Theta_x(x, y) \quad (\text{I-8})$$

$$w(x, y, z) = wo(x, y) \quad (\text{I-9})$$

I.2-1-2 Déformation d'une plaque mince

Soit un point \mathbf{x} dans l'état de référence, correspondant à la plaque au repos, ayant pour position $(x_1 x_2 x_3)^T = (x, y, z)^T$. Suite à la déformation Θ , nous avons vu que ce point subit un déplacement $= U_{(U_1 U_2 U_3)} = (u, v, w)^T$. Puis nous avons vu qu'étant dans le cadre de petites déformations avec de petits déplacements, nous pouvons considérer le **tenseur de déformation de Green-Lagrange linéarisé** pour modéliser cette déformation en fonction du déplacement. Ce tenseur est symétrique et ses composante décrits avec la notation de Voigt sont définies par [12] :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial U_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{I-10})$$

Finalement en option la formule suivante, [12]

$$\mathcal{E}_{xx} = \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} + Z \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial x} \quad (\text{I-11})$$

$$\mathcal{E}_{yy} = \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} - Z \frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial xy} \quad (\text{I-12})$$

$$\mathcal{E}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + Z \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} Z \left(\frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial y} - Z \frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial x} \right) \quad (\text{I-13})$$

I.2-1-3 Tenseur de contraintes et loi de comportement

Etudions maintenant le tenseur de contraintes et son lien avec le tenseur de déformation définissant la loi de comportement de la plaque mince. Rappelons que la plaque de faible épaisseur est sollicitée uniquement dans son plan (x, y) et que la direction z est orthogonale à la plaque. Les composantes xz , yz , zz du tenseur de contraintes sont ainsi nulles sur les deux faces de la plaques et par raison de continuité sont négligeables à l'intérieur de la plaque. Pour la même raison, les composantes xx , xy , yy sont non nulles mais peu dépendantes de z . Nous supposons également qu'elles sont constantes sur toute l'épaisseur de la plaque.

En résumé, le **tenseur de contraintes** s'exprime ainsi pour la plaque mince [12]:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(x,y) & \sigma_{xy}(x,y) & \sigma_{zz} = 0 \\ \sigma_{yx}(x,y) & \sigma_{yy}(x,y) & \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 & \sigma_{zy} = 0 & \sigma_{zz} = 0 \end{pmatrix} \bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(x,y) \\ \sigma_{yy}(x,y) \\ \sigma_{xy}(x,y) \end{pmatrix} \quad (\text{I-14})$$

Au final, nous avons la relation suivante entre le tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$ (avec $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$)

et $\bar{\bar{\mathcal{E}}}$ (avec $\mathcal{E}_{xz} = \mathcal{E}_{yz} = 0$)

en considérant la loi de Hooke pour la plaque mince :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{xx} \\ \mathcal{E}_{yy} \\ \mathcal{E}_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{I-15})$$

Au finale nous avons ainsi la relation suivante entre le tenseur $\bar{\bar{\mathcal{E}}}$ (avec $\mathcal{E}_{xz} = \mathcal{E}_{yz} = 0$) en considérant la loi de Hooke pour la plaque mince :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{xx} \\ \mathcal{E}_{yy} \\ \mathcal{E}_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{I-16})$$

I.2-1-4 Energie de déformation d'une plaque mince

Considérons au temps t , une plaque mince d'épaisseur h et de surface At pour son plan moyen.

Si nous considérons la relation définissant les composantes du tenseur de déformation

$$\boldsymbol{\varepsilon}^g \text{ (avec } \boldsymbol{\varepsilon}^g = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z\boldsymbol{\varepsilon}_b),$$

L'énergie de déformation de la plaque mince est donnée par [12] :

$$W = \frac{1}{2} \int_{dA} (\boldsymbol{\sigma}^= : \boldsymbol{\varepsilon}^g) dx dy dz \quad (\text{I-17})$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{dA} \int_{-h/2}^{h/2} (\boldsymbol{\sigma}^= : \boldsymbol{\varepsilon}^g) dx dy dz \quad (\text{I-18})$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{At} (e_{xx}N_{xx} + e_{yy}N_{yy} + e_{xy}N_{xy} + k_{xx}M_{xx} + k_{yy}M_{yy} + k_{xy}M_{xy}) dx dy dz \quad (\text{I-19})$$

Sous forme général

$$W = \frac{1}{2} \int_A (\vec{N}\vec{e} + \vec{M}\vec{x} + \vec{Q}\vec{\lambda}) dA \quad (\text{I-20})$$

$$\text{Ou } \vec{N} = (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy})^T \text{ et } \vec{M} = (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy})^T \quad (\text{I-21})$$

Représente les efforts résultante de flexion ils sont définis par

$$\vec{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (\text{I-22})$$

I.2-2 Théorie des plaques épaisses

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion (elle n'est plus très petite devant la dimension des ondes de flexion), une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire. [12]

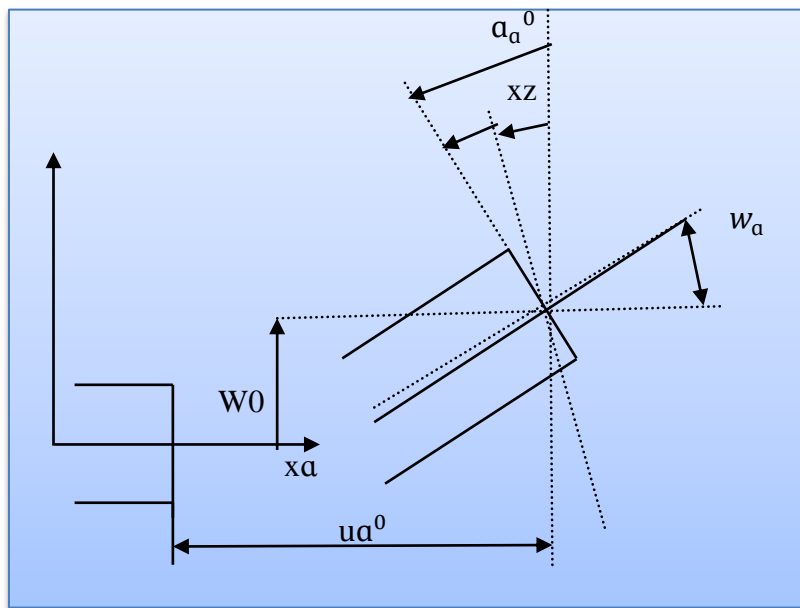
Rayleigh en 1877 puis Timoshenko en 1921 montrent que la prise en compte des effets d'inertie de rotation et de cisaillement, affectent les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonances calculées en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système.

Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement est proposée par Reissner en 1945[20] dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand en 1948. C'est cependant l'article de Mindlin, [19] publié trois (3) ans plus tard qui fera date.

I.2-2-1 Hypothèses pour l'étude des plaques épaisses [12]

Les hypothèses de Mindlin, reprennent les points 1 et 5 de celles de Kirchoff. Les points 2 et 4 des précédentes hypothèses ne sont plus retenus afin de prendre en compte les deux nouveaux effets.

Les éléments basés sur la théorie Mindlin- Reissner sont les mieux adaptés dans le cas des plaques d'épaisseur modérée. Leur formulation est basée sur une approximation des trois variables indépendantes (w, θ_x, θ_y) . Cependant, on note que dans l'expression de l'énergie de déformation n'interviennent que des dérivées premières de (w, θ_x, θ_y) . La condition de la compatibilité inter-éléments ne nécessite qu'une continuité.



(Figure I-5) : Cinématique de Reissner - Mindlin

I.2-2-2 Champs de déplacement[1]

Dans la théorie des plaques épaisses, ou théorie de Reissner et Mindlin, la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen. si θ_x, θ_y désignent les angles que fait la fibre normale avec l'axe Z, ils ne correspondent plus à l'inclinaison du plan moyen, on a donc :

$$U_a(x_1, x_2, x_3 = z) = U_a^0(x_1, x_2) + z\theta_a(x_1, x_2) \quad (I-23)$$

$$U_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \quad (I-24)$$

D'autre part, par la relation sont données par :

$$\theta_x \neq \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_y \neq \frac{\partial w}{\partial x} \quad (I-25)$$

Donc, les variables cinématiques indépendantes sont :

U, v : Les déplacements de la membrane

W : Le déplacement transversal

$\beta_x (\theta_y)$: La rotation du plan xy autour de y

$\beta_y (-\theta_x)$: La rotation du plan xy autour de x

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z. Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal. Donc, le champ des déplacements s'exprime alors en fonction des trois variables par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I-26})$$

I.2-2-3 Champs de déformation

Concernant le champ de déformation, les termes gardent leur forme générale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \epsilon_y = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \epsilon_z = 0 \\ 2\epsilon_{xy} = \gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \quad (\text{I-27})$$

Et par ailleurs ϵ_{xz} et ϵ_{yz} ne sont plus nuls

$$2\epsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{dw}{dx}, \quad 2\epsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{dw}{dy} \quad (\text{I-28})$$

I.2-2-4 Efforts résultants de membrane :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \quad (\text{I-29})$$

❖ Moments de flexions :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \quad (\text{I-30})$$

❖ Efforts tranchants :

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (\text{I-31})$$

I.3 Matériau isotrope:

Un corps homogène est isotrope vis à vis d'une propriété mécanique si cette dernière est indépendante de la direction considérée dans le corps. Un matériau est isotrope quand la matrice du tenseur d'élasticité reste identique à elle-même pour tout changement d'axes. Les propriétés mécaniques des matériaux homogènes et isotropes peuvent être caractérisées par leur résistance et leur constante d'élasticité, le module de Young et le coefficient de Poisson. Dans un milieu isotrope, toutes les directions sont équivalentes. Est caractérisé par deux modules d'élasticité λ et μ appelés coefficients de Lamé, ou bien par le module de Young E et par le coefficient de Poisson ν . [26]

Dans toute la base, la matrice de rigidité s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{I-32})$$

Alors la matrice de souplesse d'un matériau isotrope s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{I-33})$$

Dans le cas d'une plaque isotrope, deux coefficients seulement sont indispensables, le Module de Young E appelé module d'élasticité et ν coefficient de Poisson. Le module D d'élasticité au cisaillement G ou le module de glissement relie les contraintes tangentielles Aux déformations angulaires. La matrice de rigidité s'écrit :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{I-34})$$

La relation entre les déformations et les contraintes seront :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{I-35})$$

I.4 Formulation des éléments finis

I.4-1 Introduction[14]

La méthode des éléments finis permet de résoudre un problème dont la solution analytique ne peut éventuellement pas être déterminée. Elle fournit une solution approchée de la solution exacte. Le milieu étudié est discrétisé en plusieurs éléments reliés entre eux par des nœuds. La géométrie d'un élément est caractérisée par un nombre fini de nœuds sur son périmètre. La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis consiste à trouver les déplacements (par exemple les translations et les rotations) de ces nœuds. Le champ de déplacement en tout point est déterminé par interpolation entre les valeurs déterminées aux nœuds. L'interpolation est basée sur l'utilisation de fonctions de formes.

I.4-2 Principe de la méthode des éléments finie

Pour un problème de mécanique en élasticité, le principe des travaux virtuels

S'écrit en un point M d'un domaine Ω chargé par des efforts volumiques \vec{f} et des efforts \vec{F} sur une partie du bord $\partial\Omega$ [14]

$$\int_{\Omega} \vec{N}(M) \cdot \vec{U}(M) dV + \int_{\partial\Omega} \vec{F}(M) \cdot \vec{U}^*(M) dS - \int_{\Omega} (\underline{\sigma} : \underline{\underline{\epsilon}}^*) dV = 0 \quad (\text{I-36})$$

Pour le champ de déplacement u^* . La structure étudiée est discrétisée en un ensemble d'éléments le maillage. Chaque élément possède n nœuds. La résolution du problème se base sur l'interpolation du champ de déplacement de chaque élément suivant la forme :

$$\vec{U}(M) = \begin{bmatrix} u(M) \\ v(M) \\ w(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \dots & \dots & \dots & \Phi_{1(3n)} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \dots & \dots & \dots & \Phi_{2(3n)} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & \dots & \dots & \dots & \Phi_{3(3n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = [\Phi][u] \quad (\text{I-37})$$

Les fonctions Φ_{ij} sont les fonctions de forme. Le tenseur de déformation s'obtient par les équations de la cinématique pour s'écrire sous la forme :

$$[\underline{\underline{\epsilon}}(\vec{U}(M))] = [\delta][u] \quad (\text{I-38})$$

où $[\delta]$ désigne la matrice des dérivées des fonctions de forme. Enfin, le tenseur des contraintes s'obtient grâce à la loi de comportement sous la forme [14]:

$$[\underline{\sigma}] = [E][\delta][u] \quad (\text{I-39})$$

Pour un matériau élastique isotrope de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν [9]

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{I-40})$$

Finalement, le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\left(\int_{\Omega} [fint][\Phi] dv + \int_{\partial\Omega} [Fext][\Phi] ds \right) [u] - [u^t] \left(\int_{\Omega} [\delta^t][E][\delta] dV \right) [u] = 0 \quad (\text{I-41})$$

En considérant que ce principe doit être vérifié pour tout $[u]$ et en introduisant la matrice de raideur : $K = \int_{\Omega} [\delta]^t [E] [\delta] dv$ (I-42)

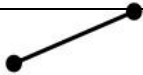



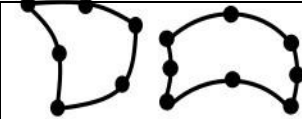
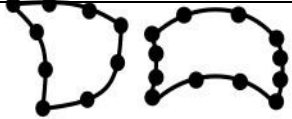
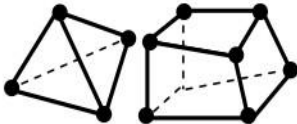
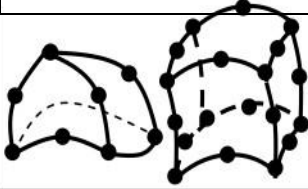



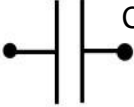
I.4-3 Etape de la résolution d'un problème [9]

1. Définition de la géométrie de la structure étudiée
2. Maillage de la structure (discrétisation en éléments)
 - Génération de la table de connectivité entre les éléments
3. Définition du modèle associé à la structure
4. Choix des paramètres du modèle (deux pour un matériau élastique isotrope)
5. Construction de la matrice de raideur globale par assemblage des matrices de raideur locales des éléments en fonction de la table de connectivité
6. Construction du vecteur effort global par assemblage des vecteurs d'effort locaux suivant la table de connectivité
7. Prise en compte des conditions aux limites
8. Prise en compte du chargement
9. Résolution du système pour obtenir les déplacements nodaux des éléments
10. Traitement du résultat (calcul des déformations, calcul des contraintes)

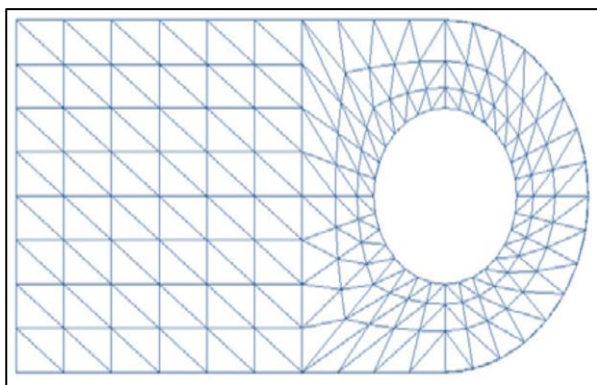
I.4-4 Discrétisation [16]

La Méthode des Eléments Finis a développé une série de types d'éléments finis qui, pour le début, peuvent être classifiés en :

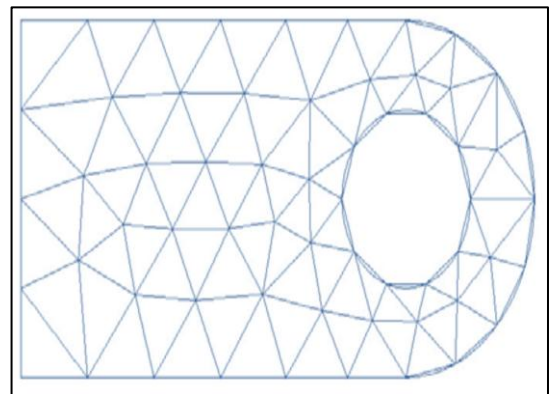
- éléments finis unidimensionnels (généralement des barres) ;
- éléments finis bidimensionnels (plaques et mêmes volumes) ;
- éléments finis tridimensionnels (blocs massifs).

| Eléments | linéaires | paraboliques (quadratiques) | cubiques |
|------------------|---|--|--|
| Unidimensionnels |  |  |  |
| bidimensionnels |  |  |  |
| Tridimensionnels |  |  |  |
| Autres types |  Masse |  Ressort |  Contact |

La structure doit être divisée en éléments finis de forme triangulaire. Quand le contour de la Plaque n'est pas polygonal mais courbe, le modèle tronque nécessairement certaines parties en Périphérie. L'analyse pourra donc porter sur une géométrie approchée. A nombre égal d'éléments, il existe une infinité de décompositions possibles. Les propriétés qui seront mises en évidence plus loin montrent que la précision des résultats obtenus dépend de la finesse du maillage, notamment dans les zones à fort gradient de contrainte. Il faut donc accentuer la densité des éléments dans ces zones quand elles présentent un intérêt pour l'étude. [14]



Maillage libre



Maillage réglé

(Figure I-6) Exemples de discrétisations

Le comportement de chaque élément est décrit par une équation algébrique. Dans l'analyse des contraintes ces équations sont des équations d'équilibre des nœuds. Du fait que le nombre de ces équations est très grand (centaines ou milliers), l'utilisation d'un ordinateur est absolument obligatoire. Autrement dit, dans un élément, une quantité de champ (ex. le champ de déplacement) est interpolé à partir des valeurs existantes dans les nœuds. En connectant les éléments ensemble, la quantité de champ devient interpolée sur l'entier de la structure. Les meilleures valeurs de la quantité de champ dans les nœuds sont celles qui minimisent certaines fonctions (telle que l'énergie totale). Le processus de minimisation génère l'équation algébrique simultanée pour les différentes valeurs de la quantité de champ dans les nœuds. [14]

Cet équations est décrit sous forme matricielle par : $\{F\} = [K] \times \{d\}$ où :
 $\{d\}$: vecteur d'inconnues (valeurs de la quantité de champ dans les nœuds ex : vecteur des Déplacements) ;
 $[K]$: matrice des constantes (connue ex : matrice de rigidité) ;
 $\{F\}$: vecteur des chargements (connue ex : matrice des forces nodales) [14]

I.4-5 Approximation nodale

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation U du champ des variables u par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs Approchées du champ aux nœuds de l'élément considéré, on parle de représentation nodale de L'approximation ou plus simplement d'approximation nodale

I.4-6 Élément à deux dimensions rectangulaire

L'approximation bilinéaire est déduite de la base polynomiale $(1, s, t, st)$ sur $(s, t) \in [-1, 1]$.

L'élément de référence est un carré à quatre nœuds de type « Q4 ». Les fonctions d'interpolation

Sont : $N_1 = \frac{1}{4}(1-S)(1-T)$ $N_2 = \frac{1}{4}(1+S)(1-T)$

$N_3 = \frac{1}{4}(1+S)(1+T)$ $N_4 = \frac{1}{4}(1-S)(1+T)$

Sur la **figure (I-7)**, seule la fonction N_1 est représentée, les autres s'obtenant par permutation. De la même façon, on peut construire, à partir d'une base polynomiale complète, les fonctions D'interpolation des éléments rectangulaires à neuf nœuds, pour une approximation quadratique, [14]

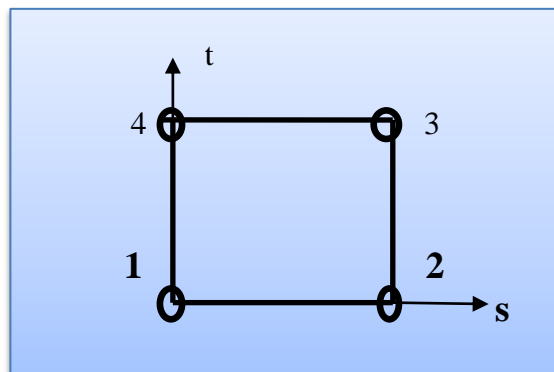


Figure (I-7) Fonction d'interpolation N_1 du quadrangle. Les autres sont obtenues par rotation

CHAPITRE II

*Formulation du comportement statique
et dynamique d'une plaque mince*

II-1 Introduction :

Les problèmes liés aux vibrations des structures sont parmi les plus étudiés dans les bureaux d'études, quels que soient leurs domaines d'activité. Les vibrations sont à l'origine de nombreux Accidents ou incidents, que l'on parle de Génie Civil, d'Aéronautique, de Spatial ou de tout autre Secteur industriel. Pour les uns, il s'agira d'éviter une résonance, pour d'autres, d'optimiser un coût et donc nécessairement une masse, ce qui aura une influence sur la réponse à d'autres sollicitations, d'origine thermique par exemple,

Il existe de nombreuses méthodes éprouvées pour estimer les fréquences propres et modes propres : comme les méthodes matricielles ou la méthode des éléments finis... Mais nous avons tenu à choisir des méthodes très simples et d'une utilisation immédiate qui n'en constituent pas moins de remarquables approximations comme nous le verrons plus loin. Les choses ont beaucoup moins été établies en ce qui concerne l'étude paramétrique des plaques en vibration libre. Il existe des modèles mathématiques adaptés aux plaques, qui permettent de calculer les caractéristiques dynamiques. Les nombreux travaux visant à déterminer les caractéristiques dynamiques des plaques en vibration libre ont conduit à l'élaboration des différents modèles analytiques et numériques. Mais les modèles proposés jusqu'à ces dernières années sont soit limités à des analyses statiques, soit à des analyses dynamiques. Les rares études qui traitent les problèmes des vibrations des plaques avec les différentes conditions aux bords avec une étude paramétrique sont limitées.

Ce travail permet d'étudier plusieurs modèles de plaques avec des différentes combinaisons d'appuis aux bords en vue de calculer les fréquences et les modes propres en vibration libre. Les éléments de plaque en flexion jouent un rôle très important dans l'analyse de nombreux types de structures.

II-2 Vibration libre

Les vibrations naturelles sont des vibrations inhérentes aux propriétés propres de la structure en l'absence des forces extérieures. Dans tous les cas, les vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque. L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés. Alors que la déformation est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire. La vibration des plaques est un cas particulier du problème plus général des vibrations mécaniques. Les équations régissant le mouvement des plaques sont plus. [15]

II-3 Charge répartie :

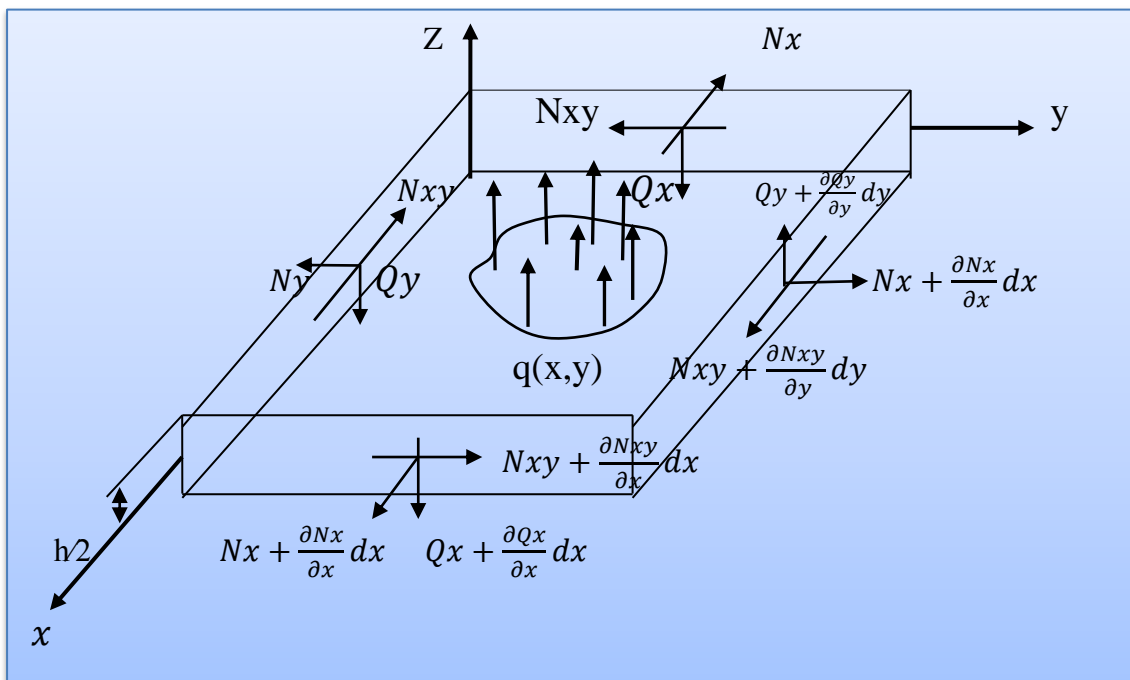
Les fréquences d'une plaque rectangulaire isotrope simplement appuyée sur les quatre bords avec une charge répartie en vibration libre sont déterminées en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz [15]. La solution du problème aux valeurs propres est obtenue en proposant une déformée de fonction forme de séries qui vérifie les conditions aux limites de la plaque. Les fréquences circulaires obtenues par l'approche énergétique en utilisant un programme, sont comparées avec celles obtenues par d'autres nouvelles méthodes ou d'autres cas des plaques. Ensuite, une étude paramétrique fréquentielle de la plaque est nécessaire afin de comprendre le comportement dynamique d'une plaque

II-4 L'analyse vibratoire:

L'analyse vibratoire est une question d'actualité importante, tant d'un point de vue académique et industrielle. Cette thématique touche aussi d'autres domaines, tels que l'automobile, génie civile les ponts, les bâtiments, ou encore le génie nucléaire. Durant cette dernière décennies, le domaine des vibrations connaît un gain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à de différents niveaux d'excitations. D'une autre manière, la compréhension de l'identité vibratoire des plaque et devient donc d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. Au final, les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions d'analyse des réponses dynamiques des plaques et leur dimensionnement. L'étude et l'analyse des vibrations ont pris au cours des dernières années, un essor considérable en raison du développement du comportement dynamique du matériau isotrope, orthotrope ou composite. Le contrôle des vibrations des structures plaques est un problème épineux qui se pose fréquemment au chercheur ou ingénieur mécanicien. Pour assurer ce contrôle, la détermination des caractéristiques dynamiques de la structure est indispensable. [15]

II-5 Equations d'équilibre :

Considérons des petites déflexions et écrivons l'équilibre des forces suivant l'axe $x = 0$, il vient d'après la **figure II-1**).



(Figure II-1) . Forces agissant sur l'élément plaque

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx - N_y dy + \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial x^2} dx \right) \quad (\text{II-1}) \\
& - N_y dx \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial y^2} dy \right) - N_{xy} dx \frac{\partial w}{\partial x} - N_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} \\
& + \left(N_{xy} dx \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right) dx \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial xy} dy \right) + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) dx \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial xy} dx \right) \\
& + q dx dy = \rho h dx dy \frac{\partial w^2}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

où ρ est la masse volumique, et $\frac{\partial w^2}{\partial t^2}$ accélération suivant l'axe oz. En développant (II.1) et en négligeant les termes d'ordre supérieur à $dx dy$, on obtient

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + q = \rho h \frac{\partial w^2}{\partial t^2} \quad (\text{II-2})$$

Cette équation peut encore se simplifier si l'on considère les équations d'équilibre de l'élasticité tridimensionnelle.

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (\text{II-3})$$

Avec $(\mathbf{u}_i)\mathbf{i} = \mathbf{u}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ et u, v les déplacements suivant les axes ox et oy respectivement. Quand les forces d'inertie dans le plan de la plaque sont négligées et que les contraintes $(\sigma_{yz}, \sigma_{zx})$ sont petites par rapport aux autres contraintes, alors :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-4})$$

Comme ces équations doivent être satisfaites pour toute épaisseur infinitésimale dz de l'élément de plaque, on peut intégrer ces deux équations suivant l'épaisseur h de la plaque, d'où

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-5})$$

En utilisant (II.5), l'équation (II.2) devient

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial w^2}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial w^2}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial w^2}{\partial y \partial x} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{II-6})$$

L'équilibre des forces suivant les deux axes ox et oy s'écrit

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(Q_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(Q_y \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{II-7})$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(Q_x \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(Q_y \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (\text{II-8})$$

Quand on néglige de nouveau les forces d'inertie suivant les axes ox et oy , et que les efforts tranchants sont négligeables devant les efforts normaux (N_x, N_y) et que les pentes devant l'unité, alors eq (II.7) équivaut à eq (II.5) Il reste maintenant à écrire les équations d'équilibre des moments par rapport aux axes ox et oy , on obtient alors :

$$Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \rho h / 12 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \quad (\text{II-9})$$

$$Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} = \rho h / 12 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \quad (\text{II-10})$$

Où on a négligé les termes car ils conduisent à des différentielles d'ordre Plus grand que les autres. Les termes de droite dans les équations (II.8) représentent l'inertie de rotation de l'élément de plaque[22]

II-6 Calcul des moments et des efforts :

On suppose que les contraintes $(\sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})$ sont petites par rapport aux contraintes $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ Par conséquent la loi de Hooke se résume aux équations:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}), \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}), \epsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \quad (\text{II-11})$$

Les moments et les forces sont alors obtenus en intégrant les contraintes normales sur l'épaisseur de la plaque pour les efforts, et à intégrer ces contraintes multipliées par z pour les moments, soit[6]

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (\text{II-12})$$

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz$$

Sans remonter trop loin dans la théorie de la mécanique des milieux continus, et sans rentrer dans les détails des champs de déplacements et de contraintes, la loi de Hooke et les équations de Lamé-Navier permettent d'écrire les moments dans le plan de la plaque .Ainsi l'expression des moments

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); M_{xy} = -2(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{II-13})$$

Où ν le coefficient de Poisson et $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ le coefficient de rigidité en flexion de la plaque. Remplaçons les moments dans (II.10) par leurs expressions données par eq (II.11) et on reportant dans eq (II-14)

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 W) \quad (\text{II-14})$$

$$Qy = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 W) \quad (\text{II-15})$$

On obtient ainsi l'équation classique de la théorie des plaques qui pour la majorité des Applications techniques est suffisante pour l'étude des problèmes de flexion.

$$= -D(\nabla^4 W) + Nx \frac{\partial w^2}{\partial x^2} + 2 Nxy \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} + Ny \frac{\partial w^2}{\partial y^2} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{II-16})$$

Si on ne s'intéresse qu'aux problèmes de flexion pure, en supposant les effets de tension et de flexions découplées, l'approximation de l'élasticité linéaire aboutit à l'équation suivante: [13]

$$q = D(\nabla^4 W) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{II-18})$$

Où ρ la masse volumique du matériau constituant la plaque, D le module de rigidité en flexion, h l'épaisseur de la plaque, q la force imposée et enfin ∇ l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)$

II-7 Expressions des Conditions aux limites :

Ces conditions sont matérialisées par le blocage de certaines composantes (degrés de liberté) du déplacement. Les ouvrages reposent généralement sur des appuis (ou liaison externes) par l'intermédiaire d'appareils qui permettent de bloquer certains degrés de liberté du déplacement ou de la rotation. Ces appareils, conçus pour travailler dans les directions privilégiées, autorisent sélectivement le développement des effets structuraux dus aux charges statiques ou dynamiques. Considérons une plaque homogène de dimensions a , b et h et on suppose que ses cotés sont parallèles aux axes x et y .

Ces diverses conditions vont s'écrire sur les expressions des déplacements u , v et w , on aura ainsi d'abord pour la théorie classique de Love – Kirchhoff.

II-7-1 Type de support : Appui simple :

Si le bord $x=a$ de la plaque est simplement appuyé, la flèche w le long de celui-ci est nulle. Et en même temps, ce bord peut tourner librement autour de l'axe x c'est-à-dire qu'il n'existe pas de moments de flexion Mx le long de ce bord. (w) $x=a$

$$(Mx)_{x=a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nabla \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (\text{II-19})$$

II-7-2 Type de support : Bord fixé :

Si le bord $x=a$ de la plaque est encasté, la flèche le long de ce bord est nulle et le plan tangent au feuillet moyen fléchi, le long de ce bord, coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque. En conséquence le déplacement vertical et la rotation sont nuls.

$$(w)_{x=a} ; \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \quad (\text{II-20})$$

II-8 Forme de la déflexion : [6]

Considérons donc une plaque rectangulaire, de longueur a , de largeur b et d'épaisseur constante h . Soit D son module de rigidité en flexion, et $q(x, y, t)$ la charge extérieure Appliquée par unité de surface, alors dans une première approximation l'équation du mouvement en flexion s'écrit:

$$D(\nabla^4 W) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t) \quad (\text{II-20})$$

II-9 Energie d'une plaque : [6]

Le problème de la flexion d'une plaque revient donc à chercher la fonction $w(x, y)$ qui Vérifie les conditions aux limites et qui rend minimale l'énergie totale qui la somme de l'énergie de déformation et de l'énergie potentielle. On sera amené à distinguer localement : L'énergie interne de déformation de la plaque est donnée par l'intégrale sur le feuillet moyen des produits des efforts généralisés par leur grandeur duale des déformations généralisées.

$$w = \frac{1}{2} \int_A (\vec{N} \vec{e} + \vec{M} \vec{x} + \vec{Q} \vec{\lambda}) dA \quad (\text{II-21})$$

Les déformations généralisées associées au mouvement du feuillet moyen et de sa Normale peuvent être écrites sous formes de vecteurs.

$$\text{déformation dans le plan : } \vec{e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II-22})$$

$$\text{courbures : } \vec{\kappa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_x}{\partial x} \\ \frac{\partial Q_y}{\partial y} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II-23})$$

$$\text{Déformation de cisaillement : } \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + Q_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + Q_y \end{bmatrix} \quad (\text{II-24})$$

Les contraintes dans la structure, peuvent être modélisées par des efforts généralisés résultants de membrane notés N_x, N_y, N_{xy}

$$\text{- de membrane } \vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h}^{+h} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (\text{II-25})$$

Et trois moments de flexion notés (M_x, M_y, M_{xy})

$$\text{- de flexion } \vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h}^{+h} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (\text{II-26})$$

Deux efforts tranchants notés (Q_x, Q_y)

$$\text{- de tranchants } \vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \int_{-h}^{+h} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (\text{II-27})$$

La loi de comportement relie le vecteur des efforts généralisés $[N \ M \ Q]^t$ au vecteur des déformations généralisées $[e \ x \ \sigma]^t$

II-10 Les méthodes énergétiques : [14]

II-10-1 Généralités : [22]

Ces méthodes donnent d'assez bons résultats de façon générale, même lorsque les Conditions aux limites ne sont pas simples. Seulement la précision de la solution trouvée dépend pour beaucoup du choix des fonctions cinématiques admissibles, il faut que les fonctions satisfassent les conditions aux limites mais aussi respectent la géométrie et approchent les modes de vibrations. Ce choix est fondamental, car il peut conduire à des erreurs très importantes sur les fréquences.

II-10-2 Expression de l'énergie potentielle pour les plaques minces isotropes :

Elle s'exprime comme la somme: $\Pi = U + V + T$ (II-28)

Où U est l'énergie de déformation,

V est l'énergie potentielle des forces extérieures,

T est l'énergie cinétique

Soit en théorie classique pour les plaques isotropes:

$$U_{max} = \frac{D}{2} \int_{-h}^{+h} \int_{-a}^{+a} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} d_x d_y \quad (\text{II-29})$$

$$- \int_{-h}^{+h} \int_{-a}^{+a} q w d_x d_y + \frac{1}{2} \int_{-h}^{+h} \int_{-a}^{+a} \rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) d_x d_y$$

II-11 La méthode de Rayleigh : [15]

C'est sans aucun doute la méthode la plus simple puisqu'elle conduit à des formules Polynomiales pour les fréquences propres. L'idée fondamentale de cette méthode est de donner une forme approchée de la déflexion w d'une plaque en utilisant des résultats des poutres. Ainsi, pour un mode (m, n) d'une plaque rectangulaire de dimensions a et b , soumise à des conditions aux limites quelconques (les nombres m et n servant à distinguer les modes entre eux et correspondent aux nombres de lobes du mode dans les directions ox et oy , la déflexion w sera prise telle que :

$$w_{mn}(x,y) = X_m(x)Y_n(y) \sin \omega t \quad (\text{II-30})$$

ou X_x est le n_i^{eme} mode d'un poutre de longueur a .

y_y est le n_i^{eme} mode d'un poutre de longueur b .

Il existe de nombreuses méthodes éprouvées pour estimer les fréquences propres et modes propres, mais les choses sont beaucoup moins établies en ce qui concerne l'effet de cisaillement. Il s'agit d'un problème difficile en raison de la complexité de la compréhension de la linéarité et la non linéarité de l'effet de cisaillement. Les nombreux travaux visant à caractériser le comportement des plaques en flexion ont conduit à l'élaboration de différents modèles analytique et numérique Pour les vibrations linéaires, [15]

la gamme de techniques ou de logiciels dédiés à l'étude expérimentale ou numérique est très large et permet de traiter un grand nombre de problèmes de structures telles que les plaques minces et épaisses. Toute la difficulté de la méthode de Rayleigh est de bien choisir le vecteur ou la fonction de forme à tester. On se contraint en fait à rechercher la solution dans un espace des solutions à une dimension : Vecteurs proportionnels au vecteur choisi, des fonctions de formes proportionnelles à la fonction forme. La méthode de Rayleigh sert à calculer la plus petite fréquence.

La méthode de Rayleigh [15] sert à calculer la plus petite fréquence appelée "Fréquence Fondamentale". Pour cela on pose que le déplacement u ou v est égal au produit d'une Fonction de déplacement. A noter que cette méthode donne une valeur un peu erronée Dans la pratique, il est souvent commode de recourir à la méthode de Rayleigh car, pour les systèmes un peu compliqués, le calcul exact des pulsations peu devenir très difficiles. On obtient alors une Pulsation fondamentale avec une erreur admissible en pratique. On se place dans le cas des vibrations propres, c'est-à-dire que l'énergie potentielle des forces extérieures est nulle. Cette méthode consiste à calculer les expressions de l'énergie cinétique T et de l'énergie de déformation U pour w des fonctions de forme, vérifiant les conditions aux limites. En appliquant le théorème de conservations des énergies, le maximum de l'énergie cinétique doit être égal au maximum de l'énergie de déformation

Soit $U_{max} = T_{max}$ La déflexion $w(x, y, t) = w(x, y) \sin \omega t$ (II-31)

Où $w(x, y)$ est la fonction de forme et ω la pulsation inconnue.

Remplaçons W dans l'expression des énergies:

$$T = \frac{w^2}{2} \cos^2 \omega t \int_{-h}^{+h} \int_{-a}^{+a} \rho h w^2(x, y) dx dy \quad (II-32)$$

L'énergie cinétique sera à son maximum lorsque la vitesse de la plaque sera 0 son maximum donc lorsque: $\sin \omega t = 0$, d'où son expression:

$$T = \frac{w^2}{2} \int_{-h}^{+h} \int_{-a}^{+a} \rho h w^2(x, y) dx dy \quad (II-33)$$

D'autre part l'énergie de flexion U sera maximum quand la déflexion de la plaque sera Maximale, donc lorsque: $\sin \omega t = 1$ d'où son expression:

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_{-h}^{+h} \int_{-a}^{+a} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (II-34)$$

On déduit alors la fréquence fondamentale ω d'après l'expression suivante:

$$\omega^2 = \frac{2U_{max}}{\int_{-h}^{+h} \int_{-a}^{+a} \rho h w^2(x, y) dx dy} \quad (II-35)$$

II-12 Méthode de Rayleigh-Ritz : [9]

II-12-1 Introduction :

La méthode de Rayleigh-Ritz est une extension de la méthode de Rayleigh. C'est une méthode approchée également fondée sur des méthodes énergétiques. Le principe général consiste à ramener le problème à celui d'un système comportant un nombre fini de degrés de liberté. Pour cela on fixe un modèle hypothétique de déformation de la structure, satisfaisant les conditions aux limites et dépendant de plusieurs (m) coordonnées généralisées. Cette méthode est utilisée pour calculer les m premiers modes. Son rôle n'est pas seulement de donner une solution plus exacte de la fréquence fondamentale mais aussi, elle donne des résultats approximatifs des hautes fréquences et des modes. Du moment que les fréquences obtenues, sont toujours plus grandes que les valeurs exactes en raison des termes utilisés dans la fonction de forme lesquels augmente la rigidité de la plaque. Toute la difficulté de cette méthode est de « bien choisir » la fonction forme à tester.

II-12-2 Equation du mouvement : [9]

L'étude de la vibration de la plaque passe par la connaissance de l'amplitude de ses Déplacements en chaque point. Dans le cas de vibration libre, la méthode de Raleigh-Ritz permet d'approcher ces fréquences propres. Afin de les déterminer, on établit l'équation du mouvement de la plaque en réalisant une étude énergétique, faisant intervenir les différentes énergies du système (énergie cinétique, énergie potentielle). Cette méthode est utilisée pour développer le déplacement de la plaque selon des bases sinusoïdales ou polynomiales :

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_i(x), \dots, \varphi_n(x)$ Soit une classe de fonctions de la forme généralisée, On écrira ainsi la déflexion sous forme de séries:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) y_n(y)$$

Où les A_{mn} représentent l'amplitude du mode (m, n) à déterminer et les fonctions X_m et y_n vérifient individuellement les conditions aux limites mais pas forcément l'équation différentielle du mouvement. Cette méthode due à Ritz généralise la méthode de Rayleigh en incluant plusieurs paramètres dans les fonctions de forme. Les coefficients A_{mn} sont obtenus en rendant minimum la quantité $U_{max} - T_{max}$ soit:

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} (U_{max} - T_{max}) = 0 \quad (\text{II-36})$$

$$\text{les } A_{mn} \text{ sont alors solutions du système. } \frac{\partial U_{max}}{\partial A_{mn}} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial f}{\partial A_i} = 0 \quad (\text{II-37})$$

Cette méthode conduit donc à un système linéaire homogène où les A_{mn} et ω_{mn} sont les inconnues. Ce système peut également s'interpréter comme un problème de valeurs propres et de vecteurs propres, à chaque valeur ω_{mn} solutions annulant le déterminant du système sera associé les coefficients A_{mn} qui détermineront alors les modes ω_{mn}

Toute repose maintenant sur le choix des fonctions de forme φ_i , la précision sur les fréquences en dépend beaucoup. La solution approchée est recherchée sous la forme usuelle d'une série double. D'une façon générale, on recherche les déplacements sous la forme

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} X_m(x) y_n(y)$$

II-12-3 Formulation analytique: [9]

L'équation de la fréquence peut être obtenue en utilisant la méthode approchée de Rayleigh-Ritz où l'énergie de déformation maximale d'une plaque isotrope est de la forme :

$$U_{max} = \frac{D}{2} \int_{-h}^{+h} \int_{-a}^{+a} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (\text{II-38})$$

Avec : la rigidité de flexion $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ avec ν : coefficient de poisson

L'énergie maximale de la plaque en vibration libre avec une amplitude w et la fréquence naturelle ω est donnée par :

$$T_{max} = \frac{w^2}{2} \int_{-h}^{+h} \int_{-a}^{+a} \gamma(x, y) w^2(x, y) dx dy \quad (\text{II-39})$$

II-13 Le quotient de Rayleigh : [9]

Le quotient de Rayleigh est le rapport de l'énergie de déformation maximale et de l'énergie cinétique maximale. Ce quotient est défini comme suit

$$\lambda_R = \omega^2 = \frac{U_{max}}{T_{max}} = \frac{U_{max}}{\frac{w^2}{2} \int_{-h}^{+h} \int_{-a}^{+a} \gamma(x, y) w^2(x, y) dx dy} \quad (\text{II-40})$$

Où U_{max} et T_{max} sont donnés par les équations (2.34) et (2.35) respectivement.

Basé sur le principe de l'énergie potentielle, et appliquant la méthode de Rayleigh –Ritz, équation (2.28) est minimisée par rapport aux coefficients inconnus A_{mn} pour donner des séries d'équations simultanées et homogènes

$$\frac{\partial \lambda_R}{\partial A_{mn}} = \frac{\partial (\omega^2)}{\partial A_{mn}} = 0 \quad m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots \quad (\text{II-41})$$

Substituant le quotient donné par Eq (2.36) dans Eq (2.37) nous mène à :

$$\frac{\partial \lambda_R}{\partial A_{mn}} = \frac{T_{max} \frac{\partial T_{max}}{\partial A_{mn}} - U_{max} \frac{\partial U_{max}}{\partial A_{mn}}}{T_{max}^2} = 0 \quad (\text{II-42})$$

II-14 Méthodes pour obtenir les solutions : [13]

La solution recherchée pour le déplacement transversal est

$$W(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (\text{II-43})$$

En l'introduisant dans l'équation différentielle des plaques on obtient

$$\frac{X^{(4)}}{X} + 2 \frac{X'' Y''}{X Y} + \frac{Y^{(4)}}{Y} = - \frac{1}{\mu^2} \frac{T}{T} = \text{constante} = \beta^4 \quad (\text{II-44})$$

Avec $\mu^2 = \frac{B}{\rho h}$ (μ n'est pas la célérité des ondes). La difficulté apparaît dans le membre de gauche où il n'est plus possible d'obtenir des équations séparées pour $X(x)$ et $Y(y)$. Une méthode de résolution consiste à choisir arbitrairement une fonction $X(x)$ qui satisfait les conditions aux limites, puis à résoudre l'équation précédente pour obtenir $Y(y)$. Elle conduit à une solution exacte du problème. Cependant, il n'est pas possible de trouver des solutions analytiques dans la majorité des cas de conditions aux limites.

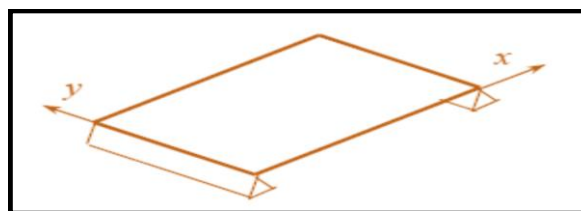
Cette méthode est souvent employée quand **deux bords opposés** sont **simplement supportés** (ou appuyés): c'est cette démarche qui est décrite par la suite. Pour traiter les autres cas on utilise le plus souvent la méthode de Rayleigh-Ritz, basée sur la minimisation de l'énergie vibratoire (potentielle et cinétique) ou encore une méthode approximative comme :

- la méthode des fonctions de poutre
- la méthode des effets de bords de Bolotin,
- la méthode de Galerkin utilisant une technique variationnelle,
- des méthodes basées sur les différences finies et les éléments finis.

II-15 Plaques rectangulaires simplement supportées sur deux bords opposés :

La fonction $X(x)$ est obtenue en satisfaisant les conditions aux limites simplement supportées pour $x=0$ et $x=L_x$. La fonction obtenue pour les poutres peut donc être utilisée [22] :

$$X(x) = \sin \frac{m\pi x}{l_x}, \quad m=1,2,\dots$$



(Figure II-2) : Plaque simplement supportée sur les deux bords opposés.

Ses dérivées spatiales (par rapport à x)

$$X''(x) = - \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 \sin \left(\frac{m\pi}{l_x}\right) x \quad \text{et} \quad X^{(4)}(x) = \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^4 \sin \left(\frac{m\pi}{l_x}\right) x \quad (\text{II-45})$$

sont reportées dans l'équation différentielle

$$\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^4 - 2 \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 \frac{Y''}{Y} + \frac{Y^{(4)}}{Y} = \beta^4$$

ce qui conduit à une équation différentielle d'ordre 4

$$Y^{(4)} - \left(\frac{m\pi}{lx}\right)^2 y'' + \left[\left(\frac{m\pi}{lx}\right)^4 - \beta^4\right] = 0 \quad (\text{II-46})$$

Comme pour les poutres, on recherche des solutions de la forme $y = D e^{s y}$ où D et s sont des constantes. En reportant cette solution générale dans l'équation différentielle, on obtient une équation caractéristique [22]

$$S^4 - 2\left(\frac{m\pi}{lx}\right)^2 S^2 + \left[\left(\frac{m\pi}{lx}\right)^4 - \beta^4\right] = 0 \quad (\text{II-47})$$

Les solutions de cette équation caractéristique sont

$$s_1 = \gamma_1, s_2 = -\gamma_1, s_3 = j\gamma_2, s_4 = -j\gamma_2$$

Avec

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{lx}\right)^2} \text{ et } \gamma_2 = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{m\pi}{lx}\right)^2}$$

Donc la solution pour la fonction $Y(y)$ est

$$Y(y) = D_1 e^{\lambda_1 Y} + D_2 e^{-\lambda_1 Y} + D_3 e^{j\lambda_2 Y} + D_4 e^{-j\lambda_2 Y}$$

Où

$$Y(y) = C_1 \sin \gamma_2 y + C_2 \cos \gamma_2 y + C_3 \sinh \gamma_1 y + C_4 \cosh \gamma_1 y \quad (\text{II-48})$$

Cette solution est similaire à celle obtenue pour les poutres avec comme différence deux Paramètres γ_1 et γ_2 à la place d'un seul. En toute rigueur, il faudrait écrire $Y_m(y)$ car les Constantes de cette équation dépendent de m : $C_{1m}, \gamma_{1m}, \gamma_{2m}$. Les coefficients de l'équation $Y(y)$ peuvent s'obtenir en fonction des conditions aux limites par la même Méthode que celle employée pour les poutres :

- les conditions aux limites en $y=0$ et $y=L_y$ permettent d'obtenir 4 équations qui s'expriment sous forme matricielle $\mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{0}$ où \mathbf{A} est une matrice 4×4 et \mathbf{C} le vecteur des coefficients.
- les solutions de l'équation caractéristique obtenue à partir de $\det(\mathbf{A})=0$ permettent de calculer les fréquences propres et les déformées modales.

Remarque : cette démarche utilise la forme particulière de $X(x)$ pour des conditions aux Limites simplement supportées pour laquelle $\frac{X''''}{X}$ et $\frac{X^{(4)}}{X}$ deviennent des constantes. Pour les deux autres bords, il est possible de choisir n'importe quelles conditions aux limites.

Exemple : cas d'une plaque simplement supportée sur tous ses bords. Ce cas simple permet d'illustrer la méthode : les conditions simplement supportées en $y=0$ et $y=L_y$ conduisent à l'équation matricielle [22]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin \gamma_2 L_y & \cos \gamma_2 L_y & \sin \gamma_1 L_y & \cos \gamma_1 L_y \\ 0 & -\gamma_2^2 & 0 & \gamma_1^2 \\ -\gamma_2^2 \sin \gamma_2 L_y & -\gamma_2^2 \cos \gamma_2 L_y & -\gamma_2^2 \sin \gamma_1 L_y & -\gamma_2^2 \cos \gamma_1 L_y \end{bmatrix}$$

Le calcul de $\det(\mathbf{A})=0$ conduit à $(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^2 \sinh \gamma_1 + L_y \sin \gamma_2 L_y = 0$

En écartant les solutions triviales, reste finalement $\sin \gamma_2 L_y = 0 \Rightarrow \gamma_2 L_y = n\pi, n=1, 2, \dots$

Par ailleurs, $\gamma_2^2 = \beta^2 - \left(\frac{m\pi}{lx}\right)^2$ avec $\beta^2 = \omega/\mu$ et $= \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$, ce qui permet d'écrire $\beta^2 = \left(\frac{m\pi}{lx}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{ly}\right)^2$

d'où l'expression des pulsations naturelles $\omega_{mn} = \beta^2 \mu \omega_{mn} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{lx}\right)^2 + \left(\frac{n}{ly}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$

l'étape suivante consiste à utiliser les 4 relations obtenues avec les conditions aux limites sur $y=0$ et $y=Ly$ pour exprimer 3 des 4 coefficients $C1$ à $C4$. On obtient alors l'expression

$$(y) = C1 \sin\left(\frac{m\pi y}{lx}\right)$$

Qui permet d'écrire l'équation complète du déplacement d'une **plaque simplement supportée**

$$(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \sin \omega_{mn} t + B_{mn} \cos \omega_{mn} t] \Phi_{mn}(x,y) \quad (\text{II-49})$$

Avec la **déformée modale** $\Phi_{mn}(x,y) = \left(\frac{m\pi x}{lx}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{ly}\right)$

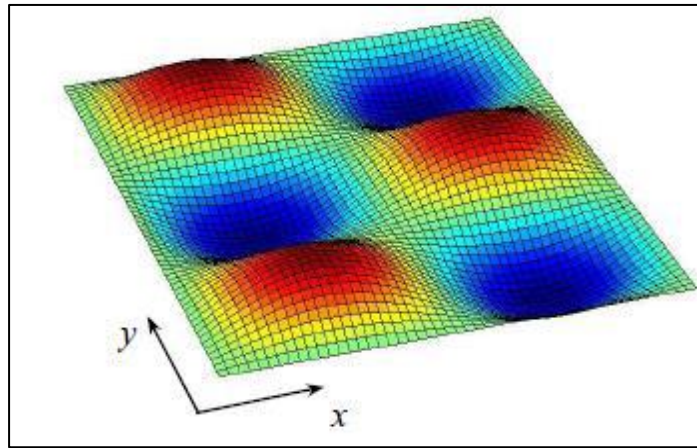


Figure II – 3 : Déformée pour le mode (2,3) de la plaque simplement supportée

Cette approche peut être utilisée pour n'importe quelles conditions aux limites associées à deux bords opposés simplement supportés. Dans les autres cas des **solutions approchées** utilisant des **fonctions de poutre** peuvent fournir des solutions dont la précision est très dépendante des conditions aux limites. Dans tous les cas où les solutions analytiques exactes ne sont pas accessibles, c'est la méthode de Rayleigh-Ritz qui est préférée car sa précision est contrôlable. Toutefois, les **plaques circulaires** permettent aussi des solutions analytiques exactes en variables séparées de la forme. [22]

$$R(r)\Theta(\theta) = [amn I_m(\beta mnr) + bmn I_m(\beta mnr)] \sin m\theta + [Cmn I_m(\beta mnr) + dmn I_m(\beta mnr)] \cos m\theta$$

où $I(x)$ sont les fonctions de Bessel modifiées correspondant en fait à des fonctions de Bessel dont l'argument est imaginaire. Ces fonctions croissent en s'éloignant du centre pour pouvoir satisfaire les différentes conditions aux limites. Les coefficients arbitraires amn , bmn , Cmn , et l'argument βmns sont précisés en fonction des conditions aux limites.

II-16 La différente fonction de formes:

Le problème de la flexion d'une plaque revient à chercher la fonction $w(x, y)$ qui vérifie les conditions aux limites et qui rend minimale l'énergie totale qui est la somme de l'énergie de déformation et de l'énergie potentielle.

Premier cas AAAA: $w(x, y) = A_{mn} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) x y \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$

Deuxième cas EEEE: $w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

Troisième cas AAEE: $w(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

Quatrième cas AEAE: $w(x, y) = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

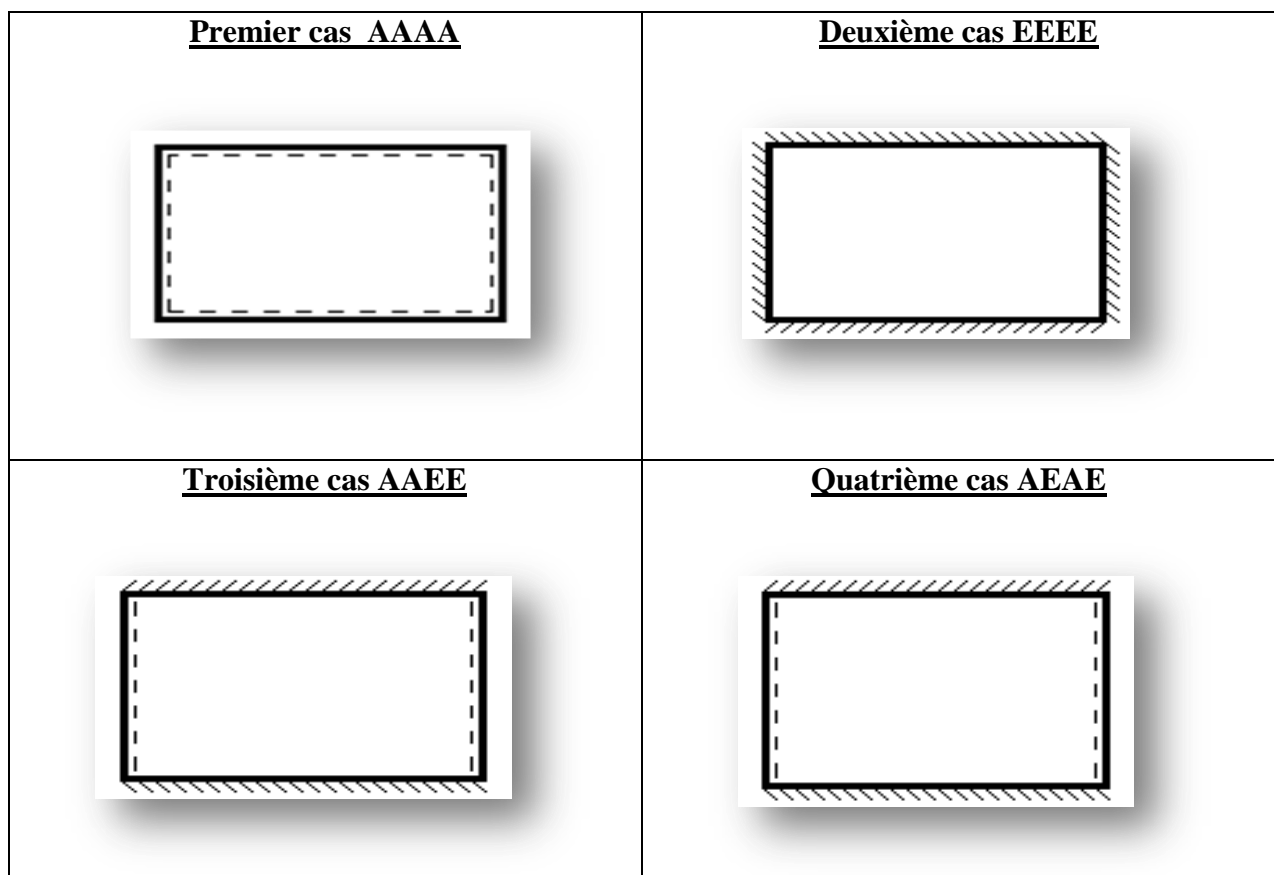


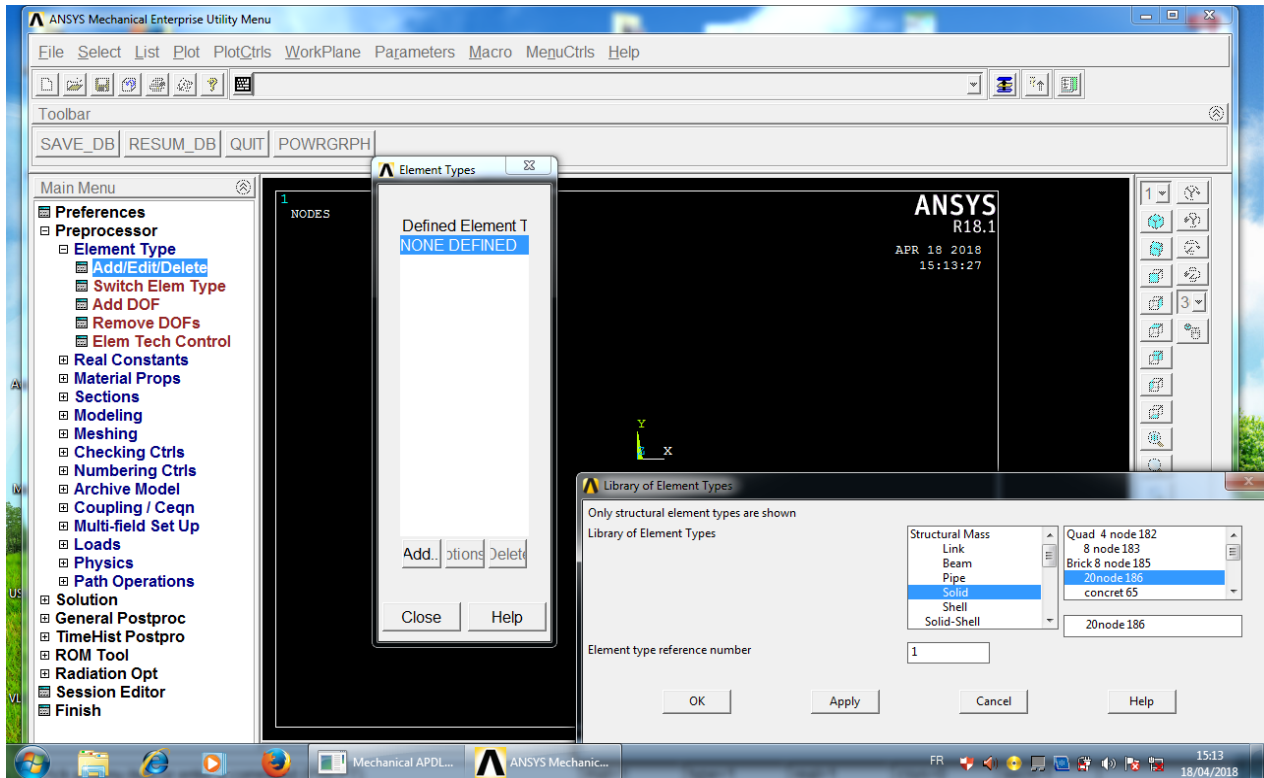
FIG II-4 forme de plaque isotrope (AAAA ,EEEE ,AAEE , AEAE)

CHAPITRE III

*Modélisation et simulation des plaques
par le code ANSYS*

III-1 Représentation graphique du logiciel ANSYS

Dans le but de valider le programme élaboré, les résultats issus de ce dernier sont Confrontés aux fréquences et déformées propres d'une plaque rectangulaire symétrique obtenues en calcul de structures par éléments finis sous logiciel ANSYS



(Figure III-1) : Présentation graphique de l'interface du logiciel ANSYS

III -2 Introduction au logiciel de modélisation et de calcul ANSYS

ANSYS, est l'un des plus grands développeurs et fournisseurs de logiciels de simulation numérique au monde. Ses produits majeurs sont des logiciels qui mettent en œuvre la méthode des éléments finis, afin de résoudre des modèles discrétisés. Les principaux produits et capacité sont : [18]

ANSYS Structural:

Ce produit permet d'effectuer des simulations mécaniques en calculant les structures. Ses principales capacités sont : (1) l'analyse statique, (2) l'analyse modale, (3) l'analyse harmonique (réponse forcée), (4) l'analyse temporelle ou transitoire (5) la gestion de différentes situations non linéaires (contacts, plasticité des matériaux, grands déplacements ou grandes déformations).

ANSYS Mechanical APDL :

Ce produit dispose les mêmes capacités que ANSYS structural, en y ajoutant notamment une solution thermique, avec modélisation du rayonnement.

ANSYS CFX et Fluent :

Ces deux logiciels permettent d'effectuer des simulations en matière de mécanique des fluides. Ils portent le nom des compagnies qui les ont développés, rachetées par ANSYS.Inc respectivement en février 2003 et en février 2006.

ANSYS AUTODYN et ANSYS LS-DYNA :

Ces logiciels possèdent des solutions utilisant les formulations explicites des équations à résoudre, contrairement aux produits précédemment cités. Leur domaine d'application est réservé aux modélisations mettant en jeu des situations mécaniques aux très larges déformations

ANSYS Electromagnétiques :

Ce produit permet de résoudre des modélisations mettant en jeu des phénomènes électromagnétiques.

ANSYS Multiphysics : Ce produit rassemble l'ensemble des capacités d'ANSYS en matière de simulation numérique implicite.

III-3 : Plateformes ou environnements

Deux environnements logiciels permettent de mettre en œuvre le code ANSYS :

ANSYS classique : Chronologiquement, c'est la première solution de ce logiciel qui est développée par le constructeur. Elle est destinée à la construction de modèles éléments finis à la géométrie simple, facilement constructible à l'aide d'opérations basiques. À partir de cet environnement, l'utilisateur construit directement un modèle éléments finis en se basant sur les commandes disponibles dans le code ANSYS. Il est donc destiné à des utilisateurs compétents dans le domaine de la simulation numérique.

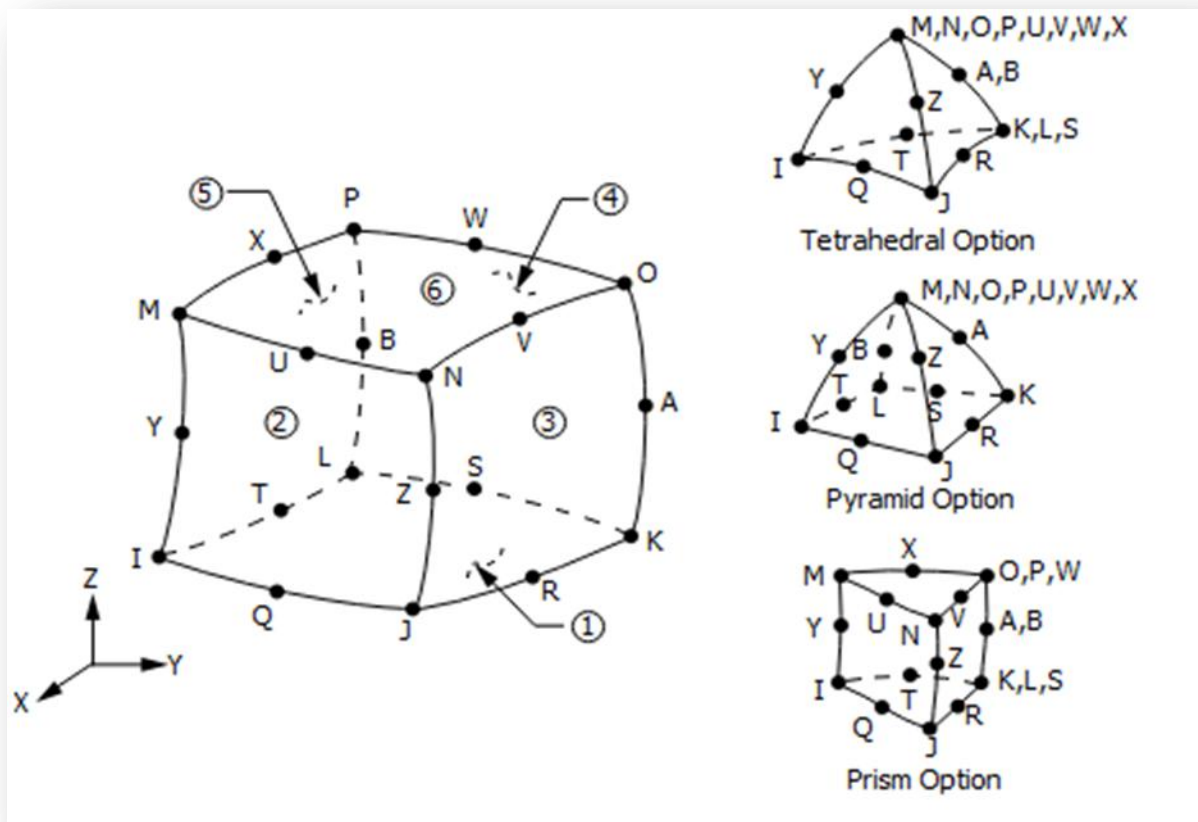
ANSYS Workbench :

Cette plateforme propose une approche différente dans la construction d'un modèle, en réutilisant le code ANSYS initial. Elle est particulièrement adaptée au traitement de cas à la géométrie complexe (nombreux corps de pièce) et aux utilisateurs non confirmés dans le domaine du calcul. Dans cet environnement, l'utilisateur travaille essentiellement sur une géométrie et non plus sur le modèle lui-même. La plate-forme est donc chargée de convertir les requêtes entrées par l'utilisateur en code ANSYS avant de lancer la résolution. Le modèle éléments finis généré reste néanmoins manipulable en insérant des commandes propres au code ANSYS

III-4 : Organisation de logiciel ANSYS**Il y a deux niveaux primaires dans le programme d'ANSYS :**

- (a) Passage dans et hors d'ANSYS et de plate-forme : pour utiliser certaines commandes globales telles que le titre de travail changeant, etc.
- (b) Processeur de niveau : Ce niveau contient les processeurs (pré processeur, solution, post processeur, etc.) qui sont employés pour réaliser des analyses par éléments finis.

III-5 : Éléments de la géométrie du logiciel ANSYS utilisés dans la modélisation des plaques solid186



(Figure III.2) : Géométrie de l'élément de maillage de la bibliothèque du logiciel ANSYS pour la modélisation des plaques.

III-6 : Description de l'élément utilisé pour le maillage :

Pour faire les calculs par MEF sous ANSYS on a choisi l'élément de maillage SOLID186 (20 nœuds, quadratique). Ce élément est conçu pour modéliser les structures en 3D. Le nombre de nœud de cet élément est égal 20 nœuds. Chaque nœud a trois degrés de liberté 02 en translation (X, Y) et 01 en direction suivant Z, cet élément est capable d'être utilisé pour les calculs des contraintes pour des grandes déformations, et peut être aussi utilisé pour les matériaux possédant une zone de plasticité et les matériaux hyper élastiques, et de grande déflexion et, pour les matériaux isotropes et orthotropes. Et utilise des fonctions d'interpolations quadratiques qui peuvent représenter la courbure de l'élément sous une charge en flexion. La rigidité de cet élément est plus proche de la réalité et avec celui-ci, les résultats convergent plus rapidement.

III-7 : Maillage de la structure la plaque est maillée par un élément de la taille $8e^{-3}$ mètre

III-8 : Objectif du chapitre :

Dans ce chapitre, [11] nous recherchons les premiers modes propres d'une plaque plane rectangulaire. La première fréquence est comparée à des solutions analytiques. Nous étudions ensuite l'influence de changements géométriques importants sur la valeur des fréquences et sur l'ordre d'apparition des modes, et l'existence des trous sur les valeurs des fréquences

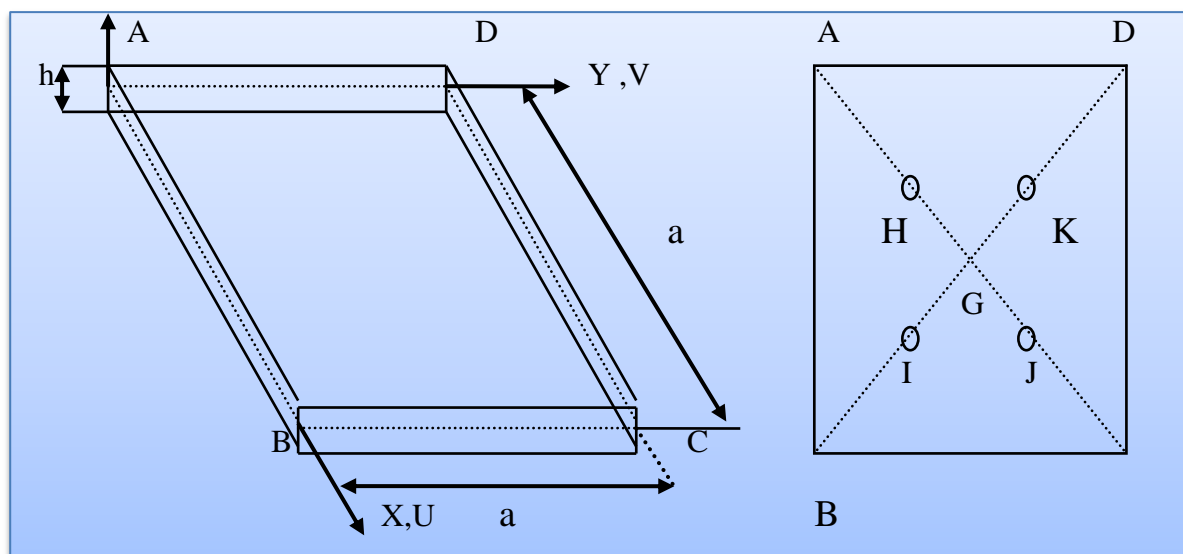
III-9 : Donner analytique :

On considère une plaque rectangulaire ABCD de longueur $L = 1\text{m}$ et de largeur $l = 1\text{m}$ encastree sur son bord AB et libre sur ses trois autres bords. Cette plaque a une épaisseur de $0,01\text{m}$ et est constituée d'un matériau élastique dont Les propriétés mécaniques et physiques des matériaux sont :

| Type de Matériau | Masse volumique ρ (Kg/m ³) | Module de Young E (Pa) | Coefficient de Poisson ν |
|------------------|--|---------------------------|------------------------------|
| Acier | 7800 | $2,1 \cdot 10^{11}$ | 0,3 |

On s'intéresse aux premiers modes de vibration libre de la plaque référence sans trou telle qu'elle est représentée sur la figure ci-dessus. Le maillage utilisé est constitué d'éléments solid186 maillage 20 nœuds, Les données et référence est celle donnée dans la fiche SDLS 01/89 du guide VPCS qui présente la méthode de calcul de la façon suivante : [11]

III-9-1 : Géométrie de la plaque mince



(Fig. III-3) dimension de la plaque mince référence

A : Cordonnées des points en mètre [11]

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|-----|------|------|------|------|
| | A | B | C | D | G | H | I | J | K |
| x | 0 | 1 | 1 | 0 | 0,5 | 0,25 | 0,75 | 0,75 | 0,25 |
| y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0,5 | 0,25 | 0,25 | 0,75 | 0,75 |
| z | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

B : Condition aux limites et chargements**Cas 1/ cote AB encastre**

Pour tout point tel que

$$P=0 \quad U= v= w = 0$$

$$OX=OY=OZ=0$$

La formulation de M.V. BARTON, pour une plaque de côté a , conduit à : [11]

$$f_i = \frac{1}{2\pi a^2} \lambda_i^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad i = 1,2 \dots \dots$$

1° Plaque Encastree sur un cote AB [11]

| | | | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| λ_i^2 | 3,492 | 8,525 | 21,43 | 27,33 | 31,11 | 54,44 |

Les coefficients λ_i sont établis par développement limité sur les déformées modales d'un réseau de poutres croisées (poutre encastree libre et poutre libre libre).

C : Grandeur testées et résultats**Tableau 1/ Plaque Encastree sur un cote AB**

| Mode propre | Fréquence HZ | | | | | |
|-------------|----------------|------------|--------------|-----------------------------|-----------------|----------------|
| | Référence [11] | Aster [11] | % différence | Energie potentiel=cinétique | Présente Calcul | Résultat Ansys |
| 1 | 8,7266 | 8,6718 | -0,63 | $1,4796 \cdot 10^4$ | 8,7310 | 8,7669 |
| 2 | 21,3042 | 21,2904 | -0,06 | $1,7331 \cdot 10^4$ | 21,3150 | 21,348 |
| 3 | 53,5542 | 53,0992 | -0,85 | $4,3802 \cdot 10^4$ | 53,3563 | 53,705 |
| 4 | 68,2984 | 67,9269 | -0,54 | $3,7367 \cdot 10^4$ | 68,3330 | 68,026 |
| 5 | 77,7448 | 77,4294 | -0,40 | $5,4956 \cdot 10^4$ | 77,7842 | 77,770 |
| 6 | 136,0471 | 135,7635 | -0,21 | $1,3483 \cdot 10^4$ | 136,1161 | 135,63 |

Le premier mode obtenu, est le premier mode de flexion à 8.7669 Hz.

D : Les modes suivants sont :

Mode 2 c'est le premier mode de torsion. On s'appelle mode de torsion par correspondance avec les modes de plaque équivalent. Il s'agit cependant d'un mouvement de flexion de plaque.

Mode 3 c'est le deuxième mode de flexion. Il présente un nœud de vibration.

Mode 4 c'est le deuxième mode de torsion.

Mode 5 c'est le troisième de flexion, avec deux nœuds de vibration.

Dans la suite, on introduit différents changement géométriques dans la structure et on étudie l'influence sur les cinq premières fréquences propres.

CHAPITRE IV

Résultats et discussions

IV-I : Introduction:

L'objectif de notre étude est l'identification des caractéristiques dynamiques (fréquences et modes propres,) des plaques en vibration de flexion, et étudier l'influence de la géométrie de la plaque et la présence des trous sur les résultats analytiques et résultats obtenus par logiciels ANSYS. Les fréquences propres de vibration d'une structure dépendent des rigidités des matériaux. Dans tous les cas les vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque. L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés. Alors que la déformation est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire.

Le but consiste de calculer à investir l'analyse des paramètres fréquentiels naturels d'une plaque rectangulaire à phase isotrope avec différentes fixités. Les fréquences propres des plaques sont déterminées par la méthode des éléments finis (ANSYS) la solution du problème aux valeurs propres est obtenue d'après une déformée de fonction de forme qui vérifie les conditions aux limites de la plaque.

Dans ce chapitre nous étudions l'effet de certains paramètres fondamentaux tels que les conditions aux limites, les dimensions de la plaque, l'épaisseur de la plaque et la nature du matériau. [3] Les différentes étapes de calcul des caractéristiques dynamiques d'une plaque travaillant en flexion et la recherche de l'influence de tous ces derniers paramètres sur la fréquence propre des différentes plaques sont illustrées par un programme de calcul ANSYS. Deux études paramétriques différentes sont réalisées afin de comprendre le comportement dynamique d'une plaque trouée, la première concerne la taille de la troue, et la seconde correspondante au nombre des trous dans la plaque.

Les propriétés mécaniques et physiques des matériaux : [11]

| Type de Matériau | Masse volumique ρ (Kg/m ³) | Module de Young E (Pa) | Coefficient de Poisson ν |
|------------------|--|---------------------------|------------------------------|
| acier | 7800 | 2,1 10 E 11 | 0,33 |

Le maillage et le calcul des fréquences propres par simulation sous code ANSYS en utilisant l'élément de maillage solid186 avec 20 nœuds qui peuvent représenter la courbure de l'élément sous une charge en flexion. La rigidité de cet élément est plus proche de la réalité et avec celui-ci, les résultats convergent plus rapidement. Chaque fois en changeant la géométrie du rayon du trou et le nombre de trous de la plaque et on obtient les fréquences et les déformées propres.

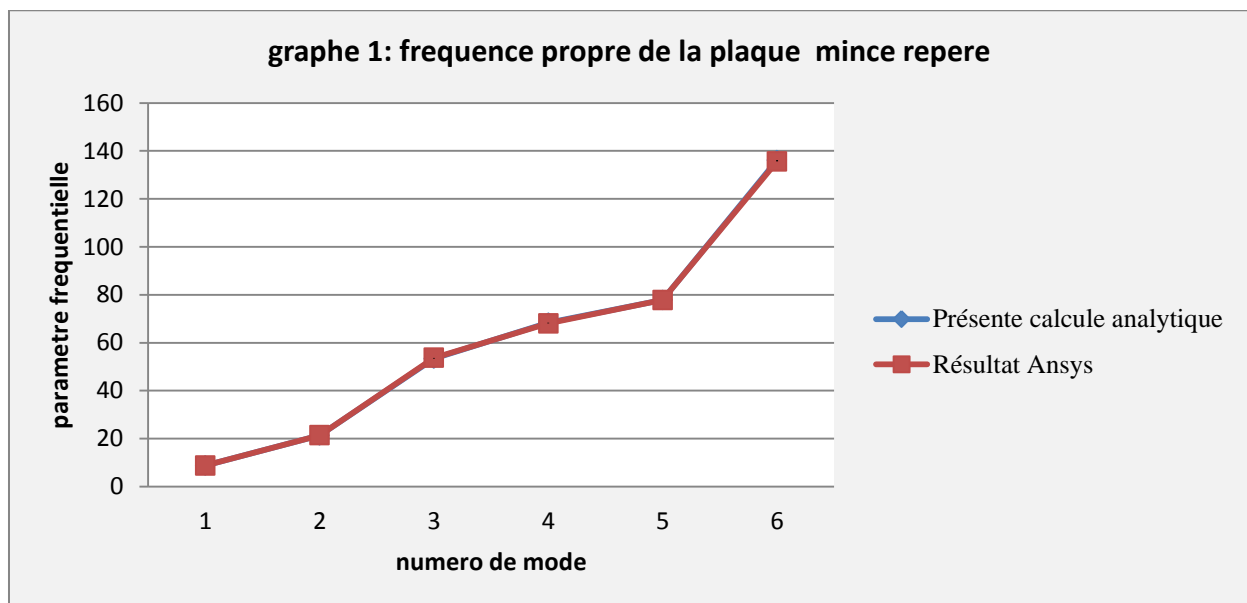
Dans ce chapitre, on introduit différents changements géométriques dans la structure et on étudie l'influence sur les cinq premières fréquences propres.

IV -2 : Comparaison des fréquences propres calculées analytiquement et les fréquences propres obtenues par le code ANSYS de la plaque mince référence

Le premier mode est quasiment inchangé $f = 8.7669$ HZ (moins de 2% d'écart),

Tableaux (1) les valeurs des fréquences propres d'une plaque référence son trou

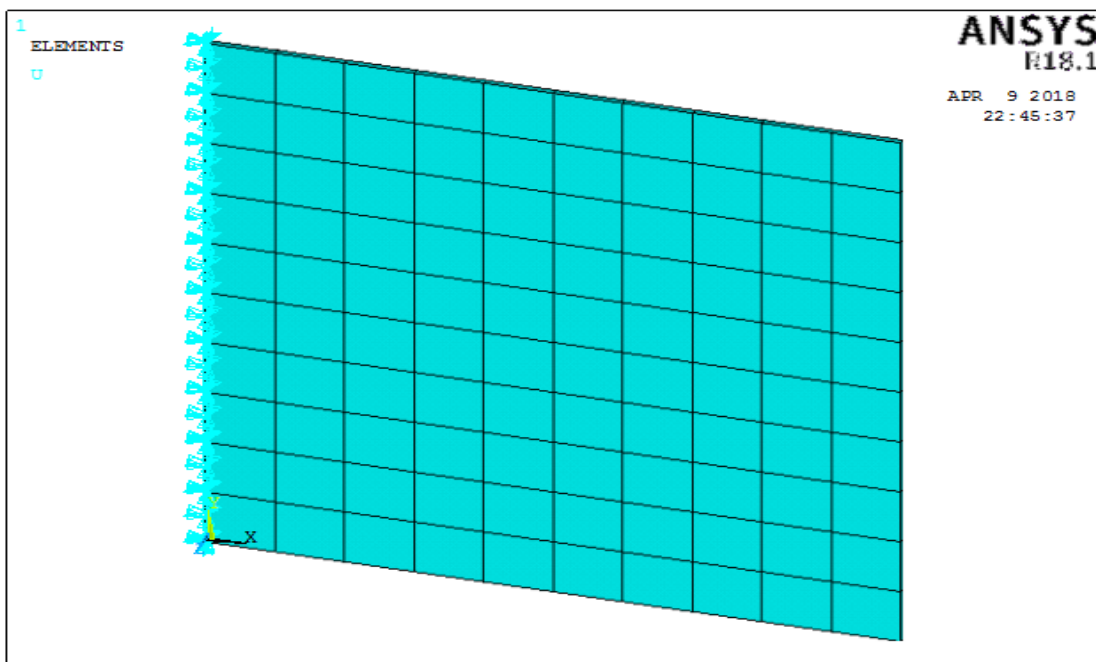
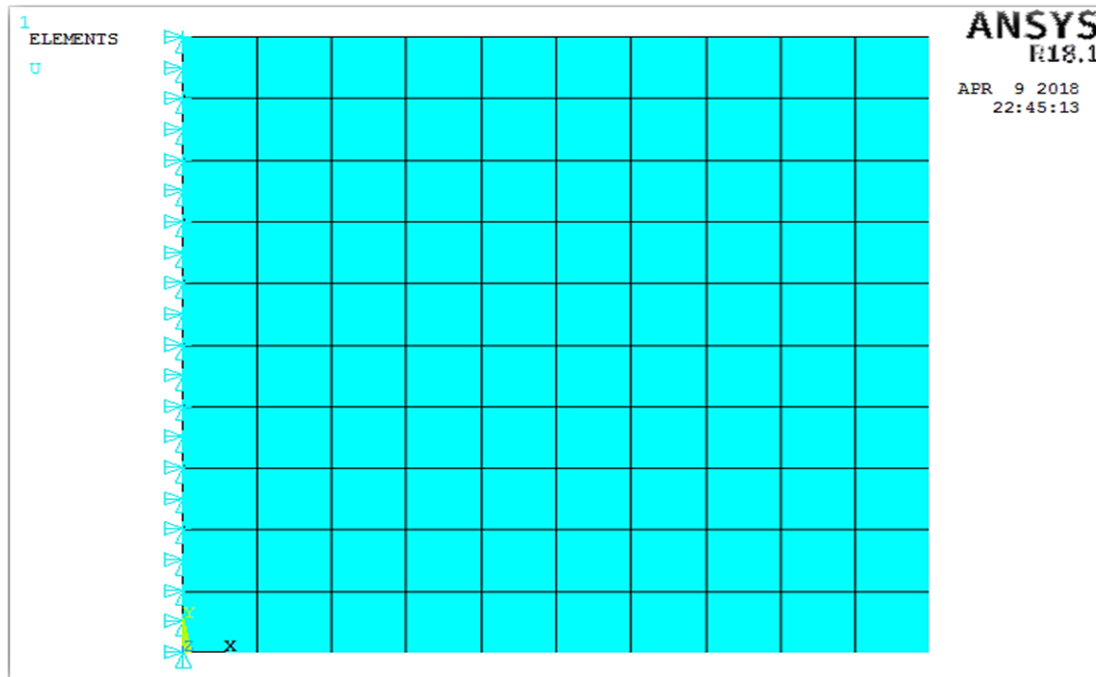
| Fréquence HZ | | | | | | | | |
|--------------|----------------|------------|--------------|-------------------------------------|-----------------------------|--|------------|---|
| Mode propre | Référence [11] | Aster [11] | % différence | Energie potentiel=énergie cinétique | Présente calcule analytique | Résultat Ansys Plaque sons troue (référence) | Ecart (Hz) | Ecart relatif $\frac{\Delta\%}{\frac{f_{cs}-f_a}{f_a}}$ |
| 1 | 8,7266 | 8,6718 | -0,63 | $1,4796 \cdot 10^4$ | 8,7310 | 8,7669 | 0,0353 | 0,004 |
| 2 | 21,3042 | 21,2904 | -0,06 | $1,73321 \cdot 10^4$ | 21,3150 | 21,348 | 0,033 | 0,001 |
| 3 | 53,5542 | 53,0992 | -0,85 | $4,3802 \cdot 10^4$ | 53,3563 | 53,705 | 0,3487 | 0,006 |
| 4 | 68,2984 | 67,9269 | -0,54 | $3,7367 \cdot 10^4$ | 68,3330 | 68,026 | 0,307 | 0,004 |
| 5 | 77,7448 | 77,4294 | -0,40 | $5,4956 \cdot 10^4$ | 77,7842 | 77,770 | 0,014 | 0,0001 |
| 6 | 136,0471 | 135,763 | -0,21 | $1,3483 \cdot 10^4$ | 136,1161 | 135,63 | 0,486 | 0,0035 |



Graphe 1 / Comparaison des fréquences propres calculées analytiquement et les fréquences propres obtenues par le code ANSYS de la plaque mince référence

Discutions : Grâce à cette courbe en remarque que les résultats de l'étude analytique et les résultats obtenues par simulations numériques sont très proches et présentent une bonne concordance entre eux

Fig. IV-2-1 Maillage et conditions aux limites De la plaque sous code ANSYS



FigIV-2 -2 Maillage et conditions aux limites De la plaque sous code ANSYS

Fig. IV- 2- 3 Les nœuds de la plaque mince sous code ANSYS cote encastree

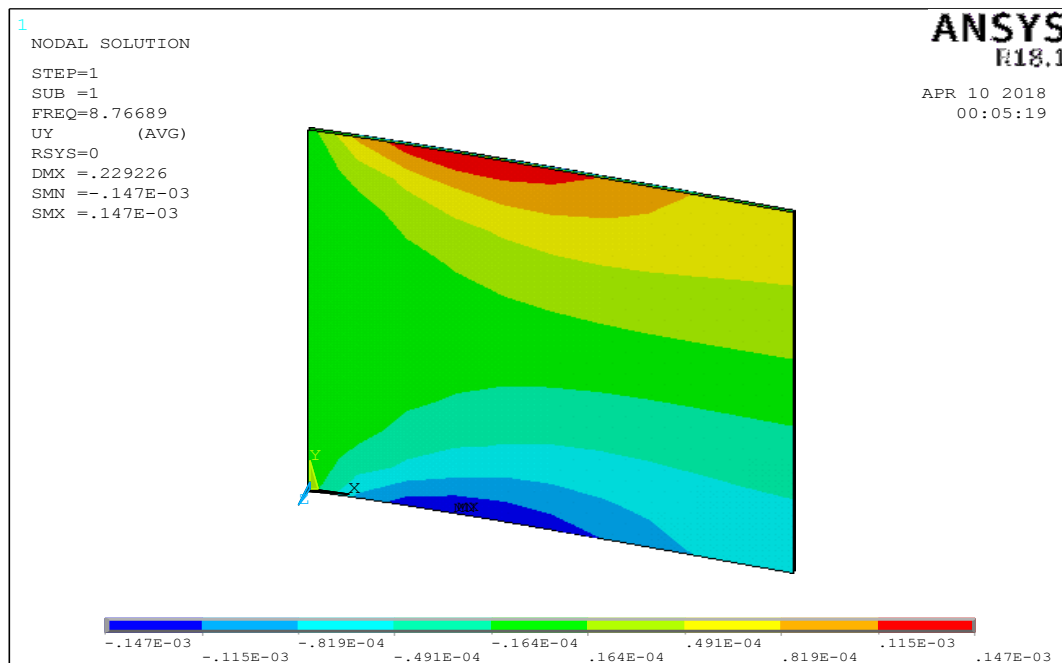
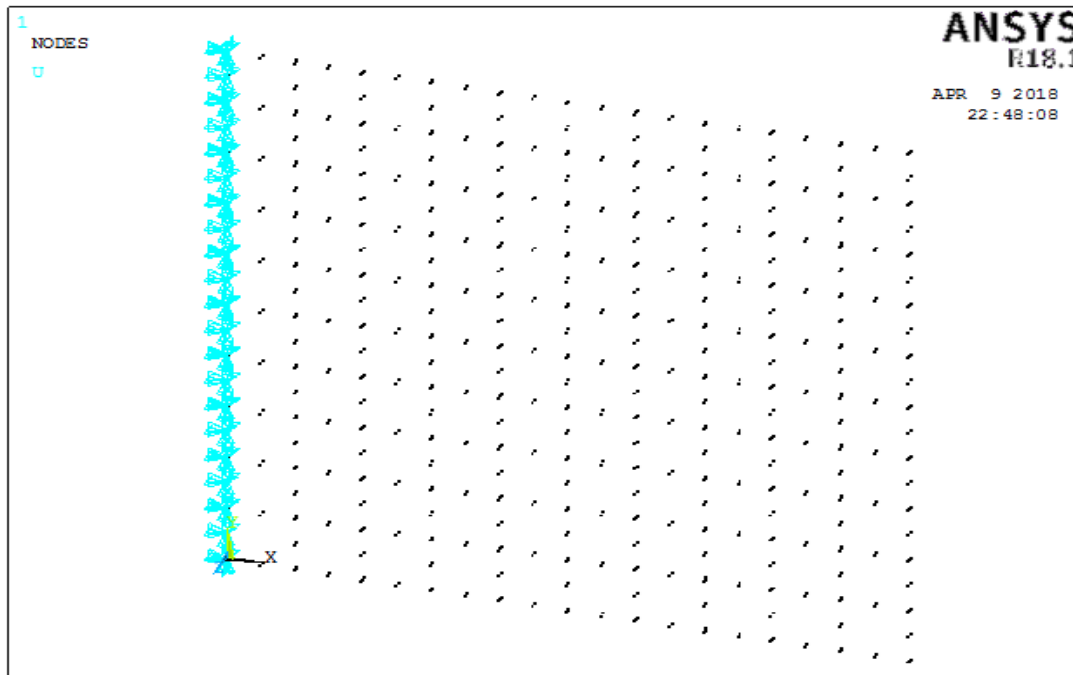


Fig.IV-2-4 le premier Mode (1,1) m=1, n=1 Obtenue sous code ANSYS

Fig. IV-2-5 le Deuxième Mode (2,1) $m=2, n=1$ Obtenue sous code ANSYS

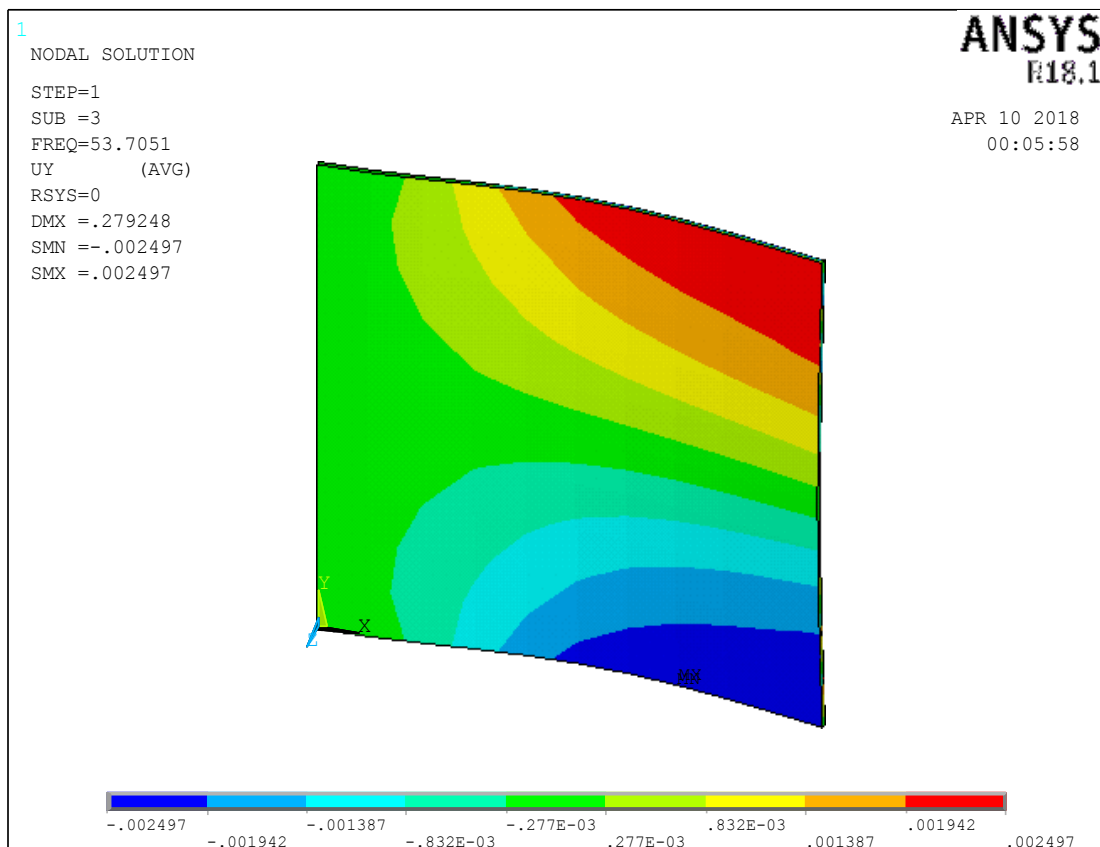
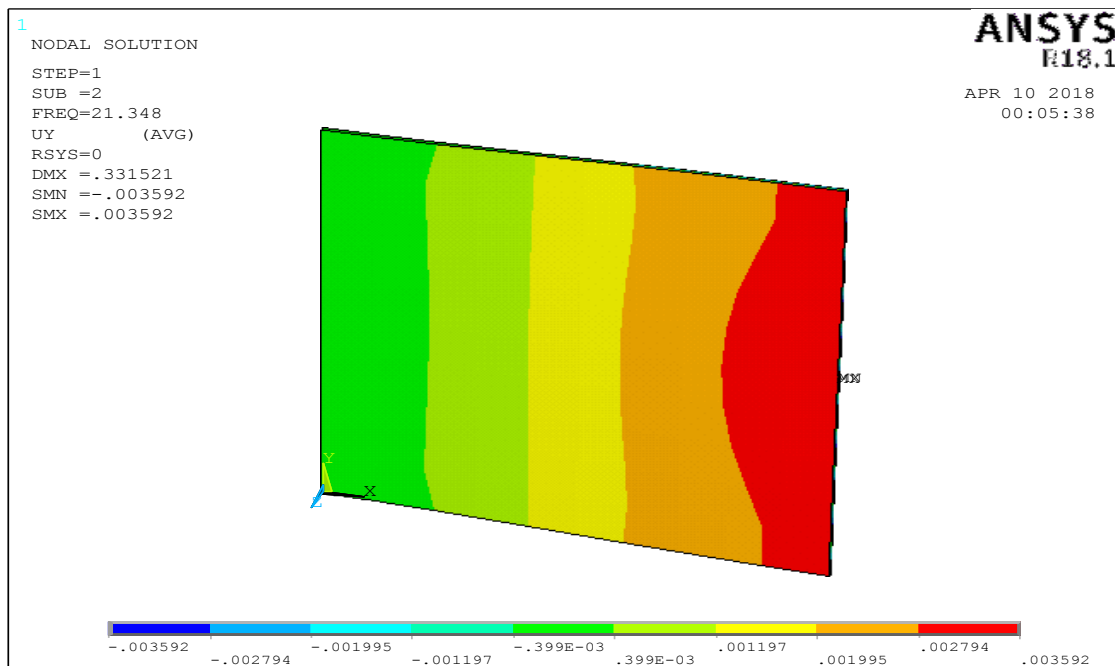


Fig. IV-2- 6 le Troisième Mode (1,2) $m=1, n=2$ Obtenue sous code ANSYS

Fig. IV-2-7 le quatrième Mode (3,1) m=3, n=1 Obtenue sous code ANSYS

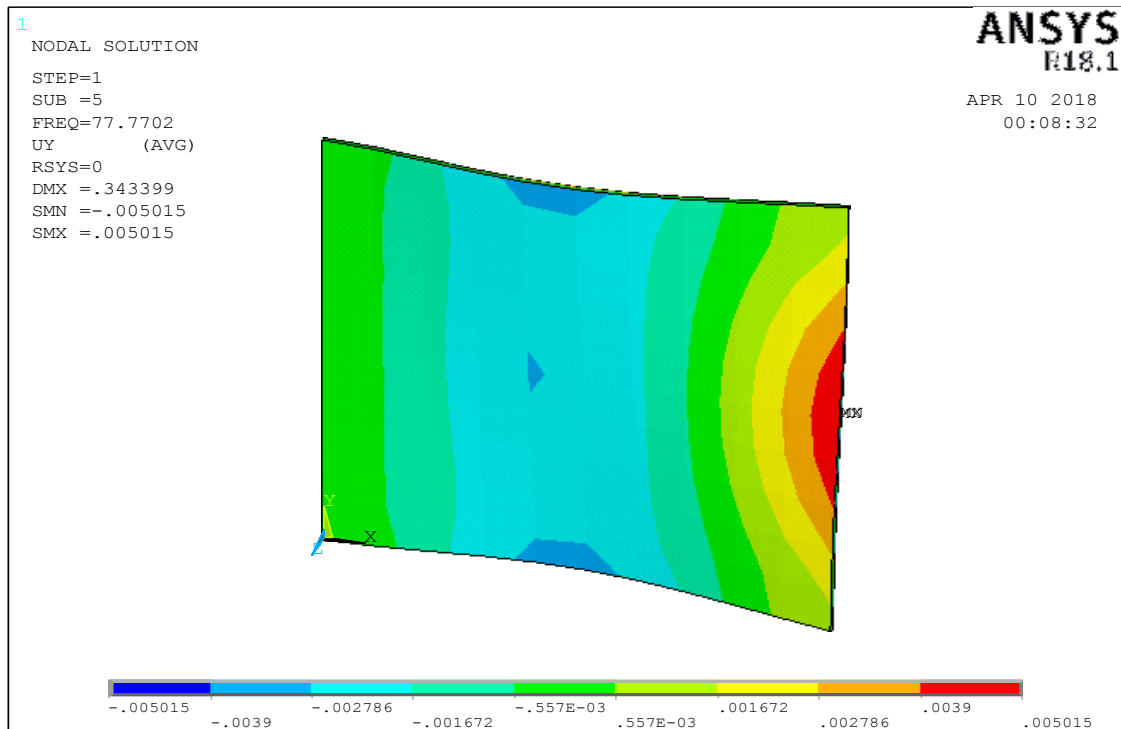
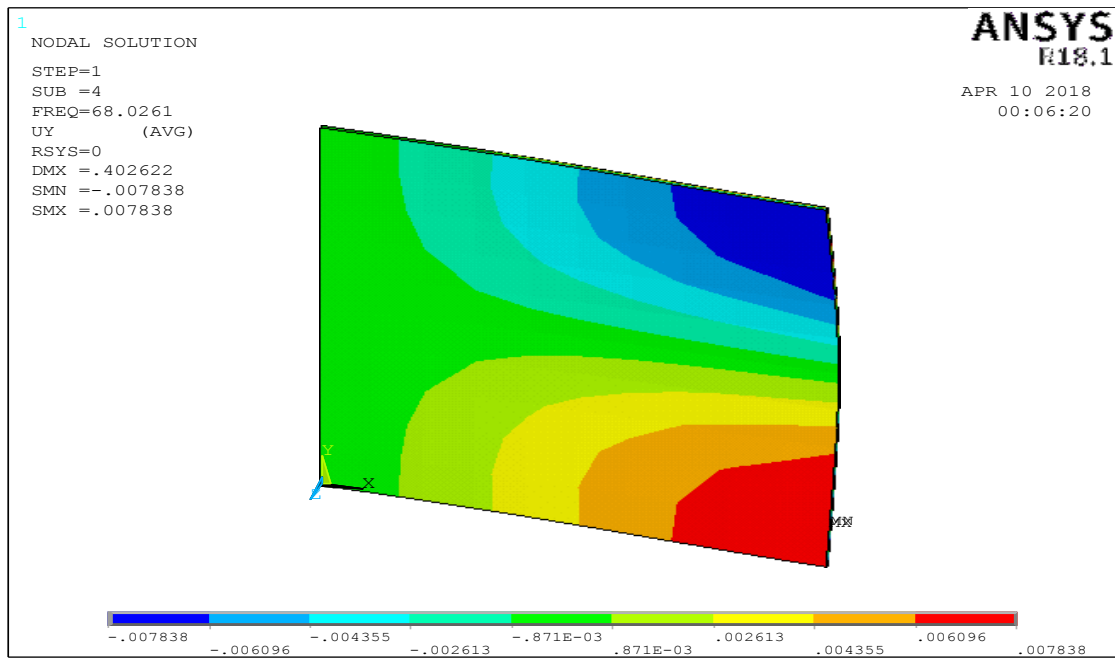
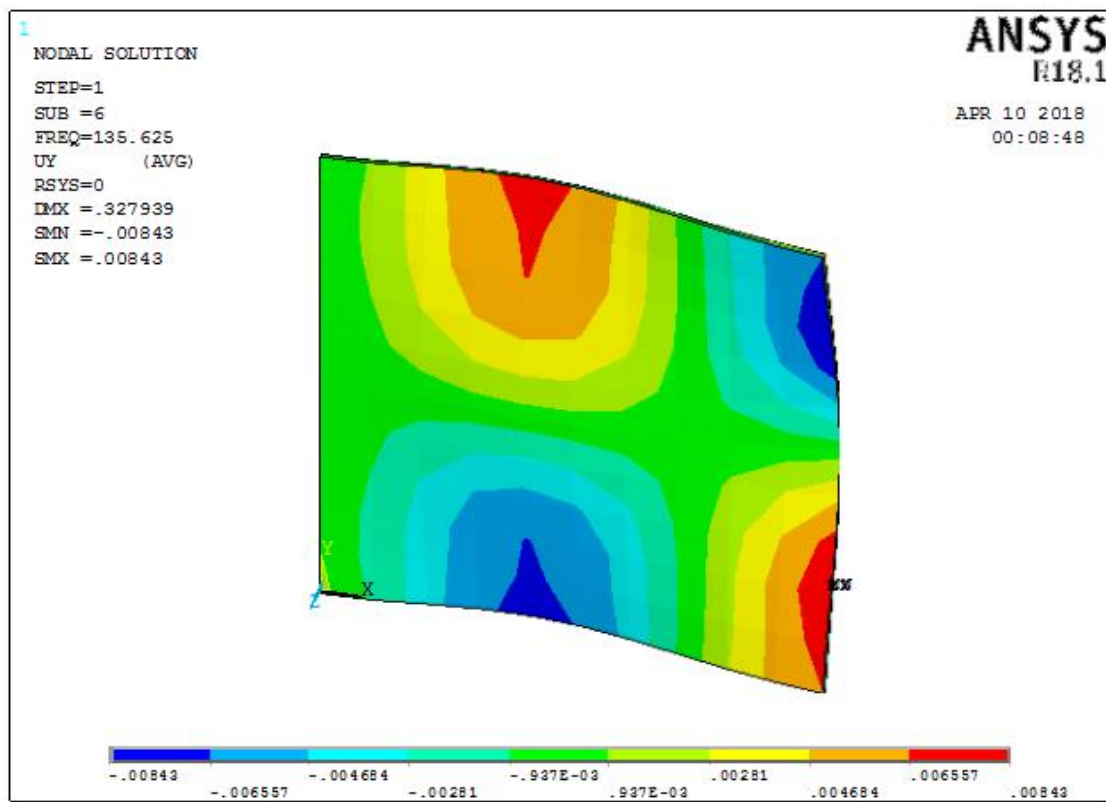


Fig.IV- 2-8 le cinquième Mode (2,2) m=2, n=2 Obtenue sous code ANSYS

Fig. IV-2-9 le Sixième Mode (3,2) $m=3, n=2$ Obtenue sous code ANSYS

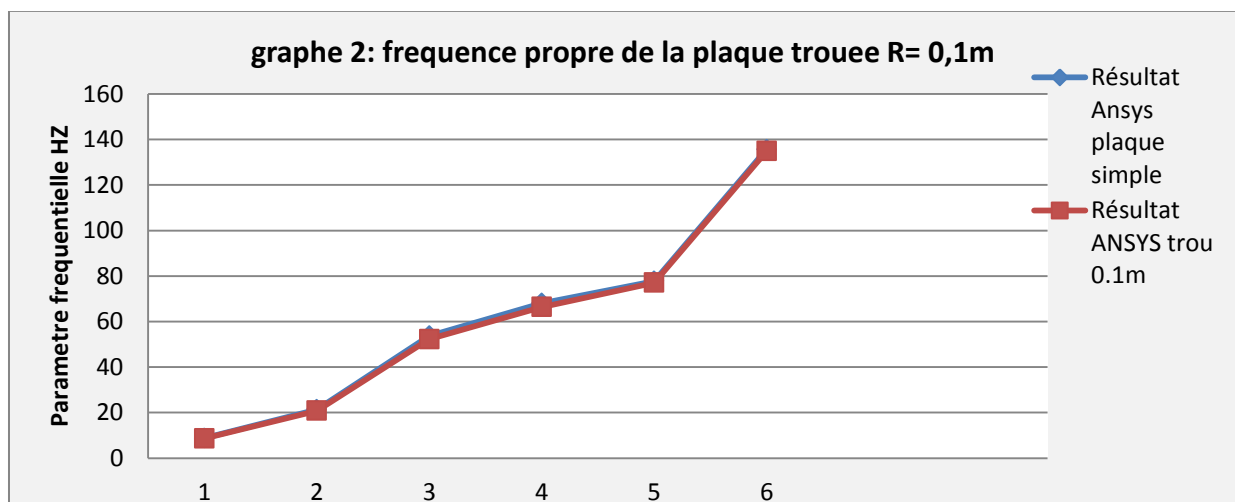
IV -3 : Comparaison des fréquences propres obtenue par code ANSYS de la plaque mince référence et les résultats obtenue par code ANSYS de la plaque trouée de R=0,1m

On ajoute maintenant un trou d'un rayon 0.1m au centre de la plaque. Cette valeur à été choisie de manière à pouvoir percer deux trous dans la largeur, ce qui est fait plus loin. Cette valeur du rayon est conservée pour tous les exemples concernant l'influence des perçages.

Le premier mode est quasiment inchangé $f = 8.6163$ HZ (moins de 2% d'écart), En fait, c'est principalement la partie de la plaque proche de l'encastrement qui travaille dans ce mode. Cette partie est toujours intègre malgré le perçage. [3]

Tableaux (2) les valeurs des fréquences propres de la plaque trouée 0 ,1metre

| Mode propre | Référence | Code aster | Présence | Résultat Ansys plaque référence | Résultat ANSYS trou 0.1m | Ecart(Hz) | Ecart relatif $\Delta\% = \frac{f_{cs}-f_a}{f_a}$ |
|-------------|-----------|------------|----------|---------------------------------|--------------------------|-----------|---|
| 1 | 8,7266 | 8,6718 | 8,7310 | 8,7669 | 8.6163 | 0.15 | 0.02 |
| 2 | 21,3042 | 21,2904 | 21,3150 | 21,348 | 20.767 | 0.59 | 0.03 |
| 3 | 53,5542 | 53,0992 | 53,3563 | 53,705 | 52.255 | 1.45 | 0.03 |
| 4 | 68,2984 | 67,9269 | 68,3330 | 68,026 | 66.345 | 1.69 | 0.03 |
| 5 | 77,7448 | 77,4294 | 77,7842 | 77,770 | 77.028 | 0.75 | 0.01 |
| 6 | 136,0471 | 135,7635 | 136,1161 | 135,63 | 134.82 | 0.81 | 0.01 |



Graph 2 : Comparaison des fréquences propres obtenues par code Ansys plaque référence et la fréquence propre par le code ANSYS de la plaque trouée R = 0,1 m dans le cas de la plaque encastrement

Discutions : Grâce à cette courbe on remarque que les résultats obtenus par le code ANSYS d'une plaque mince référence et les résultats obtenus par simulations numériques d'une plaque trouée de rayon R= 0,1 m sont très proches et présentent une bonne concordance entre eux

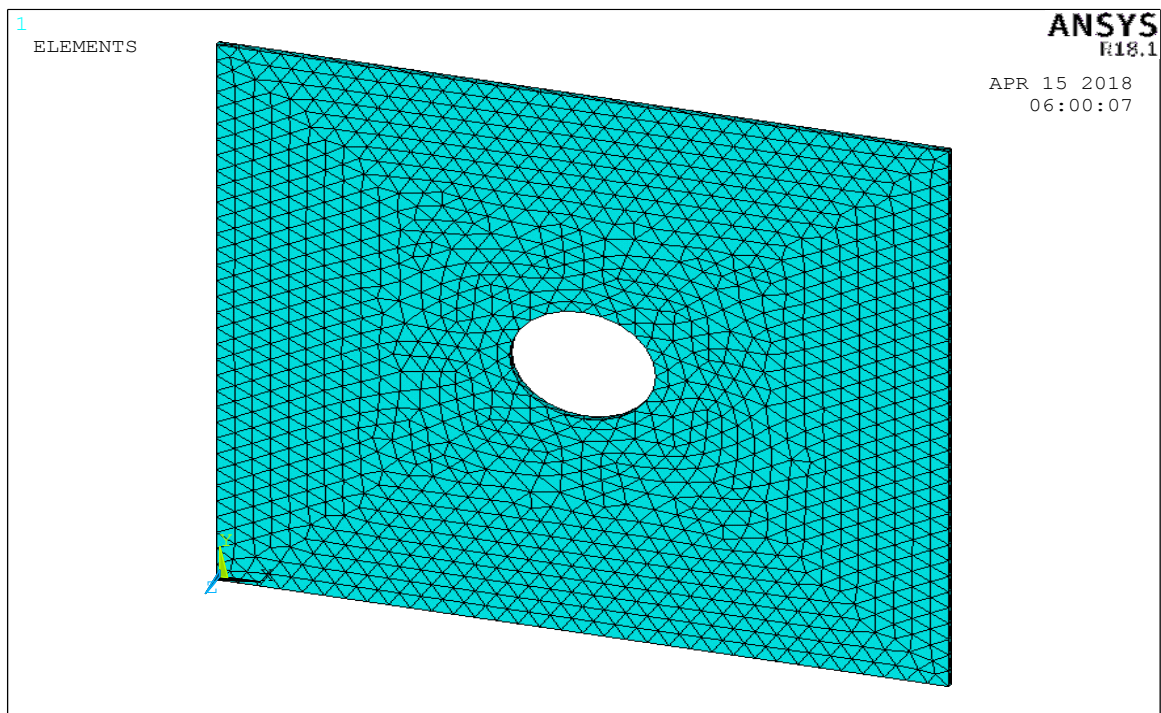
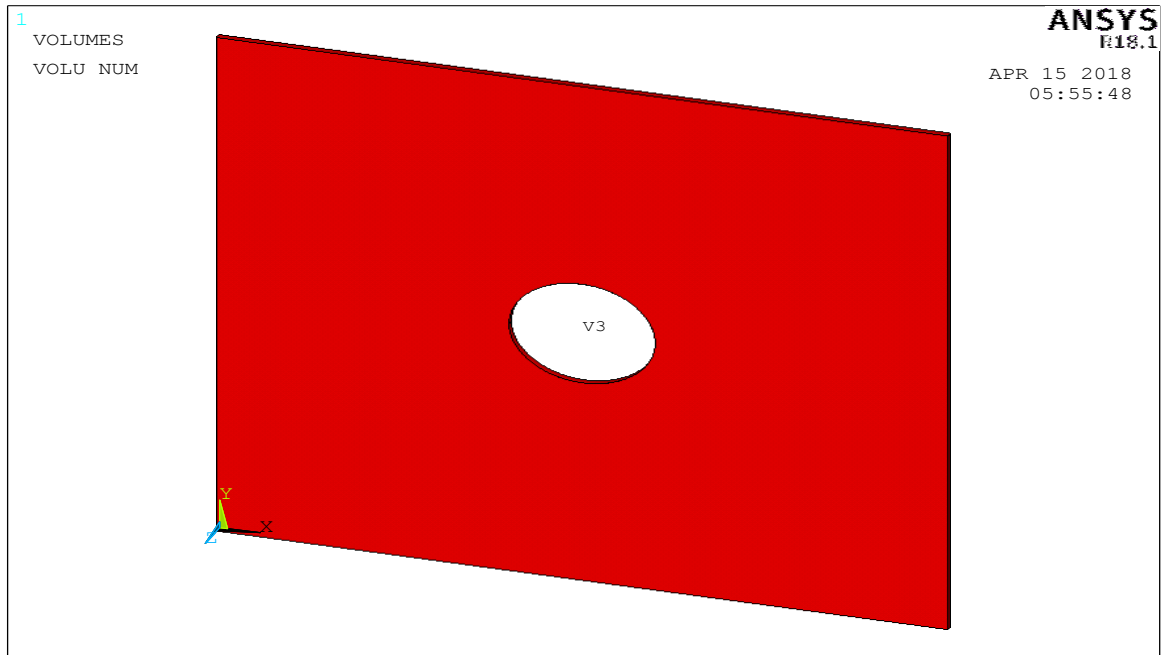
Fig.IV-3-1modélisation de Plaque mince trouée $R=0.1m$ Obtenue sous ANSYS**Fig.IV-3-2** Maillage de Plaque mince trouée $R=0.1$ Obtenue sous code ANSYS

Fig.IV-3-3 Maillage de Plaque mince Trouée de R=0.1m Obtenue sous code ANSYS

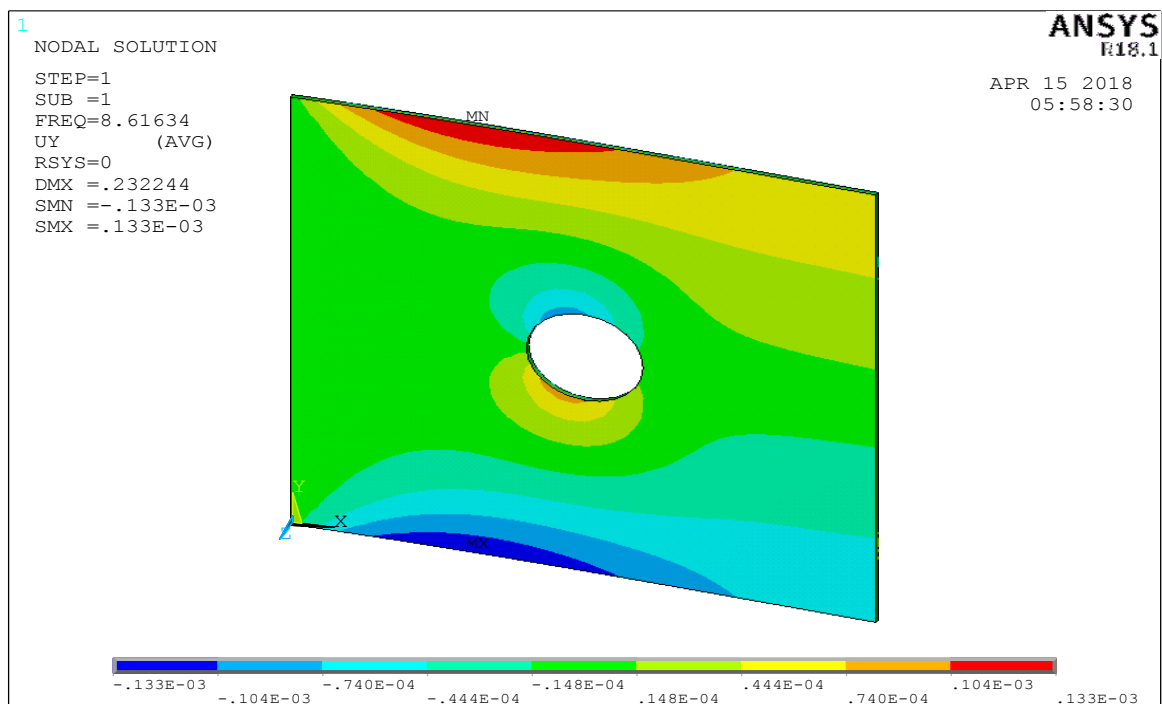
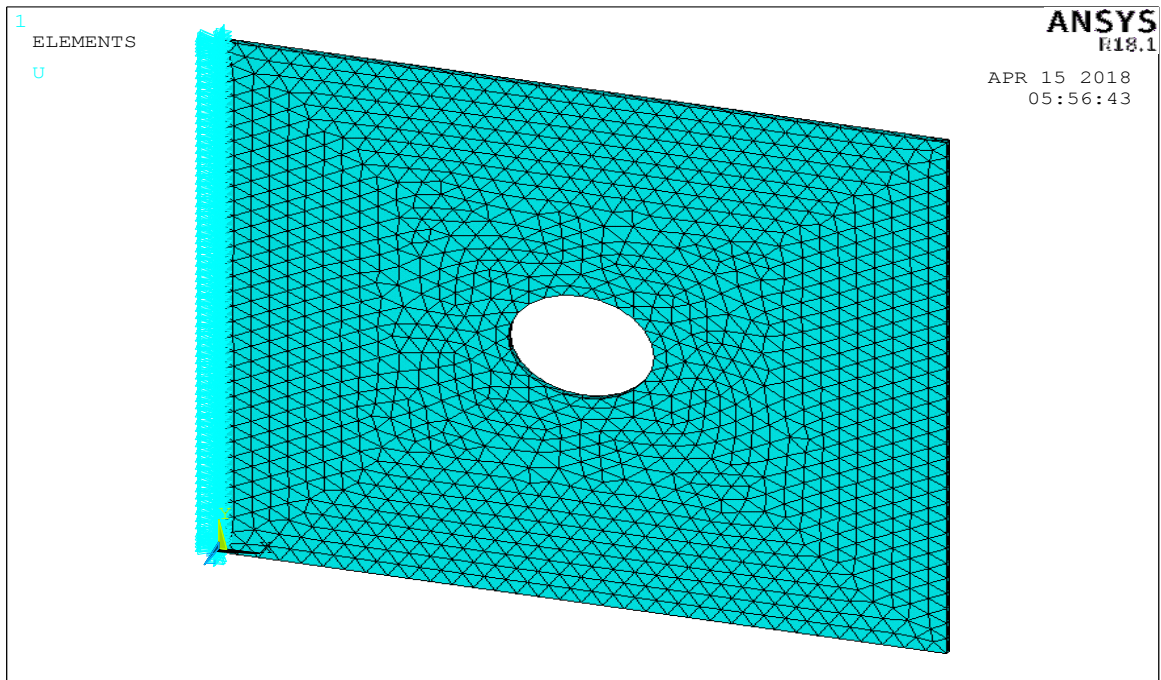


Fig.IV -3-4 le premier Mode (1,1) m=1,n=1 Obtenue sous code ANSYS trou 0,1m

Fig.IV-3-5 Deuxième Mode (2,1) $m=2, n=1$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,1m

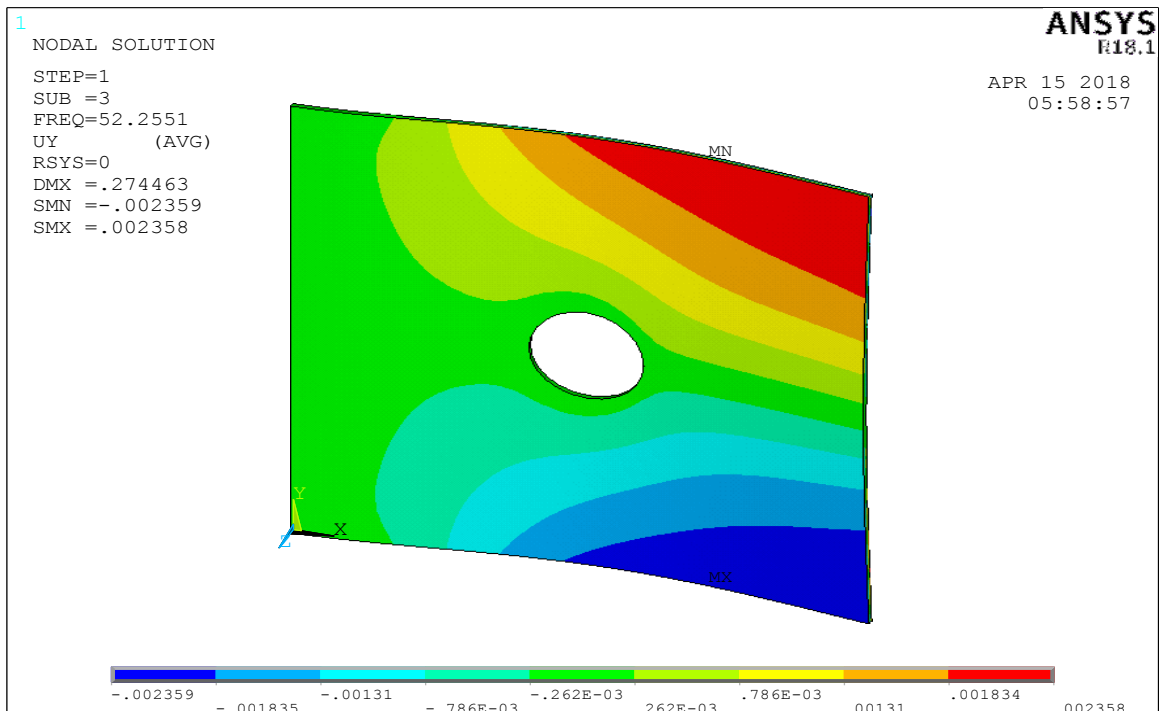
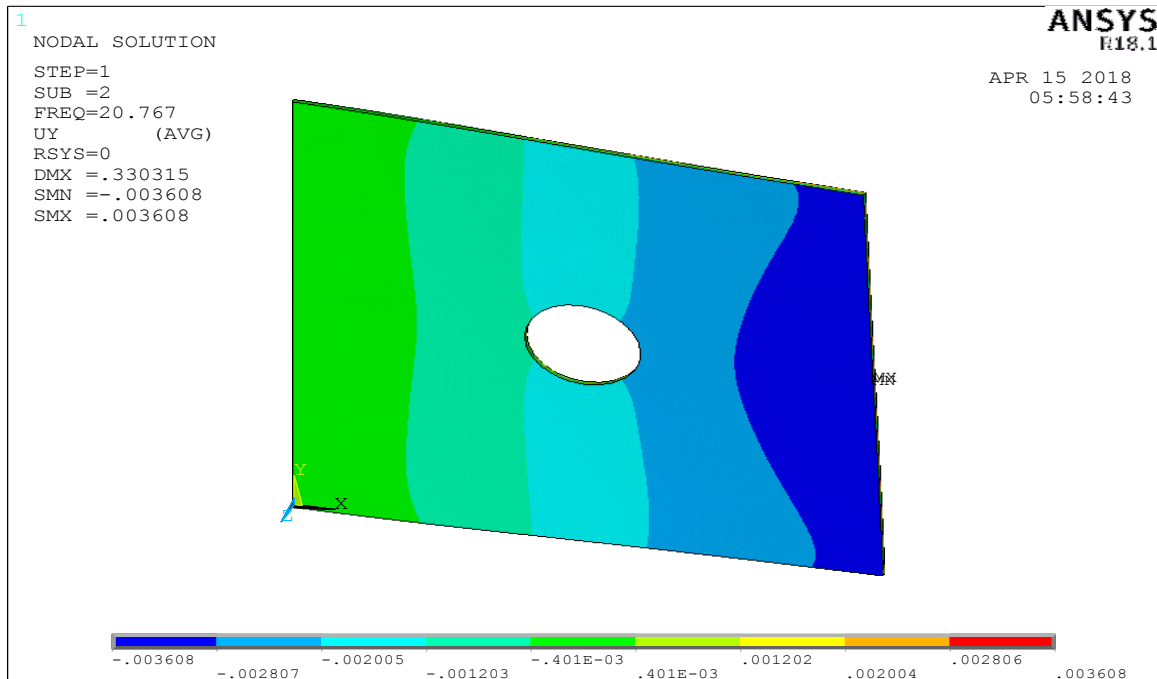
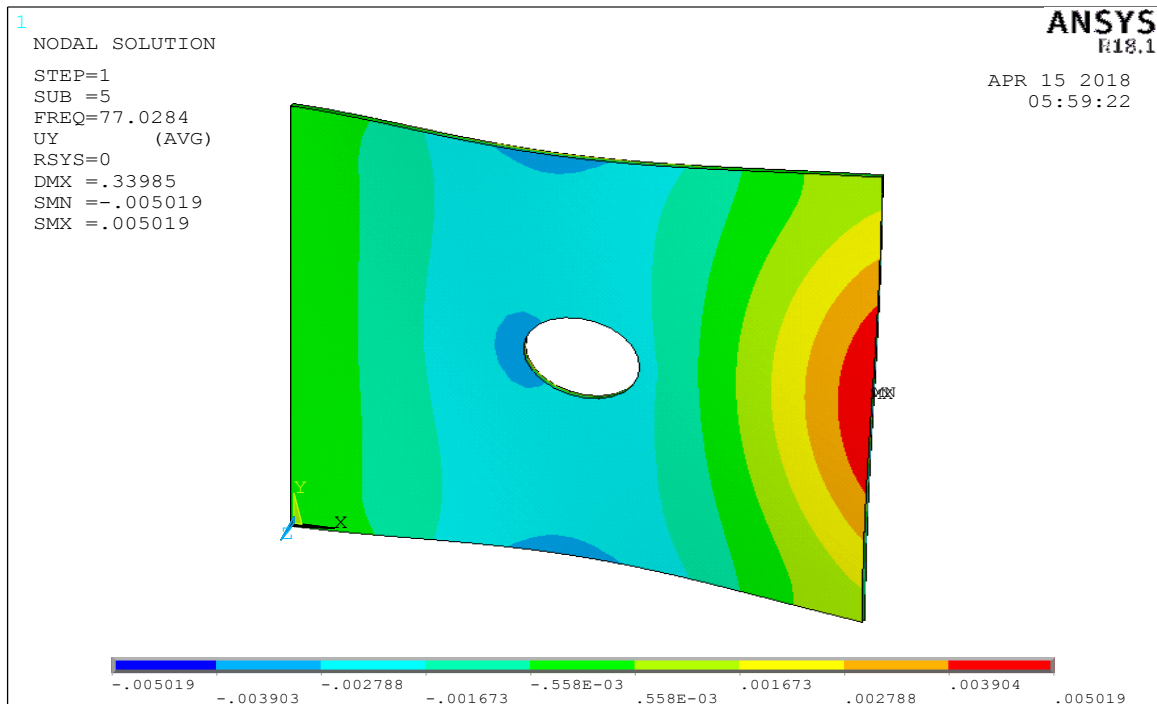
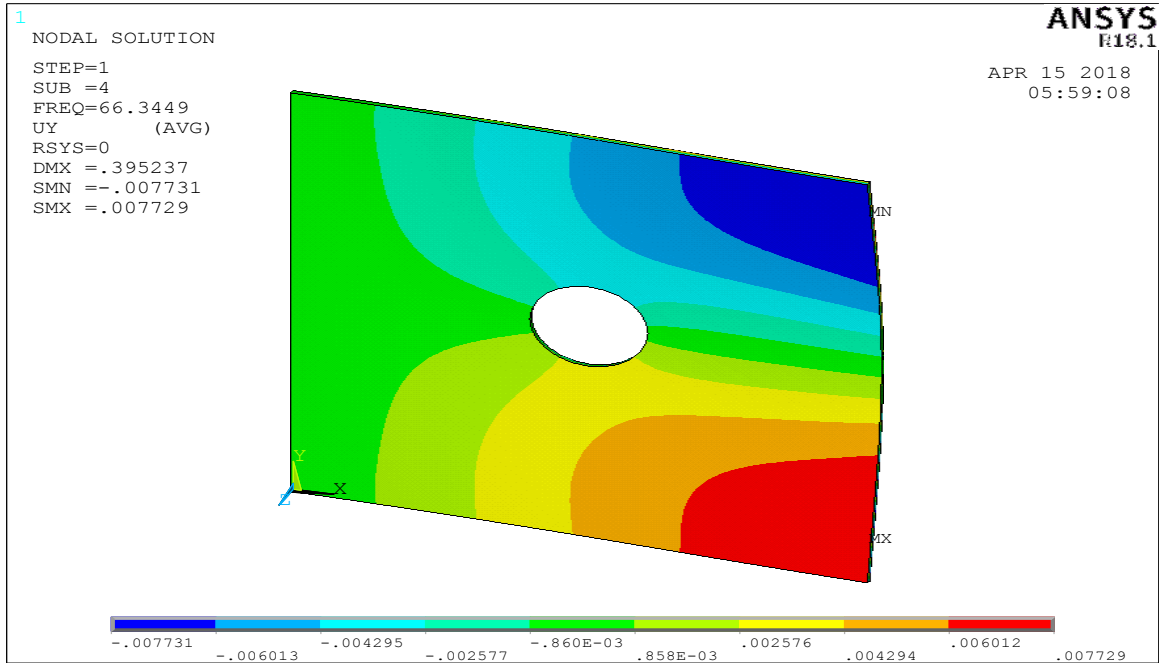
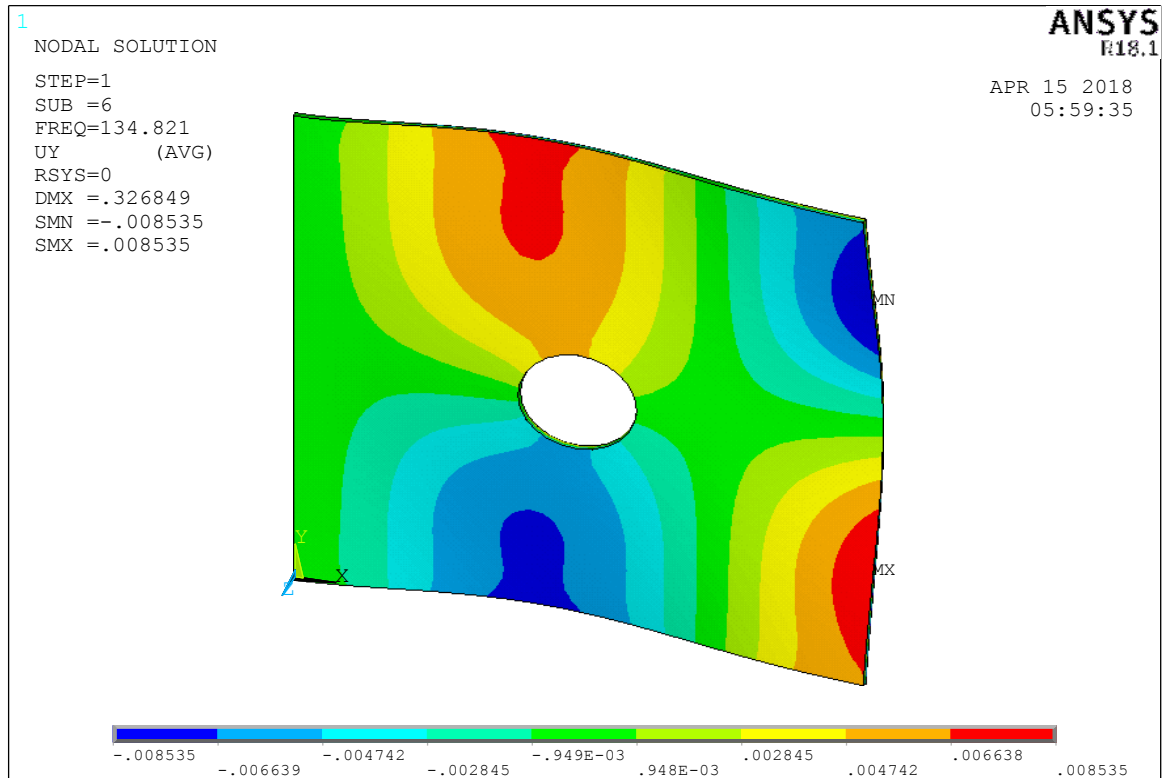


Fig. IV -3-6 Troisième Mode (1,2) $m=1, n=2$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,1m

FigIV-37 quatrième Mode (3,1) m=3, n=1 Obtenue sous code ANSYS trou 0,1m



FigIV-3-8 cinquième Mode (2,2) m=2,n=2 sous code ANSYS trou 0,1m

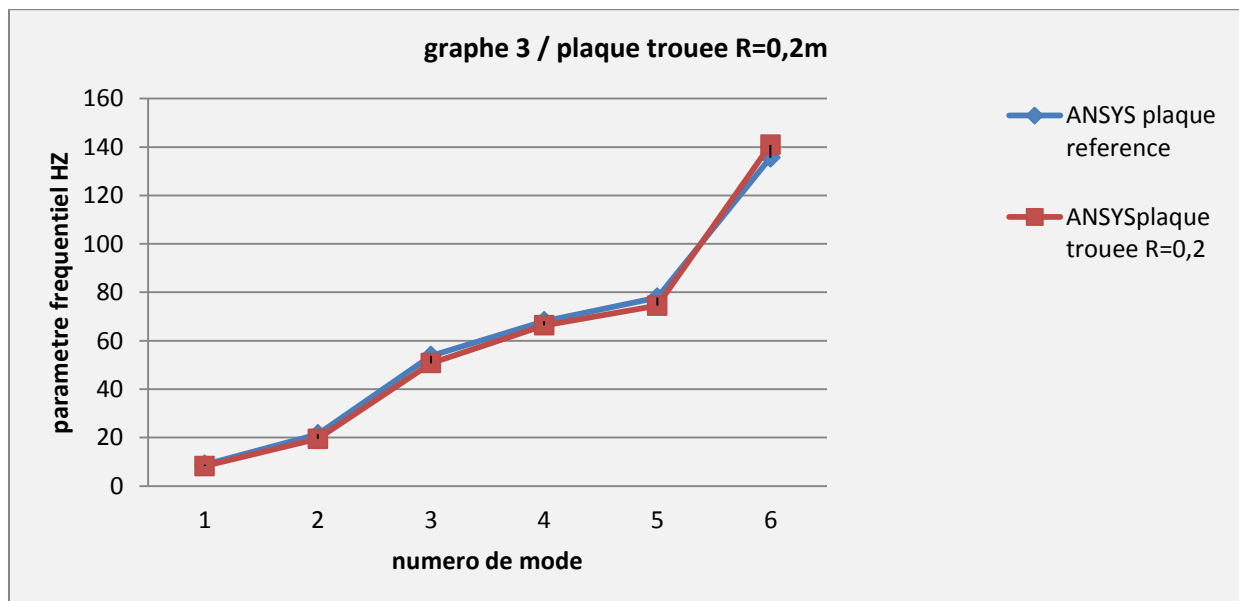
Fig IV–3-9 le Sixième Mode (3,2) $m=3, n=2$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,1m

IV-4 : Comparaison des fréquences propres obtenue par code ANSYS de la plaque mince référence et les résultats obtenue par code ANSYS de la plaque trouée de R=0,2 m

En change le rayon du trou de La même plaque avec un trou de R=0. 2 m Le premier mode est changé de f = 8,2552 HZ (différence de 0.51 HZ d'écart) [3]

Tableaux (3) les valeurs des fréquences propres de la plaque trouée 0 ,2metre

| Mode propre | Référence | Code aster | Présence | Résultat Ansys plaque référence | Résultat ANSYS trou 0.2m | Ecart(Hz) | Ecart relatif $\Delta\% = \frac{f_{cs}-f_a}{f_a}$ |
|-------------|-----------|------------|----------|---------------------------------|--------------------------|-----------|---|
| 1 | 8,7266 | 8,6718 | 8,7310 | 8,7669 | 8,2552 | 0,51 | 0.061 |
| 2 | 21, 3042 | 21,2904 | 21,3150 | 21,348 | 19,505 | 1.843 | 0.094 |
| 3 | 53,5542 | 53,0992 | 53,3563 | 53,705 | 50,746 | 2.959 | 0.058 |
| 4 | 68,2984 | 67,9269 | 68,3330 | 68,026 | 66, 367 | 1.659 | 0.024 |
| 5 | 77,7448 | 77,4294 | 77,7842 | 77,770 | 74,480 | 3.29 | 0.044 |
| 6 | 136,0471 | 135,7635 | 136,1161 | 135,63 | 140,89 | 5,26 | 0.037 |



Graph 3 : Comparaison des fréquences propres obtenue par le code ANSYS de la plaque référence et la fréquence propre par le code ANSYS de la plaque trouée R = 0,2 m

Discutions : Grâce à cette courbe en remarque que les résultats obtenue par le code ANSYS d'une plaque mince référence et les résultats obtenues par simulations numériques d'une plaque trouée de rayon R= 0,2 m sont très proches et présentent une bonne concordance entre eux

FigIV-4-1 modélisation de Plaque Trouée de R=0.2m Obtenue sous code ANSYS

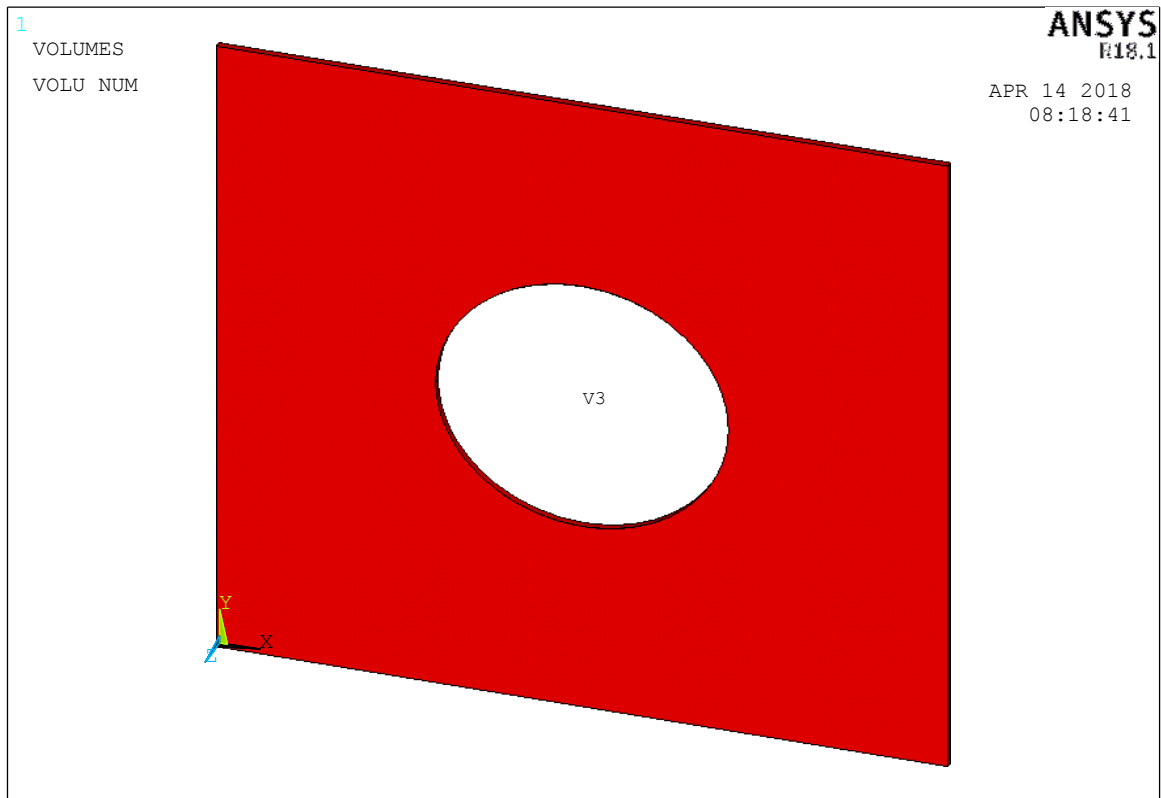


Fig.IV-4-2 Maillage de la Plaque Trouée de R=0.2m Obtenue sous code ANSYS

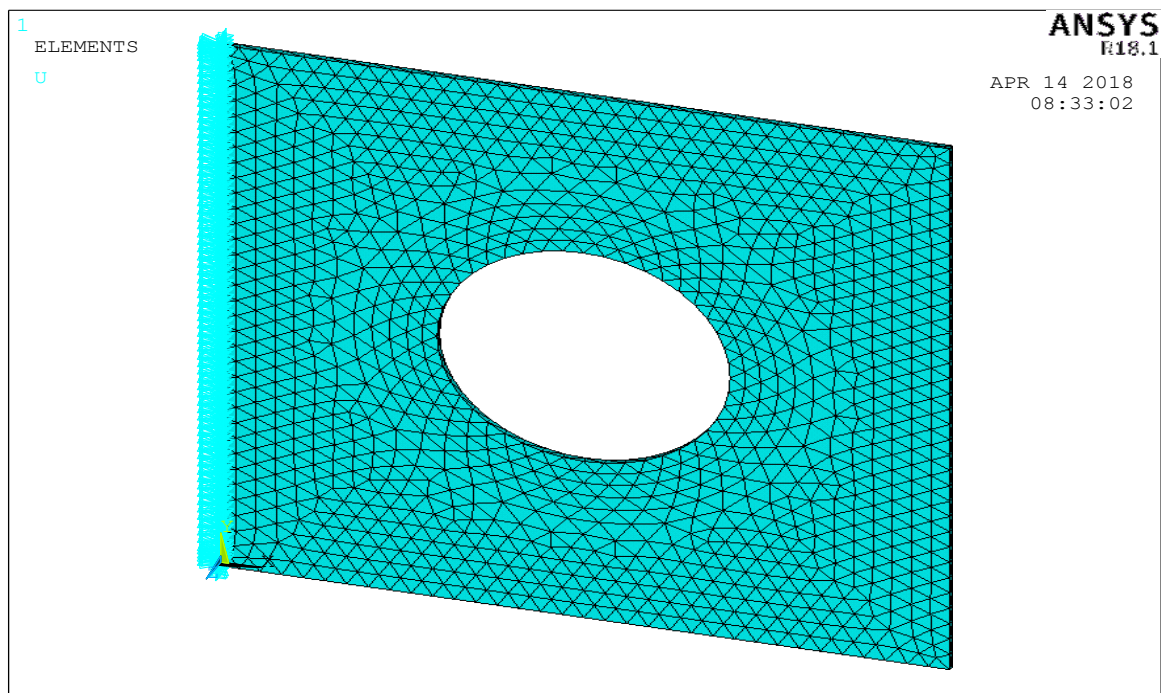
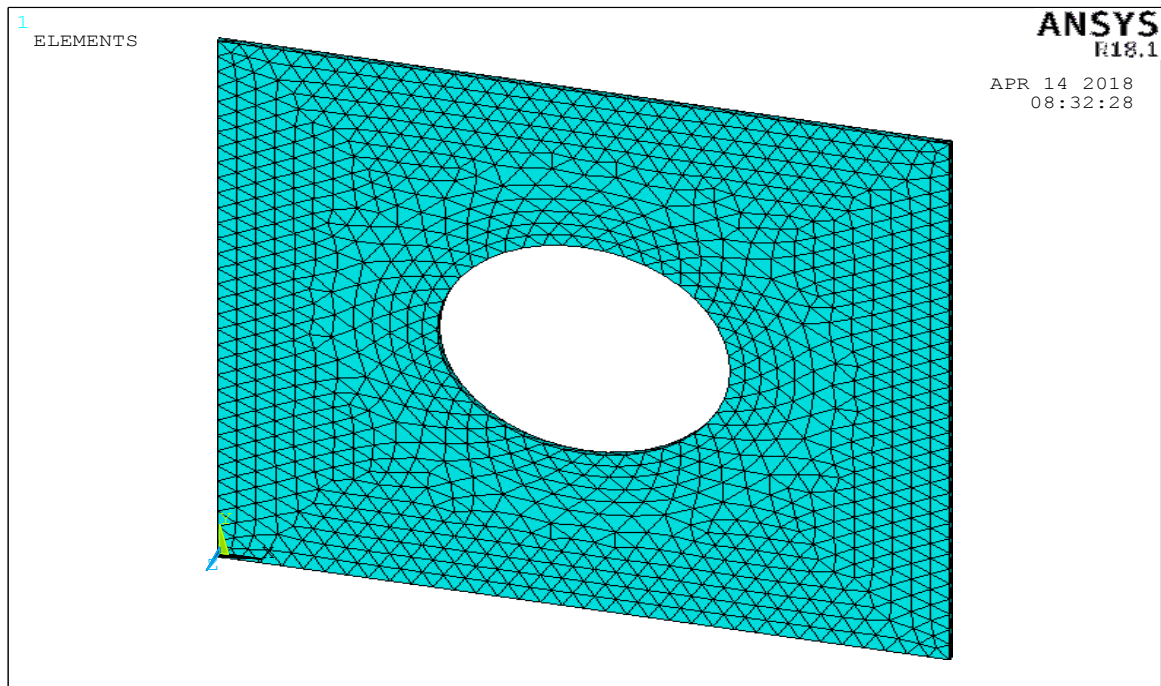


Fig.IV-4-3 Maillage de Plaque Trouée de R=0.2m Obtenue sous code ANSYS

Fig.IV-4-4 le premier Mode (1,1) $m=1, n=1$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,2m

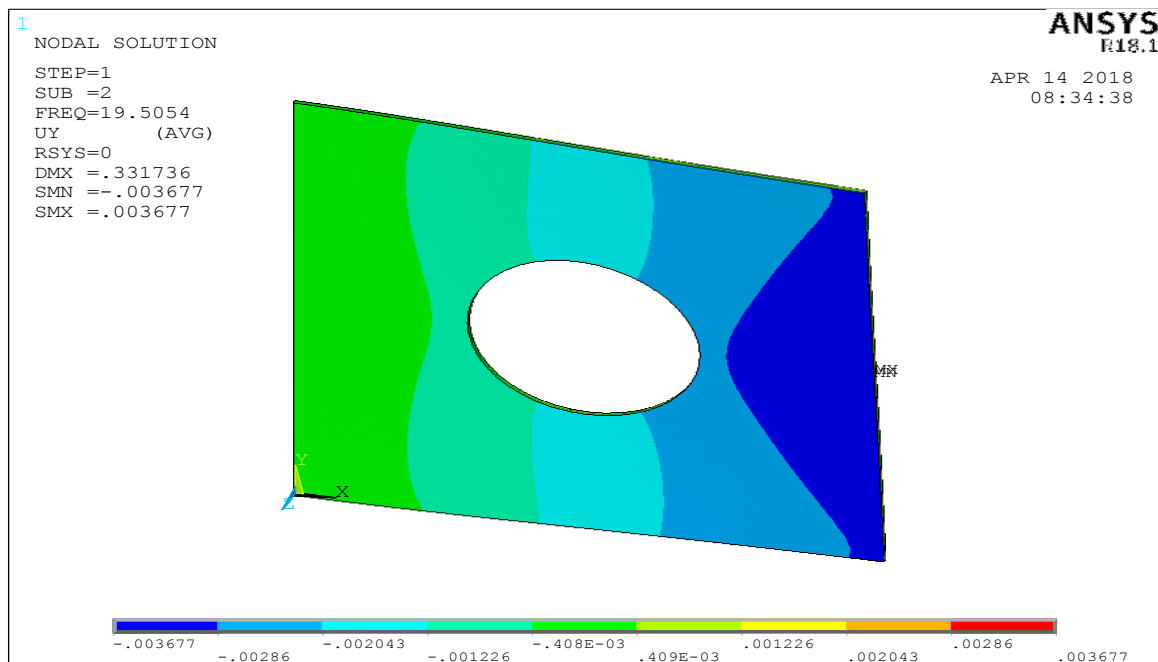
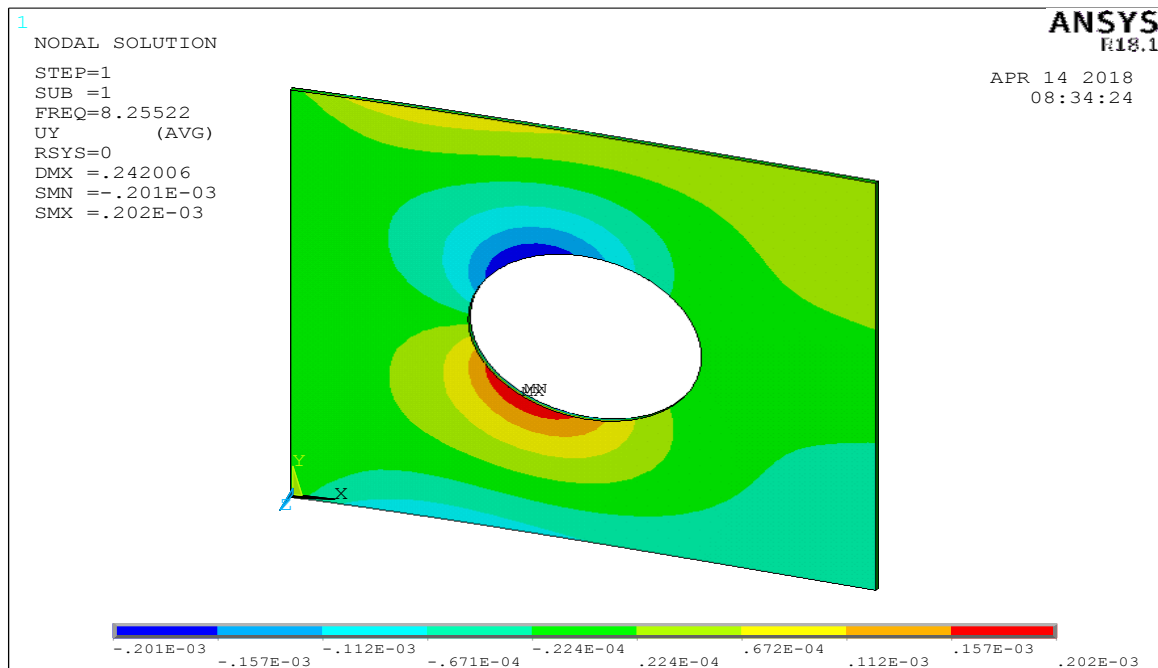


Fig.IV-4-5 Deuxième Mode (2,1) $m=2, n=1$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,2m

Fig.IV-4-6 Troisième Mode (1,2) $m=1, n=2$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,2m

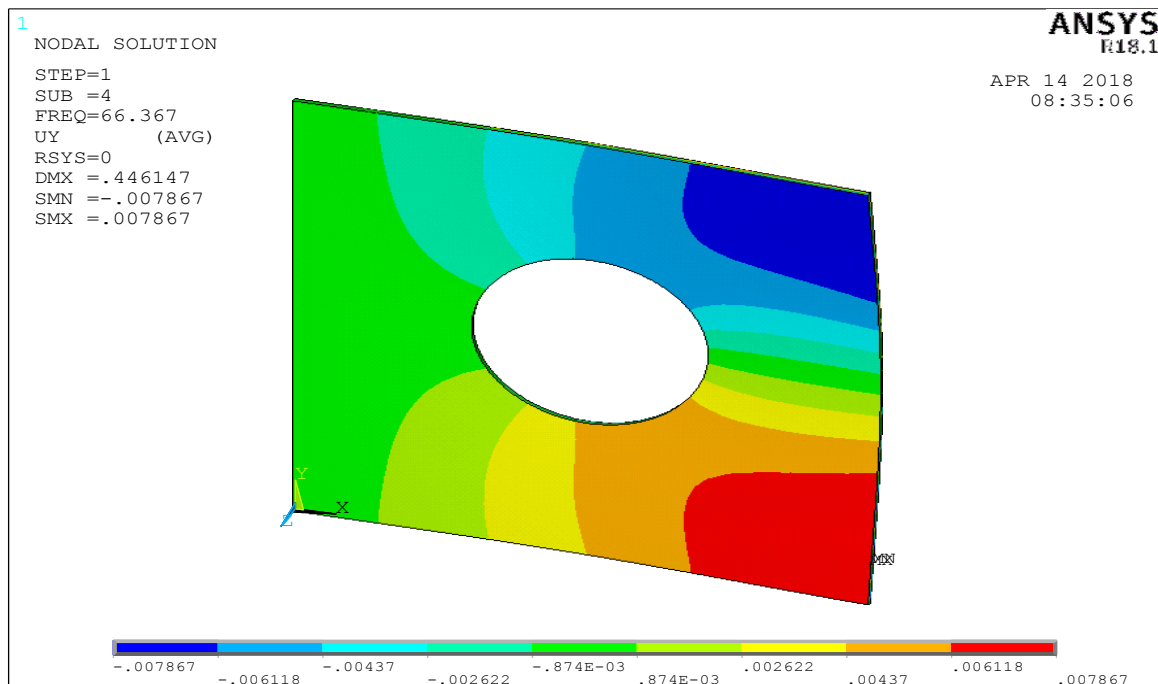
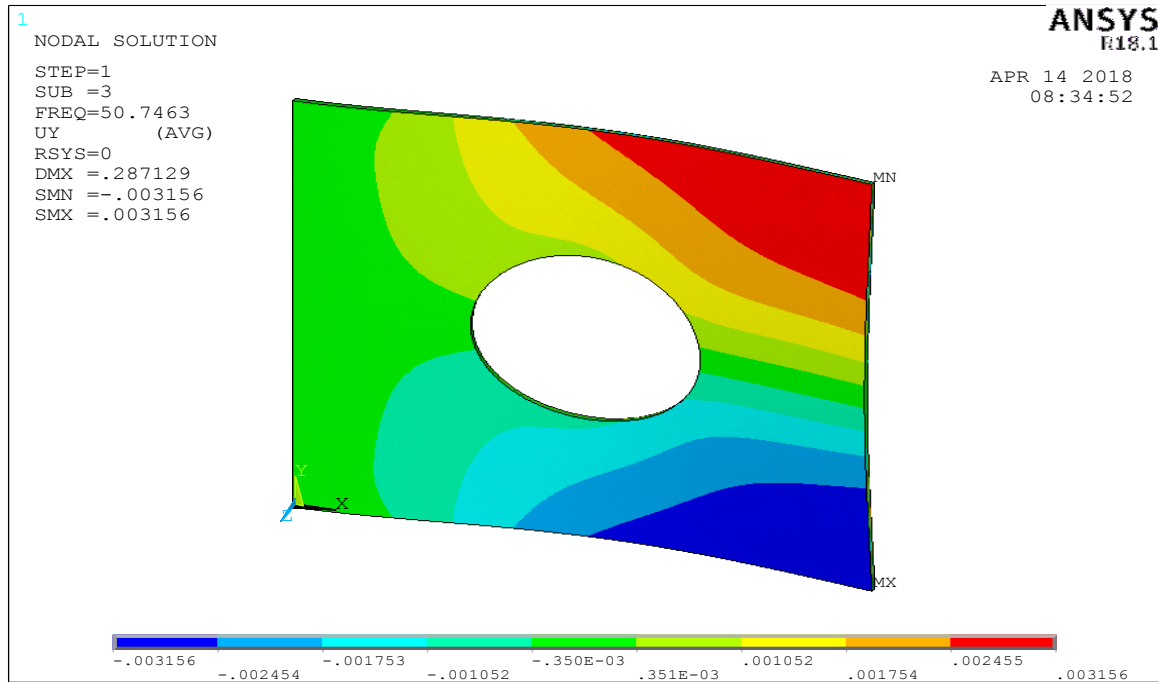


Fig.IV-4-7 quatrième Mode (3,1) $m=3, n=1$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,2m

Fig.IV-4-8 cinquième Mode (2,2) $m=2,n=2$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,1m

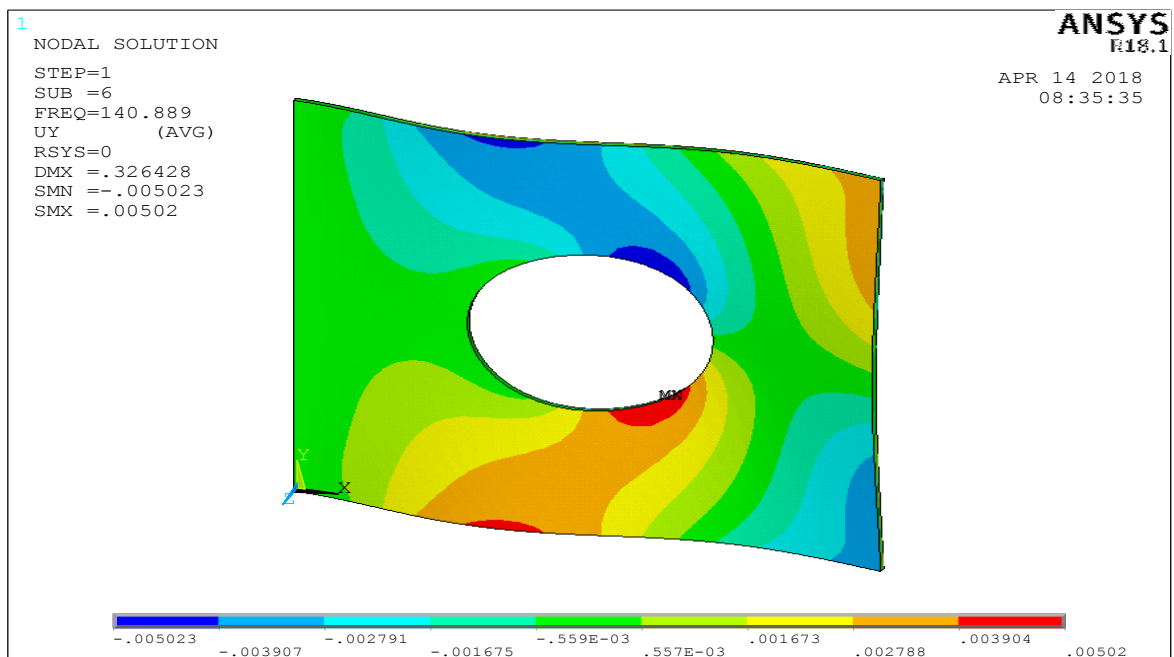
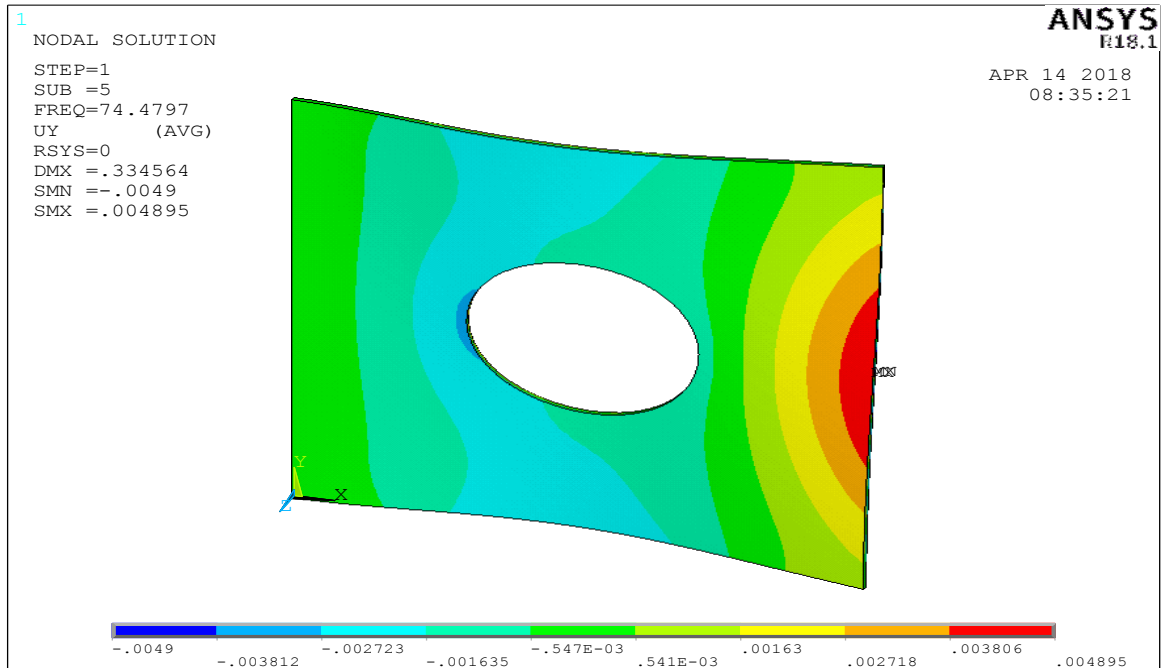
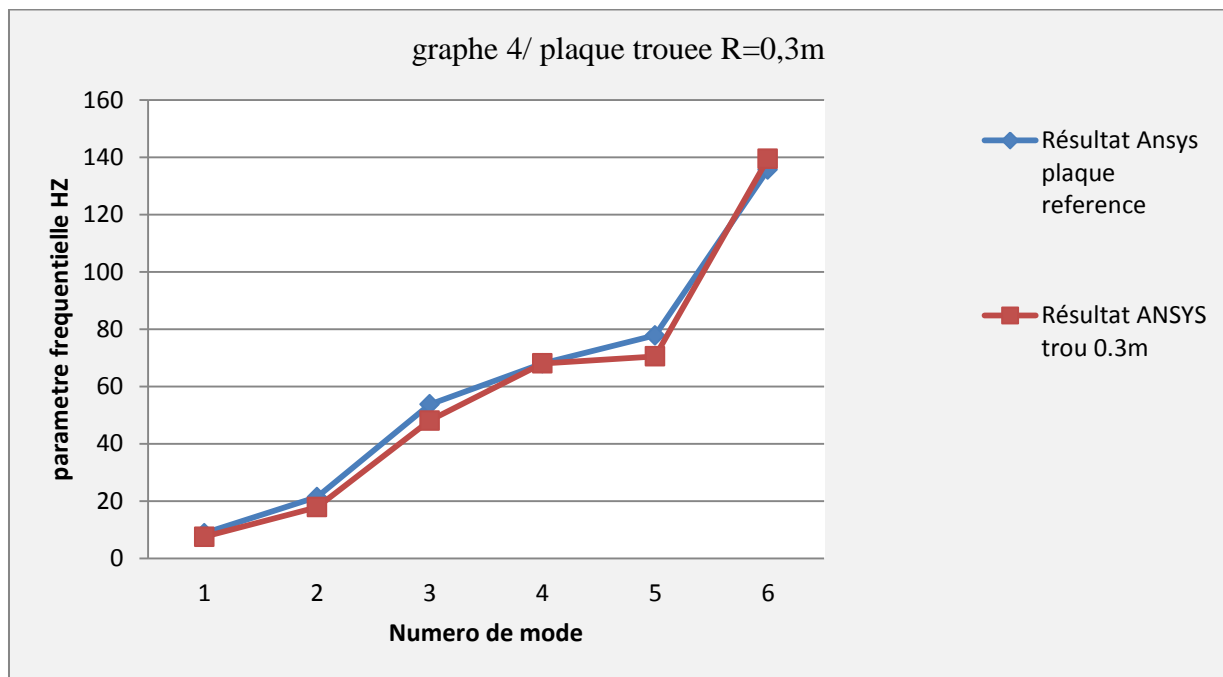


Fig.IV-4-9 le Sixième Mode (3,2) $m=3,n=2$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,2m

IV-5 Comparaison des fréquences propres obtenue par code ANSYS de la plaque mince référence et les résultats obtenue par code ANSYS de la plaque trouée de R=0,3 m :

Tableaux (4) les valeurs des fréquences propres de la plaque trouée 0,3metre

| Mode propre | Référence | Code aster | Présence | Résultat Ansys plaque référence | Résultat ANSYS trou 0.3m | Ecart(Hz) | Ecart relatif $\Delta\% = \frac{f_{cs}-f_a}{f_a}$ |
|-------------|-----------|------------|----------|---------------------------------|--------------------------|-----------|---|
| 1 | 8,7266 | 8,6718 | 8,7310 | 8,7669 | 7,5077 | 1,2592 | 0.1677 |
| 2 | 21,3042 | 21,2904 | 21,3150 | 21,348 | 17,846 | 3.502 | 0.196 |
| 3 | 53,5542 | 53,0992 | 53,3563 | 53,705 | 48,089 | 5.616 | 0.116 |
| 4 | 68,2984 | 67,9269 | 68,3330 | 68,026 | 68,833 | 0.807 | 0.0117 |
| 5 | 77,7448 | 77,4294 | 77,7842 | 77,770 | 70,472 | 7.298 | 0.1035 |
| 6 | 136,0471 | 135,7635 | 136,1161 | 135,63 | 139,44 | 3,81 | 0.027 |



Graph 4 : Comparaison des fréquences propres obtenue par le code ANSYS de la plaque référence et la fréquence propre par le code ANSYS de la plaque trouée R = 0,3 m dans le cas de la plaque Encastrer EAAA

Discutions : Grâce à cette courbe en remarque que les résultats obtenue par le code ANSYS d'une plaque mince référence et les résultats obtenues par simulations numériques d'une plaque trouée de rayon R= 0,3 m sont très proches et présentent une bonne concordance entre eux

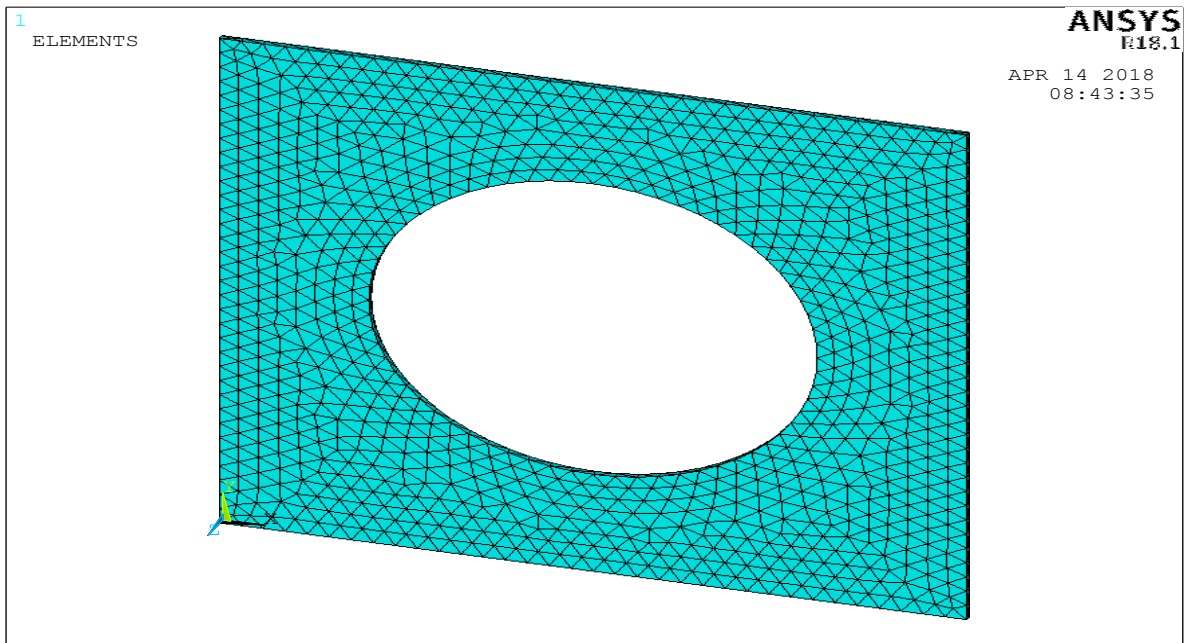
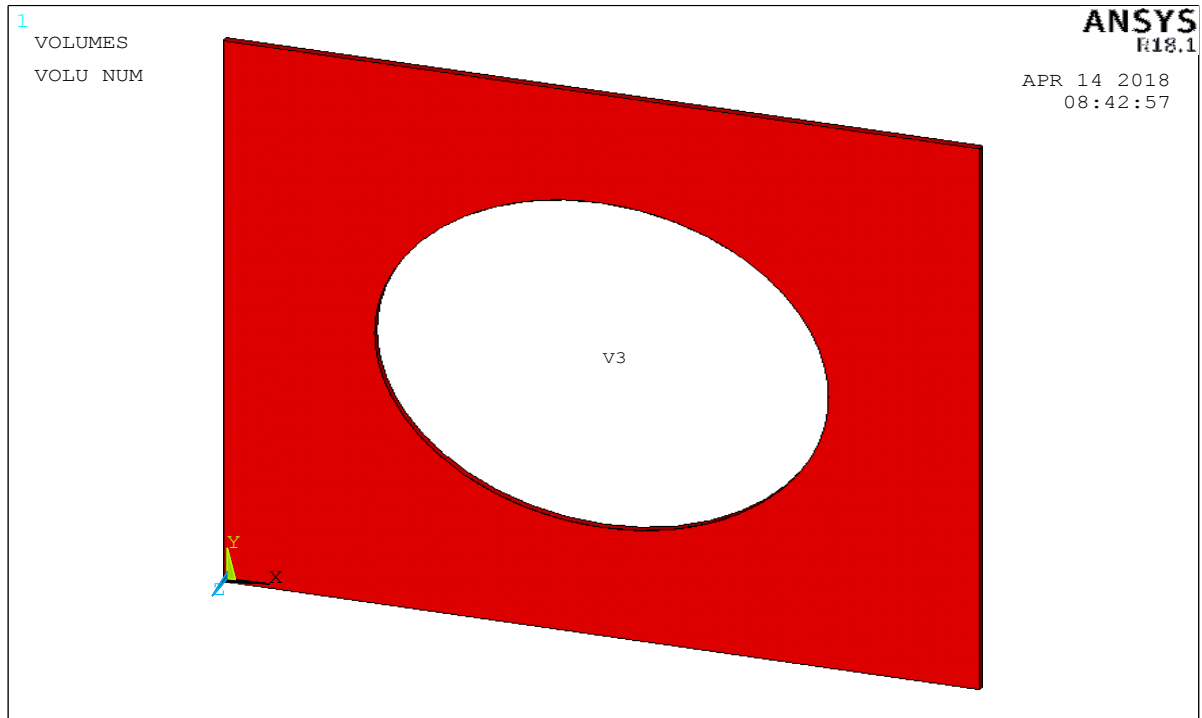
Fig.IV-5-1 modélisation de Plaque trouée R=0.3m Obtenue sous code ANSYS**Fig.IV-5-2** Maillage de Plaque Trouée de R=0.3m Obtenue sous code ANSYS

Fig.IV-5-3 Maillage de Plaque Trouée de R=0.3m Obtenue sous code ANSYS

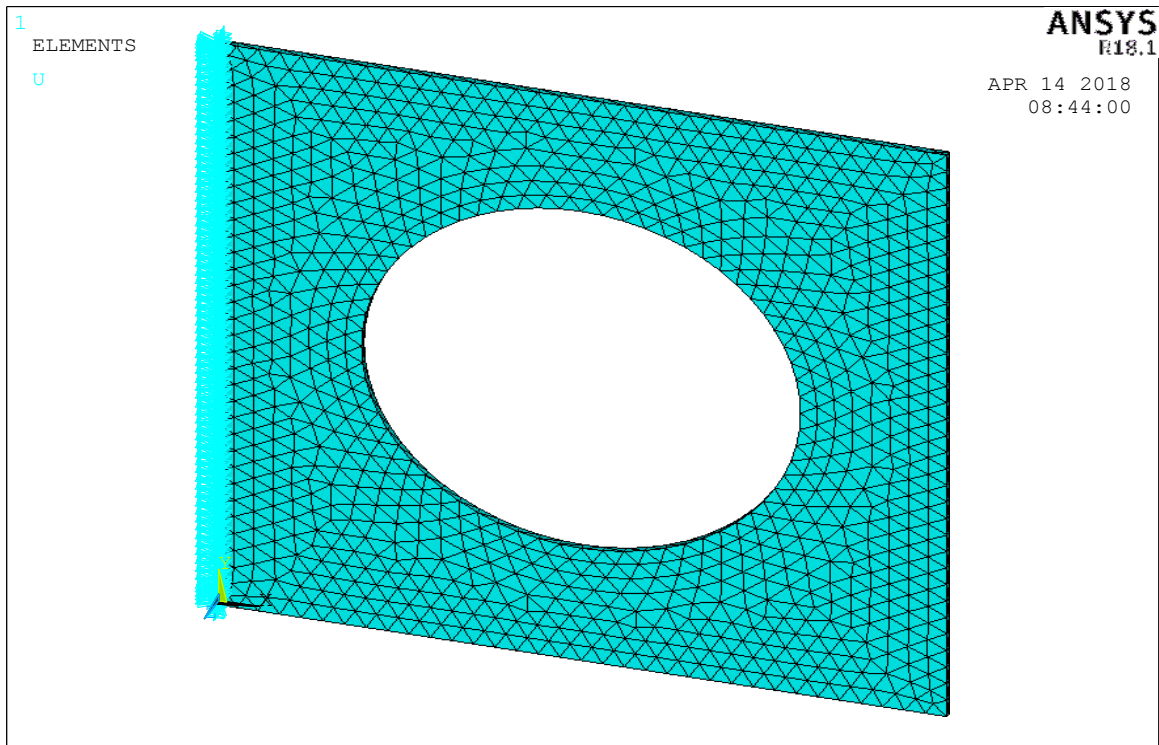


Fig.IV-5-4 le premier Mode (1,1) $m=1, n=1$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,3m

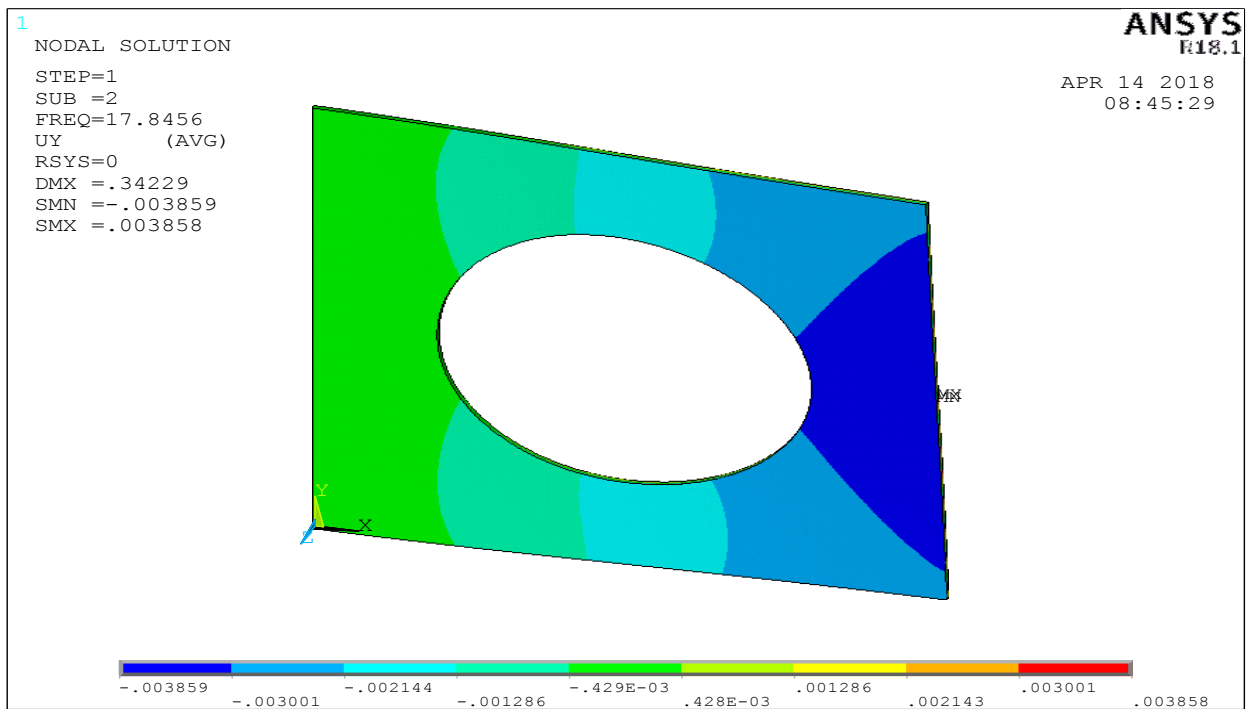
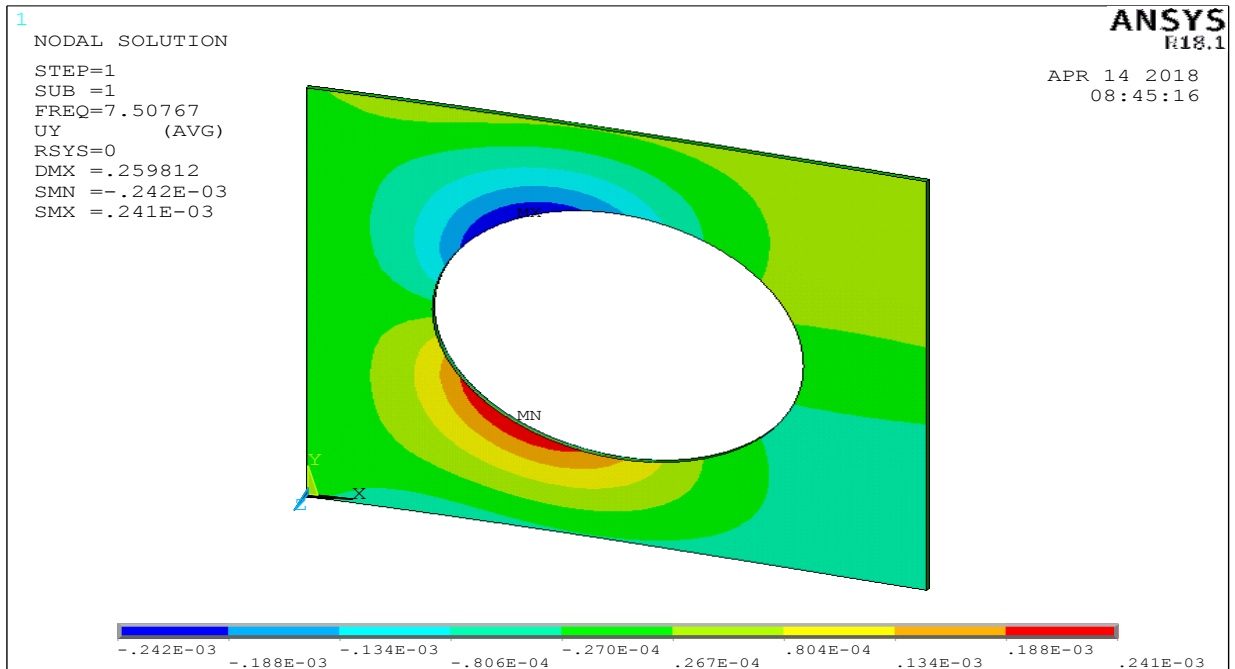
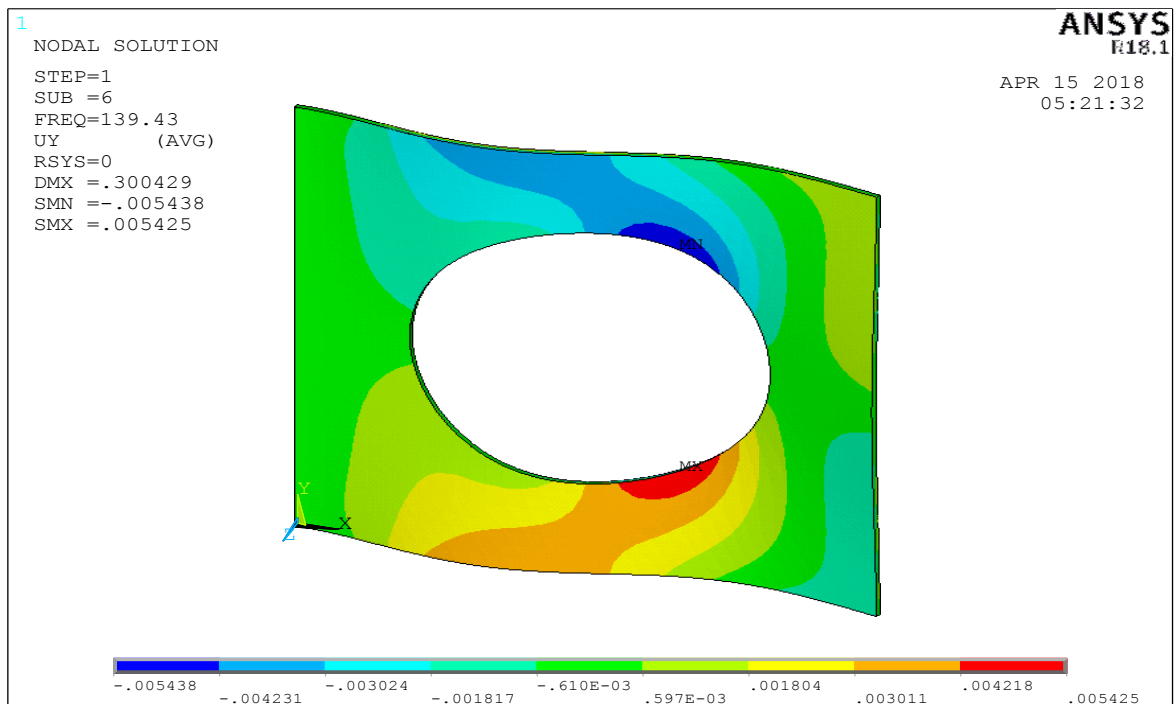
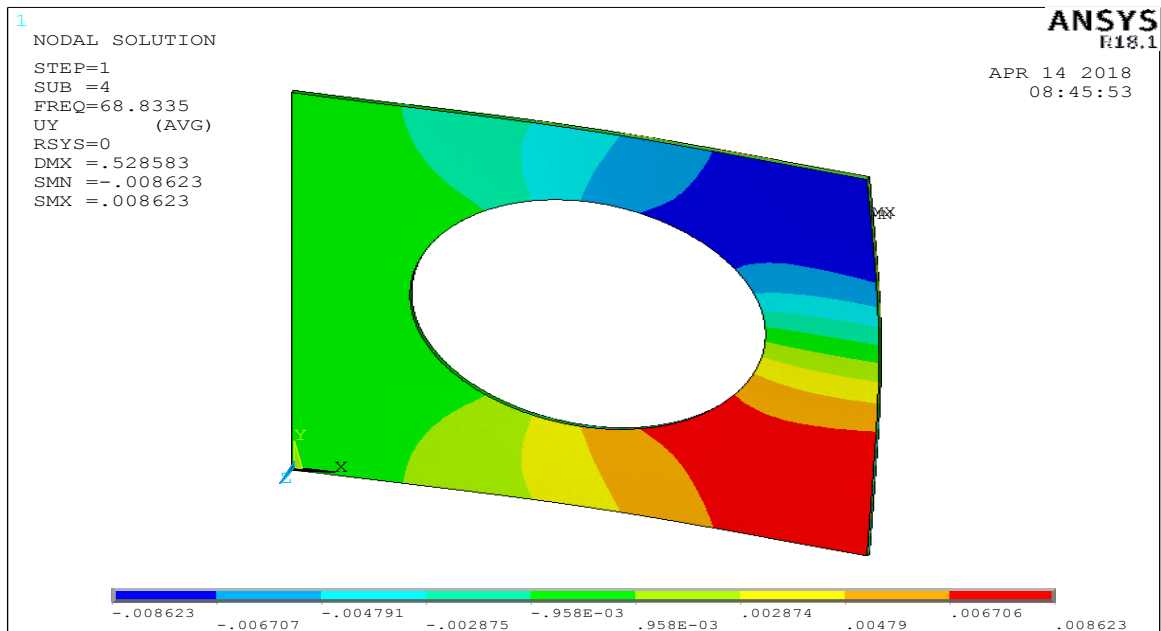


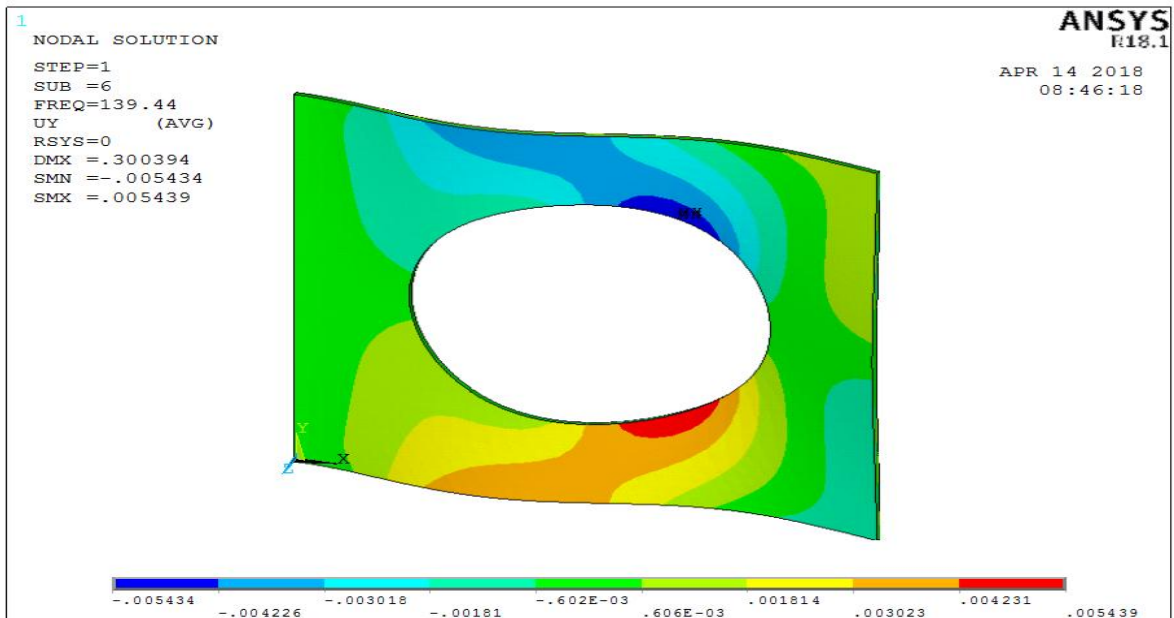
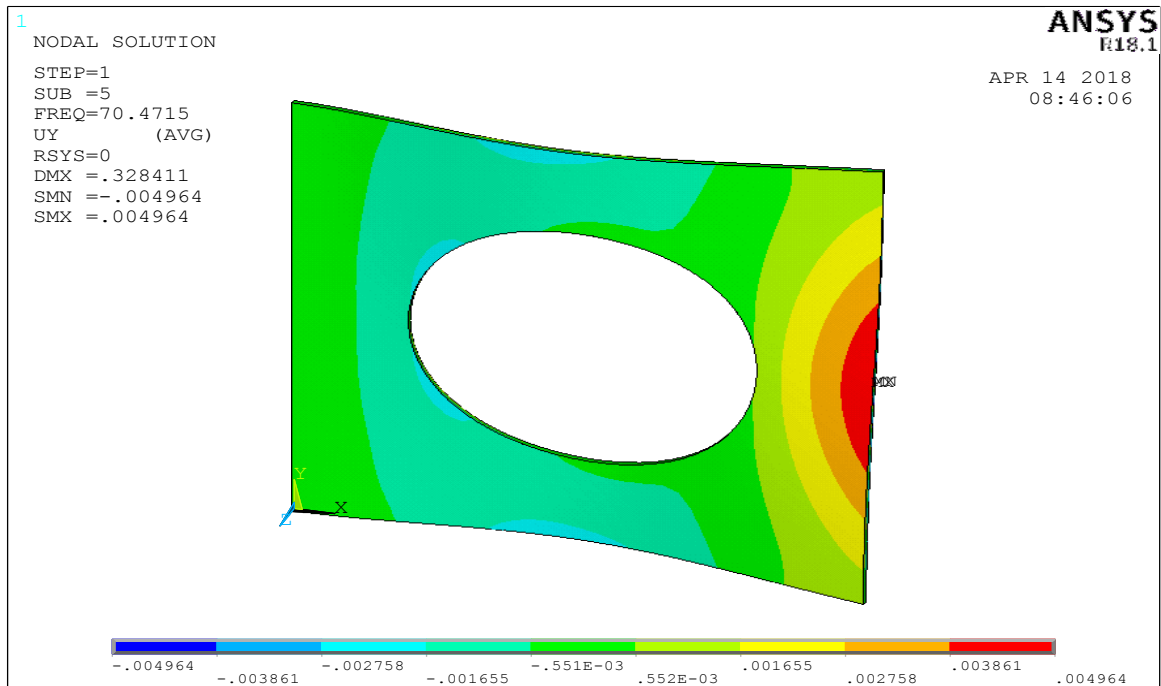
Fig.IV-5-5 Deuxième Mode (2,1) $m=2, n=1$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,2m

Fig.IV-5-6 Troisième Mode (1,2) $m=1, n=2$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,3m



FigIV-5-7 quatrième Mode (3,1) $m=3, n=1$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,3m

Fig.IV-5-8 cinquième Mode (2,2) $m=2, n=2$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,3m



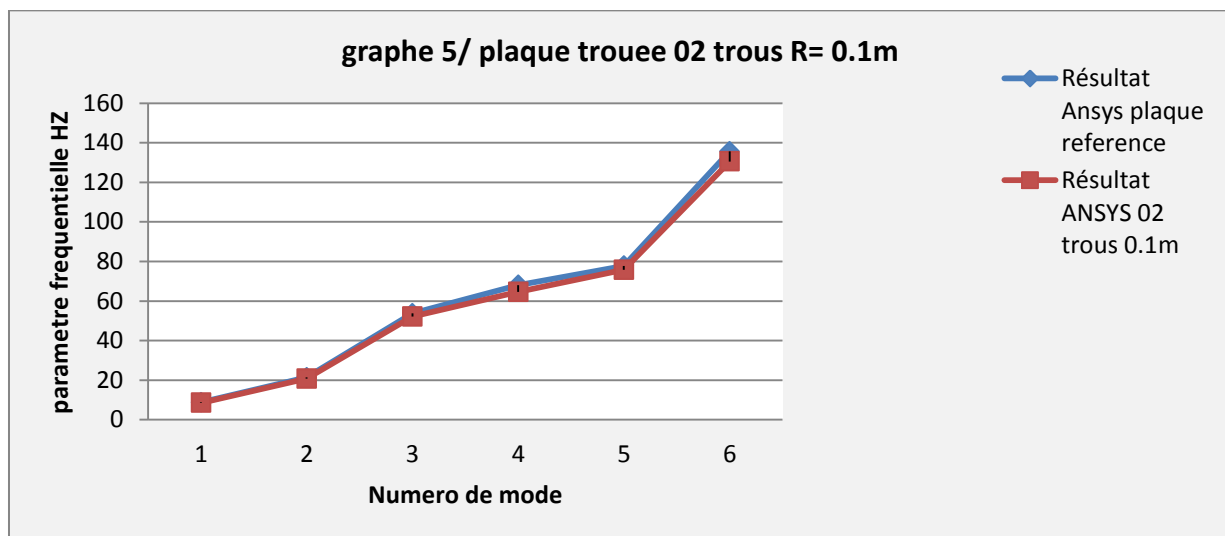
FigIV-5-9 Sixième Mode (3,2) $m=3, n=2$ Obtenue sous code ANSYS trou 0,3m

IV-6 : Comparaison des fréquences propres par code ANSYS de la plaque mince référence et les résultats obtenue par code ANSYS de la plaque trouée de deux trous de R=0,1 m

La plaque est maintenant percée de deux trous de rayon identiques de R=0.1m alignés dans la largeur de la plaque. Les deux trous sont espacés de telle manière que la plaque soit constituée de trois cordons de largeurs identiques au niveau des trous. [3]

Tableaux (5) les valeurs des fréquences propres de la plaque trouée 02 trous 0,1metre

| Mode propre | Référence | Code aster | Présence | Résultat Ansys plaque référence | Résultat ANSYS 02 trous 0.1m | Ecart(Hz) | Ecart relatif $\Delta\% = \frac{f_{cs}-f_a}{f_a}$ |
|-------------|-----------|------------|----------|---------------------------------|------------------------------|-----------|---|
| 1 | 8,7266 | 8,6718 | 8,7310 | 8,7669 | 8,4633 | 0,303 | 0.035 |
| 2 | 21,3042 | 21,2904 | 21,3150 | 21,348 | 20,706 | 0.642 | 0.031 |
| 3 | 53,5542 | 53,0992 | 53,3563 | 53,705 | 52,109 | 1.596 | 0.03 |
| 4 | 68,2984 | 67,9269 | 68,3330 | 68,026 | 64,537 | 3.48 | 0.05 |
| 5 | 77,7448 | 77,4294 | 77,7842 | 77,770 | 75,710 | 2.06 | 0.027 |
| 6 | 136,0471 | 135,7635 | 136,1161 | 135,63 | 130,55 | 5,08 | 0.03 |



Graphe 6 : Comparaison des fréquences propres obtenue par le code ANSYS de la plaque référence et la fréquence propre par le code ANSYS de la plaque trouée de 02 trous de R = 0,1 m dans le cas de la plaque Encastrer EAAA

Discutions : Grâce à cette courbe en remarque que les résultats obtenue par le code ANSYS d'une plaque mince référence et les résultats obtenues par simulations numériques d'une plaque trouée de 02 trous de rayon R= 0,1 m sont très proches et présentent une bonne concordance entre eux

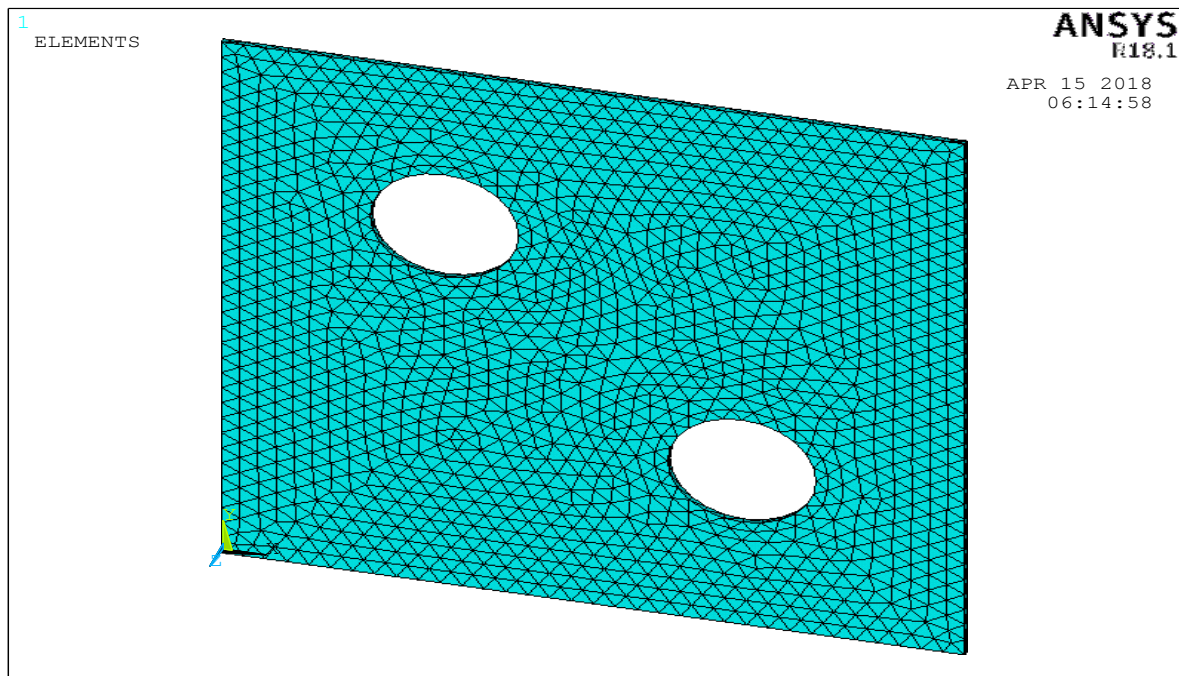
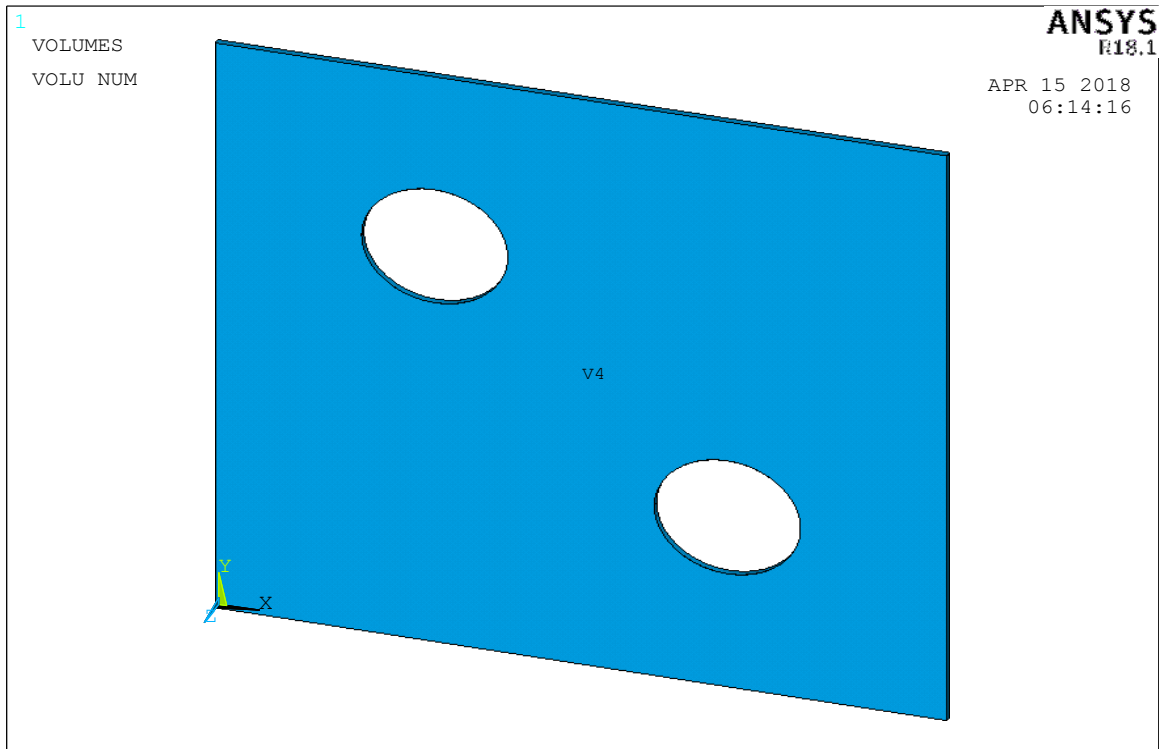
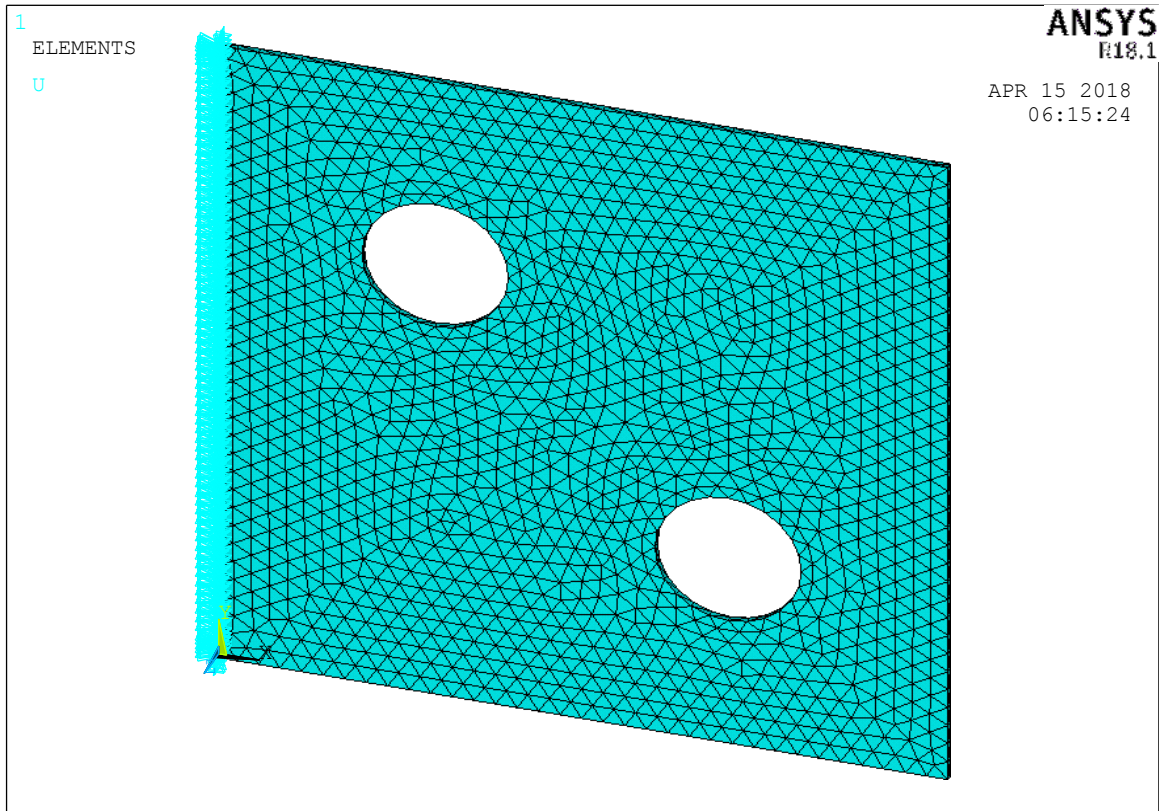
Fig.IV-6-1 modélisation Plaque trouée 02 trous R=0. 1m Obtenue sous code ANSYS**FigIV-6-2Maillage de Plaque Trouée de 02 trous R=0. 1m Obtenue sous code ANSYS**

Fig. IV-6-3 Maillage de Plaque Trouée de 02 trous de R=0.1m Obtenue sous code ANSYS cote encastrer



FigIV-6-4 premier Mode (1,1) m=1,n=1 Obtenue sous code ANSYS trou 0,1m

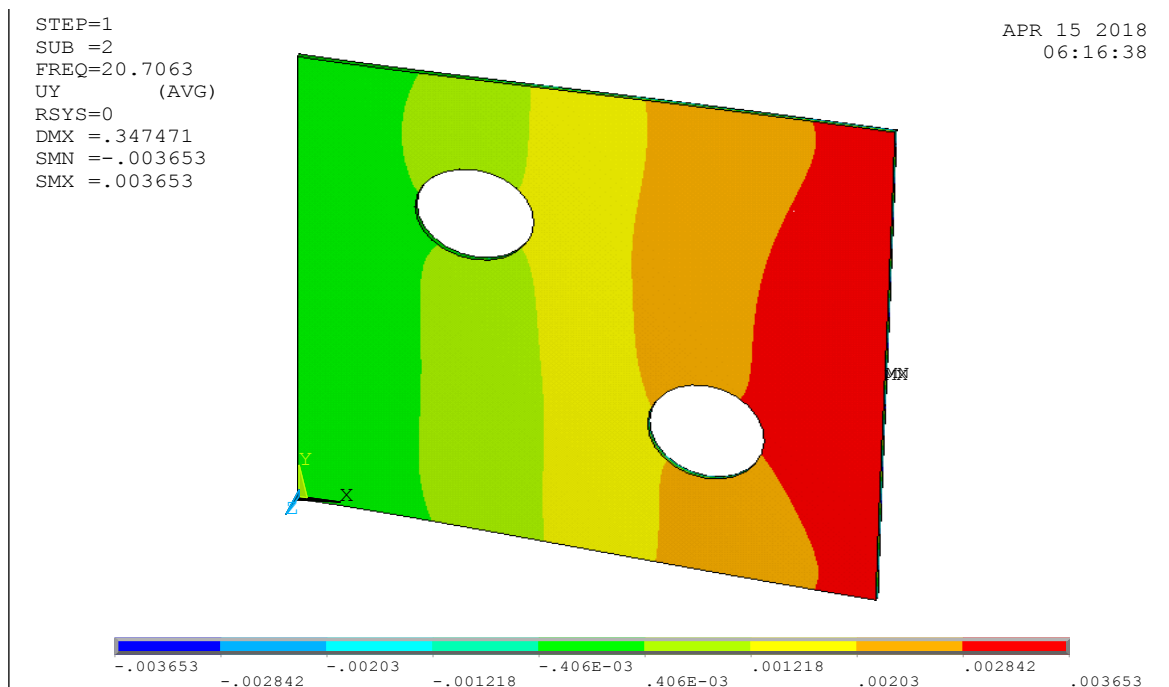
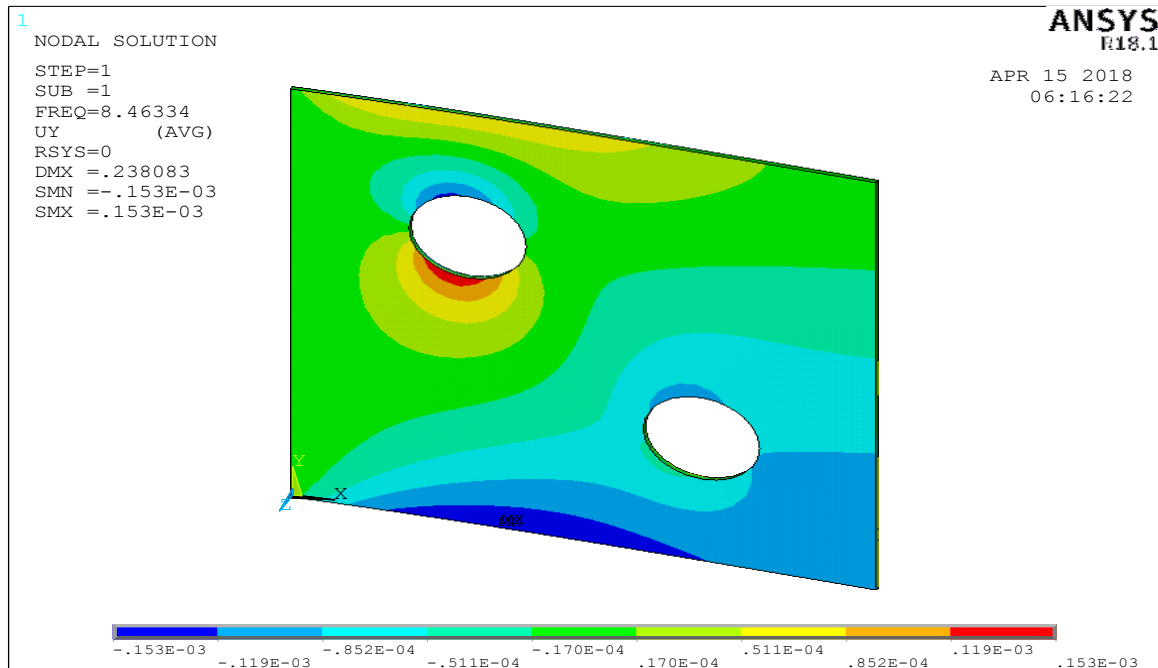


Fig. IV-6-5 Deuxième Mode (2,1) m=2, n=1 Obtenue sous code ANSYS 02 trous 0,1m

FigIV-6-6 Troisième Mode (1,2) $m=1, n=2$ Obtenue sous code ANSYS 02 trou 0,1m

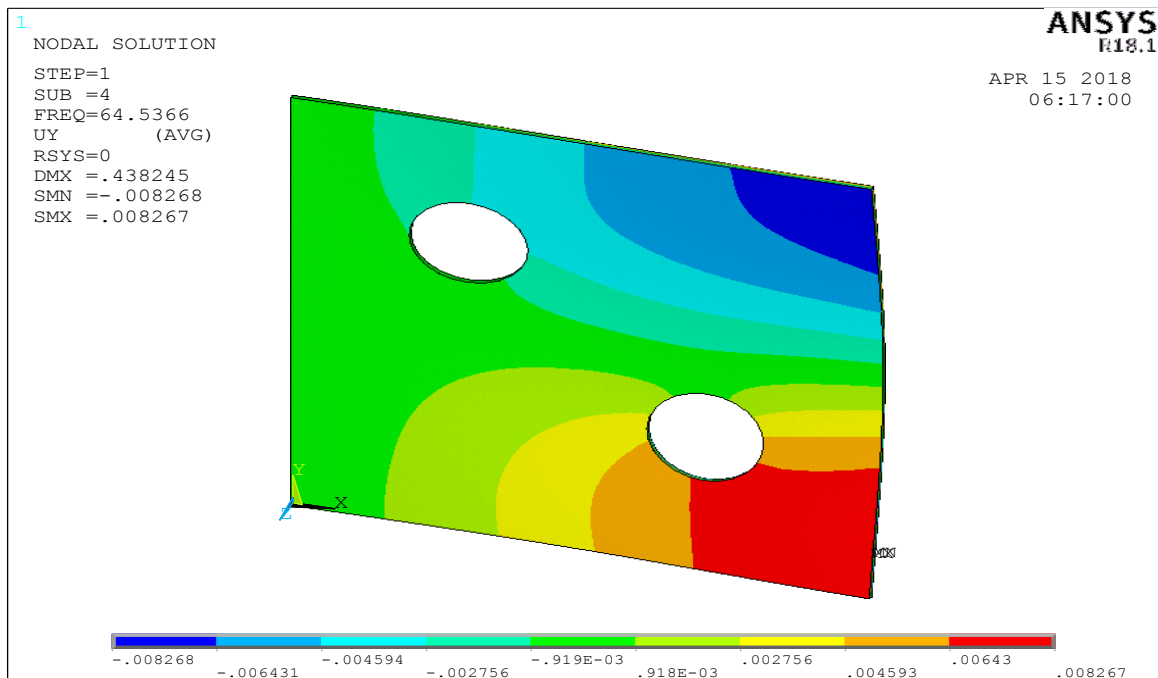
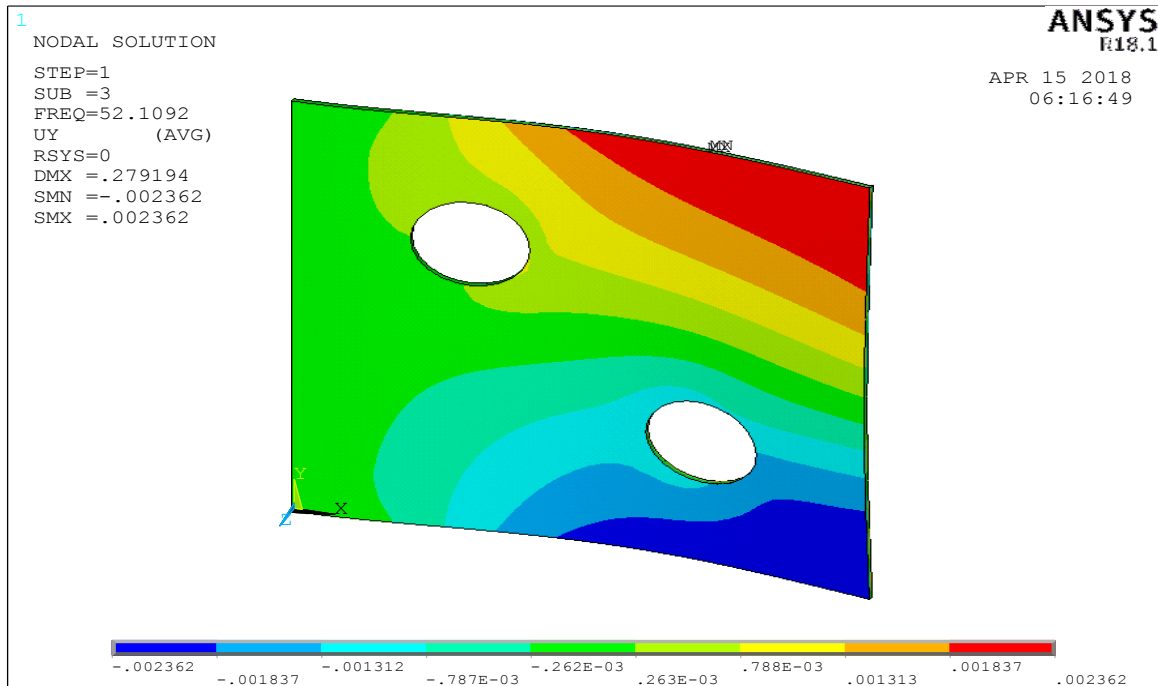


Fig. IV-6-7 Quatrième Mode (3,1) $m=3, n=1$ Obtenue sous code ANSYS 02trous 0,1

Fig.IV-6-8 cinquième Mode (2,2) $m=2, n=2$ Obtenue sous code ANSYS trou 0, 1 m

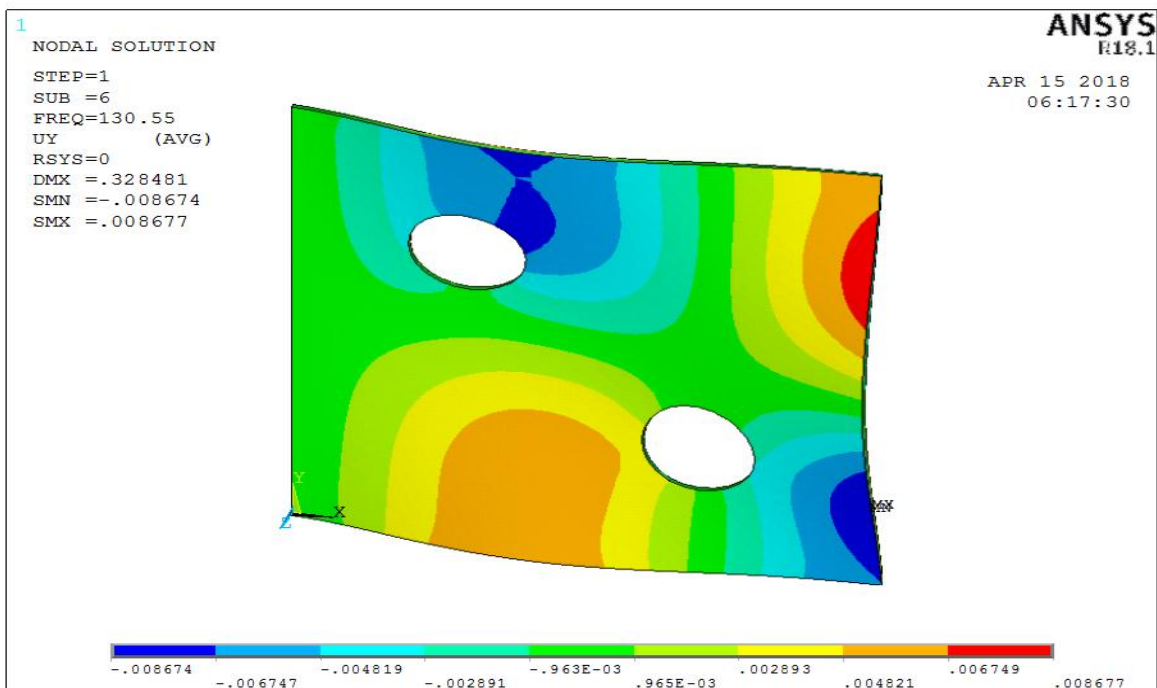
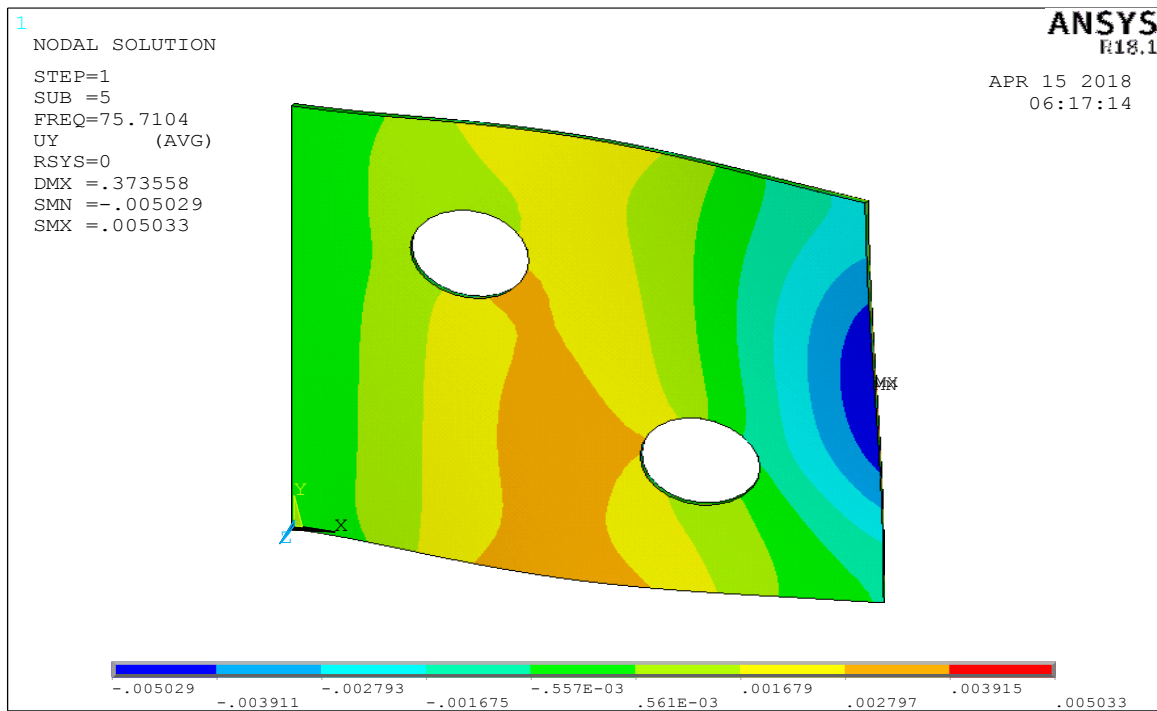


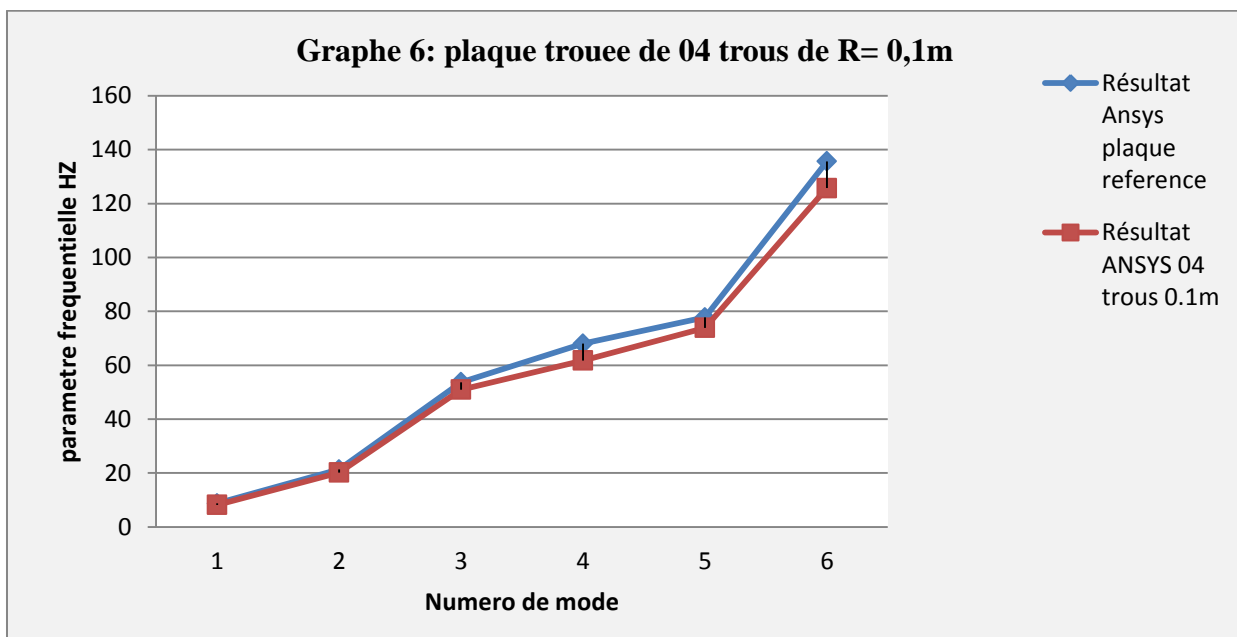
Fig. IV-6-9 le Sixième Mode (3,2) $m=3, n=2$ Obtenue sous code ANSYS 02trous 0,1m

IV-7 Comparaison des fréquences propres obtenue par code ANSYS de la plaque mince référence et les résultats obtenue par code ANSYS de la plaque trouée de 04 trous R=0,1 m

La même plaque percer avec 4 trous identiques de R=0.1m [3]

Tableaux (6) les valeurs des fréquences propres de la plaque trouée 04 trous 0 ,1metre

| Mode propre | Référence | Code aster | Présence | Résultat Ansys plaque référence | Résultat ANSYS 04 trous 0.1m | Ecart(Hz) | Ecart relatif $\Delta\% = \frac{f_{cs}-f_a}{f_a}$ |
|-------------|-----------|------------|----------|---------------------------------|------------------------------|-----------|---|
| 1 | 8,7266 | 8,6718 | 8,7310 | 8,7669 | 8,2223 | 0,544 | 0.066 |
| 2 | 21,3042 | 21,2904 | 21,3150 | 21,348 | 20,175 | 1.173 | 0.058 |
| 3 | 53,5542 | 53,0992 | 53,3563 | 53,705 | 50,954 | 2.751 | 0.053 |
| 4 | 68,2984 | 67,9269 | 68,3330 | 68,026 | 61,778 | 6.248 | 0.101 |
| 5 | 77,7448 | 77,4294 | 77,7842 | 77,770 | 73,871 | 3.899 | 0.052 |
| 6 | 136,0471 | 135,7635 | 136,1161 | 135,63 | 125,76 | 9,87 | 0.078 |



Graphe 7 : Comparaison des fréquences propres calculées expérimental de la plaque référence et la fréquence propre par le code ANSYS de la plaque trouée de 04 trous de R = 0,1 m

Discutions : Grâce à cette courbe en remarque que les résultats obtenue par le code ANSYS d'une plaque mince référence et les résultats obtenues par simulations numériques d'une plaque trouée de 04 trous de rayon R= 0,1 m sont très proches et présentent une bonne concordance

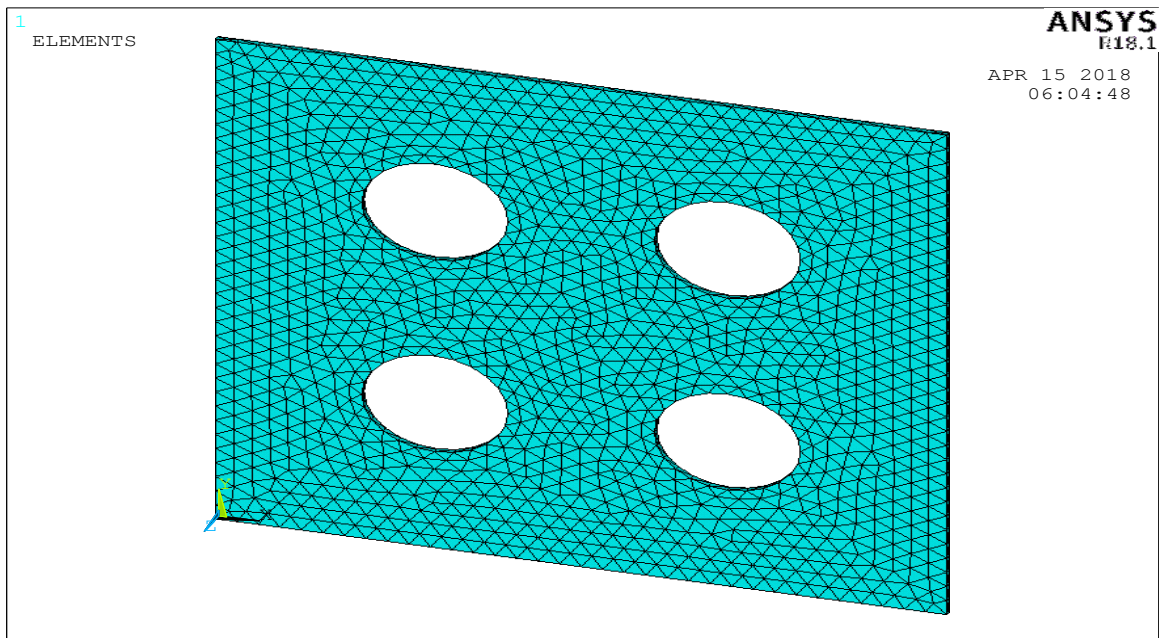
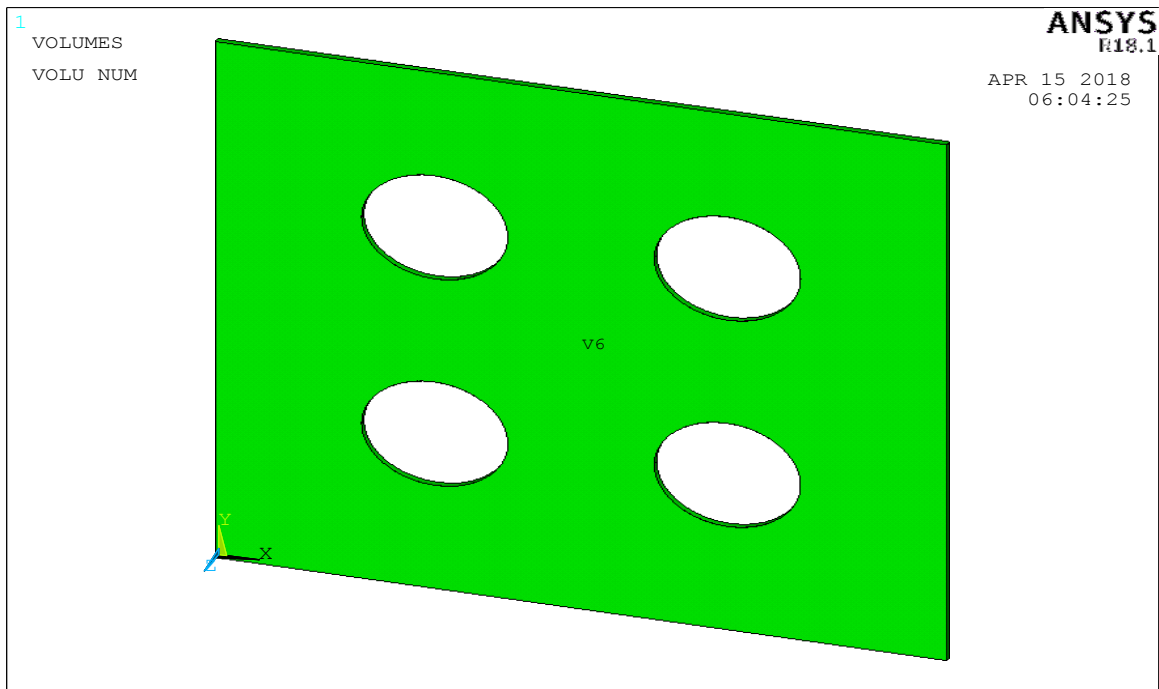
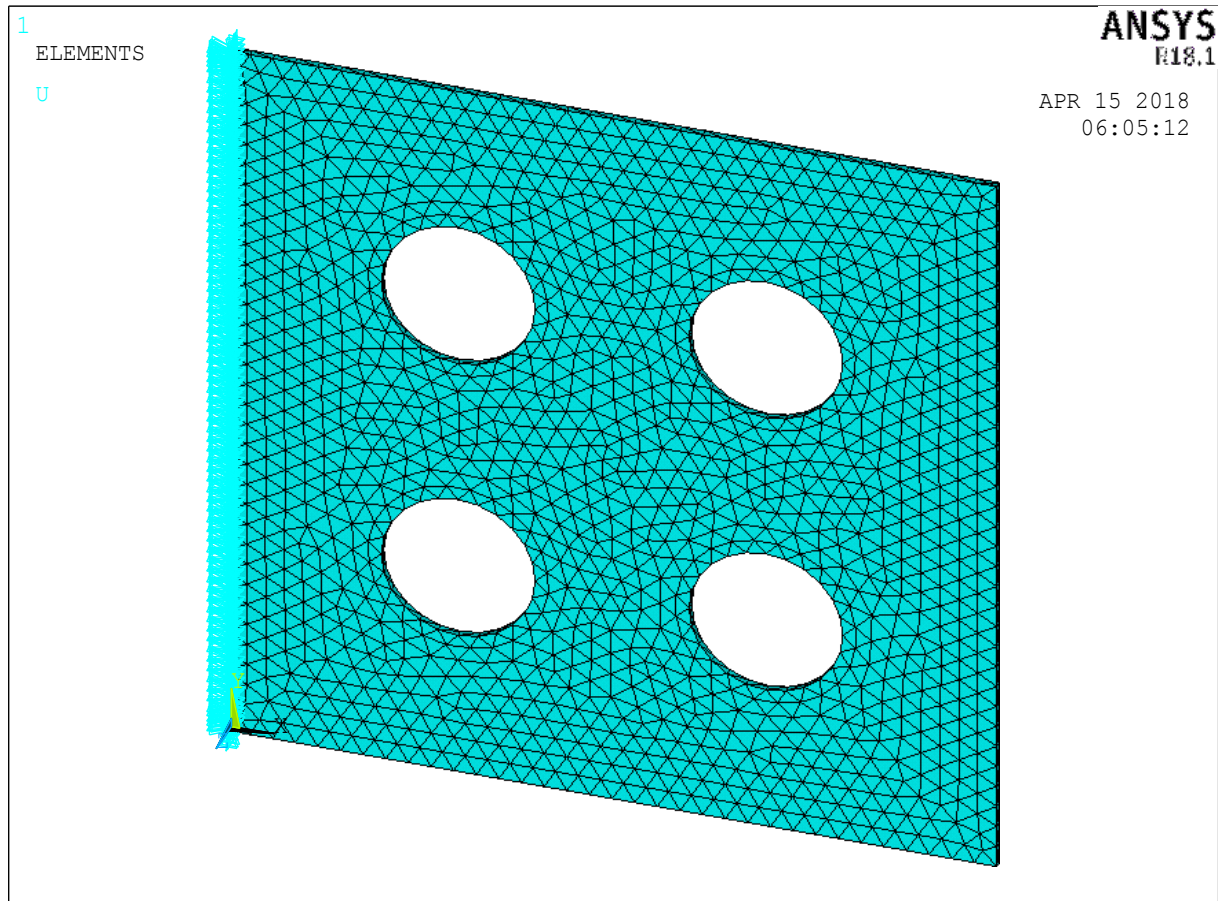
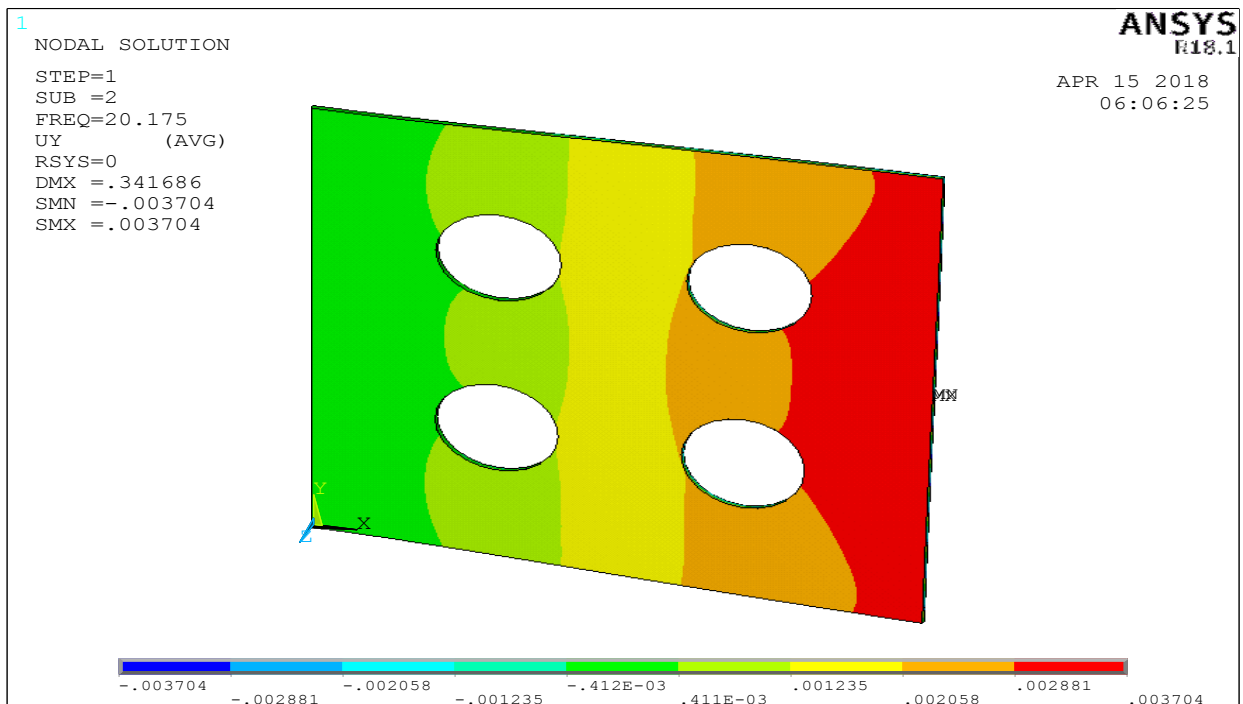
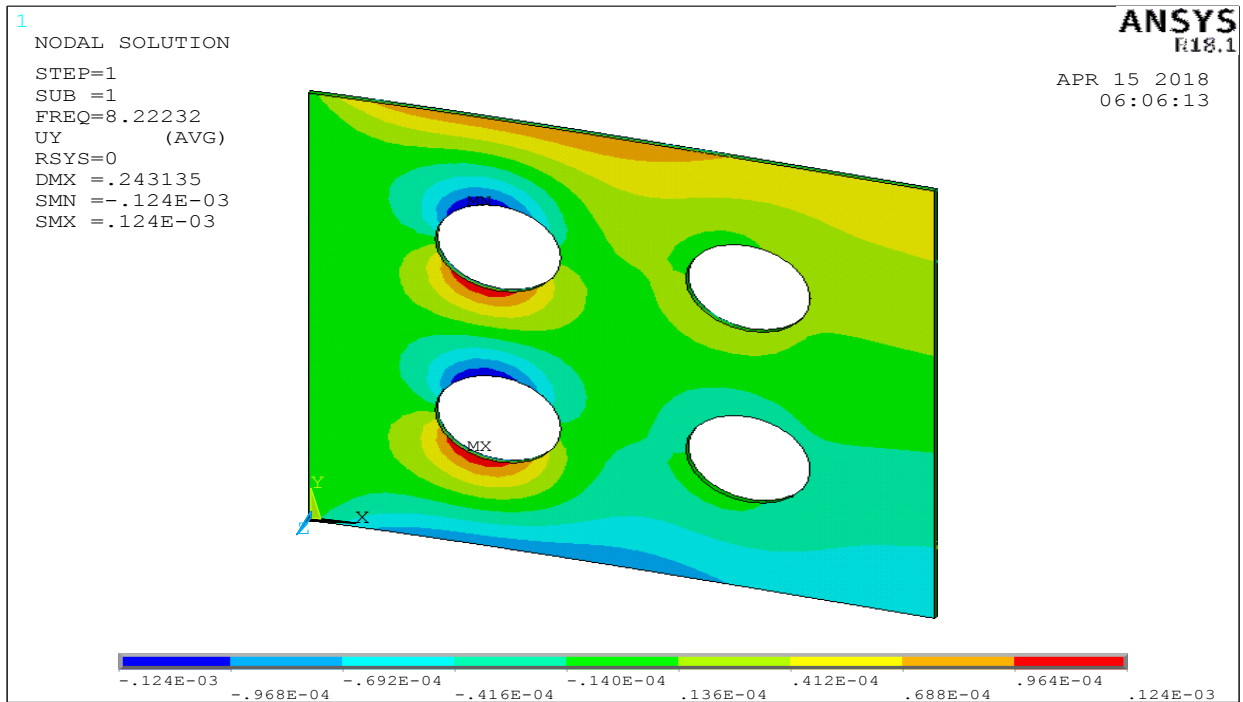
FigIV-7-1 modélisation de Plaque trouée de 04 trous R=0.1m sous code ANSYS**FigIV-7-2 Maillage de Plaque Trouée de 04 trous R=0.1m sous code ANSYS**

Fig IV-7-3 Maillage de la Plaque Trouée de 04 trous de R=0.1m Obtenue sous code ANSYS

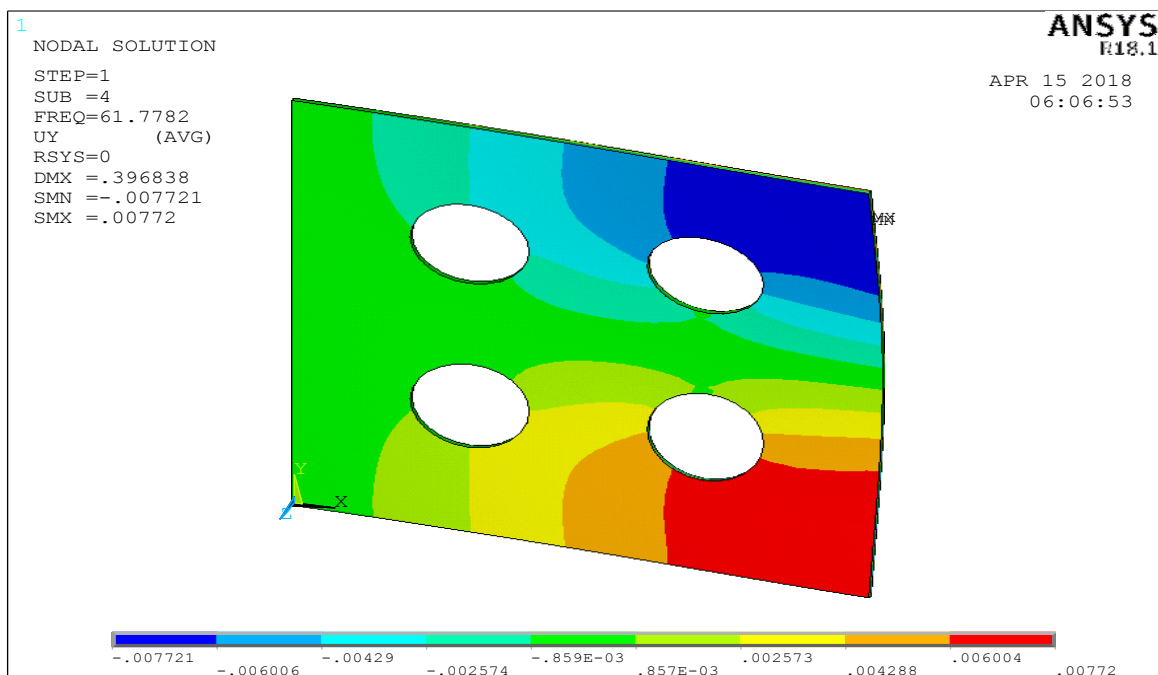
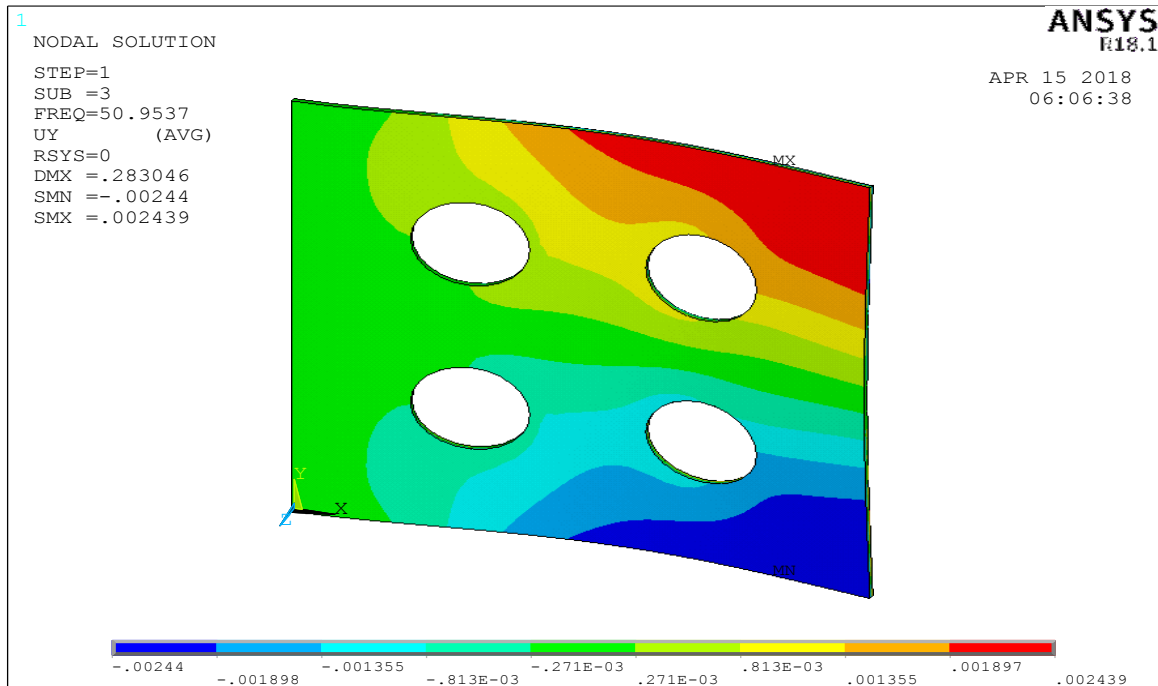


FigIV-7-4 premier Mode (1,1) m=1, n=1 Obtenue sous code ANSYS 04 Trous 0,1m



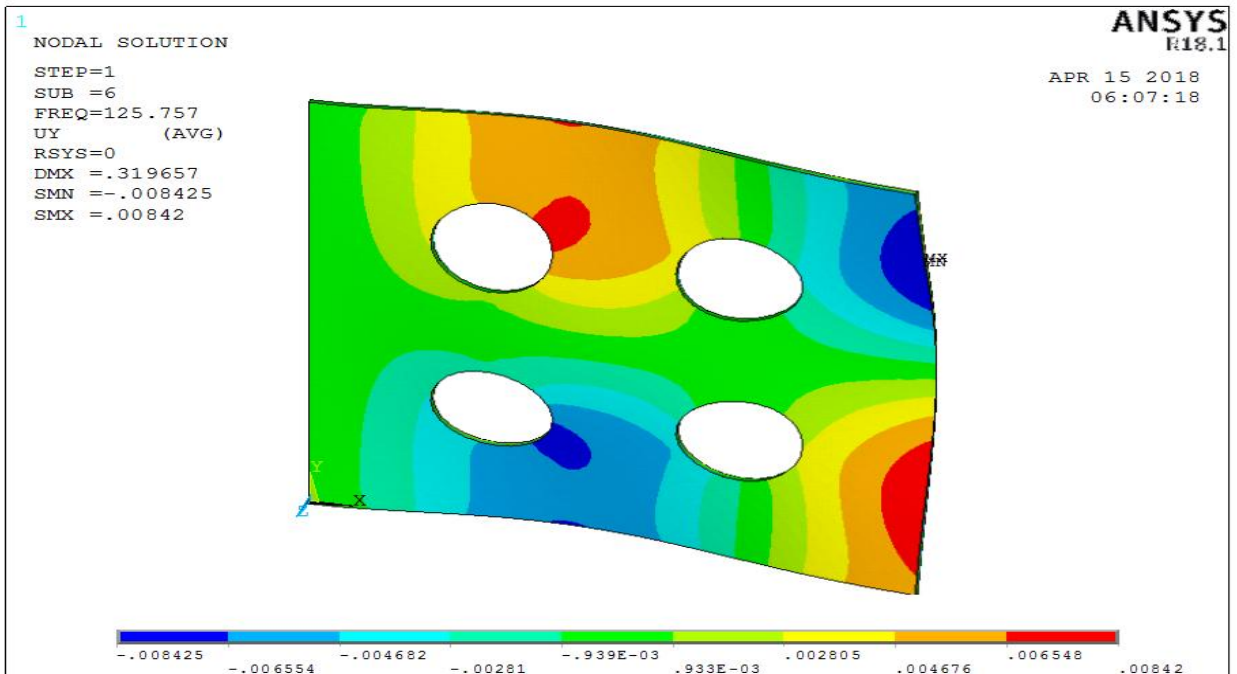
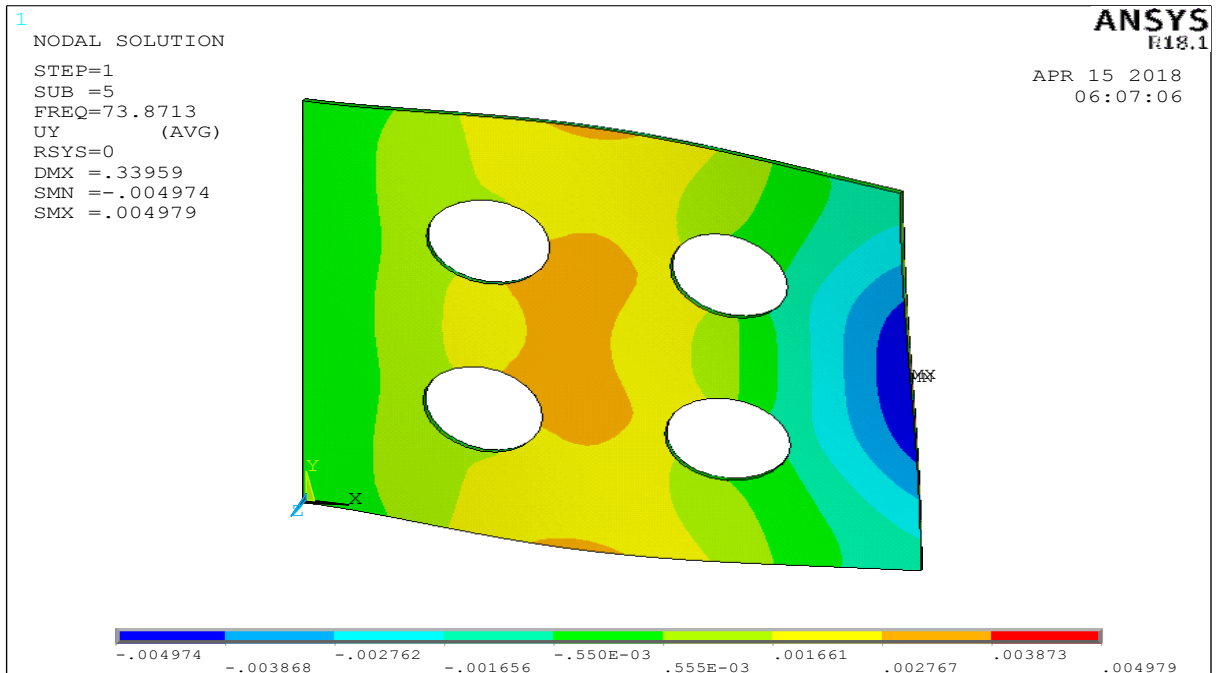
FigIV-7-5Deuxième Mode (2,1) m=2, n=1Obtenue sous code ANSYS 04 trous 0,1m

FigIV-7-6 Troisième Mode (1,2) $m=1, n=2$ Obtenue sous code ANSYS 04 trou 0,1m



FigIV-7-7 quatrième Mode (3,1) $m=3, n=1$ Obtenue sous code ANSYS 04 trous 0,1m

FigIV-7-8 Cinquième Mode (2,2) $m=2, n=2$ Obtenue sous code ANSYS 04 trous 0,1 m



FigIV-7-9 le Sixième Mode (3,2) $m=3, n=2$ Obtenue sous code ANSYS 02 trous 0,1

Conclusion générale:

Conclusion générale :

L'objectif assigné à ce travail est l'étude du comportement vibratoire d'une plaque trouée et l'effet de la taille et nombres des trous. Pour atteindre cet objectif nous avons commencé par une étude bibliographique détaillée sur les plaques minces isotrope. De nombreux travaux sont consacrés à l'étude du comportement dynamique des structures dans le souci d'une meilleure compréhension et maîtrise des problèmes vibratoires.

La programmation de la méthode sous **ANSYS** a permis une fréquence fondamentale plus exacte et étudier le déplacement et la fréquence propre. Ainsi L'analyse des plaques isotropes minces dépend de 03 paramètres :

- 1- condition en limite
- 2- matériau en lui même
- 3- la géométrie de la structure (plaque avec leur dimension)

Les résultats obtenus par simulations numérique sous code ANSYS présentent une bonne concordance avec ceux obtenus analytiquement. En plus avec l'étude complète de plusieurs paramètres tels que la géométrie, le maillage et les conditions aux limites nous ont permis de voir l'importance du comportement dynamique sur la plaque trouée.

Bibliographie

- [1] : **CHAOUCHE Abdellah** Analyse vibratoire des plaques minces sous différente condition aux limites: université kasdi merbah Ouargla 2013
- [2] : **CHERIDI HOUDA** MEMOIRE DE MAGISTER « Analyse dynamique des plaques minces et épaisses: Application aux matériaux homogènes et non homogènes » Université Mantouri Constantine 2012
- [3] **P. Trompette**. Mécanique des structures par la méthode des éléments finis. **Masson**, 1992.
- [4] **Batoz J.L. et Dhatt G.**, Modélisation des structures par éléments finis, Volume II - poutres plaques, Hermès, 1990.
- [5]: article: **Kirchhoff–Love** plate theory, Note: the Einstein summation convention of summing on repeated indices is used below.
- [6] : Thèse **T. Zarza** étude paramétrique fréquentielle pour l’analyse libre d’une plaque rectangulaire mince isotrope avec différentes combinaisons d’appuis en utilisant la méthode de Ritz. 2007 Université Mentouri Constantine – Algérie
- [7] : **Anders Thorin, Gilles Forêt**
Calcul des structures Introduction au calcul de structures élastiques linéaires. École d’ingénieur. (MEC441) MODAL - Génie Civil, Palaiseau, France. 2013, pp.56.
- [8] : **MERIZIG AMHAMMED - OUMAYA HAMZA**
Détermination expérimentale et par simulation numérique des paramètres modaux pour les plaques minces université kasdi merbah Ouargla (2014)
- [9] **Vincent Manet** Méthode des éléments finis, *Vulgarisation des aspects mathématiques et illustration de la méthode* (2013)
- [10] **Jean COURBON Eyrolles** Ingénieur Professeur Honoraire à l’École Nationale des Ponts et Chaussées Technique d’ingénieur Plaques minces élastiques *par* (1980).
- [11] Code_Aster Titre : *SDLS01 - Plaque carrée mince, libre ou encastree* Date : 03/08/2011 Responsable : **Albert ALARCON** Clé : V 2.03.001 Révision : 6802 NSDLS01 - Plaque carrée mince, libre ou encastree au bord
- [12] **Florence Zara** Modèle mécanique d’une plaque mince, Version du 10 mai 2017 Université Lyon 1, Faculté des Sciences et Technologie
- [13] **Sylvain Drapier** Dynamique des Solides et des Structures, 5eme Edition, octobre 2016 D’département M’mécanique et Procèdes d’Elaboration, Centre Science des Matériaux et des Structures & UMR CNRS 514

- [14] **Les éléments finis** : la théorie à la pratique **André Fortin** Professeur titulaire, Département de mathématiques et de statistique Université Laval et **André Garon** Professeur titulaire Département de génie mécanique École Polytechnique de Montréal 1997-2017
- [15] AIDE-MÉMOIRE MÉCANIQUE DES STRUCTURES et Résistance des matériaux **Arnaud Delaplace** Chargé de recherche au CNRS, agrégé de Génie civil **Fabrice Gatuingt** , **Frédéric Ragueneau** , Dunod, Paris, 2008
- [16] Modélisation des éléments finis 3e édition **Jean-Charles Craveur** écoles d'ingénieurs • Masters Cours et exercices corrigés Enseignant à l'Institut supérieur des matériaux du Mans 3e édition août 2008
- [17] : **W. Ritz**, "Theory Der transversals Chwingungen einer Quadratische Platte Mit Freien"
- [18]:**S.Timoshenko**" On the Correction of Transverse Shear Deformation of the Differential Equations for Transverse Vibration of Prismatic Bars " Philosophical Magazine, 41 (series 6) 744 -746 (1921).
- [19] : **R.D. Mindlin**. "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", Journal of applied mechanics, 18 31 -38 (1951).
- [20] : **Reissner E.** " The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates". J. of appl. Mech., (12) A69 -A77 (1945).
- [21] : **Uflyand Y.S** " The Propagation of Waves in the Transverse Vibrations of Bars and Plates" Akad.Nauk.SSSR, Prikl. Mat. Mech., 12 287-300 (1948).
- [22] : **vibration et acoustiques 2**, jaune pascal 2008 -2009
- [23] : Warburton, G .B. "The vibration of Rectangular Plates". Proceeding of the Institute of Mechanical engineers, Series A 168, 371-384 (1954).
- [24] : **A.W. Leissa** " Vibration of Plates", NASA SP-160, Scientific and technical Information Division of NASA, Washinton, US, DC, 1969.
- [25] **Gérardin M. et Rixen D.**, Théorie des Vibrations - Application à la dynamique des Structures, Masson, 1997.
- [26] : Edward L. Wilson "Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures isotropic materials" January 2002
- [27] : university press This book mechanic of composite structures Cambridge 2003