Existence et Unicité de L'Equation des Ondes dans un Domaine Non-Cylindrique

4 juin 2017

Remerciements

Au nom d'Allah

Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail. Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de l'enseignant "Dr. A. Sengouga" à l'université Mohamed Boudiaf-M'sila, a qui nous voudrons exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail, ainsi qu'à tous les professeurs de Faculté Des Mathématique Et De L'informatique.

Nous remercions vivement nos familles surtouts nos parents pour l'aidé et le soutient moral.

Nous tenons a remercie tous les étudiants de la promotion 2016/2017 de Math de l'université Mohamed Boudiaf-M'sila.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire on intéresse à l'étude du mouvement d'une corde vibrantes dont la longueur et la vitesse de propagations de vibrations sont variable avec le temps. Le modèle mathématique simplifié de ce phénomène est l'équation des ondes suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\,(t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ a\,(t) > 0 \quad t \in [0, T]\,, \quad x \in [\alpha(t), \beta(t)]\,, \tag{1}$$

ou les limites de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont des fonction dépendante de t.

L'etude de ce problème est plus difficile que le cas classique, i.e. lorsque l'intervalle est fixe. Pour établir l'existence et l'unicité, on utilise l'idée de M. A. Rincon et I-Shih Liu [5], dont le travail est détaillé ici, on considérant un changement de variable qui transforme le problème à un problème posé dans un intervalle aux limites fixe mais avec de coefficients variables. Ce dernier est résolue par la méthode des estimations à priori et en revenant au problème originale on a l'existence et l'unicité de la solution.

Ce travail est compose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on donne un bref exposé de quelques définitions et résultats nécessaires pour la suite de ce travail. Nous établissons dans le chapitres 2 l'existence est l'unicité de la solution faible, et locale en temps, pour le problème (1). Le chapitre 3 est consacré à l'exitance et l'unicité de solutions forts et globales. Une conclusion et quelques référence sont présentés à la fin de ce travail.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces Fonctionnels

On appelle espace fonctionnel un ensemble de fonctions ayant une structure d'espace vectoriel.

dans la suite Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1.1.1 Espace de Fonctions Continues

On note $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$, telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq m$, la dérivée $D^\alpha \varphi$ existe et est continue sur Ω.

On note $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ qui sont indéfiniment dérivables (c'est à dire, telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la dérivée $D^\alpha \varphi$ existe ; elle sera alors forcément continue sur Ω). Nous notons $\mathcal{C}^m(\Omega) = \mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{K})$.

1.1.2 Espaces de Lebesgue

Soit p un nombre tel que $1 \leq p \leq \infty$.

Cas : $1 \leq p < \infty$ On définit l'ensemble :

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, u \; mesurable \; et \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

avec aussi la convention qu'on "ne distingue pas" deux fonctions qui sont égale presque partout. Cet espace muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(r)|^p \, dr \right)^{1/p}$$

est un espace vectoriel normé Banach.

Cas : $p = \infty$ On définit

$$L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \exists a \geq 0 \ , |u(x)| \leq a \ \ p.p. \ x \in \Omega\} .$$

L'ensemble $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} ess \ u(x) = \inf \{a \geq 0, |u(x)| \leq a, \ p.p. \ x \in \Omega\} .$$

Cette dernière quantité s'appelle le suppremum essentiel de $|u|$ (ou sa borne supérieure essentielle).

Cas : $p = 2$

Dans le cas particulier, $p = 2$, on dispose d'un cadre Hilbertien très commode d'utilisation. Ainsi, pour u et v données dans $L^2(\Omega)$, l'application

$$(u, v) \to (u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u(x) \, v(x) \, dx,$$

définit un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$, qui lui confère une structure d'espace de Hilbert.

Remarque 1.1 *Pour tout q tel que $1 \leq q < +\infty$ on note*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \ , \ \textit{pour tout compact } K \subset \Omega \textit{ on a } u \in L^p(K)\} .$$

On a : $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ et $\mathcal{C}(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$.

1.1.3 Espace de Distribution et Espaces de Sobolev

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions test

Définition 1.2 *Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle support de φ l'adhérence en $\mathbb{R}^n$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \ , \varphi(x) \neq 0\}$, Le support est toujours fermé.*

On note par $\mathcal{C}_0^\infty$ ou encore $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivables et à support compact et inclus en Ω. $\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Distributions

Définition 1.3 *On appelle distribution sur Ω toute application linéaire et continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.*

On notera dans la suite par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble de toutes les distributions sur Ω qui est un espace vectoriel. On dit aussi que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.

On utilisera dans la suite la notation $\langle T, \varphi \rangle$ (crochet de dualité), pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et tout élément $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Un exemple fondamental des distributions est le suivant :

Exemple 1.4 *Pour toute fonction $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ on définit la distribution T_u de la manière suivante :*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx, , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La distribution T_u s'appelle distribution régulière associée à u.

Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

On définira une convergence des suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 1.5 *Soit $\{T_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une suite des éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $T_m \to T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour $m \to +\infty$ si*

$$\langle T_m, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad \textit{pour } m \to +\infty, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dérivation des distributions

Définition 1.6 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On appelle dérivée à l'ordre α de T la distribution sur Ω notée $D^\alpha T$ définie par :*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.1}$$

On admet que l'égalité (1.1) définit bien une distribution sur Ω.

Remarque 1.7 *On peut dériver toute distribution et à n'importe quel ordre, le résultat étant encore une distribution. Ceci, contrairement à ce qui se passe pour les fonctions.*

Cas particulier : Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ on a

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Espaces de Sobolev

Définition 1.8 *On pose*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \ \ et \ \forall k \in \{1, 2, \cdots, n\} \ \ tel\ que \ \ \frac{\partial}{\partial x_k} u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

La dérivée $\frac{\partial}{\partial x_k}$ est comprise au sens des distributions.

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

La norme correspondante sera notée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 1.9 *Muni du produit scalaire précédemment défini, l'espace $H^1(\Omega)$ admet une structure d'espace de Hilbert.*

On a aussi l'espace de Sobolev plus général suivant :

Définition 1.10 *Soit $m \in \mathbb{N}^*$, On pose*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \ , D^\alpha(T_u) \in L^2(\Omega) \quad pour\ tout\ \alpha \in \mathbb{N}^n \ avec \ |\alpha| \leq m \ \right\}.$$

Remarque 1.11 *1. Par convention nous posons $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.*

2. L'ensemble $H^m(\Omega)$ est un sous-ensemble de $L^2(\Omega)$.

On a le résultat suivant :

Proposition 1.12 *L'ensemble $H^m(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et on a $H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}$.*

Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.13 *$H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ainsi on pose*

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \ \ dans \ \ H^1(\Omega).$$

Espace $H^{-1}(\Omega)$

Définition 1.14 *On note par* $H^{-1}(\Omega)$ *le dual de* $H_0^1(\Omega)$ *qui est un espace de Hilbert pour la norme duale. Comme* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $H_0^1(\Omega)$*, les fonctions de* $H^{-1}(\Omega)$ *peuvent être identifiées à des distributions. L'espace* $H^{-1}(\Omega)$ *est alors un espace de distributions.*

Théorème 1.15 (Inegualite de Poincaré) *On suppose que* Ω *est borné dans une direction. Alors, il existe une constante* C *(constante de Poincaré) ne dépendant que de* Ω *telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

alors

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

1.1.4 Espaces $L^p(0,T;H)$, $1 \leq p < +\infty$

Pour un espace de Hilbert H, l'espace $L^p(0,T;H)$ est défini comme l'ensemble des (classes d'équivalence) fonctions mesurable u de $]0,T[$ dans H telles que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(0,T;H)} &= \left(\int_0^T \|u\|_H^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \\
\text{pour } 1 &\leq p < +\infty. \\
\text{et } \|u\|_{L^\infty(0,T;H)} &= \sup_{t\in[0,T]} ess\left(\|u\|_H\right), \\
\text{pour } p &= +\infty.
\end{aligned}$$

Remarque 1.16 *Si* $p = 2$, $L^2(0,T;H)$ *est espace de Hilbert, et l'application*

$$(u,v) \to (u,v)_{L^2(]0,T[;H)} := \left(\int_0^T (u,v)_H \, dt\right),$$

définit un produit scalaire sur $L^2(0,T;H)$.

Lemme 1.17 *Soit* u *une fonction de* $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *telle que* u_t *soit dans* $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. *Alors* u *s'identifie à une fonction de* $\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$.

1.2 Convergence Faible

Séparabilité

On rappelle qu'un ensemble T est dit dénombrable s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur T.

Définition 1.18 *Un espace métrique E est dit séparable s'il existe un ensemble $D \subseteq E$ dénombrable et dense dans E, i.e. $\overline{D} = E$.*

Exemple 1.19 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est séparable.*

Corollaire 1.20 ***Proposition 1.21*** *Tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable.*

Le dual d'un espace vectoriel normé (Dualité)

Si E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$, le dual de E est l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ des formes linéaires continues sur $\mathbb{k}$. On le note E^*, et on munit E^* de la norme subordonnée à la norme de E. On notera souvent x^*, y^*, z^* les éléments de E^*, et $\langle x^*, x\rangle$ l'action d'une forme linéaire $x^* \in E^*$ sur un vecteur $x \in E$.

Théorème 1.22 *Si E est un espace vectoriel normé, alors E^* est un espace de Banach.*

Convergence faible

Définition 1.23 *Soit E un espace vectoriel normé.*

1. *On dit qu'une suite $(x_n) \subseteq E$ converge faiblement vers un point $x \in E$ si $\langle x^*, x_n\rangle \to \langle x^*, x\rangle$ pour tout $x^* \in E^*$,et l'on note $x_n \rightharpoonup x$.*
2. *On dit qu'une suite $(x_n^*) \subseteq E^*$ converge faiblement étoile vers un point $x^* \in E^*$ si $\langle x_n^*, x\rangle \to \langle x^*, x\rangle$ pour tout $x \in E$, c.-à-d. $\forall x \in E \quad \langle x_n^*, x\rangle \to \langle x^*, x\rangle$,*

et on note alors $x_n \rightharpoonup^* x$.

Remarque 1.24
1. *La convergence en norme entraîne la convergence faible ou faible étoile. La réciproque est fausse en général .*
2. *On a unicité de la limite : une suite ne peut pas converger faiblement ou faiblement étoile vers deux points différents.*
3. *Sur E^*, la convergence faible entraîne la convergence faible étoile. La réciproque est fausse.*

Proposition 1.25 *Toute suite faiblement convergente $(x_n) \subseteq E$ est bornée. Si E est un espace de Banach, alors toute suite faiblement étoile convergente $(x_n^*) \subseteq E^*$ est bornée.*

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 1.26 (Banach-Alaoglu) *Si l'espace vectoriel normé E est séparable, alors toute suite bornée $(x_n^*) \subseteq E^*$ possède une sous suite faiblement étoile convergente.*

Corollaire 1.27 *Si H est un espace de Hilbert, alors toute suite $(x_n) \subseteq H$ possède une sous-suite faiblement convergente.*

1.3 Quelques Inégalités Utiles

Théorème 1.28 (***Formule de la moyenne***) *:soient u et v deux fonction intégrables sur $[a, b]$ telles que :*

1. *u continue sur $[a, b]$*
2. *v positive sur $[a, b]$*

alors, il existe c élément de $[a, b]$ tel que :

$$\int_a^b u(t)\, v(t)\, dt = u(c) \int_a^b v(t)\, dt.$$

Remarque 1.29 *avec $v(x) = 1$ pour tout x de $[a, b]$. il existe c élément de $[a, b]$ tel que :*

$$u(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)\, dt.$$

Cette valeur est appelée valeur moyenne de u sur $[a, b]$.

Lemme 1.30 *Soit $a, b \geq 0$, $p, q \in [0, +\infty]$ deux exposants conjugués $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Théorème 1.31 *Soit p et q deux exposants conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), $1 \leq p \leq +\infty$, et soient u et v deux fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors on a les inégalités suivantes :*

1. *L'inégalités de Hölder*
$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$
2. *L'inégalité de Cauchy-Schwarz. le cas $p = q = 2$ dans l'inégalité de Hölder*
$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lemme 1.32 ***(de Gronwall) :****Supposons qu'une fonction ψ continue de $I = [0, T]$ sur $\mathbb{R}^+$, vérifie*

$$\psi(x) \leq C_1(x) + \int_0^t C_2(s)\, \psi(s)\, ds,$$

pour tout $t \in I$, où C_2 est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^+$ et C_1 une fonction continue croissante de I dans $\mathbb{R}$. Alors, on a l'inégalité

$$\psi(x) \leq C_1(x) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t C_2(r)\,dr\right) C_1(s)\,C_2(s)\,ds,$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Remarque 1.33 *Si C_1 est une constante, l'inégalité de Gronwall peut se simplifier et on l'écrit :*

$$\psi(x) \leq C_1 \exp\left(\int_0^t C_2(s)\,ds\right).$$

1.4 Equation des Ondes Dans un Domaine Cylindrique

On considère à présent l'équation des ondes posée sur le domaine d'espace $\Omega = [0, 1]$:

$$u_{tt} - a(t)\,u_{xx} = f \ , \ t \in [0, T] \quad , \ x \in \left]0, 1\right[\ , \ a(t) > 0, \tag{1.2}$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad , \ x \in \left]0, 1\right[, \tag{1.3}$$

et les conditions de bord homogène de Dirichlet

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad , \ t > 0. \tag{1.4}$$

Théorème 1.34 *Sous les données initiales suivantes :*

$$u_0 \in H_0^1(\Omega), \ \ f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \ \ u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

alors il existe solution faible de problème (1.2) (1.2) (1.4), satisfait les conditions suivant :

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \ \ u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

et on obtient l'estimation

$$\begin{aligned} &\sup_{0<t\leq T} ess \, \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2([0,T);H^2(\Omega))} + \left\|u'\right\|_{L^2([0,T);L^2(\Omega))} \\ \leq \ & C\left(\|f\|_{L^2([0,T);L^2(\Omega))} + \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

Si les donnée sont plus régulières, alors on obtient un solution plus régulière.

Théorème 1.35 *Sous les données initiales suivantes :*

$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \qquad f, f' \in L^2([0,T); L^2(\Omega)),$$

on obtient

$$u \in L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),\ u' \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),$$
$$u'' \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

et on a l'estimation

$$\sup_{0<t\leq T} ess \left(\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} + \left\|u'\right\|_{L^2(\Omega)} \right) + \left\|u'\right\|_{L^2([0,T);H_0^1(\Omega))} + \left\|u''\right\|_{L^2([0,T);H^{-1}(\Omega))}$$
$$\leq C \left(\|f\|_{H^1([0,T);L^2(\Omega))} + \|u_0\|_{H^2(\Omega)} \right),$$

où C *ne dépendant que de* Ω.

Pour la démonstration voire C. Evans [2].

Chapitre 2

Equation des Ondes Dans un Domaine Non-Cylindrique : Solution Faibles Locales

Dans ce chapitre on considère une équation des ondes dans un intervalle à limites variables.

2.1 Position du Problème

Soit $\widehat{Q}$ un domaine non-cylindrique i.e. varie avec le temps

$$\widehat{Q} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2; x \in \Omega_t, t > 0\right\}.$$

avec frontière

$$\widehat{\Sigma} = \bigcup_{0<t<T} \partial\Omega_t \times \{t\}.$$

où $\Omega_t = [\alpha(t), \beta(t)]$ et $\partial\Omega_t = \{\alpha(t), \beta(t)\}$. La longueur du domaine Ω_t est

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) > 0.$$

Soit $\widetilde{L}$ un Opérateur défini par :

$$\widetilde{L}u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\,(t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.1}$$

avec $a\,(t) > 0$. On considère le problème linéaire :

$$\begin{cases} \widetilde{L}u(x,t) = f(x,t), & \forall\,(x,t) \in \widehat{Q}, \\ u\,(x,t) = 0, & \forall\,(x,t) \in \widehat{\Sigma}, \\ u\,(x,0) = u_0\,(x)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = u_1\,(x) & \alpha(0) \leq x \leq \beta(0). \end{cases} \tag{I}$$

2.2 Changement de Variable

Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution de problème (I). On considérant un problème équivalent défini dans un domaine fixe, Nous utilisons le changement de variable suivant :

$$(x,t) \in \widehat{Q} \mapsto (y,t) \in Q, \quad y = \frac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)}, \tag{2.2}$$

où

$$Q = \Omega \times (0,T) \text{ avec } \Omega = [0,1].$$

soit $u(x,t) = v(y,t)$, $f(x,t) = g(y,t)$ et L un opérateur défini sur Q tel que

$$Lv(x,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_1(y,t)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a_2(y,t)\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + a_3(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{2.3}$$

où a_1, a_2 et a_3 sont des coefficients à déterminer.

Nous obtenons un problème dans un domaine cylindrique $Q = \Omega \times (0,T)$ suivant :

$$\begin{cases} Lv(y,t) = g(y,t) & \forall (y,t) \in \Omega \times (0,T), \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & 0 < t < T, \\ v(y,0) = v_0(y), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(y,0) = v_1(y), & 0 \leq y \leq 1), \end{cases} \tag{II}$$

où

$$v_0(y) = u_0(x) = u_0(\gamma(0)y + \alpha(0))$$

et

$$\begin{aligned} v_1(y) &= u_1(\gamma(0)y + \alpha(0)) - \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y}(y,0) \\ &= u_1(\gamma(0)y + \alpha(0)) + (\alpha'(0) + \gamma'(0)y)\frac{\partial u_0}{\partial x}(\gamma(0)y + \alpha(0)). \end{aligned}$$

Les coefficients a_1, a_2 et a_3

On utilisant le changement de variable

$$y = \frac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)} \text{ et } x = \gamma(t)y + \alpha(t),$$

On déduit que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\gamma \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\gamma^2 \partial y^2}.$$

Nous obtenons par la règle de chaînes

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial t}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}(y,t) + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y}(y,t).$$

Notons que $\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}$, il vient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial v}{\partial t}(y,t)-\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\frac{\partial v}{\partial y}(y,t).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial y}\\
&\quad+\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\right)\frac{\partial v}{\partial y}-2\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial y}\\
&\quad+\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},
\end{aligned}$$

et en simplifiant, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\left(\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-2\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial y}\\
&\quad-\frac{1}{\gamma(t)}\left(\alpha''(t)+\gamma''y+\gamma'(t)\left(2\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\right)\right)\frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned}$$

En fin l'opérateur de $\widetilde{L}$, définie par (2.1), donne après changement de variables

$$\begin{aligned}
Lv(y,t) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(y,t)+\left[\left(\frac{\alpha'+\gamma'(t)y}{\gamma(t)}\right)^2-\frac{1}{\gamma(t)^2}a(t)\right]\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y,t)\\
&\quad-2\frac{\alpha'(t)+\gamma'(t)\,y}{\gamma(t)}\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial y}(y,t)\\
&\quad-\frac{1}{\gamma(t)}\left(\alpha''(t)+\gamma''(t)y+\gamma'(t)\left(-2\frac{\alpha'(t)+\gamma'(t)\,y}{\gamma(t)}\right)\right)\frac{\partial v}{\partial y}(y,t).
\end{aligned}$$

Dans la suite on note

$$a_1 = a_1(y,t)=\frac{1}{4}a_2^2-\frac{1}{\gamma(t)^2}a(t), \tag{2.4}$$

$$a_2 = a_2(y,t)=-2\frac{\alpha'(t)+\gamma'(t)\,y}{\gamma(t)}, \tag{2.5}$$

$$a_3 = a_3(y,t)=-\frac{1}{\gamma(t)}\left(\alpha''(t)+\gamma''(t)\,y+\gamma'(t)\,a_2\right). \tag{2.6}$$

Remarque 2.1 *On peut vérifier que l'équation (2.3)est hyperbolique sur Q. En effet*

$$\begin{aligned}
a_2^2(y,t)-4a_1(y,t) &= a_2^2(y,t)-4\left(\frac{1}{4}a_2^2(y,t)-\frac{1}{\gamma^2(t)}a(t)\right)\\
&= \frac{4}{\gamma^2(t)}a(t)>0.
\end{aligned}$$

On suppose que

$$\alpha, \beta \in \mathcal{C}^2([0,T)\,;\mathbb{R}). \tag{H1}$$

$$a_1(y,t) < 0. \tag{H2}$$

Proposition 2.2 *L'hypothèse* (**H2**) *implique que*

$$a(t) - \max_{0\leq t\leq T}\left\{\left|\alpha'(t)\right|^2, \left|\beta'(t)\right|^2\right\} > 0.$$

Démonstration. D'après l'hypothèses (**H2**) et (2.4) on a

$$\frac{1}{4}a_2^2 - \frac{1}{\gamma(t)^2}a(t) < 0,$$

et de (2.5) on a

$$\frac{1}{4}\left(-2\frac{\alpha'(t)+\gamma'(t)\,y}{\gamma(t)}\right)^2 - \frac{1}{\gamma(t)^2}a(t) < 0.$$

En multipliant par $-\gamma(t)^2$ on obtient

$$a(t) - \left(\alpha'(t)+\gamma'(t)\,y\right)^2 > 0.$$

Ce qui implique

$$a(t) - \max_{0\leq t\leq T}\max_{y\in\Omega}\left|\alpha'(t)+\gamma'(t)\,y\right|^2 > 0,$$

d'où l'inégalité

$$a(t) - \max_{0\leq t\leq T}\left\{\left|\alpha'(t)\right|^2, \left|\beta'(t)\right|^2\right\} > 0.$$

■

2.3 Existence et Unicité Locale du Problème Cylindrique

On va démontrer ici qu'il existe une unique solution du problème (**II**) et nous obtenons le même résultat pour le problème originale (**I**).

Théorème 2.3 (***solution faible***) *sous les hypothèse* (**H1**), (**H2**) *et les données initiales suivant :*

$$v_0 \in H_0^1(\Omega), v_1 \in L^2(\Omega), g \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

il existe $T_0 \in (0,T)$ *et une unique solution faible de problème* (**II**) $v : Q \to \mathbb{R}$, *qui satisfait les conditions suivantes :*

1. $v \in L^{\infty}(0, T_0; H_0^1(\Omega))$.
2. $v' \in L^{\infty}(0, T_0; L^2(\Omega))$.
3. $v'' \in L^{\infty}(0, T_0; H^{-1}(\Omega))$.
4. $\frac{\partial}{\partial t}(v', w) + \left(a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, w\right) + \left(a_2 \frac{\partial v'}{\partial y}, w\right) + \left(a_3 \frac{\partial v}{\partial y}, w\right) = (g, w)\,, \quad \forall w \in H_0^1(0,1)$.
5. $v(0) = v_0, v'(0) = v_1$.

Démonstration.

1. Problème approchée

On considère la base vectorielle $B = \{w_i\}_{i=1}^m$ de l'espace $H_0^1(\Omega)$ et soit V_m le sous-espace engendré par $B = \{w_i\}_{i=1}^m$. D'autre part, écrivons $v_m(t) \in V_m$ dans la base B comme suit :

$$v_m(y,t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i(y)\,,$$

où v_m est solution du système différentiel

$$\begin{cases} (Lv_m, w) = (g, w) & \forall w \in V_m, \\ v_m(0) = v_{0m} \to v_0 & dans \quad H_0^1(\Omega), \\ v'_m(0) = v_{1m} \to v_1 & dans \quad L^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.7}$$

Le problème (2.7) admet au moins une solution locale sur un intervalle de temps $[0, T_m]$. Pour prolonger cette solution sur un intervalle $[0, T]$ indépendante de m, on utilise la méthode des estimations a priori.

2. Estimation a priori

Si l'on prend $w = v'_m$ comme fonction test dans (2.7), on obtient

$$(v'', v'_m) + \left(a_1 \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, v'_m\right) + \left(a_2 \frac{\partial v'_m}{\partial y}, v'_m\right) + \left(a_3 \frac{\partial v_m}{\partial y}, v'_m\right) = (g, v'_m)\,. \tag{2.8}$$

Le premier terme dans (2.8) donne

$$(v'', v'_m) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|v'_m\|^2_{L^2(\Omega)}\,. \tag{2.9}$$

Intégrons deuxième terme dans (2.8) par parties et utilisons la condition aux limites $v'_m(1,t) = v'_m(0,t) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega a_1 \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} v'_m dy &= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}(a_1 v'_m)\frac{\partial v_m}{\partial y} dy + \left[\frac{\partial v_m}{\partial y} a_1 v'_m\right]_0^1 \\ &= -\int_\Omega \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} v'_m + a_1 \frac{\partial v'_m}{\partial y}\right)\frac{\partial v_m}{\partial y} dy \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y} v'_m dy - \int_\Omega a_1 \frac{\partial v'_m}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y} dy \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\int_\Omega a'_1 \left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2 dy - \frac{1}{2}\int_\Omega a'_1 \left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2 dy\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\Omega} a_1 \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} v_m' dy = -\int_{\Omega} \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y} v_m' dy + \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_1' \left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2 dy - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} a_1 \left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2 dy.$$

En appliquant la Théorème de la moyenne (1.28) du calcul intégral pour $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} a_1 \left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2 dy$ alors il existe $\xi \in \Omega$ tel que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} a_1 \left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2 dy = \frac{\partial}{\partial t}\left(a_1(\xi,t)\|v_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)$$

$$\int_{\Omega} a_1 \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} v_m' dy = -\int_{\Omega} \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y} v_m' dy + \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_1' \left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2 dy - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1(\xi,t)\|v_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right). \tag{2.10}$$

Intégrons le troisième terme dans (2.8) par parties et utilisons la condition aux limites $v_m'(1,t) = v_m'(0,t) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} a_2 \frac{\partial v_m'}{\partial y} v_m' dy &= -\int_{\Omega} \frac{\partial a_2}{\partial y}\left(\int_{\Omega}\frac{\partial v_m'}{\partial y} v_m' dy\right) dy + \left[a_2\left(\int_{\Omega}\frac{\partial v_m'}{\partial y} v_m' dy\right)\right]_0^1 \\ &= -\int_{\Omega} \frac{\partial a_2}{\partial y}\left(\int_{\Omega}\frac{\partial v_m'}{\partial y} v_m' dy\right) dy\end{aligned}$$

comme $\frac{\partial a_2}{\partial y}$ est indépendant de y alors

$$\int_{\Omega} a_2 \frac{\partial v_m'}{\partial y} v_m' dy = -\frac{1}{2}\frac{\partial a_2}{\partial y}\int_{\Omega}(v_m')^2 dy. \tag{2.11}$$

On utilisant (2.9), (2.10), (2.11) et (2.8), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|v_m'\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_{\Omega} \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y} v_m' dy + \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_1'\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2 dy - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1(\xi,t)\|v_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial a_2}{\partial y}\int_{\Omega}(v_m')^2 dy + \int_{\Omega} a_3 \frac{\partial v_m}{\partial y} v_m' dy = \int_{\Omega} g v_m' dy.$$

En multipliant par 2 et on notant $E(t) = \|v_m'\|^2_{L^2(\Omega)} - a_1(\xi,t)\|v_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}E(t) &= 2\int_{\Omega} \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y} v_m' dy - \int_{\Omega} a_1'\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2 dy \\ &\quad + \frac{\partial a_2}{\partial y}\int_{\Omega}(v_m')^2 dy - 2\int_{\Omega} a_3\frac{\partial v_m}{\partial y} v_m' dy + 2\int_{\Omega} g v_m' dy,\end{aligned}$$

En intégrant sur $(0,t)$, où $t \in [0, T_m)$ on obtient

$$\begin{aligned}E(t) &= E(0) + \int_0^t \left(2\int_{\Omega} \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y} v_m' dy - \int_{\Omega} a_1'\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2 dy\right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{\partial a_2}{\partial y}\int_{\Omega}(v_m')^2 dy - 2\int_{\Omega} a_3\frac{\partial v_m}{\partial y} v_m' dy + 2\int_{\Omega} g v_m' dy\right) ds,\end{aligned} \tag{2.12}$$

pour obtenir une majoration de $E(t)$ on utilise de les majorations suivant :

1. D'après (2.4) et (2.5) on a $\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{2}{\gamma^2}\gamma'(\alpha' + \gamma' y)$ et d'après l'hypothèse (**H1**) on a α, $\beta \in \mathcal{C}^2([0,T);\mathbb{R})$ alors $\frac{\partial a_1}{\partial y}$ est une fonction continue sur Q ce qui implique

$$\left|\frac{\partial a_1}{\partial y}\right| = \frac{2}{\gamma^2}|\gamma'|\,|\alpha' + \gamma' y| \leq c_1.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}v'_m dy &\leq \left|2\int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}v'_m dy\right| \\ &\leq 2\int_\Omega \left|\frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}v'_m\right| dy \leq 2c_1\int_\Omega \left|\frac{\partial v_m}{\partial y}v'_m\right| dy. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.31), et Young (1.30), on a

$$\begin{aligned} 2c_1\int_\Omega \left|\frac{\partial v_m}{\partial y}v'_m\right| dy &\leq 2c_1\left\|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)}\|v'_m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_1\left(\|v_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v'_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

donc

$$2\int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}v'_m dy \leq c_1\left(\|v_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v'_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.13}$$

2. D'après (2.4) et (2.5) on a

$$a'_1 = \left(\frac{-2(\alpha' + \gamma' y)}{\gamma^3}\right)(\gamma'(\alpha' + \gamma' y) - \gamma(\alpha' + \gamma' y))$$

et d'après l'hypothèse (**H1**) on a $\alpha, \beta \in C^2([0,T);R)$, alors a'_1 est une fonction continue sur Q. Ce qui implique

$$|a'_1| = \left|\frac{-2(\alpha' + \gamma' y)}{\gamma^3}\right| |\gamma'(\alpha' + \gamma' y) - \gamma(\alpha' + \gamma' y)| \leq c_2.$$

d'autre part

$$\begin{aligned} -\int_\Omega a'_1\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2 dy &\leq \left|-\int_\Omega a'_1\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2 dy\right| \\ &\leq \int_\Omega \left|a'_1\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2\right| dy \leq c_2\int_\Omega \left|\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2\right| dy, \end{aligned}$$

donc

$$-\int_\Omega a'_1\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)^2 dy \leq c_2\|v_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{2.14}$$

3. D'après (2.5) on a $\frac{\partial a_2}{\partial y} = -\frac{2\gamma'}{\gamma}$ et d'après l'hypothèse (**H1**) on a $\alpha, \beta \in C^2([0,T);R)$ alors $\frac{\partial a_2}{\partial y}$ est une fonction continue sur Q. Ce qui implique $\left|\frac{\partial a_2}{\partial y}\right| = \left|\frac{2\gamma'}{\gamma}\right| \leq c_3$. D'autre part

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial a_2}{\partial y}\left(v_m'\right)^2 dy &\leq \left|\int_\Omega \frac{\partial a_2}{\partial y}\left(v_m'\right)^2 dy\right| \\ &\leq \int_\Omega \left|\frac{\partial a_2}{\partial y}\left(v_m'\right)^2\right| dy \leq c_3 \int_\Omega \left(v_m'\right)^2 dy \leq c_3 \left\|v_m'\right\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

donc

$$\int_\Omega \frac{\partial a_2}{\partial y}\left(v_m'\right)^2 dy \leq c_3 \left\|v_m'\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.15}$$

4. D'après (2.6) on a

$$a_3 = -\frac{1}{\gamma(t)}\left(\alpha''(t) + \gamma''(t)y + \gamma'(t)a_2\right)$$

et d'après l'hypothèse (**H1**) on a $\alpha, \beta \in C^2([0,T);R)$ alors a_3 est une fonction continue sur Q. Ce qui implique $|a_3| \leq c_4$. D'autre part

$$\begin{aligned}-2\int_\Omega a_3 \frac{\partial v_m}{\partial y} v_m' dy &\leq \left|-2\int_\Omega a_3 \frac{\partial v_m}{\partial y} v_m' dy\right| \\ &\leq 2\int_\Omega \left|a_3 \frac{\partial v_m}{\partial y} v_m'\right| dy \leq 2c_4 \int_\Omega \left|\frac{\partial v_m}{\partial y} v_m'\right| dy,\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.31), et Young (1.30), on a

$$-2\int_\Omega a_3 \frac{\partial v_m}{\partial y} v_m' dy \leq c_4\left(\left\|v_m(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left\|v_m'\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.16}$$

5. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.31), et Young (1.30), on a

$$2\int_\Omega g v_m' dy \leq \|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|v_m'\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.17}$$

D'après (2.12) et les inégalités (2.13) , (2.14) , (2.15) , (2.16) et (2.17), nous pouvons majorer $E(t)$ par

$$E(t) \leq E(0) + \int_0^t \left((c_1 + c_2 + c_4)\left\|v_m(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + (1 + c_1 + c_3 + c_4)\left\|v_m'\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\Omega)}\right) ds,$$

pour $t < T_m < T$ et on obtient

$$E(t) \leq E(0) + \int_0^T \|g\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \hat{c}\int_0^T \left(\left\|v_m(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left\|v_m'\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) ds$$

où $\widehat{c} = \max\left\{(c_1 + c_2 + c_4), (1 + c_1 + c_3 + c_4)\right\}$.

Reste a majoré $E(0) = \left\|v_m'(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} - a_1(\xi, 0)\left\|v_m(0)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}$.

D'après (2.7) on a

$$v_m(0) = v_{0m} \to v_0 \;\; et \;\; v_m'(0) = v_{1m} \to v_1,$$

alors $v_m(0)$, $v'_m(0)$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ respectivement, donc $E(0)$ est borné, et comme $g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ alors

$$E(0) + \int_0^T \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds \leq c.$$

On déduit que

$$\|v'_m\|_{L^2(\Omega)}^2 - a_1(\xi,t)\|v_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq c + \widehat{c}\int_0^T \left(\|v'_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right) ds.$$

On utilisant (**H2**) on a $a_1 < 0$, alors $-a_1 > 0$ en notant $k = \min\{1, -a_1(\xi,t)\}$
on obtient, après division par k,

$$\begin{aligned}
\|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{k}\left(\|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - a_1(\xi,t)\|v_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right) \\
&\leq \frac{c}{k} + \frac{\widehat{c}}{k}\int_0^T \left(\|v'_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right) ds.
\end{aligned}$$

On pose $K_1 = \frac{c}{k}$ et $K_2 = \frac{\widehat{c}}{k}$ on obtient

$$\|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq K_1 + K_2\int_0^T \left(\|v'_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right) ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall (1.32) nous en déduisons

$$\|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq K_1 \exp(K_2 T),$$

On pose $C = K_1 \exp(K_2 T)$ alors

$$\|v'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C,$$

ce qui implique

$$\|v'_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \qquad \text{et} \qquad \|v_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C. \tag{2.18}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
\|v'_m\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))} &= supess\left(\|v'_m\|_{L^2(\Omega)}\right) < +\infty \,, \\
\|v_m\|_{L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))} &= supess\left(\|v_m\|_{H_0^1(\Omega)}\right) < +\infty.
\end{aligned}$$

est équivalente à

$$\begin{cases} v_m \quad \text{est bornée dans} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ v'_m \quad \text{est bornée dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{cases}$$

D'après le théorème (1.26) on peut extraire deux sous suites telle que

$$\begin{cases} v_\varepsilon \rightharpoonup^* v \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ v'_\varepsilon \rightharpoonup^* v' \quad \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{2.19}$$

3. Passage à limite

D'après (2.7) on a $(Lv_m, w) = (g, w)$ pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$, i.e.

$$(v_\varepsilon'', w) + \left(a_1 \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial y^2}, w\right) + \left(a_2 \frac{\partial v_\varepsilon'}{\partial y}, w\right) + \left(a_3 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w\right) = (g, w)\,. \tag{2.20}$$

On a : $(v_\varepsilon'', w) = \frac{\partial}{\partial t}(v_\varepsilon', w)$ au sens des distributions, et

$$\begin{aligned} \left(a_1 \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial y^2}, w\right) &= \int_\Omega a_1 \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial y^2} w dy \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}(a_1 w) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} dy + \left[a_1 w \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}\right]_0^1. \end{aligned}$$

Le "crochet" est nul puisque $w \in H_0^1(\Omega)$, on a donc

$$\begin{aligned} \left(a_1 \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial y^2}, w\right) &= -\int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} w dy - \int_\Omega a_1 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy \\ &= -\left(\frac{\partial a_1}{\partial y} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w\right) - \left(a_1 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(a_2 \frac{\partial v_\varepsilon'}{\partial y}, w\right) &= \int_\Omega a_2 \frac{\partial v_\varepsilon'}{\partial y} w dy \\ &= \int_\Omega a_2 \frac{\partial v_\varepsilon'}{\partial y} w dy + \left(\int_\Omega a_2' \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} w dy - \int_\Omega a_2' \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} w dy\right) \\ &= \int_\Omega \left(a_2 \frac{\partial v_\varepsilon'}{\partial y} + a_2' \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}\right) w dy - \int_\Omega a_2' \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} w dy \\ &= \int_\Omega \left(a_2 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}\right)' w dy - \int_\Omega a_2' \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} w dy \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(a_2 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w\right) - \left(a_2' \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w\right). \end{aligned}$$

Donc pour chaque $w \in H_0^1(\Omega)$ au sens des distributions dans $[0, T]$ on a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(v_\varepsilon', w) - \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w\right) - \left(a_1 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial t}\left(a_2 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w\right) - \left(a_2' \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w\right) + \left(a_3 \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w\right) = (g, w)\,. \end{aligned}$$

D'après (2.19) et par définition de convergence faible étoile (1.23) on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_\varepsilon', w) \to \frac{\partial}{\partial t}(v', w)\,, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega) \tag{2.21}$$

et

$$\left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w\right) \to \left(\frac{\partial v}{\partial y}, w\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}\right) \to \left(\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

et d'après l'hypothèse (**H1**) on a $\frac{\partial a_1}{\partial y}, a_1, a_2'$ et a_3 sont des fonctions continues alors :

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w\right) \rightarrow \left(\frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}, w\right), \tag{2.22}$$

$$\left(a_1\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w\right) \rightarrow \left(a_1\frac{\partial v}{\partial y}, w\right), \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a_2'\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w\right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(a_2'\frac{\partial v}{\partial y}, w\right), \tag{2.24}$$

$$\left(a_3\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}, w\right) \rightarrow \left(a_3\frac{\partial v}{\partial y}, w\right). \tag{2.25}$$

Alors pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$ au sens des distributions dans $[0, T]$, lorsque ε tend vers $+\infty$ il existe une solution satisfait la formulation faible du théorème (2.3).

4. Unicité de la solution

Par l'estimation (2.19) de théorème (2.3) le produit de dualité $\langle v''(t), v'(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)}$ n'a pas de sens. Pour éviter ce problème on utilise la méthode de Ladyzhenskaya [4].

Supposons qu'il existe deux solution $v, \hat{v}$ du Problème (**II**), alors v et $\hat{v}$ satisfait

$$\begin{cases} v'' + a_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a_2\frac{\partial v'}{\partial y} + a_3\frac{\partial v}{\partial y} = g, \\ v(0) = v_0(y) \ , \quad v'(0) = v_1(y). \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{v}'' + a_1\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + a_2\frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} + a_3\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = g, \\ \hat{v}(0) = v_0(y) \ , \quad \hat{v}'(0) = v_1(y). \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} (v'' - \hat{v}'') + a_1\frac{\partial^2(v-\hat{v})}{\partial y^2} + a_2\frac{\partial(v'-\hat{v}')}{\partial y} + a_3\frac{\partial(v-\hat{v})}{\partial y} = 0, \\ (v(0) - \hat{v}(0)) = 0 \ , \quad (v'(0) - \hat{v}'(0)) = 0. \end{cases}$$

On pose $w = (v - \hat{v})$ on obtient

$$\begin{cases} w'' + a_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_2\frac{\partial w'}{\partial y} + a_3\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ w(0) = w'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

On considère ici une fonction ψ définie par

$$\psi(t) = \begin{cases} -\int_t^s w(r)\,dr & \text{dans } 0 < t < s \\ 0, & \text{dans } s \leq t \leq T \end{cases}$$

où $\psi \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$. Soit $w_1(t) = \int_0^t w(r)\,dr$.

En appliquant la relation de Chasles sur ψ on obtient

$$\begin{aligned} \psi(t) &= -\int_t^s w(r)\,dr \\ &= -\left(\int_t^0 w(r)\,dr + \int_0^s w(r)\,dr\right) \\ &= \int_0^t w(r)\,dr - \int_0^s w(r)\,dr = w_1(t) - w_1(s). \end{aligned}$$

On multiplie (2.26) par ψ (fonction test) et intégrons sur Ω

$$\int_\Omega w''\psi dy + \int_\Omega a_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\psi dy + \int_\Omega a_2\frac{\partial w'}{\partial y}\psi dy + \int_\Omega a_3\frac{\partial w}{\partial y}\psi dy = 0. \tag{2.27}$$

Remarque que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(w',\psi) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega w'\psi dy \\
&= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(w'\psi)\,dy \\
&= \int_\Omega (w''\psi + w'w)\,dy = (w'',\psi) + (w',w)
\end{aligned}$$

de plus $\psi'(t) = w(t)$ et $\psi(s) = -\int_s^s w(r)\,dr = 0$. Donc le premier terme dans (2.27) donné

$$\int_\Omega w''\psi dy = \frac{\partial}{\partial t}(w',\psi) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.28}$$

Intégrons deuxième terme dans (2.27) par parties et utilisant $\psi' = w$, on a

$$\int_\Omega a_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\psi dy = -\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(a_1\psi)\,dy + \left[\frac{\partial w}{\partial y}a_1\psi\right]_0^1$$

le "crochet" est nul puisque $\psi \in H_0^1(\Omega)$, on a donc

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(a_1\psi)\,dy &= -\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial a_1}{\partial y}\psi + a_1\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)dy \\
&= -\int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y}\psi\frac{\partial \psi'}{\partial y} - \int_\Omega a_1\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}dy \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\int_\Omega a_1'\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 dy - \frac{1}{2}\int_\Omega a_1'\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 dy\right) \\
&= -\int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y}\psi\frac{\partial \psi'}{\partial y} - \left(\int_\Omega a_1\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\int_\Omega a_1'\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 dy\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega a_1'\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 dy \\
&= -\int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y}\psi\frac{\partial \psi'}{\partial y} - \frac{1}{2}\int_\Omega \left(a_1\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right)' dy + \frac{1}{2}\int_\Omega a_1'\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 dy
\end{aligned}$$

En appliquant la Théorème de la moyenne alors il existe $\xi \in \Omega$ tel que

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y}\psi\frac{\partial \psi'}{\partial y} - \frac{1}{2}\int_\Omega \left(a_1(y,t)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right)' dy + \frac{1}{2}\int_\Omega a_1'(y,t)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 dy \\
= &-\int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y}\psi\frac{\partial \psi'}{\partial y} - \frac{1}{2}\left(a_1(\xi,t)\int_\Omega \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 dy\right)' + \frac{1}{2}a_1'(\xi,t)\int_\Omega \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 dy \\
= &\int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y}\psi\frac{\partial \psi'}{\partial y}dy - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1(\xi,t)\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) + \frac{1}{2}a_1'(\xi,t)\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Omega a_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\psi dy = \int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y}\psi\frac{\partial \psi'}{\partial y}dy - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1(\xi,t)\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) + \frac{1}{2}a_1'(\xi,t)\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)} \tag{2.29}$$

le troisième terme dans (2.27) donne

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} a_2\psi \frac{\partial w'}{\partial y} dy &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(a_2\psi \frac{\partial w}{\partial y}\right) dy - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial y}\left(a_2'\psi + a_2\psi'\right) dy \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(a_2\psi \frac{\partial w}{\partial y}\right) dy + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2'\psi + a_2\psi'\right) w dy - \left[\left(a_2'\psi + a_2\psi'\right) w\right]_0^1 \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(a_2\psi \frac{\partial w}{\partial y}\right) dy + \int_{\Omega}\left(\frac{\partial a_2'}{\partial y}\psi + a_2' \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) w dy + \int_{\Omega} \frac{\partial a_2}{\partial y}\psi' w dy \\
&\quad + \int_{\Omega}\left(a_2 w\right) \frac{\partial \psi'}{\partial y} dy \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(a_2 \frac{\partial w}{\partial y}\psi\right) dy + \int_{\Omega} \frac{\partial a_2'}{\partial y} w\psi dy + \int_{\Omega} a_2' \frac{\partial \psi}{\partial y} w dy + \int_{\Omega} \frac{\partial a_2}{\partial y}\psi' w dy \\
&\quad - \int_{\Omega} \frac{\partial a_2}{\partial y}\psi' w dy - \int_{\Omega} a_2 \frac{\partial w}{\partial y}\psi' dy + \left[a_2 w\psi'\right]_0^1
\end{aligned}$$

Comme $\psi' = w$ on obtient

$$\int_{\Omega} a_2 \frac{\partial w'}{\partial y}\psi dy = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(a_2 \frac{\partial w}{\partial y}\psi\right) dy + \int_{\Omega} \frac{\partial a_2'}{\partial y} w\psi dy + \int_{\Omega} a_2' \frac{\partial \psi}{\partial y} w dy + \frac{1}{2}\frac{\partial a_2}{\partial y}\int_{\Omega} w^2 dy. \quad (2.30)$$

Intégrons quatrième terme dans (2.27) par parties

$$\int_{\Omega} a_3 \frac{\partial w}{\partial y}\psi dy = -\frac{\partial a_3}{\partial y}\int_{\Omega} w\psi dy - \int_{\Omega} a_3 \frac{\partial \psi}{\partial y} w dy. \quad (2.31)$$

En remplaçant (2.28) ,(2.29), (2.30) et (2.31) dans (2.27) et intégrer de 0 à s on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^s \Bigg[& \frac{\partial}{\partial t}\left(w', \psi\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|w(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \frac{\partial a_1}{\partial y}\psi \frac{\partial \psi\prime}{\partial y} dy - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1(\xi, t)\left\|\psi\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right) \\
& + \frac{1}{2} a_1'(\xi, t)\left\|\psi\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(a_2 \frac{\partial w}{\partial y}\psi\right) dy + \int_{\Omega} \frac{\partial a_2'}{\partial y} w\psi dy \\
& + \int_{\Omega} a_2' \frac{\partial \psi}{\partial y} w dy + \frac{1}{2}\frac{\partial a_2}{\partial y}\int_{\Omega} w^2 dy + \frac{\partial a_3}{\partial y}\int_{\Omega} w\psi dy + \int_{\Omega} a_3 \frac{\partial \psi}{\partial y} w dy \Bigg] dt = 0 \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

on a $w(0) = w'(0) = \psi(s) = 0$ donc

$$\begin{aligned}
\int_0^s \frac{\partial}{\partial t}\left(w', \psi\right) dt &= \left(w'(s), \psi(s)\right) - \left(w'(0), \psi(0)\right) = 0, \\
\frac{1}{2}\int_0^s \frac{\partial}{\partial t}\left\|w(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &= \frac{1}{2}\left(\left\|w(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left\|w(0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right) = \frac{1}{2}\left\|w(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \\
\int_0^s \frac{\partial}{\partial t}\left(a_2 \frac{\partial w}{\partial y}, \psi\right) &= \left(a_2(y, s)\frac{\partial w(s)}{\partial y}, \psi(s)\right) - \left(a_2(y, 0)\frac{\partial w(0)}{\partial y}, \psi(0)\right) = 0.
\end{aligned}$$

et en appliquant le Théorème de la moyenne pour $\int_0^s a_1'(\xi, t)\left\|\psi\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt$ alors il existe $\eta \in [0, s]$ tel que :

$$\int_0^s a_1'(\xi, t)\left\|\psi\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt = a_1'(\xi, \eta)\int_0^s \left\|\psi(s)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds,$$

donc (2.32) Ce qui implique

$$\begin{aligned}\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} - a_1(\xi,0)\|\psi(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} &= a_1'(\xi,\eta)\int_0^s \|\psi(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}dt + \int_0^s\int_\Omega 2\frac{\partial a_1}{\partial y}\psi\frac{\partial \psi\prime}{\partial y}dydt \\ &+ \int_0^s\left(\frac{\partial a_2}{\partial y}\int_\Omega (w)^2 dy + 2\frac{\partial a_2'}{\partial y}\int_\Omega w\psi dy + \int_\Omega 2a_2'\frac{\partial \psi}{\partial y}wdy\right)dt \\ &+ \int_0^s\left(2\frac{\partial a_3}{\partial y}\int_\Omega w\psi dy + \int_\Omega 2a_3\frac{\partial \psi}{\partial y}wdy\right)dt. \end{aligned} \tag{2.33}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega 2\left(\frac{\partial a_1}{\partial y}\psi\right)\frac{\partial \psi'}{\partial y}dy &= -\int_\Omega 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_1}{\partial y}\psi\right)\psi' dy + \left[\frac{\partial a_1}{\partial y}\psi\psi'\right]_0^1 \\ &= -\int_\Omega 2\frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}\psi\psi' dy - \int_\Omega 2\frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\psi' dy.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (**H1**) on a $\alpha,\beta \in C^2([0,T);R)$ alors $\frac{\partial a_1}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}$, $\frac{\partial a_2}{\partial y}$, $\frac{\partial a_2'}{\partial y}$, a_2', $\frac{\partial a_3}{\partial y}$ et a_3 sont des fonctions continues sur Q ce qui implique $\frac{\partial a_1}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}$, $\frac{\partial a_2}{\partial y}$, $\frac{\partial a_2'}{\partial y}$, a_2', $\frac{\partial a_3}{\partial y}$ et a_3 sont des fonctions bornées. Nous avons les majorations

$$\left|\tfrac{\partial a_1}{\partial y}\right| \le |\sqrt{c_1}| \quad , \quad \left|\tfrac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}\right| \le |\sqrt{c_2}| \quad , \quad \left|\tfrac{\partial a_2}{\partial y}\right| \le c_3 \quad , \quad \left|\tfrac{\partial a_2'}{\partial y}\right| \le |\sqrt{c_4}| \quad ,$$
$$|a_2'| \le |\sqrt{c_5}| \quad , \quad \left|\tfrac{\partial a_3}{\partial y}\right| \le |\sqrt{c_6}| \quad et \quad |a_3| \le |\sqrt{c_7}|\,.$$

où c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5 des constantes positives

D'autre part en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.31) et Young (1.30) , on obtient :

$$\begin{aligned}-\int_\Omega 2\frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}\psi\psi' dy &\le \left|\int_\Omega 2\frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}\psi\psi' dy\right| \\ &\le \int_\Omega |2\sqrt{c_1}\psi\psi'|\,dy \\ &\le \sqrt{2c_1}\sqrt{\theta}\,\|\psi\|_{L^2(\Omega)}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\theta}}\|\psi'\|_{L^2(\Omega)} \le c_1\theta\,\|\psi'\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\theta}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Poincaré (1.15), il existe $c_p \in \mathbb{R}^+$ ne dépendant que de Ω tel que $\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \le c_p\,\|\psi\|_{H^1_0(\Omega)}$, et donc :

$$-\int_\Omega 2\frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2}\psi\psi' dy \le c_1\theta\,\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c_p}{\theta}\|\psi\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,.$$

On procède de la même manière

$$\begin{aligned}-\int_\Omega 2\frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\psi' dy &\le \left|\int_\Omega 2\frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\psi' dy\right| \\ &\le \int_\Omega \left|2\sqrt{c_2}\frac{\partial \psi}{\partial y}\psi'\right| dy \\ &\le \sqrt{2c_2}\sqrt{\theta}\left\|\frac{\partial \psi}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\theta}}\|\psi'\|_{L^2(\Omega)} \le c_2\theta\,\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\theta}\|\psi\|^2_{H^1_0(\Omega)}\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial a_2}{\partial y}(w)^2\,dy &\leq \left|\int_\Omega \frac{\partial a_2}{\partial y}(w)^2\,dy\right| \\
&\leq \int_\Omega \left|\frac{\partial a_2}{\partial y}(w)^2\right| dy \\
&\leq c_3 \int_\Omega (w)^2\,dy \leq c_3 \|w\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
2\int_\Omega \frac{\partial a_2'}{\partial y} w\psi dy &\leq 2\left|\int_\Omega \frac{\partial a_2'}{\partial y} w\psi dy\right| \\
&\leq \int_\Omega |2\sqrt{c_4} w\psi|\,dy \\
&\leq \sqrt{2c_4}\sqrt{\theta}\,\|w\|_{L^2(\Omega)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\theta}}\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(c_4\theta\,\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\theta}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.31). et ensuite l'inégalité de Young (1.31), il viens

$$2\int_\Omega \frac{\partial a_2'}{\partial y} w\psi dy \leq \left(c_4\theta\,\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\theta}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

Par l'inégalité de Poincaré (1.15), il existe $c_p \in \mathbb{R}^+$ ne dépendant que de Ω tel que $\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c_p\,\|\psi\|^2_{H^1_0(\Omega)}$, et donc :

$$2\int_\Omega \frac{\partial a_2'}{\partial y} w\psi dy \leq c_4\theta\,\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c_p}{\theta}\|\psi\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.31) et Young (1.30) , on obtient :

$$\begin{aligned}
2\int_\Omega a_2' w\frac{\partial\psi}{\partial y}dy &\leq 2\left|\int_\Omega a_2' w\frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right| \\
&\leq \int_\Omega \left|2\sqrt{c_5} w\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| dy \\
&\leq \int_0^s \sqrt{2\theta c_5}\left\|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\theta}}\|w\|_{L^2(\Omega)}\,dt \leq \int_0^s c_5\theta\,\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\theta}\|\psi\|^2_{H^1_0(\Omega)}\,dt.
\end{aligned}$$

On procédant de la même manière

$$\begin{aligned}
2\int_\Omega \frac{\partial a_3}{\partial y} w\psi dy &\leq 2\left|\int_\Omega \frac{\partial a_3}{\partial y} w\psi dy\right| \\
&\leq 2\sqrt{c_6}\int_\Omega |w\psi|\,dy \\
&\leq \sqrt{2\theta c_6}\,\|w\|_{L^2(\Omega)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\theta}}\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq c_6\theta\,\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\theta}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Poincaré (1.15), il existe $c_p \in \mathbb{R}^+$ ne dépendant que de Ω tel que

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq c_p \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)},$$

et donc :

$$2\int_\Omega \frac{\partial a_3}{\partial y} w\psi dy \leq c_6\theta \|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c_p}{\theta} \|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

De manière analogue, on a

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega a_3 \frac{\partial \psi}{\partial y} w dy &\leq 2\left|\int_\Omega a_3 \frac{\partial \psi}{\partial y} w dy\right| \\ &\leq 2\sqrt{c_7}\int_\Omega \left|\frac{\partial \psi}{\partial y} w\right| dy \\ &\leq \sqrt{2\theta c_7}\|w\|_{L^2(\Omega)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\theta}} \left\|\frac{\partial \psi}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c_7\theta \|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\theta}\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après (2.33) et les inégalités précédents on a

$$\begin{aligned} \|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} - a_1(\xi,0)\|\psi(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_0^s \Bigg[\left(\frac{1}{\theta}(3+3c_p) + a_1'(\xi,\eta)\right)\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ + (c_3 + \theta(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6+c_7))\|w\|^2_{L^2(\Omega)}\Bigg] dt, \end{aligned}$$

On pose $C = (c_3 + \theta(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6+c_7))$ et $\hat{C} = (3+3c_p)$, il vient

$$\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} - a_1(\xi,0)\|\psi(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_0^s \left[\left(\frac{\hat{C}}{\theta} + a_1'(\xi,\eta)\right)\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C\|w\|^2_{L^2(\Omega)}\right] dt,$$

Mais $\psi(t) = w_1(t) - w_1(s)$, et par conséquent $\psi(0) = -w_1(s)$,

$$\|\psi(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|w_1(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\|\psi(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|w_1(t) - w_1(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq 2\left(\|w_1(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|w_1(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right).$$

Donc on a

$$\begin{aligned} &\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} - \left(a_1(\xi,0) + 2s\left(\frac{\hat{C}}{\theta} + a_1'(\xi,\eta)\right)\right)\|w_1(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ \leq &\int_0^s \left[2\left(\frac{\hat{C}}{\theta} + a_1'(\xi,\eta)\right)\|w_1(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C\|w\|^2_{L^2(\Omega)}\right] dt. \end{aligned}$$

On pose $\delta = -a_1(\xi,0) - 2s\left(\frac{\hat{C}}{\theta} + a_1'(\xi,\eta)\right)$ et $M = \max\left\{\left(\frac{\hat{C}}{\theta} + a_1'(\xi,\eta)\right), C\right\}$, on a

$$\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\|w_1(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq M\int_0^s \left(\|w_1(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|w\|^2_{L^2(\Omega)}\right) dt.$$

Pour obtenir un résultat d'unicité de le problème il faut que $\delta > 0$, On peut donc choisir

$$T_0 = \frac{1}{2}\frac{\min_y |a_1(y,0)|}{\max_{y,t} a_1'(y,t)} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\epsilon}{2T_0\hat{C}}, \tag{2.34}$$

où ϵ nombres positifs est plus petite ,et pour tout $s < T_0$ on obtient

$$\delta > |a_1(\xi,0)| - 2T_0 |a_1'(\xi,\eta)| - \epsilon > 0,$$

En notant $k = \min\{1,\delta\}$ et $K = \frac{M}{k}$ on obtient

$$\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_1(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq K \int_0^{T_0} \left(\|w(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|w_1(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right) dt.$$

Par le lemme de Gronwall (1.32) nous avons pour tout t de $[0,T_0)$

$$\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_1(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

alors $w(t) = 0$ pour tout $t \leq T_0$. ■

2.4 Solution Faible du Problème Non-Cylindrique

Théorème 2.4 *Soit* $\Omega_0 = (\alpha(0), \beta(0))$ *et les données initiales suivantes :*

$$u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \quad , \quad u_1 \in L^2(\Omega_0) \quad , \quad f \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t)).$$

il existe $0 < T_0 < T$ *et une unique solution de problème* (**I**) $u : \hat{Q} \to \mathbb{R}$, *satisfait les conditions suivant :*

1. $u \in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega_t))$.
2. $u' \in L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega_t))$.

Démonstration. si v solution de problème (**II**) ,soit

$$u(x,t) = v(y,t),$$

où $x = \gamma(t)y + \alpha(t)$

de plus on a

$$g(y,t) = f(x,t) = f(\gamma(t)y + \alpha(t), t)$$

et

$$v_0(y) = u(x,0) = u_0(\gamma(0)y + \alpha(0)),$$
$$v_1(y) = u_1(\gamma(0)y + \alpha(0)) + (\alpha'(0) + \gamma'(0)y)\frac{\partial u_0}{\partial x}(\gamma(0)y + \alpha(0)).$$

et $u\left(x,t\right)$ vérifier le théorème (2.3) et on a u est solution de problème (**I**), sous l'hypothèse de théorème (2.3), on remarque que

$$(x,t) \rightarrow \left(\frac{x-\alpha}{\gamma}, t\right),$$

de la domaine $\widehat{Q}$ vers $Q = \Omega \times (0,T)$ dans la classe C^2, lorsque T_0 supposa à (2.34) donc on obtient

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\gamma^2 \partial y^2}$.
2. $u^{''}(x,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_1(y,t)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a_2(y,t)\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + a_3(y,t)\frac{\partial v}{\partial y}$.

de plus on a l'opérateur $Lv(y,t)$ définie dans [3] avec $y = \frac{x-\alpha}{\gamma}$,transformez vers l'opérateur

$$\widetilde{L}u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\left(t\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(x,t\right).$$

avec les condition initiale u_0 et u_1

d'après la régularité de $v\left(y,t\right)$ obtenir dans le théorème (2.3) implique $u\left(x,t\right)$ est solution de problème (**I**) de sens de distribution dans $[0,T]$ et une unique solution faible de problème (**I**) dans $[0,T_0]$ directement par le résultat de unicité de problème (**II**) $\blacksquare$

Chapitre 3

Equation des Ondes Dans un Domaine Non-Cylindrique : Solution Forte Globale

Dans le chapitre précédent on a démontré qu'il existe une unique solution locale, Les théorèmes suivants démontrer qu'il existe une unique solution globale.

3.1 Existence et Unicité Globale du Problème Cylindrique

On suppose que

$$\alpha, \beta \in \mathcal{C}^3([0,T)\,;\mathbb{R}). \qquad (\mathbf{H1}')$$

Théorème 3.1 (solution forte) *Sous les hypothèse* ($\mathbf{H1}'$), (**H2**) *et les données initiales suivants :*

$$v_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad , \quad v_1 \in H_0^1(\Omega) \quad , \quad g, g' \in L^2(0,T; L^2(\Omega)),$$

pour tout $T > 0$ *et une unique solution de problème* (**II**) $v : Q \to \mathbb{R}$, *qui satisfait les conditions suivantes :*

1. $v \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$.
2. $v' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$.
3. $v'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$.
4. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_1 \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + a_3 \dfrac{\partial v}{\partial y} = g \qquad$ *p.p. dans* Q.

5. $v(0)=v_0, v'(0)=v_1$.

Démonstration. On remarque que l'estimation (2.19) restes valable pour l'hypothèse (**H1**$'$), i.e.

$$\begin{cases} v_\varepsilon \rightharpoonup^* v & \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ v'_\varepsilon \rightharpoonup^* v' & \text{faiblement étoile dans} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{cases}$$

1. Estimation

On dérive (**II**) par rapport à t et multipliant par $w=v''_m(t)$ et intégrons sur Ω on obtient

$$\begin{aligned}(v'''_m,v''_m)+\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right),v''_m\right)+\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(a_2\frac{\partial^2 v_m}{\partial t\partial y}\right),v''_m\right)\\ +\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(a_3\frac{\partial v_m}{\partial y}\right),v''_m\right)=(g',v''_m).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Le terme (g',v''_m) est bien défini puisque $g'\in L^2([0,T);L^2(\Omega))$. Le premier terme dans (3.1) donne

$$(v'''_m,v''_m)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega (v''_m)^2\,dy=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|v''_m\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2}$$

Le deuxième terme dans (3.1) donne

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right),v''_m\right) &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(a_1\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right)v''_m dy\\ &= \int_\Omega\left(a'_1\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}v''_m+a_1\frac{\partial^2 v'_m}{\partial y^2}v''_m\right)dy.\end{aligned}$$

Intégrons par parties

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right),v''_m\right) &= -\int_\Omega \frac{\partial a'_1}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}v''_m dy-\int_\Omega a'_1\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v''_m}{\partial y}dy\\ &\quad -\int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}v''_m dy-\int_\Omega a_1\frac{\partial v'_m}{\partial y}\frac{\partial v''_m}{\partial y}dy,\end{aligned}$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega a'_1\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}dy=\int_\Omega a''_1\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}dy+\int_\Omega a'_1\frac{\partial v_m}{\partial y}v''_m dy+\int_\Omega a'_1\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v''_m}{\partial y}dy,$$

donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right),v''_m\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega a'_1\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}dy-\int_\Omega\frac{\partial a'_1}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}v''_m dy-2\int_\Omega a'_1\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v''_m}{\partial y}dy\\ &\quad -\int_\Omega\frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}v''_m dy-\int_\Omega a''_1\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}dy-\frac{1}{2}\int_\Omega a'_1\left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right)^2 dy\\ &\quad -\left(\frac{1}{2}\int_\Omega a'_1\left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right)^2 dy+\int_\Omega a_1\frac{\partial v'_m}{\partial y}\frac{\partial v''_m}{\partial y}dy\right).\end{aligned}$$

En Intégrons le terme $-2\int_\Omega a_1' \frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m''}{\partial y}dy$ par parties

$$-2\int_\Omega a_1' \frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m''}{\partial y}dy = 2\int_\Omega a_1'' \frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy + 2\int_\Omega a_1' \left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2 dy + 2\left[a_1' \frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right]_0^1.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{2}\int_\Omega a_1' \left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2 dy + \int_\Omega a_1 \frac{\partial v_m'}{\partial y}\frac{\partial v_m''}{\partial y}dy\right) &= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_\Omega a_1 \left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1(\xi,t)\left\|v_m'(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

alors le deuxième terme dans (3.1) donne

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1 \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right), v_m''\right) = &\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega a_1' \frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy - \int_\Omega \frac{\partial a_1'}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}v_m'' dy \\ &- \int_\Omega \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}v_m'' dy + \int_\Omega a_1'' \frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}dy \\ &+ \frac{3}{2}\int_\Omega a_1' \left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2 dy^2 dy - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1(\xi,t)\left\|v_m'(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Le troisième terme dans (3.1) donne

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(a_2 \frac{\partial^2 v_m}{\partial t \partial y}\right) v_m'' dy = \int_\Omega a_2' \frac{\partial v_m'}{\partial y}v_m'' dy + \int_\Omega a_2 \frac{\partial v_m''}{\partial y}v_m'' dy \tag{3.4}$$

et on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega a_2 \frac{\partial v_m''}{\partial y}v_m'' dy &= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2 v_m''\right) v_m'' dy + \left[a_2 \left(v_m''\right)^2\right]_0^1 \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial a_2}{\partial y}\left(v_m''\right)^2 dy - \int_\Omega a_2 \frac{\partial v_m''}{\partial y}v_m'' dy \end{aligned}$$

i.e.

$$\int_\Omega a_2 \frac{\partial v_m''}{\partial y}v_m'' dy = -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial a_2}{\partial y}\left(v_m''\right)^2 dy.$$

L'égalité (3.4) donne

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(a_2 \frac{\partial^2 v_m}{\partial t \partial y}\right) v_m'' dy = \int_\Omega a_2' \frac{\partial v_m'}{\partial y}v_m'' dy - \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial a_2}{\partial y}\left(v_m''\right)^2 dy. \tag{3.5}$$

Le quatrième terme dans (3.1) donne

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(a_3 \frac{\partial v_m}{\partial y}\right) v_m'' dy = \int_\Omega a_3' \frac{\partial v_m}{\partial y}v_m'' dy + \int_\Omega a_3 \frac{\partial v_m'}{\partial y}v_m'' dy. \tag{3.6}$$

En remplaçant (3.2), (3.3), (3.5) et (3.6) dans (3.1) on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|v_m''(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1(\xi,t)\left\|v_m'(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega a_1' \left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right) dy + \int_\Omega \left(a_3' - \frac{\partial a_1'}{\partial y}\right)\frac{\partial v_m}{\partial y}v_m'' dy \\ &+ \int_\Omega \left(a_2' + a_3 - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\frac{\partial v_m'}{\partial y}v_m'' dy + \int_\Omega a_1'' \left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right) dy \\ &+ \frac{3}{2}\int_\Omega a_1' \left(\frac{\partial v_m'}{\partial y}\right)^2 dy^2 dy - \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial a_2}{\partial y}\left(v_m''\right)^2 dy - \int_\Omega g' v_m'' dy = 0. \end{aligned}$$

En multipliant par 2 et on notant

$$E'(t) = \|v''_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} - a_1(\xi,t)\|v'_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)},$$

$$\eta_1 = \left(\frac{\partial a'_1}{\partial y} - a'_3\right) \quad et \quad \eta_2 = \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - a'_2 - a_3\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(E'(t)) &= -2\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega a'_1\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right)dy + 2\int_\Omega \eta_1\frac{\partial v_m}{\partial y}v''_m dy \\ &\quad +2\int_\Omega \eta_2\frac{\partial v'_m}{\partial y}v''_m dy - 2\int_\Omega a''_1\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right)dy \\ &\quad +3\int_\Omega a'_1\left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right)^2 dy^2 dy + \int_\Omega \frac{\partial a_2}{\partial y}(v''_m)^2 dy + 2\int_\Omega g' v''_m dy.\end{aligned}$$

En intégrant sur $[0;t)$, où $t \in [0;T_m)$, on obtient

$$\begin{aligned}E'(t) &= E'(0) - 2\int_\Omega a'_1\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right)dy + 2\int_\Omega a'_1(y,0)\left(\frac{\partial v_m(0)}{\partial y}\frac{\partial v'_m(0)}{\partial y}\right)dy \\ &\quad +\int_0^t\left(2\int_\Omega \eta_1\frac{\partial v_m}{\partial y}v''_m dy + 2\int_\Omega \eta_2\frac{\partial v'_m}{\partial y}v''_m dy - 2\int_\Omega a''_1\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right)dy\right)ds \\ &\quad +\int_0^t\left(3\int_\Omega a'_1\left(\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right)^2 dy + \int_\Omega \frac{\partial a_2}{\partial y}(v''_m)^2 dy + 2\int_\Omega g' v''_m dy\right)ds.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (**H1'**) on a $\alpha, \beta \in C^3([0,T);R)$ alors $\eta_1, \eta_2, a'_1, a'_2, a''_1$, et $\frac{\partial a_2}{\partial y}$ sont des fonctions continues sur Q, Donc elles sont des fonctions bornées

$$|\eta_1| \le c_1 \quad , \quad |\eta_2| \le c_2 \quad , \quad |a''_1| \le c_3 \quad , \quad |a'_1| \le \tfrac{c_4}{3} \quad et \quad \left|\tfrac{\partial a_2}{\partial y}\right| \le c_5$$

où c_1, c_2, c_3, c_4, et c_5 des constantes positives.

Nous avons les majorations

$$\begin{aligned}2\int_\Omega \eta_1\frac{\partial v_m}{\partial y}v''_m dy &\le \left|2\int_\Omega \eta_1\frac{\partial v_m}{\partial y}v''_m dy\right| \\ &\le 2\int_\Omega \left|\eta_1\frac{\partial v_m}{\partial y}v''_m\right| dy \\ &\le 2c_1\left\|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)}\|v''_m\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

et comme $\left\|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)} \le k\left\|\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)}$ d'après le premier chapitre, on a

$$\begin{aligned}2\int_\Omega \eta_1\frac{\partial v_m}{\partial y}v''_m dy &\le 2c_1 k\left\|\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)}\|v''_m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le c_1 k\left(\|v'_m\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|v''_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

On procédant de la même manière, on a

$$\begin{aligned}2\int_\Omega \eta_2 \frac{\partial v_m'}{\partial y} v_m'' dy &\leq 2c_2 \left\| \frac{\partial v_m'}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)} \|v_m''\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_2 \left(\|v_m'\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v_m''\|^2_{L^2(\Omega)} \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-2\int_\Omega a_1'' \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v_m'}{\partial y} dy &\leq 2c_3 \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_m'}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2c_3 k \left\| \frac{\partial v_m'}{\partial y} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = 2c_3 k \|v_m'\|^2_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

et

$$3\int_\Omega a_1' \left(\frac{\partial v_m'}{\partial y} \right)^2 dy \leq c_4 \left\| \frac{\partial v_m'}{\partial y} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = c_4 \|v_m'\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

et

$$\int_\Omega \frac{\partial a_2}{\partial y} (v_m'')^2 dy \leq c_5 \|v_m''\|^2_{L^2(\Omega)}$$

et on obtient ainsi

$$2\int_\Omega g' v_m'' dy \leq 2\|g'\|^2_{L^2(\Omega)} \|v_m''\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c_6 \|v_m''\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

On note

$$v_{0m} = \frac{\partial v_m(0)}{\partial y} \quad , \quad v_{1m} = \frac{\partial v_m'(0)}{\partial y} \quad \text{et} \quad C = \max\{(c_1 k + c_2 + 2c_3 k + c_4), (c_1 k + c_2 + c_5 + c_6)\}$$

donc on a

$$\begin{aligned}E'(t) \leq\ & E'(0) - 2\int_\Omega a_1' \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v_m'}{\partial y} \right) dy + 2\int_\Omega a_1'(y,0) v_{0m} v_{1m} dy \\ &+ C\int_\Omega \left(\|v_m'\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v_m''\|^2_{L^2(\Omega)} \right) dy.\end{aligned}$$

De plus on a

$$\begin{aligned}-2\int_\Omega a_1' \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v_m'}{\partial y} \right) dy &\leq \left| 2\int_\Omega a_1' \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v_m'}{\partial y} \right) dy \right| \\ &\leq 2\sup_{y\in\Omega} |a_1'(y,t)| \int_\Omega \left| \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v_m'}{\partial y} \right) \right| dy \\ &\leq \sup_{y\in\Omega} |a_1'(y,t)|\, 2\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\sqrt{\epsilon} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial y} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_m'}{\partial y} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \hat{a}(t) \left(\frac{1}{\epsilon} \|v_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \epsilon \|v_m'\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right)\end{aligned}$$

et par (2.18) on a $\|v_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq c_7$ donc

$$-2\int_\Omega a_1' \left(\frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial v_m'}{\partial y} \right) dy \leq c_8 + \hat{a}(t)\, \epsilon \|v_m'\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

où $c_8 = \hat{a}(t)\frac{c_7}{\epsilon}$.

On procédant de la même manière, on a

$$\begin{aligned}
2\int_\Omega a_1'(y,0)\, v_{0m} v_{1m} dy &\leq 2\int_\Omega \left| a_1'(y,0) \frac{\partial v_m(0)}{\partial y} \frac{\partial v_m'(0)}{\partial y} \right| dy \\
&\leq \sup_{y\in\Omega} |a_1'(y,0)|\, 2 \left\| \frac{\partial v_m(0)}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| \frac{\partial v_m'(0)}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \hat{a}(0) \left(\|v_m(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v_m'(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right),
\end{aligned}$$

où $\hat{a}(t) = \sup_{y\in\Omega} |a_1'(y,t)|$ et $\epsilon > 0$.

On a $v_m(0) \to v_0$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $v_m'(0) \to v_1$ dans $H_0^1(\Omega)$, donc

$$\|v_m(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq k_1 \quad , \quad \|v_m'(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq k_2$$

donc

$$2\int_\Omega a_1'(y,0)\, v_{0m} v_{1m} dy \leq k_3,$$

où $k_3 = \hat{a}(0)(k_1 + k_2)$.

Reste a majorer $E'(0) = \|v_m''(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - a_1(\xi,t)\|v_m'(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2$. On a $\|v_m'(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq k_2$ donc il suffit de majorer $v_m''(0)$ dans $L^2(\Omega)$.

Si l'on prend $t = 0$ dans (2.7), on obtient

$$\begin{aligned}
(v_m''(0), w) + \left(a_1(y,0) \frac{\partial^2 v_m(0)}{\partial y^2}, w \right) + \left(a_2(y,0) \frac{\partial v_m'(0)}{\partial y}, w \right) \\
+ \left(a_3(y,0) \frac{\partial v_m(0)}{\partial y}, w \right) = (g(0), w),
\end{aligned}$$

pour tout $w \in V_m$. Si $w = v_m''$ on obtenir

$$\begin{aligned}
\|v_m''(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -\Bigg(a_1(y,0) \frac{\partial^2 v_m(0)}{\partial y^2} + a_2(y,0) \frac{\partial v_m'(0)}{\partial y} \\
&\qquad + a_3(y,0) \frac{\partial v_m(0)}{\partial y} - g(0), v_m''(0) \Bigg) \\
&\leq \left\| a_1(y,0) \frac{\partial^2 v_m(0)}{\partial y^2} + a_2(y,0) \frac{\partial v_m'(0)}{\partial y} + a_3(y,0) \frac{\partial v_m(0)}{\partial y} - g(0) \right\|_{L^2(\Omega)} \|v_m''(0)\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\|v_m''(0)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left\| a_1(y,0) \frac{\partial^2 v_m(0)}{\partial y^2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| a_2(y,0) \frac{\partial v_m'(0)}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \left\| a_3(y,0) \frac{\partial v_m(0)}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq c \left(\|v_m(0)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v_m'(0)}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v_m(0)}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),
\end{aligned}$$

où $c = \max\left\{\sup_{[0,1]}|a_1(y,0)|, \sup_{[0,1]}|a_1(y,0)|, \sup_{[0,1]}|a_1(y,0)|, 1\right\}.$

Comme $g, g' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ alors $g \in L^2([0,T];L^2(\Omega))$ et $g(0)$ a un sens. on a

$$v_m(0) \to v_0 \quad dans \quad H_0^1(\Omega) \quad et \quad v'_m(0) \to v_1 \quad dans \quad H_0^1(\Omega),$$

donc

$$\frac{\partial v_m(0)}{\partial y} \to \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad dans \quad L^2(\Omega) \quad et \quad \frac{\partial v'_m(0)}{\partial y} \to \frac{\partial v_1}{\partial y} \quad dans \quad L^2(\Omega)$$

et l'hypothèse $v_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ implique que $v_m(0)$ borné dans $H^2(\Omega)$ alors

$$\|v''_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq k_4.$$

et on obtenir

$$\|v''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\|v'_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1 + C\int_0^t \left(\|v''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) ds,$$

où $\delta = -(\epsilon\hat{a}(t) + a_1(\xi,t))$, $C_1 = c_8 + k_3 + k_4$. Pour ϵ suffisamment petit, ou $\delta > 0$.

Par (**H2**) on a $a_1 < 0$ alors $-a_1 > 0$. En notant $k = \min\{1, \delta\}$, et donc. On a

$$\begin{aligned}
\|v''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{k}\left(\|v''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\|v'_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \\
&\leq \frac{C_1}{k} + \frac{C}{k}\int_0^t \left(\|v''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) ds.
\end{aligned}$$

On pose $\hat{C}_1 = \frac{C_1}{k}$ et $\hat{C}_2 = \frac{C}{k}$ on obtient pour $t \leq T$

$$\|v''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq$$
$$\hat{C}_1 + \hat{C}_2\int_0^T \left(\|v''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) ds\,; \quad \forall t \in [0,T].$$

En appliquant le lemme de Gronwall (1.32) nous en déduisons

$$\|v''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{C}_1 \exp\left(\hat{C}_2 T\right).$$

On pose $\hat{C} = \hat{C}_1 \exp\left(\hat{C}_2 T\right)$ alors

$$\|v''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{C}\,; \qquad \forall t \in [0,T] \quad T > 0,$$

ce qui implique

$$\|v''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \hat{C} \qquad \text{et} \qquad \|v'_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \hat{C}.$$

2. Passage a la limite

On peut extraire deux sous suites telle que

$$\begin{cases} v'_\epsilon \rightharpoonup^* v' \ \text{ faiblement étoile dans } \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ v''_\epsilon \rightharpoonup v'' \ \text{ faiblement dans } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{3.7}$$

D'après les estimations (2.19), (3.7),on peut passer à la limite, il vient

$$\begin{cases} v \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ v' \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ v'' \in L^{2}(0,T;L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{3.8}$$

On peut vérifier que

$$\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)).$$

et on obtenir finalement

$$(v'',v') + \left(a_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, v'\right) + \left(a_2\frac{\partial v'}{\partial y}, v'\right) + \left(a_3\frac{\partial v}{\partial y}, v'\right) = (g,v').$$

dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

3. Unicité de solution forte

Soient v , $\hat{v}$ deux solution de la même Problème (II) alors v et $\hat{v}$ satisfait

$$\begin{cases} v'' + a_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a_2\frac{\partial v'}{\partial y} + a_3\frac{\partial v}{\partial y} = g, \\ v(0) = v_0(y) \quad , \quad v'(0) = v_1(y). \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{v}'' + a_1\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + a_2\frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} + a_3\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = g, \\ \hat{v}(0) = v_0(y) \quad , \quad \hat{v}'(0) = v_1(y). \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} (v'' - \hat{v}'') + a_1\frac{\partial^2 (v-\hat{v})}{\partial y^2} + a_2\frac{\partial (v'-\hat{v}')}{\partial y} + a_3\frac{\partial (v-\hat{v})}{\partial y} = 0, \\ (v(0) - \hat{v}(0)) = 0 \quad , \quad (v'(0) - \hat{v}'(0)) = 0. \end{cases}$$

On pose $w(t) = (v(t) - \hat{v}(t))$ on obtient

$$\begin{cases} w'' + a_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_2\frac{\partial w'}{\partial y} + a_3\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ w(0) = w'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

On peut prendre $w'(t) \in H_0^1(\Omega)$ comme fonction test de (3.9)

$$(w'',w') + \left(a_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, w'\right) + \left(a_2\frac{\partial w'}{\partial y}, w'\right) + \left(a_3\frac{\partial w}{\partial y}, w'\right) = 0. \tag{3.10}$$

Le premier terme dans (3.10) donne

$$(w'',w') = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w'\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.11}$$

Intégrons deuxième terme dans (3.10) par parties et utilisée la condition aux limites $w'(1,t) = w'(0,t) = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} w' dy &= -\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y}(a_1 w')\frac{\partial w}{\partial y} dy + \left[\frac{\partial w}{\partial y} a_1 w'\right]_0^1 \\ &= -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} w' + a_1\frac{\partial w'}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial y} dy \\ &= -\int_{\Omega} \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} w' dy - \int_{\Omega} a_1\frac{\partial w'}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} dy \\ &= -\int_{\Omega} \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} w' dy - \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dy, \end{aligned}$$

En appliquant la Théorème de la moyenne pour $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} a_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dy$ alors il existe $\xi \in \Omega$ tel que :

$$\int_{\Omega} a_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} w' dy = -\int_{\Omega} \frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} w' dy - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1(\xi,t)\int_{\Omega}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dy\right). \tag{3.12}$$

Intégrons le troisième terme dans (3.10) par parties et utilisée la condition aux limites $w'_m(1,t) = w'(0,t) = 0$ on obtient

$$\int_{\Omega} a_2 \frac{\partial w'}{\partial y} w' dy = \frac{1}{2}\int_{\Omega} a_2 \frac{\partial}{\partial y}\left(w'\right)^2 = -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{\partial a_2}{\partial y}(w')^2 dy, \tag{3.13}$$

comme $\frac{\partial a_2}{\partial y}$ est indépendante de y alors

$$\int_{\Omega} a_2 \frac{\partial w'}{\partial y} w' dy = -\frac{1}{2}\frac{\partial a_2}{\partial y}\int_{\Omega}(w')^2 dy. \tag{3.14}$$

De (3.12), (3.13), (3.14) et (3.10), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|w'\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_{\Omega}\frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} w' dy - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1(\xi,t)\|w\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial a_2}{\partial y}\int_{\Omega}(w')^2 dy + \int_{\Omega} a_3 \frac{\partial w}{\partial y} w' dy = 0.$$

Intégrons sur $[0,t]$ avec $t < T$ et en multipliant par 2 on obtient

$$\begin{aligned} \|w'\|^2_{L^2(\Omega)} - a_1(\xi,t)\|w\|^2_{H^1_0(\Omega)} &= 2\int_0^t\left(\int_{\Omega}\frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} w' dy + \frac{\partial a_2}{\partial y}\int_{\Omega}(w')^2 dy\right) dt \\ &\quad -2\int_0^t\int_{\Omega} a_3 \frac{\partial w}{\partial y} w' dy dt. \end{aligned}$$

Pour majorer le second membre, on a

$$\begin{aligned} 2\int_{\Omega}\frac{\partial a_1}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} w' dy &\leq c_1\|w'\|^2_{L^2(\Omega)} + c_1\|w\|^2_{H^1_0(\Omega)}, \\ \frac{\partial a_2}{\partial y}\int_{\Omega}(w')^2 dy &\leq c_2\|w'\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ 2\int_{\Omega} a_3 \frac{\partial w}{\partial y} w' dy &\leq c_3\|w'\|^2_{L^2(\Omega)} + c_3\|w\|^2_{H^1_0(\Omega)}. \end{aligned}$$

où $c_1, c_2, c_3 \geq 0$,de plus par (**H2**) on a $a_1 < 0$, en notant $k = \min\{1, -a_1(\xi,t)\}$, on a après division par k

$$\begin{aligned} \|w'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq \|w'\|^2_{L^2(\Omega)} - a_1(\xi,t)\|w\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ &\leq C\int_0^T\left(\|w'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right) dt, \end{aligned}$$

où $C = \max\left\{\frac{c_1+c_2+c_3}{k}, \frac{c_1+c_3}{k}\right\}$. Par le lemme de Gronwall (1.32) nous avons pour tout t de $[0,T)$

$$\|w'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w\|^2_{H^1_0(\Omega)} = 0,$$

alors $w(t) = 0$ pour tout $t \leq T$. ■

3.2 Solution Forte du Problème Non-Cylindrique

Théorème 3.2 *Soit $\Omega_0 = (\alpha(0), \beta(0))$ et les données initiales suivantes :*

$$u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0) \quad , \quad u_1 \in H_0^1(\Omega_0) \quad , \quad f, f' \in L^2([0,T); L^2(\Omega_t)).$$

il existe $T > 0$ et une unique solution de problème (I) $u : \hat{Q} \to R$, satisfait les conditions suivantes :

1. $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t))$.
2. $u' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega_t))$.
3. $u'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_t))$.
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \qquad$ *p.p. dans* $\hat{Q}$.
5. $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$ *dans* Ω_0.

Démonstration. Avant d'aller dans la preuve de Théorème (2.4), avec les conditions initiale u_0, u_1 dans le problème (I) on obtient

1. $v_0(y) = u(x,0) = u_0(\gamma(0)y + \alpha(0))$,
2. $v_1(y) = u_1(\gamma(0)y + \alpha(0)) + (\alpha'(0) + \gamma'(0)y)\frac{\partial u_0}{\partial x}(\gamma(0)y + \alpha(0))$.

Par conséquent, si nous prenons

$$u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0) \ , \ u_1 \in H_0^1(\Omega_0)$$

alors le problème non-cylindrique (I) a une solution unique u à défini pour tout t> 0. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons démontrer l'existence et l'unicité des solutions faible locale, et forte globale, de l'équation des ondes dans un intervalle Ω_t a limites variables

$$\begin{cases} \widetilde{L}u(x,t) = f(x,t), & \forall\,(x,t) \in \Omega_t \times (0,T), \\ u\,(x,t) = 0 & \forall\,(x,t) \in \widehat{\Sigma}, \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) & \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = u_1\,(x) \quad \alpha(0) \leq x \leq \beta(0). \end{cases} \tag{I}$$

Pour cela, on a utiliser le changement de variable suivant :

$$(x,t) \in \cup_{t\in(0,T)}\Omega_t \mapsto (y,t) \in \Omega \times (0,T), \quad y = \frac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)},$$

Le problème transformée, est un problème hyperbolique, a coefficients variables mais dans un intervalle fixe Ω

$$\begin{cases} Lv(y,t) = g(y,t) & \forall\,(y,t) \in \Omega \times (0,T), \\ v\,(0,t) = v\,(1,t) = 0 & 0 < t < T, \\ v\,(y,0) = v_0\,(y) & \frac{\partial v}{\partial t}\,(y,0) = v_1\,(y) \quad 0 \leq y \leq 1). \end{cases} \tag{II}$$

Dont l'existence, locale ou globale, est établie par la méthode de estimation a priori et nous obtenons le même résultat pour le problème originale (I).

Bibliographie

[1] H. Brezis ; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, (2011).

[2] L.C. Evans ; *Partial Differential Equations Second Edition.* AMS, Providence , (2010).

[3] J. L. Ferrel, L. A. Medeiros ; *Kirchhoff-Carrier Elastic Strings in Noncylindrical Domains.* Portugaliae Mathematica. 56, 465-500 (1999).

[4] J. L. Lions ; : *Quelques métodes de résolution des problémes aux limites non-linéaires.* Dunod. Paris (1969).

[5] M. A. Rincon & I-Shih Liu ; *Existence and Uniqueness of Solutions of Elastic String with Moving Ends,* (2004).

[6] S. Salsa ; *Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory,* Springer-Verlag Italia, (2008).