

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed BOUDIAF - M'Sila
Faculté de Technologie, Département de Génie Electrique



Mémoire :

En vue de l'Obtention du diplôme de **Master**
Spécialité : **Automatique**

Par :

BENZAHA Houd
BELOUADEH Brahim

Thème :

**Utilisation des méthodes d'identification pour
l'approximation des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire**

Soutenu devant le jury composé de:

Dr. GHALLAB Mohammed zinealabidine	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Président
Dr. KHETTAB Khatir	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Rapporteur
Dr. BOUKHALFA Abdelouaheb	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Co-Rapporteur
Dr. IDIR Abdelhakim	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Examineur

Année universitaire : 2021/ 2022

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail:

À l'être le plus cher de ma vie, ma mère.

À celui qui m'a fait de moi un homme, mon père.

À Mes chers Frères et Sœurs.

À Monsieur *Khatir KHETTAB*

À tous mes amis de promotion de 2eme année Master ...

Toute personne qui occupe une place dans mon cœur.

À tous les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom Benzahia et Belouadeh.

Je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé à ma réussite.

Remerciements

Avant tout, mes remerciements vont à *ALLAH* le tout puissant qui m'a aidé à faire ce travail et qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Nos remerciements vont également aux membres du jury pour avoir accepté de juger notre travail.

Nous tenons à remercier *Dr. KHETTAB Khatir & Dr. BOUKHALFA Abdelouaheb* et, pour la proposition du sujet de ce mémoire et pour ses conseils tout au long de ce travail.

Pour finir, nous exprimons nos sincères remerciements à nos très chers parents, nos amis qui de près ou de loin nous ont soutenu et encouragé tout au long de ce mémoire.

SOMMAIRE

Chapitre I	1
I. Introduction Générale	1
I.1 Objectifs	2
II. Chapitre II	4
Les Systèmes d'ordre Fractionnaire	4
II.1. Introduction	4
II.2. Intégrale et drivée d'ordre fractionnaire	4
II.2.1. Définitions	4
II.2.2. Intégration d'ordre fractionnaire	5
II.2.3. Dérivation d'ordre fractionnaire	6
II.2.4. Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Louville	6
II.2.5. Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo	7
II.2.6. Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov	8
II.3. Propriétés de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire	9
II.3.1 Opérateurs d'ordre fractionnaire	9
II.3.2 Opérateurs d'ordre fractionnaires analogiques	9
II.3.3 Opérateurs d'ordre fractionnaire numériques	10
II.4 Propriétés structurelles des systèmes d'ordre fractionnaire	10
II.4.1 Stabilité	10
II.4.2 Observabilité et contrôlabilité	10
II.5 Réponses temporelles par les fonctions de type de Mittag-Leffler	11
II.6 Système d'ordre fractionnaire de relaxation	11
II.6.1 La réponse impulsionnelle	12
II.6.2 La réponse indicielle	12
II.7 systèmes d'ordre fractionnaire oscillatoires	12
II.7.1 La réponses fréquentielle	13
II.7.2 La réponse impulsionnelle	14
II.7.3 La réponse indicielle	15
II.8 Conclusion	17
III. Chapitre III	18
Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire	18
III Définitions	18
III.1 Approximation numérique des systèmes d'ordre fractionnaire	18
III.1.1 Approximation par calcul de l'expression analytique	18
III.1.2 Approximation par un modèle rationnel discret	19
III.1.3 Approximation en utilisant un modèle entier continu	20
III.2 Approximation analogique des systèmes d'ordre fractionnaire	20
III.2.1 Méthodes d'approximation en utilisant l'expansion des fonction continues	20
III.2.2 Méthode de Carlson	21
III.2.3 Méthode de Matsuda	21
III.2.4 Méthodes utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques	22
III.2.4.1 Méthode de Charef	22
III.2.4.1.1 Approximation des systèmes du 1er ordre fractionnaire	22

Sommaire

III.2.4.1.2 Approximation des systèmes à ordres fractionnaires multiples	25
III.2.4.1.3 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire	27
III.2.4.1.4 Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire	28
III.2.4.2 Méthode d'Oustaloup	29
III.3 Approximation par une fonction rationnelle de Système d'ordre fractionnaire de relaxation	32
III.4 Approximation par une fonction rationnelle de systèmes d'ordre fractionnaire oscillatoires	34
IV. Chapitre IV	37
Applications : Simulation et étude comparative	37
IV.1. Introduction	37
IV.2 Applications	40
IV.2.A Système 1	40
IV. 2.A.1 Approximation par identification	40
IV. 2. A.2 Approximation par Oustaloup	41
IV. 2.A.3 Approximation de Charef	42
IV. 2.B Système 2	43
IV. 2.B.1 Approximation par Oustaloup	43
IV. 2.B.2 Approximation de Charef	43
• Conclusion générale	46
Références et bibliographie	47

Table des figures

Figure 1	La réponse fréquentielle	13
Figure 2	La réponse impulsionnelle du système	15
Figure 3	La réponse indicielle du système	16
Figure 4	Diagramme de Bode	23
Figure 5	Choix des singularités pour l'approximation.	24
Figure 6	Diagramme asymptotique de Bode	31
Figure 7	Distribution de la fonction de temps de relaxation	33
Figure 8	Représentation graphique du temps de réponse	37
Figure 9	Représentation graphique du temps de montée.	38
Figure 10	Représentation graphique du dépassement.	38
Figure 11	Performances d'un système de commande	39
Figure 12	Approximation par identification	41
Figure 13	Approximation de Oustaloup	42
Figure 14	Approximation de Charef	43
Figure 15	Approximation par les methods (ident ,oust,char)	45

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو استخدام طرق التعريف لتقريب الأنظمة الخطية ذات الترتيب الكسري نذكر ببعض المفاهيم الأساسية الرئيسية للحساب التفاضلي و التكامل الكسري ثم نكرس بقية هذا الفصل لدراسة التعاريف الرياضية المختلفة المتعلقة بالاشتقاقات و التكاملات الكسرية و كذلك بعض خصائصها من خلال إدخال عوامل الترتيب الكسري (مرشحات) بنماذج صحيحة و باتباع طريقة المقارنة طريقة (استالوب و شارف) و ذلك بتطبيق اثنين منهما لتأكيد الفرضيات المطروحة و مقارنة نتائجها لمعرفة اي منها هي الأنسب لتحقيق المطلوب و وفقا لنتائج المحاكاة يمكننا القول انه في ظل ظروف معينة و اختيار معطيات تكون طريقة استالوب و شارف فعالة

الكلمات المفتاحية: نظام الترتيب الكسري - الأنظمة الخطية - مشتقة كابوتو و نظرية ليابونوف للاستقرار

Résumé

Le but de ce travail est d'utiliser des méthodes d'identification pour approximer des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire. Nous rappelons quelques principes concepts de base du calcul différentiel et d'intégration fractionnaire. Puis nous consacrons le reste à l'étude des différentes définitions mathématiques liées aux dérivations et intégrales fractionnaires, ainsi que certaines de leurs propriétés en introduisant les facteurs d'ordre fractionnaire (filtres) avec des modèles corrects et en suivant la méthode de comparaison (**Oustaloup et Charef**) en appliquant deux méthodes d'entre eux pour confirmer les hypothèses avancées et comparer leurs résultats pour savoir laquelle d'entre elles est la plus appropriée pour atteindre le résultat souhaité et selon les résultats de la simulation, on peut dire que sous certaines conditions et la sélection des données la méthode de **Oustaloup et Charef** est efficace.

Mots-clés : Système d'ordre fractionnaire ; systèmes linéaires ; Méthodes d'identification ; dérivée de Kabuto ; Théorie de la stabilité de Lyapunov.

Abstract

The aim of this note is to use identification methods to approximate the fractional linear systems. We recall some of the main basic concepts of differential calculus and fractional integration. Then we devote the rest of this chapter to studying the various mathematical definitions related to derivations and fractional integrals, as well as some of their properties by introducing the fractional order factors (filters) With correct models and by following the method of comparison (**Oustaloup et Charef**) by applying two of them to confirm the hypotheses put forward and compare their results to find out which of them is the most appropriate to achieve

the desired and according to the simulation results, we can say that under certain conditions and the selection of data the method of **Oustaloup and Charef** is effective

Keywords: Fractional order systems ; Linear systems ; identification methods; Kabuto derivative ; Lyapunov stability theory.

Chapitre I : **Introduction Générale**

L'idée du calcul fractionnaire a été proposée il y a plus de 300 ans. Cependant, Los Angeles première utility réussite du calcul fractionnaire remonte aux années 1960. Dans les dernières décennies, le calcul fractionnaire à été vraiment développé et largement utilisé dans différents domaines de Los-Angeles technologique know-how et de l'ingénierie

Récemment, un intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par ses applications dans les différents domaines des systèmes et de la commande. Certains premiers travaux ont été effectués par Bode qui a proposé une fonction de transfert d'ordre fractionnaire en boucle ouverte pour maintenir un fonctionnement stable des amplificateurs à boucle de retour pour une grande variation du gain

L'application des concepts de calcul fractionnaire dans le domaine des systèmes de contrôle automatique remonte au début des années 1960. Cependant, les contrôleurs basés sur le calcul d'ordre fractionnaire ont reçu une attention croissante de la part de la communauté du contrôle jusqu'aux dernières décennies. Dans ce domaine de recherche, tous les contrôleurs d'ordre fractionnaire développés impliquent des opérateurs et/ou des systèmes d'ordre fractionnaire dans leur structure ou leur implémentation. Ces contrôleurs ont été introduits dans les applications de contrôle pour améliorer en permanence les performances et la robustesse des systèmes de contrôle.

Le premier qui a vraiment introduit un contrôleur d'ordre fractionnaire était Oustaloup qui a développé le contrôleur CRONE (commande robuste d'ordre non entier) et il à appliqué dans divers domaines des systèmes de commande. Podlubny [19,21] a proposé un contrôleur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ d'ordre fractionnaire, comportant une action d'intégration d'ordre λ et action de différentiation d'ordre μ , on peut trouver un très bon résumé sur le calcul fractionnaire dans le domaine de la commande; les définitions de base du calcul fractionnaire, des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire et la commande d'ordre fractionnaire a également été présentée, en plus, plusieurs contrôleurs d'ordre fractionnaire typiques connus ont été présentés et commentés.

La commande adaptative s'est avérée être une bonne commande due à son potentiel application dans les systèmes avec de grande complexités et incertitudes. Le but de la commande adaptative est de concevoir un contrôleur pouvant atteindre les objectifs de commande pré-spécifiés pour une classe donnée de systèmes

Ce n'est qu'au cours des quinze dernières années que des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire ont été introduits dans le schéma de la théorie de la commande adaptative. En 2002, Vinagre et al [1,19,21] ont introduit pour la première fois l'idée du contrôle d'ordre fractionnaire dans le contrôle adaptatif traditionnel. Ils ont utilisé des règles de réglage des paramètres fractionnaires et un modèle de référence fractionnaire dans le contrôle adaptatif du

modèle de référence conventionnel (MRAC). En 2006, Ladaci et Charef [13,18] ont utilisé des règles de réglage des paramètres fractionnaires et

Modèle de référence fractionnaire qui diffère du MRAC classique. Ils ont également introduit un différenciateur d'ordre fractionnaire à la sortie du système, qui est lié au modèle de référence d'ordre fractionnaire proposé dans les règles classiques de réglage des paramètres MRAC. Suárez et a proposé un schéma de contrôle La séquence de contrôle latéral AGV combine l'approche du modèle de référence et les règles de réglage d'ordre fractionnaire pour le réglage direct du gain. Ladaci et Charef ont également introduit un contrôleur PID adaptatif d'ordre fractionnaire basé sur un algorithme classique d'ordre entier. Dans tous les travaux ci-dessus, les avantages du comportement du système et la robustesse du schéma de contrôle introduit ont été démontrés avec des exemples illustratifs. Mais la faiblesse de ce travail réside dans le manque d'arguments théoriques pouvant garantir la stabilité de ces schémas de contrôle spécifiques. C'est pourquoi la preuve analytique de la stabilité des systèmes de contrôle adaptatif d'ordre fractionnaire a jusqu'à présent été considérée comme un problème ouvert.

Récemment, des travaux théoriques ont été réalisés pour démontrer analytiquement la stabilité de certains schémas de contrôle adaptatif. Li et al ont étudié la stabilité asymptotique de trois systèmes scalaires d'ordre fractionnaire en utilisant la méthode de stabilisation adaptative universelle. Les résultats obtenus sur la stabilisation adaptative universelle d'ordre fractionnaire ont été également étendus au système MIMO par Li et Chen , Ladaci et al ont montré qu'un contrôleur adaptatif d'ordre fractionnaire basé sur un grand gain à retour de sortie peut stabiliser n'importe quel système linéaire, invariant dans le temps, à phase minimale, avec une seule entrée, une seule sortie (SISO) et de degré relatif unité. ils ont également introduit un feedforward d'ordre fractionnaire dans l'algorithme MRAC pour obtenir une nouvelle stratégie de commande adaptative où la preuve de la stabilité robuste de ce schéma de commande a été dérivée. Par cette gamme de techniques de conception et d'applications, mais assez loin de viser la perfection, il est clair que la commande d'ordre fractionnaire est devenue un sujet de recherche important. La généralisation à l'ordre non-entier des contrôleurs traditionnels ou des schémas de commande se traduit par plusieurs paramètres de réglage et plusieurs réponses fréquentielles et temporelles réglables du système de commande, permettant l'achèvement des performances robustes.

Objectifs

Notre objectif principal dans ce travail est d'introduire des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire dans des schémas de contrôle adaptatifs. Nous nous intéressons aux opérateurs et aux systèmes d'ordre fractionnaire car ces derniers fonctionnent très bien par rapport à l'ordre complet. En effet, de nouveaux schémas de commande ont été proposés tout en montrant leurs avantages en les appliquant à différents types de systèmes dynamiques. Dans ce cas, nous proposons un nouveau schéma de contrôle adaptatif d'ordre fractionnaire à gain élevé avec rétroaction de sortie en introduisant l'intégrale

Ordre fractionnaire à côté de l'intégrale régulière de la sortie du système dans le gain adaptatif de la stratégie de contrôle. Des simulations ont été réalisées et les résultats obtenus ont été satisfaisants. Nous proposons également un contrôleur adaptatif à gain élevé qui modifie les concepts suivants -modification par le biais du calcul d'ordre fractionnaire. Par cette modification, on a l'intention de maintenir la robustesse en présence des perturbations et d'éliminer le comportement indésirable en absence des perturbations par l'introduction de la dérivée d'ordre fractionnaire dans le gain d'adaptation de la stratégie de commande à la place de la dérivée régulière. Des simulations ont été faites pour montrer l'efficacité du schéma de commande proposé. Nous proposons encore l'introduction d'un système d'ordre fractionnaire oscillatoire approximé par la technique de Charef comme modèle dans la commande adaptative à modèle de référence (MRAC) conventionnel.

Les simulations montrent l'efficacité du schéma MRAC avec des modèles fractionnaires pour améliorer la dynamique de la réponse contrôlée du processus et suivre parfaitement la sortie. De plus, nous proposons une stratégie pour régler les paramètres du contrôleur PID basée sur un modèle de référence d'ordre fractionnaire. Le modèle utilisé dans ce cas est un système d'ordre fractionnaire appelé fonction de transfert idéale de Bode.

Les paramètres du contrôleur PID sont réglés en minimisant l'intégrale de l'erreur quadratique entre le modèle de référence fractionnaire souhaité et la réponse du système d'asservissement en boucle fermée avec le contrôleur PID.

Le système en boucle fermée résultant a la propriété idéale d'être robuste pour acquérir des changements, la réponse échelonnée présentant des propriétés d'iso-amortissement. Le système d'ordre fractionnaire utilisé comme modèle a été aussi approximé par la technique de Charef. Des simulations ont été faites pour tester ce schéma de commande d'ordre fractionnaire. Les résultats obtenus ont été très satisfaites.

Chapitre II :

II. Systèmes d'ordre Fractionnaire

II.1. Introduction

Les systèmes d'ordre fractionnaire ont suscité un intérêt considérable dans de nombreux domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. Ces systèmes sont généralement décrits par des équations différentielles fractionnaires. Dans le domaine fréquentiel, elles sont représentées par des fonctions de transfert irrationnelles. En raison de ces fonctions irrationnelles, les systèmes d'ordre fractionnaire sont rarement étudiés. N'ayant pas de solutions analytiques exactes, les techniques numériques et approchées sont largement utilisées pour leur analyse, leur analyse et leur mise en œuvre. Dans ce chapitre, nous donnerons la définition du calcul fractionnaire et des opérateurs fractionnaires, quelques propriétés principales, et la transformée de Laplace des dérivées fractionnaires et des intégrales. Nous introduirons quelques méthodes d'approximation d'opérateurs et de transfert d'ordre fractionnaire notamment

II.2. Intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire

II.2.1. Définitions

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différentiation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier où ${}_c D_t^a$ et t sont des limites de l'opération. L'opérateur intégro-différentiel continu est défini comme :

$${}_c D_t^a = \begin{cases} \frac{d^a}{dt^a} & R(a) > 0, \\ 1 & R(a) = 0, \\ \int_c^t (d\tau)^{-a} & R(a) < 0, \end{cases}$$

où α , généralement $\alpha \in \mathbb{R}$, est l'ordre de l'opération. Les deux définitions les plus utilisées pour l'opérateur intégro-différentiel (Spanier et Oldham) d'ordre fractionnaire général sont celles de Grunwald-Letnikov (GL) et de Riemann-Liouville (RL). Les autres définitions bien connues sont ceux de Caputo, Weyl et Fourier.

II.2.2. Intégration d'ordre fractionnaire

Soit une fonction réelle de la variable réelle t procéd et intégrable sur $[0, +\infty[$, l'intégration répétée k fois de la fonction $f(t)$, appelée l'intégrale $k^{\text{ème}}$ de $f(t)$ et notée $I^k f(t)$, s'exprime standard la formule de Cauchy standard:

$$\int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_4} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_3} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} f(t_1) dt = I^k f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{k-1} f(\tau) d\tau$$

Pour généraliser la formule de Cauchy à un nombre réel α , Riemann en 1947 a proposé de remplacer la fonction factorielle standard la fonction Gamma qui en est la généralisation aux nombres réels. On obtient alors la fonction d'intégration fractionnaire:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\omega(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

$\omega(\cdot)$ étant la fonction gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \forall x \in \mathfrak{R}^*$$

L'intégrale unilatérale d'ordre réel est souvent appelée l'intégrale de Riemann-Liouville vehicle Liouville an aussi proposé la même définition que Riemann mais en remplaçant la borne inférieure d'intégration standard $-\infty$ (dans ce cas l'intégrale est dite bilatérale). Il est intéressant de souligner $\frac{(t-\tau)^{\alpha-t}}{\omega(\alpha)}$ vaut 1 quand l'ordre d'intégration $\alpha = 1$. L'intégrale classique d'ordre 1 de

la fonction $f(t)$ correspond à l'aire délimitée par la fonction $f(t)$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[t_0, t]$.

$$I^\alpha f(t) = P_\alpha(t) \otimes f(t)$$

où la fonction $P(t)$ est donnée par $P_\alpha(t) = \frac{(t)^{\alpha-1}}{\omega(\alpha)}$ et l'opérateur étant le produit de

convolution. La fonction $P_\alpha(t)$ vient ainsi pondérer différemment chaque valeur de la fonction $f(t)$. L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $f(t)$ peut alors être interprétée comme l'aire entre t_0 et t que délimite par rapport à l'axe des abscisses la fonction $f(t)$ pondérée par la fonction $P_\alpha(t)$. La transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre α de $f(t)$ causale ($f(t) = 0$, pour $t \leq t_0 = 0$), a la même expression que la transformée de Laplace de l'opération d'intégration entière, il suffit de remplacer l'ordre d'intégration entier par l'ordre fractionnaire α . Elle est donnée par :

$$L[I^\alpha f(t)] = \frac{1}{s^\alpha} L[f(t)]$$

où s désigne l'opérateur de Laplace.

II.2.3. Dérivation d'ordre fractionnaire

La différentiation fractionnaire est la généralisation de la différentiation entière à des ordres non entiers quelconques. Cette généralisation peut être obtenue à partir de l'intégration fractionnaire de la donnant ainsi la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo. Une autre généralisation, basée sur la définition usuelle de la différentiation entière est proposée standard Grunwald-Letnikov.

II.2.4. Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est la plus répandue, elle est basée sur le calcul de la $k^{\text{ème}}$ intégrale d'une fonction. La dérivée s'obtient alors en deux étapes : Intégration non entière d'ordre $(n - \alpha)$, comme suit :

$${}^{RL}_t I^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Dérivation entière de (I.20) d'ordre n , pour avoir la dérivation au sens de Riemann-Liouville d'ordre α notée ${}^{RL}_t D_t^\alpha$ et définie comme suit :

$${}^{RL}_t D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Où n est un nombre entier tel que : $n - 1 < \alpha < n$

Exemple :

On voudrait Calculer la dérivée à l'ordre $\alpha = 0.7$ d'une fonction constante $f(t) = C$ selon la définition de Riemann-Liouville, les étapes sont :

- 1) Calcul de l'entier n à partir de la condition de l'expression (I.), on trouve :
 $n = 1$
- 2) Intégrer la fonction $f(t) = C$, à l'ordre non entier $n - \alpha = 0.3$, on obtient :

$${}^{RL}_t I^{0.3} = \frac{C}{\Gamma(0.3)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{-0.7} d\tau$$

- 3) Dériver la fonction (I.23) à l'ordre entier $n = 1$, on trouve la dérivée d'ordre $\alpha = 0.7$ suivante :

$${}^{\text{RL}}_{t_0} D_t^{0.7} f(t) = \frac{C}{\Gamma(0.3)} (t - t_0)^{-0.7}$$

II.2.5. Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo

Comme la dérivée de Reimann-Liouville, la dérivée de Caputo se base aussi sur le calcul de la $k^{\text{ème}}$ intégrale d'une fonction, mais elle requiert que la fonction $f(t)$ et ses n dérivées successives soient nulles pour $t \leq 0$, ce qui la rend plus restrictive que la dérivée de Riemann-Liouville qui n'exige que la seule causalité de $f(t)$.

La dérivée d'ordre α de Caputo noté e ${}^c_{t_0} D_t^\alpha$ est obtenue en deux étapes :

- Dériver la fonction $f(t)$ à un ordre entier, on trouve

$${}^{\text{RL}}_{t_0} D_t f(t) = {}^c_{t_0} D_t^1 f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0^+)$$

- Intégrer la fonction (I.25) obtenue à l'ordre non entier $n - \alpha$, on obtient la dérivée à l'ordre non entier α de Caputo définie par la formule

$${}^{\text{RL}}_{t_0} D_t^\alpha f(t) = {}^c_{t_0} D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0^+)$$

Où n est un nombre entier tel que : $n - 1 < \alpha < n$

Remarque

Les deux dérivées de Riemann-Liouville et Caputo sont reliées, c'est-à-critical, qu'il est concevable d'exprimer l'une en fonction de l'autre : Pour $t_0 = 0$, il existe les deux relations suivantes :

$${}^c_{t_0} D_t^\alpha f(t) = {}^{\text{RL}}_{t_0} D_t^a \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{(k-\alpha)}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} f^{(k)}(0^+) \right)$$

$${}^{\text{RL}}_{t_0} D_t^\alpha f(t) = {}^c_{t_0} D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0^+)$$

II.2.6. Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov

A la différence des deux premières définitions présentées, la dérivée de Grunwald-Letnikov est basée sur la définition usuelle de la dérivation entière :

$$D^1 f(t) = \frac{d}{dt} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$$

Le calcul des dérivées successives de la fonction $f(t)$ donne la généralisation de la formule (I.29) à l'ordre, $n \in \mathbb{N}$:

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} f(t-jh)$$

Une autre écriture est :

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh)$$

Où

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

La formule représente la dérivée d'ordre entier n , pour généraliser aux ordres non entiers on applique les propriétés de la fonction Gamma :

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \frac{-n(1-n)(2-n)\dots(j-1-1)}{j!}$$

Pour un nombre α non entier, et après application des propriétés de la fonction Gamma :

$$(-1)^j \binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)}$$

on obtient la définition de la dérivée de Grunwald-Letnikov suivante :

$$D_{GL}^{\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(-\alpha)} f(t - jh)$$

Interprétation

La dérivation au sens classique ou d'ordre entier an un sens physical make-up et géométrique, tous deux très clairs. Ce qui simplifie leur use pour résoudre des problèmes appliqués dans plusieurs domaines de la science. Malheureusement ce n'est pas le cas pour la dérivation d'ordre fractionnaire, et la question est restée sans réponse. Il est donc resté parmi les problèmes ouverts lors des différentes conférences internationales

II.3. Propriétés de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire

1. si $f(t)$ est une fonction analytique de t , alors sa dérivée fractionnaire ${}_0D_t^{\alpha} f(t)$ est une fonction analytique de t et α
2. Pour $\alpha=0$ l'opération ${}_0D_t^{\alpha} f(t)$ est l'opérateur identité :
 ${}_0D_t^{\alpha} f(t) = f(t)$
3. La différentiation et l'intégration fractionnaire sont des opérations linéaires:

$${}_0D_t^{\alpha} (af(t) + bg(t)) = a{}_0D_t^{\alpha} f(t) + b{}_0D_t^{\alpha} g(t)$$

4. La loi additive d'index :

$${}_0D_t^{\alpha} {}_0D_t^{\beta} f(t) = {}_0D_t^{\beta} {}_0D_t^{\alpha} f(t) = {}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

II.3.1 Opérateurs d'ordre fractionnaire :

On peut distinguer deux types d'opérateurs d'ordre fractionnaires : opérateurs analogiques et opérateurs numériques. Ces opérateurs sont des généralisations des opérateurs classiques d'ordre entier, ce qui leur donne une in addition to grande flexibilité dans la modélisation des systèmes constitutions

II.3.2 Opérateurs d'ordre fractionnaires analogiques :

L'intégrateur et dérivateur non entiers analogiques sont, respectivement, représentés standard les fonctions irrationnelles suivantes

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m}$$

$$G_D(s) = s^m$$

Avec $0 < m < 1$.

II.3.3 Opérateurs d'ordre fractionnaire numériques :

L'intégrateur et dérivateur non entiers numériques sont, respectivement, représentés par les fonctions irrationnelles suivantes :

$$G_R(s) = z^{-m}$$

$$G_A(s) = z^m$$

II.4 Propriétés structurelles des systèmes d'ordre fractionnaire

II.4.1 Stabilité

les valeurs propres de la matrice d'évolution A du système fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation On dit que le système fractionnaire d'ordre commensurable de l'équation est stable dans le sens 'limited input limited yield' (BIBO) si les conditions suivantes sont réalisées

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, 1 \leq i \leq n$$

Dans le cas des systèmes d'ordre commensurable rationnel ($\alpha = 1/Q$) cette condition devient

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{2Q}, 1 \leq i \leq n$$

II.4.2 Observabilité et contrôlabilité

Les deux résultats suivants peuvent être démontrés comme leurs similaires dans le cas d'ordre entier .Théorème 1: Un système fractionnaire d'ordre commensurable représenté standard l'équation d'état est observable si et seulement si la matrice d'observabilité M_0 suivante est une matrice de rang plein

$$M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix}$$

où N est la dimension de la matrice A.

II.5 Réponses temporelles par les fonctions de type de Mittag-Leffler

Pour une analyse plus générale dans le domaine temporel des systèmes d'ordre fractionnaires, un outil efficace appelé la fonction de Mittag-Leffler a été introduite. La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie comme :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

Sa $k^{\text{ième}}$ dérivée est donnée par :

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)(z^j)}{j! \Gamma(\alpha j + \alpha k + \beta)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Il est plus convenable d'introduire la fonction

$$\varepsilon_k(t, y; \alpha, \beta) = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(yt^\alpha) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

La transformée de Laplace de la fonction est donnée par :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \varepsilon_k(t, \pm y; \alpha, \beta) dt = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \pm y)^{k+1}} \quad \text{avec } (\text{Re}(s) > |y|^{1/\alpha})$$

II.6 Système d'ordre fractionnaire de relaxation

Dans ce contexte, le système d'ordre fractionnaire simple est défini comme étant l'équation différentielle fondamentale d'ordre fractionnaire suivante pour $0 < \alpha < 1$

$$(\tau_0)^\alpha \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} + y(t) = e(t)$$

sa fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]}$$

II.6.1 La réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle du système de la fonction (I.71) est de la forme [35]: 1; alors :=soit l'entrée une impulsion unité E(s)

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{H(\tau_i)}{(1 + s\tau_i)}$$

donc la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{1}{\tau_i} (H(\tau_i) \exp[-t/\tau_i])$$

II.6.2 La réponse indicielle

soit l'entrée un échelon unité : s 1 ; alors :=E(s)

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{H(\tau_i)}{s(1 + s\tau_i)}$$

donc la réponse indicielle est :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} H(\tau_i) (1 - \exp[-t/\tau_i])$$

II.7 Système d'ordre fractionnaire oscillatoire

Dans ce contexte le système d'ordre fractionnaire oscillatoire est défini comme étant l'équation différentielle fondamentale d'ordre fractionnaire suivante pour $1 < \alpha < 2$

$$(\tau_0)^\alpha \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} + y(t) = e(t)$$

sa fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]} \quad 1 < \alpha < 2$$

II.7.1 La réponse fréquentielle

Soit le système fractionnaire de la fonction de transfert suivante :

$G(s) = \frac{1}{1+(s\tau_0)^\alpha}$ on peut l'approximer lorsque $1 < \alpha < 2$ par la fonction suivante

$$G(s) = \frac{1}{1+(s\tau_0)^\alpha} \approx \frac{(1+s\tau_0)^{2-\alpha}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}, 1 < \alpha < 2, \tau = \frac{1}{\omega_n}$$

pour plusieurs valeurs de α est donnée dans la Figure II.2

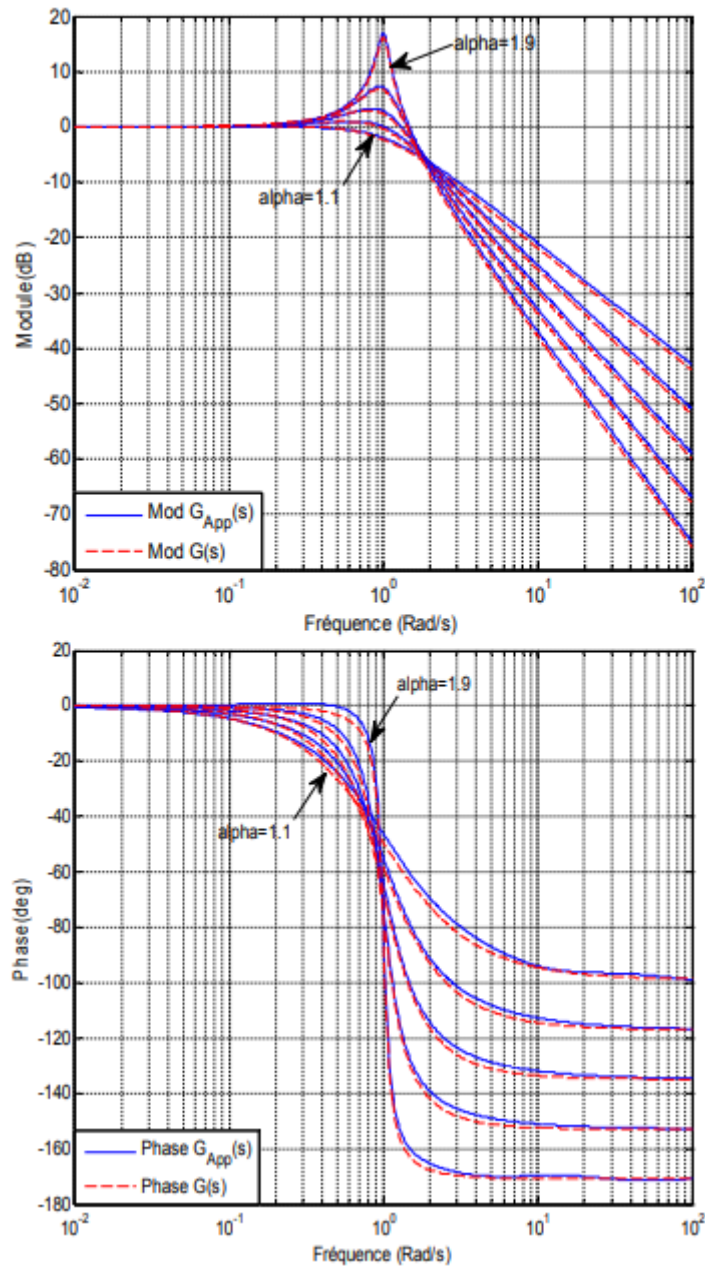


Figure 1 : La réponse fréquentielle

De la Figure II.2 on remarque de la réponse fréquentielle de la fonction et son approximation , du système d'ordre fractionnaire oscillatoire que les pentes sont entre 20dB et -40dB en variant l'ordre α . Les deux courbes

II.7.2 La réponse impulsionnelle

réponse impulsionnelle du système d'ordre fractionnaire oscillatoire, est donnée dans le domaine fréquentiel par la fonction de transfert suivante

$$Y(s) = \frac{(1 + s\tau_0)^{2-\alpha}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} R(s), R(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{(1 + s\tau_0)^{2-\alpha}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \approx \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

son approximation est :

$$Y(s) = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_i}}, \tau_0 = \frac{1}{\omega_n}$$

$$Y(j\omega) = \frac{Aj\omega + B}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + j\frac{\omega}{p_i}}$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse impulsionnelle de ce système est donnée par la relation suivante :

$$y(t) = \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{B^2 - 2AB\xi\omega_n + A^2\omega_n^2}{1 - \xi^2} \right)^{1/2} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left[\omega_n \sqrt{(1 - \xi^2)} t + \varphi\right] + \sum_{i=0}^N k_i p_i e^{-p_i t}$$

est donnée par: φ où la phase

$$\varphi = \arctg \frac{A - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{B - A\xi\xi_n}$$

La Figure II.3 montre la réponse impulsionnelle pour différentes valeurs de α :

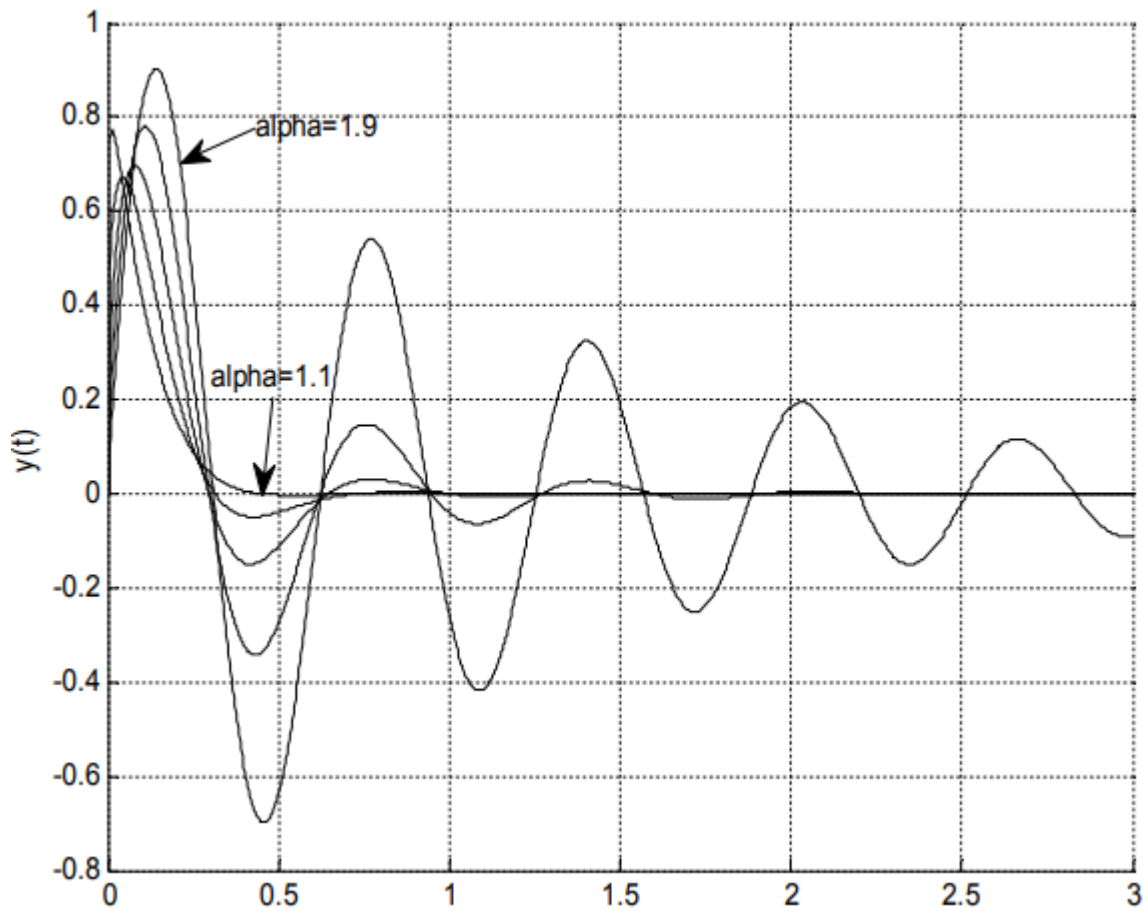


Figure 2 La réponse impulsionnelle du système

II.7.3 La réponse indicielle

La même chose pour la réponse indicielle avec : $E(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{(1 + s\tau_0)^{2-\alpha}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} E(s)$$

$$Y(s) = \frac{(1 + s\tau_0)^{2-\alpha}}{s((s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1)} \approx \frac{1}{s((s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1)} \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse indicielle de ce système est donnée par la relation suivante

$$y(t) = 1 + \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{B^2 - 2AB\xi\omega_n + A^2\omega_n^2}{1 - \xi^2} \right)^{1/2} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi_1) - \sum_{i=0}^N k_i p_i e^{-p_i t}$$

où la phase est donnée par:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{A - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{B - A\xi\omega_n} - \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$

La figure suivante montre le comportement de la réponse indicielle pour plusieurs valeurs de α :

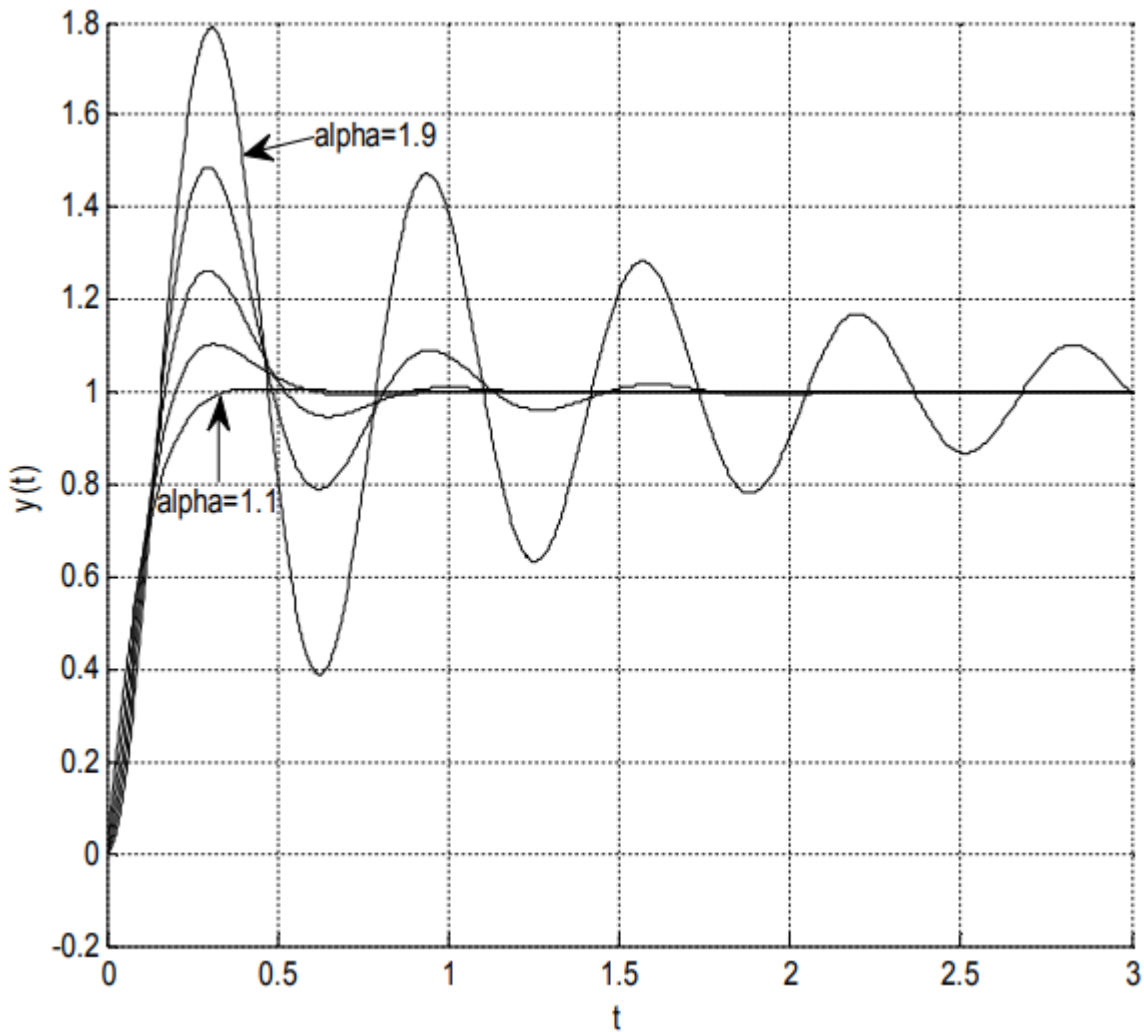


Figure 3 La réponse indicielle du système

II.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les définitions de base des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire ainsi que leurs représentations et propriétés. La stabilité de ces systèmes a été discutée en montrant la différence de cette notion par rapport au système d'ordre entier. Nous avons aussi présenté deux types de système d'ordre fractionnaire fondamental et leur approximation par des fonctions rationnelles, leur réponses temporelles et fréquentielles ont été dérivées à partir de ces approximations, ainsi que leur implémentation par des circuits analogiques.

Chapitre III :

III. Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire en utilisant l'identification

III Définitions :

Il existe plusieurs stratégies d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire standard des fonctions rationnelles. Les approximations disponibles dans le domaine s sont appelées des approximations analogiques ou des approximations du domaine fréquentiel. Dans la référence , on peut trouver un très bon liste de qualifications de ces méthodes d'approximation. Parmi ces méthodes on peut citer les méthodes suivantes :

- La méthode de Carlson.
- La méthode de Charef.
- La méthode d'Oustaloup
- La méthode de Matsuda

III.1 Approximation numérique des systèmes d'ordre fractionnaire :

La difficulté majeure des systèmes d'ordre fractionnaires est la simulation dans le domaine temporel car l'expression analytique de la sortie est difficile à implémenter, ce qui nécessite donc une approximation. Il y a trois types de méthodes d'approximation numérique :

Par calcul de l'expression analytique de la sortie du système

- Par approximation du modèle non entier par un modèle rationnel discret
- Par approximation du modèle non entier par un modèle rationnel continu puis la discrétisation de ce dernier

III.1.1 Approximation par calcul de l'expression analytique:

la méthode consiste à calculer la sortie du système d'ordre fractionnaire à partir de sa représentation modale qui est donnée par la fonction suivante :

$$H(s) = \sum_{l=1}^L \frac{A_l}{s^n - \lambda_l}$$

Où $l = 1, 2, \dots, L$ est la multiplicité de la valeur propre λ_l La sortie est donnée par la formule suivante :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A_l}{s^n - \lambda_l} \right\} * u(t) = h_l(t) * u(t)$$

L'expression analytique de la sortie n'est pas simple, puisqu'elle exige le calcul d'une intégrale compliquée. De plus, elle dépend de la précision utilisée dans le calcul du produit de convolution de l'entrée et $h_l(t)$.

III.1.2 Approximation par un modèle rationnel discret :

Le principe de cette méthode est de remplacer s , dans le modèle non entier, par son équivalent discret $w(z-1)$. Cette opération donne la fonction de transfert discrète suivante :

$$H(z) = \frac{b_1(w(z-1))^{n_{b1}} + \dots + b_j(w(z-1))^{n_{bj}}}{(w(z-1))^{n_{a1}} + \dots + a_L(w(z-1))^{n_{aL}}}$$

Où $w(z-1)$, peut être calculé de plusieurs méthodes. Parmi lesquelles on peut citer : Euler, Tustin, Simpson, et Al Alaoui :

i. Euler (Grunwald) :

$$s^n = \left(\frac{1}{T} (1 - z^{-1}) \right)^n = \frac{1}{T^n} \left(1 - nz^{-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^{-2} + \dots \right)$$

ii. Tustin :

$$s^n = \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^n = \left(\frac{2}{T} \right)^n (1 - 2nz^{-1} + 2n^2 z^{-2} + \dots)$$

iii. Simpson :

$$s^n = \left(\frac{3}{T} \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{1+4z^{-1}+z^{-2}} \right)^n = \left(\frac{3}{T} \right)^n (1 - 4nz^{-1} + 2n(4n+3)z^{-2} + \dots)$$

iv. Al Alaoui :

$$s^n = \left(\frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^n = \left(\frac{8}{7T} \right)^n \left(1 - \frac{8}{7}nz^{-1} + \left(-\frac{24}{49}n + \frac{32}{49}n^2 \right) z^{-2} + \dots \right)^n$$

L'inconvénient de ces méthodes est que l'ordre du modèle entier obtenu est élevé, et cela rend la simulation à temps réel dure à obtenir

III.1.3 Approximation en utilisant un modèle entier continu :

Dans ces méthodes la sortie du système non entier est calculée en utilisant un modèle entier équivalent. Le modèle entier est trouvé en utilisant des méthodes d'approximation continues des opérateurs fractionnaires par des modèles rationnels. Généralement l'analyse du modèle fractionnaire se fait dans une plage de fréquences limitée, donc le modèle d'ordre entier continu trouvé doit avoir la même dynamique dans la bande de fréquences. L'approximation du système se calcule en trois étapes :

- L'opérateur fractionnaire est représenté par un modèle non entier dans une plage de fréquences limitée $[wA \ wB]$.
- Le modèle obtenu est alors approximé par un modèle entier continu en utilisant une des méthodes qui seront détaillées plus tard dans ce chapitre.
- Par des méthodes de discrétisation classiques, le modèle entier obtenu sera discrétisé et de là sa sortie pourra être calculée.

III.2 Approximation analogique des systèmes d'ordre fractionnaire :

Dans le however de réaliser et implémenter des correcteurs ou simuler des systèmes d'ordre non entier, les fonctions de transfert d'ordre fractionnaire doivent être remplacées standard des modèles entiers, avec un comportement identiques à celui des fonctions fractionnaires et in addition to faciles à manipuler. Il existe plusieurs méthodes d'approximation qui utilisent des approches différentes, utilisant l'expansion de fonction continues (CFE : fonction utilisée pour l'évaluation de fonctions et converge in addition to rapidement), et des méthodes d'ajustement de courbes.

Dans la segment qui suit, nous allons présenter brièvement le principe de certaines de ces méthodes, dont les méthodes de Charef et Oustaloup qui seront détaillées véhicule elles sont les in addition to utilisées dans la littérature et les in addition to élaborées.

III.2.1 Méthodes d'approximation en utilisant l'expansion des fonctions continues

La méthode générale d'approximation de l'opérateur intégrateur fractionnaire $GI(s) = 1/s^m$ en utilisant la CFE, est donnée par les fonctions suivantes :

$$G_h(s) = \frac{1}{(1 + Ts)^m}$$

$$G_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^m$$

Où $G_h(s)$ est l'approximation en hautes fréquences, et $G_l(s)$ est l'approximation en basses fréquences

III.2.2 Méthode de Carlson :

La méthode est dérivée du processus régulier de Newton utilisé pour l'approximation itérative d'ordre α . La méthode se base sur la relation suivante :

$$\left(H(s)^{\frac{1}{\alpha}} - G(s)\right) = 0 \Rightarrow H(s) = (G(s))^\alpha$$

En posant $\alpha = 1/q$ et $m = q/2$ dans chaque itération, à partir de $H_0(s) = 1$ comme valeur initiale, l'approximation est obtenue par la formule suivante :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)}$$

III.2.3 Méthode de Matsuda :

Cette méthode est basée sur l'approximation d'une fonction irrationnelle standard une fonction rationnelle obtenue standard la CFE, et l'ajustement de la fonction d'origine dans un group de focuses logarithmiques espacés. En prenant les focuses s_k avec $k = 1, 2, \dots$. L'approximation prend la forme suivante :

$$H(s) = a_0(s) + \frac{s - s_0}{a_1 + \frac{s - s_1}{a_2 + \frac{s - s_2}{a_3 + \dots}}}$$

Avec

$$a_i = v_i(s_i)v_0(s) = H(s)v_{i+i}(s) = \frac{s - s_i}{v_i(s) - a_i}$$

III.2.4 Méthodes utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification

C'est les méthodes les plus utilisées, eIII.1t on va exposer dans ce qui suit les méthodes de Charef, appelée aussi méthode de la fonction de singularité, et la méthode d'Oustaloup.

III.2.4.1 Méthode de Charef : fonction de singularité:

La méthode de Charef a été élaborée pour l'approximation des opérateurs fractionnaires (intégrateur et dérivateur) standard des fonctions rationnelles, dans le however de les implémenter en correcteurs $PI \lambda D \mu$.

Le principe de cette méthode est que, pour une bande de fréquences donnée, l'opérateur est approximé standard une fonction PPF : Pôle a Puissance Fractionnaire (FPP : Fractional Power Pole), cette dernière est ensuite, approximée standard une fonction rationnelle en utilisant la méthode d'approximation de Charef des systèmes à un seul ordre fractionnaire, et celle des systèmes à ordres fractionnaires products

Mais avant d'exposer les méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire, on présente la méthode d'approximation des systèmes non entiers

III.2.4.1.1 Approximation des systèmes du 1^{er} ordre fractionnaire :

Dans le domaine fréquentiel, un système du 1er ordre fractionnaire (single fractal system) peut être modélisé par la fonction de transfert PPF suivante :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_t}\right)^m}$$

Où $1/PT$ est la constante de temps, et $0 < m$

Dans le diagramme de Bode de $H(s)$ la ligne avec une pente de $-20m \text{ dB/dec}$ est approximée par un nombre de zig zag interconnectés, avec des pentes alternées entre 0 dB/dec et -20 dB/dec comme le montre la figure (II.1). Les propriétés en hautes et basses fréquences, de la fonction de transfert du modèle du 1er ordre fractionnaire, montrent que les première et dernière singularités de l'approximation doivent être des pôles. On peut donc réécrire comme suit :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

Avec $N + 1$ est le nombre total de singularités qui est déterminé par la bande de fréquences du système.

Pour une bande de fréquences finie, le nombre de singularités sera fini. peut être écrite comme suit :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

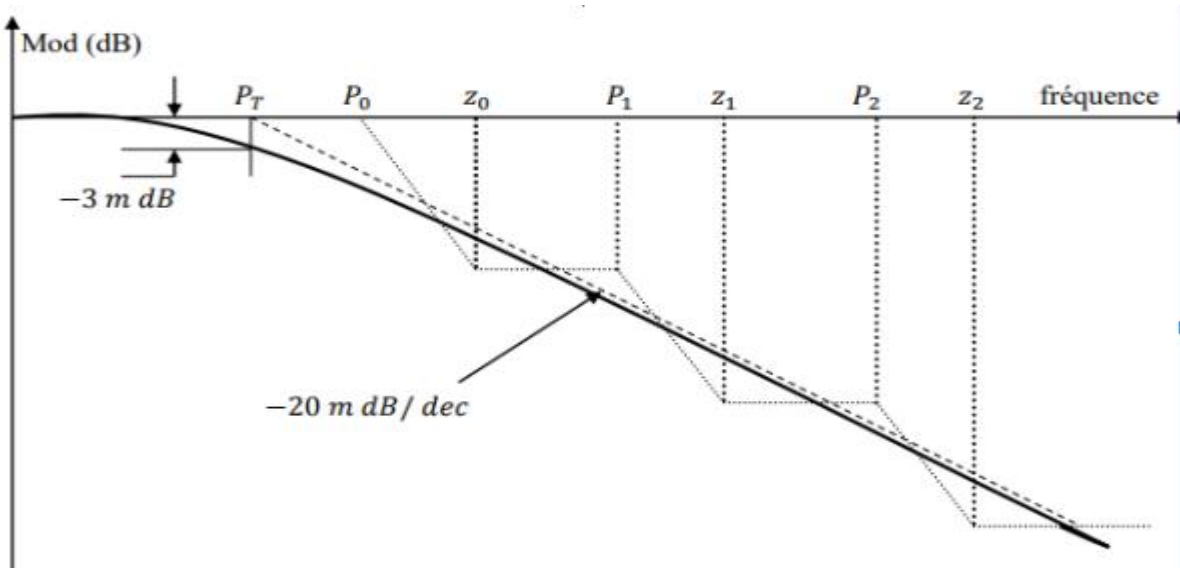


Figure 4 : Diagramme de Bode

En supposant que l'erreur entre le crisscross et la ligne désirée soit y (dB) alors les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être trouvés comme suit :

- Le deuxième pôle : $P_1 = z_0 10^{\left[\frac{y}{20m}\right]}$
- Le deuxième zéro : $z_1 = P_1 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]}$
- Le N eme zéro : $z_{n-1} = P_{N-1} 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]}$
- Le $(N + 1)$ eme pôle : $P_N = z_{N-1} 10^{\left[\frac{y}{20m}\right]}$

Où P_T est la fréquence correspondant à $-3m$ dB comme dans la figure (I.1), P_0 est la première singularité qui est déterminée par y (dB) et P_N est la dernière singularité, déterminée par N .

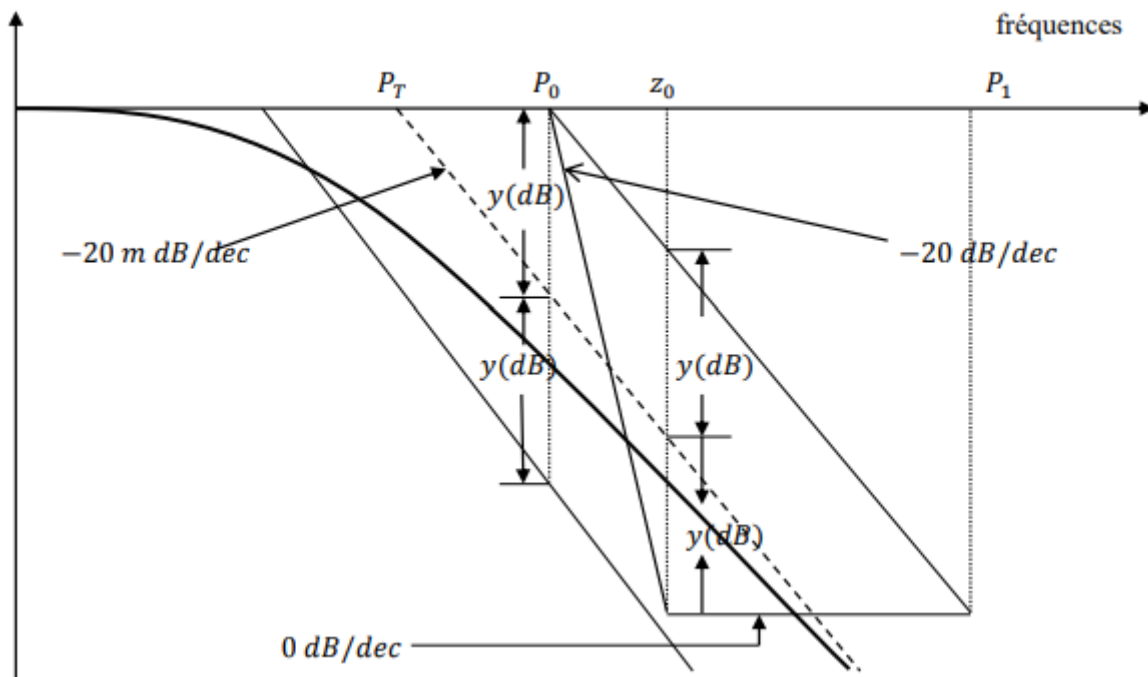


Figure 5 : Choix des singularités pour l'approximation

Posons :

$$a = 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]}$$

$$b = 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]}$$

a et b sont appelés les rapports de position.

Alors

$$ab = 10^{\lfloor y/10m(1-m) \rfloor}$$

De là on peut déduire les valeurs des pôles et des zéros de la fonction de singularité, qui sont définis par les relations suivantes :

$$p_i = (ab)^i p_0$$

$$z_i = (ab)^i a p_0$$

Pour $i = 1, 2, 3, \dots$

Donc la fonction rationnelle approximée s'écrit sous la forme :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a P_0}\right)}{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}\right)}$$

Avec :

$$N = \text{integer} \left(\frac{\log_{10} \left(\frac{\omega_{\max}}{P_0} \right)}{\log_{10}(ab)} \right) + 1$$

Où ω_{\max} est la fréquence maximum de la bande de fréquences de travail spécifiée, et les deux derniers pôles doivent satisfaire la condition suivante :

$$PN-1 < \omega_{\max} < PN$$

III.2.4.1.2 Approximation des systèmes à ordres fractionnaires multiples :

Un système à ordres fractionnaires multiples (multiple-fractal system), peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par la PPF multiple comme suit

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^p \left(1 + \frac{s}{P_{T_i}}\right)^{m_i}}$$

Où $p_{T_i} < p_{T_{i+1}}$ et $0 < m_i < 1$ pour $i = 1, 2, \dots, p$ sont les fréquences de coupure.

Comme pour le système du 1er ordre fractal, chaque section du système multiple peut être approximée par un nombre de singularités. Donc la fonction (II.28) peut être approximée comme

suit :

$$H(s) = \frac{\prod_{i_1=0}^{N_1} \left(1 + \frac{s}{z_{i_1}}\right) \prod_{i_2=0}^{N_2} \left(1 + \frac{s}{z_{i_2}}\right) \dots \prod_{i_p=0}^{N_p} \left(1 + \frac{s}{z_{i_p}}\right)}{\prod_{i_1=0}^{N_1} \left(1 + \frac{s}{P_{i_1}}\right) \prod_{i_2=0}^{N_2} \left(1 + \frac{s}{P_{i_2}}\right) \dots \prod_{i_p=0}^{N_p} \left(1 + \frac{s}{P_{i_p}}\right)}$$

Les singularités sont choisies de telle sorte à avoir une alternance entre les pôles et les zéros, pour assurer que les résidus soient réels et positifs. On commence par choisir les pôles pour chaque section.

$$P_n = (ab)^n p_0, \quad n = 1, 2, \dots, M$$

$$M = N_1 + N_2 + \dots + N_p + (p - 1)$$

Les zéros sont choisis en fonction des deux pôles qui leur seront adjacents. En effet, puisque le processus débute standard un pôle P_0 , chaque area doit se terminer standard un zéro pour que la area lui succédant débute standard un pôle. Les zéros sont donc générés standard les fonctions suivantes :

- 1 ère section : $z_{i_1} = (ab)^{i_1} a_1 P_0$ $i_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1$
- 2 ème section : $z_{i_1} = (ab)^{(N_1+1+i_2)} a_2 P_0$ $i_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2$
- P ème section : $z_{i_2} = (ab)^{(N_1+N_2+\dots+N_{p-1}+(p-1)+i_p)} a_p P_0$, $i_p = 0, 1, 2, \dots, N_p$

Où N_1, N_2, \dots, N_p sont déterminés de la même façon que pour le système du 1er ordre fractionnaire, c'est-à-dire, en fixant la bande de fréquences et l'écart y (dB) désiré. Et avec (ab) constant pour tout le système. On aura donc l'approximation du système suivante :

$$H(s) \approx \sum_{n=0}^M \frac{k_n}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^n P_0}\right)}$$

Avec

k_n

$$= \frac{\prod_{i_1=0}^{N_1} \left[1 - \frac{(ab)^{n-i_1}}{a_1}\right] \prod_{i_2=0}^{N_2} \left[1 - \frac{(ab)^{n-(N_1+1+i_2)}}{a_2}\right] \dots \prod_{i_p=0}^{N_p} \left[1 - \frac{(ab)^{n-(N_1+\dots+N_{p-1}+(p-1)+i_p)}}{a_p}\right]}{\prod_{i=0}^M [1 - (ab)^{n-1}]}$$

III.2.4.1.3 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

Cette méthode est efficace et effortless à utiliser dont le yet est d'approximer standard une fonction rationnelle l'intégrateur non entier. Dans un chief lieu, l'opérateur est modélisé standard une fonction PPF dans une bande de fréquence d'utilité pratique. Ensuite, cette dernière est approximée standard une fonction rationnelle en utilisant la méthode de Charef exposée dans la segment précédente. Donc avec cette méthode on peut atteindre n'importe quelle précision désirée sur n'importe quelle bande de fréquences . Pour une bande de fréquences d'utilité pratique donnée $[\omega_l \ \omega_h]$, l'opérateur intégrateur présenté peut être modélisé standard la fonction de transfert PPF suivante :

$$G(s) = \frac{K_l}{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)\right)^m}$$

En supposant que $\omega \in [\omega_l \ \omega_h]$, on a $\omega \gg \omega_c$, alors :

$$G(s) = \frac{K_l}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{K_l \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} = G_l(s)$$

Avec $KI = 1 \ \omega_c \ m$ et ω_c est la fréquence de coupure obtenue dans le diagramme de Bode à $-3 \ m \ dB$ qui est calculée par : $\omega_c = \omega_l \sqrt{10[\varepsilon/10m] - 1}$ où ε est l'erreur maximale permise entre les pentes de l'intégrateur d'ordre fractionnaire et sa fonction PPF dans une bande fréquences donnée. Pour représenter la fonction par un modèle temps-invariant, on va l'approximer par la méthode de la fonction de singularité vue dans la section précédente . La méthode consiste en l'approximation de la pente à $-20m \ dB/dec$, dans le diagramme de Bode, par une alternance de pentes à $-20 \ dB/dec$ et $0 \ dB/dec$. Cette dernière correspond à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négatif du plan complexe S .

$$P_0 < z_0 < P_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < P_N$$

On obtient l'approximation suivante :

$$G(s) = \frac{K_l}{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)\right)^m} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \cong K_l \prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)$$

Obtenue en choisissant y et ω_{max} , qui peut être fixée à $100 \ \omega_h$, et avec

$$P_0 = \omega_c 10^{y/20m} \text{ et } z_0 = aP_0$$

$$G_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)}$$

Pour voir la contribution de chaque pôle, on décompose la fonction en somme de fractions simples (ou résidus). On obtient :

$$G_I(s) = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)}$$

Avec

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{i-j}\right)}$$

III.2.4.1.4 Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire :

Dans le yet d'implanter des correcteurs d'ordre fractionnaire, la méthode d'approximation de l'intégrateur a été étendue au dérivateur d'ordre fractionnaire, et de même la PPF a été étendue à la ZPF : Zéro à Puissance Fractionnaire (FPZ : Fractional Power Zero). Pour une bande de fréquences d'utilité pratique donnée, le dérivateur d'ordre fractionnaire, peut être modélisé standard la fonction ZPF suivante : $G(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m$

Avec $KD = \omega c$ et ωc est la fréquence de coupure obtenue dans le diagramme de Bode à $-3 m \text{ dB}$ qui est calculée par : $\omega_c = \omega_l \sqrt{10[\varepsilon/10m] - 1}$ où ε est l'erreur maximale permise entre les pentes du dérivateur d'ordre fractionnaire et sa fonction ZPF dans une bande fréquences donnée

Pour représenter la fonction (II.) par un modèle temps-invariant, on va l'approximer par la méthode des singularités vue précédemment. Elle consiste dans ce cas, en l'approximation de la pente à $20 m \text{ dB/dec}$ du diagramme de Bode de la ZPF, par une succession de pentes à 20 dB/dec et 0 dB/dec . Elles correspondent à une alternance de zéros et de pôles sur l'axe réel négatif du plan complexe S . Comme suit

$$P_0 < z_0 < P_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < P_N$$

On obtient l'approximation suivante :

$$G(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m = K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

De même que pour l'intégrateur d'ordre fractionnaire, les zéros et les pôles de l'approximation sont en mouvement géométrique. En spécifiant y et ω_{max} , peut être fixée à $100 \omega_h$. On détermine les paramètres suivants :

$$z_0 = \omega_c 10^{(y/20m)} \text{ et } P_0 = az_0$$

En remplaçant P_i et z_i par leurs formules respectives, (II.) et (II.), on obtient l'approximation suivante

$$G_D(s) = s^m = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)}$$

Le calcul des résidus de la fonction donne la formule suivante:

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{k_i s}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}\right)}$$

Avec $G_0 = KD$ et

$$k_i = -\frac{K_D}{P_0(ab)^i} \frac{\prod_{j=0}^N (1 - a(ab)^{i-j})}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{i-j})}$$

III.2.4.2 Méthode d'Oustaloup

La méthode est basée sur l'approximation standard pôles et zéros récursifs de l'opérateur de dérivation non entière. L'objectif de cette méthode est d'approcher l'opérateur d'intégration ou de dérivation non entier standard un modèle entier borné en fréquence de aspect finie. Cette estimate nécessite deux étapes :

- La troncature fréquentielle de l'opérateur d'intégration ou de dérivation
- L'approximation de l'opérateur non entier borné en fréquence par un modèle entier

Dérivateur généralisé :

Le dérivateur généralisé est défini par la fonction de transfert suivante :

$$D(s) = \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^m$$

Où $m \in \mathcal{R}$ et ω_c est appelée fréquence transitionnelle. Ainsi, pour des ordres strictement positifs la connection (I définit un dérivateur d'ordre non entier et pour des ordres strictement négatifs un intégrateur d'ordre non entier

En head lieu, on effectue une troncature, elle consiste à limiter le comportement différentiel de (s/ω_c) , sur l'intervalle $[\omega_A, \omega_B]$ centré sur ω_c . En réalité, la troncature sera effectuée sur l'intervalle in addition to huge $[\omega_l, \omega_h]$, pour in addition to de précision.

Avec

$$\omega_l \ll \omega_A \text{ et } \omega_h \gg \omega_B$$

On introduit alors, le dérivateur d'ordre fractionnaire borné en fréquence proposé par Oustaloup.

$$D_{bf}(s) = \left(C_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_l}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, -1 < m < 1$$

Ou

$$C_0 = \frac{\omega_l}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_h} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\omega_h \omega_l}$$

Pour assurer un gain unitaire à la fréquence ω_c

Dans une seconde phase, l'approche consiste à approximer le dérivateur borné en fréquence, par une distribution récursive de pôles et de zéros réels. Ce qui donne un transfert d'ordre entier.

$$D_{bf}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s)$$

Ou

$$D_N(s) = \left(\frac{\omega_c}{\omega_h} \right)^m \prod_{i=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{p_i}}$$

z_i et p_i représentent les zéros et les pôles de rang i ; ces $N + 1$ paires de zéro-pôle sont déterminés par les relations récursives suivantes :

$$\frac{p_i}{z_i} = \alpha > 0$$

$$\frac{z_{i+1}}{P_i} > \eta > 0$$

$$\frac{z_{i+1}}{z_i} = \frac{P_{i+1}}{P_i} = \alpha\eta > 1$$

Les facteurs α et η sont appelés facteurs récurrents. Et ils donnent un rapport constant $\alpha\eta$ entre deux pôles ou deux zéros consécutifs. Et N est généralement fixé de telle sorte à avoir $\alpha\eta$ approximativement égal à 5

La figure suivante représente le diagramme asymptotique de Bode de $DN(s)$, ce dernier est lissé pour aboutir au diagramme de $Dbf(s)$

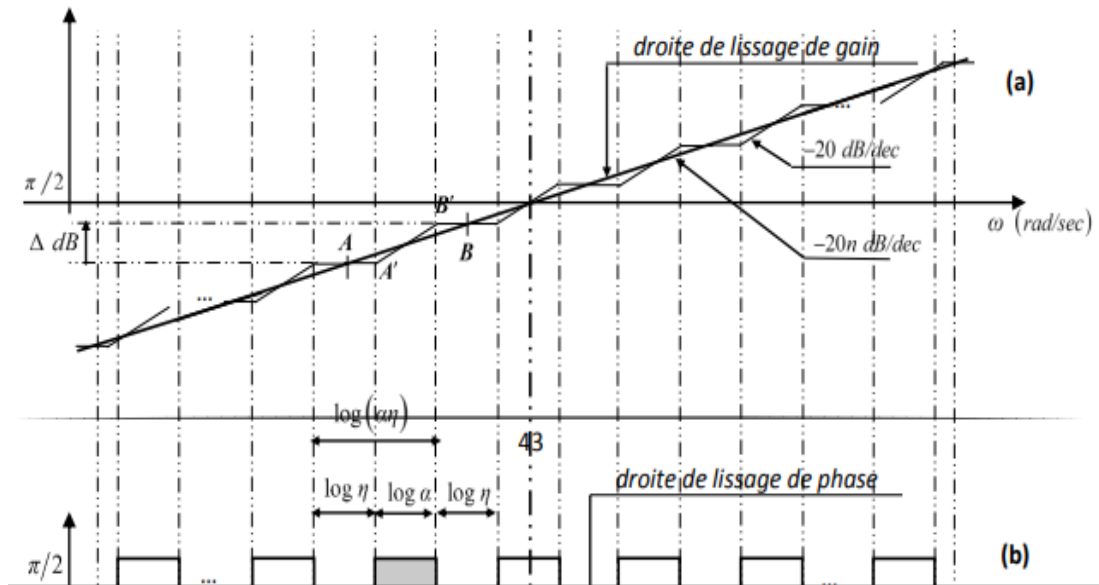


Figure 6 :Diagramme asymptotique de Bode

A partir des pentes des deux segments AB et $A'B'$ qui sont données respectivement par :

$$20\text{dB/dec} = \frac{\Delta dB}{\log(\alpha) + \log(\eta)}$$

$$20\text{dB/dec} = \frac{\Delta dB}{\log(\alpha)}$$

On peut déduire, en effectuant leur rapport, la relation entre l'ordre m et les facteurs récurrents α et η :

$$m = \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha\eta)}$$

On peut aussi, à partir du diagramme précédent déduire les formules suivantes :

$$\frac{\omega_h}{\omega_l} = (\alpha\eta)^{2N+1} \Rightarrow (\alpha\eta) = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{1}{2N+1}} \quad \alpha = (\alpha\eta)^m \text{ et } \eta = (\alpha\eta)^{1-m}$$

Les pôles et zéros de rang i peuvent être, aussi, écrits sous la forme suivante

$$\begin{cases} z_i = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{i+N+1/(2-n/2)}{2N+1}} \omega_l \\ p_i = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{i+N+1/(2+n/2)}{2N+1}} \omega_l \end{cases}$$

L'intérêt de cette méthode d'approximation réside dans sa simplicité de mise en œuvre. Si l'ordre $m > 1$ ou $m < -1$, seule la partie non entière est approchée par un modèle entier.

A défaut de l'expression analytique de la réponse indicelle d'un système non entier, la réponse issue de l'approximation par un grand nombre de pôles et de zéros récursifs et une large bande fréquentielle peut être utilisée comme sortie de référence

Néanmoins, cette approche est moins efficace quand l'ordre s'approche de 1. deux nouvelles approximations, moins sensibles à l'ordre, sont présentées . La première inclue deux pôles et un zéro de plus, et la deuxième inclue un pôle et deux zéro de plus.

III.3 Approximation par une fonction rationnelle de Système d'ordre fractionnaire de relaxation

Dans l'étude des diélectriques, K. S. Cole et R. H. Cole ont constaté que les fonctions de transfert de dispersion/relaxation d'un grand nombre de matériaux peuvent être modelées par l'équation suivant

$$G(s) = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^\alpha]}$$

où $1/\tau_0$ est la fréquence caractéristique de relaxation, $s=j\omega$ est la fréquence complexe et α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. Il est aussi connu que la fonction de distribution des temps de relaxation $H(\tau)$ peut être obtenue directement de la fonction de transfert comme

$$G(s) = \int_0^\infty \frac{H(\tau)}{1 + s\tau} d\tau$$

; K. S. Cole et R. H. Cole ont trouvé que la fonction de distribution des temps de relaxation pour leur modèle de l'équation

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} = \int_0^\infty \frac{H(\tau)}{1 + s\tau} d\tau$$

avec

$$H(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(1-\alpha)\pi]}{\left\{ \cosh\left[\alpha \log\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)\right] \right\} - \cos[(1-\alpha)\pi]} \right]$$

pour $\alpha = 0.2$ et $\tau_0 = 10$. La Figure III.1 montre le tracé de cette fonction de distribution des temps de relaxation $H(\tau)$.

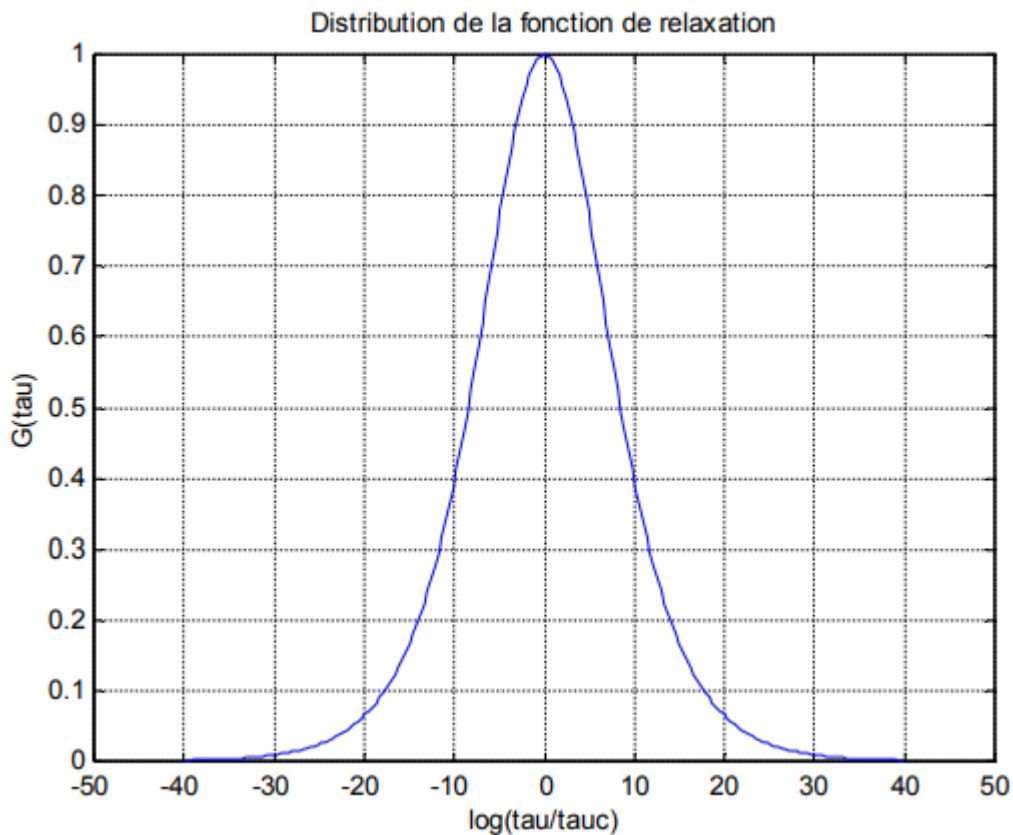


Figure 7 Distribution de la fonction de temps de relaxation

par une fonction rationnelle commence par l'échantillonnage de la fonction de distribution des temps de relaxation $H(\tau)$ dans une bande fréquentielle d'intérêt pratique $[0, \omega_H]$ en points équidistants sur une échelle logarithmique et τ_i ($i=1, 2, \dots, 2N-1$) comme suit

$$H(\tau) \cong H_s(\tau) = \sum_{i=1}^{2N-1} H(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i)$$

où $\tau_i = \tau_N \lambda^{N-i}$ pour $i = 1, 2, \dots, 2N - 1$, et λ est un nombre constant plus grand que l'unité, est défini comme rapport d'un pole au pole précédent où:

$$\lambda = \frac{\tau_i}{\tau_{i+1}} = \frac{p_{i+1}}{p_i} \quad i = 1, 2, \dots, 2N - 2$$

avec les pôles $p_i = \frac{1}{\tau_i}$, pour $i = 1, 2, \dots, 2N - 1$. Substituant l'équation

$$G(s) \cong \int_0^\infty \frac{\sum_{i=1}^{2N-1} H(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i)}{1 + s\tau} d\tau = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{H(\tau_i)}{1 + s\tau_i}$$

Donc on peut écrire:

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{H(\tau_i)}{1 + s\tau_i} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

où p_i sont les pôles de l'approximation donnée par :

$$p_i = \frac{1}{\tau_i} = (\lambda)^{(i-N)} p_0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, 2N - 1$$

Sachant que $p_0 = \frac{1}{\tau_0}$ et $\lambda = \frac{p_{i+1}}{p_i} =$ rapport d'un pole au pole précédent, les K_i sont les résidus des pôles donnés par la relation suivante :

$$k_i = H(\tau_i) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(1 - \alpha)\pi]}{\cosh\left[\alpha \log\left(\frac{\tau_i}{\tau_0}\right)\right] - \cos[(1 - \alpha)\pi]} \right] \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, 2N - 1$$

Pour une fréquence d'approximation ω_{\max} qui peut être choisie 1000, avec $[0, \omega_h]$ est une bande de fréquence d'intérêt pratique, le nombre N est déterminé comme suit

$$N = \text{Integer} \left(\frac{\log(\tau_0 \omega_{\max})}{\log(\lambda)} \right) + 1$$

III.4 Approximation par une fonction rationnelle de Système d'ordre fractionnaire oscillatoire

La fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire fondamental est :

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha}$$

Cette fonction de transfert sera approximée à la forme de l'équation suivante

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^\alpha} \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-\alpha}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}, \quad \text{pour } 1 < \alpha < 2$$

$$G(s) \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-a}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}$$

$1 < \alpha < 2 \Rightarrow 0 < 2 - \alpha < 1$ et $(1 + s\tau_0)^{2-\alpha}$ est un ZPF (zéro à puissance fractionnaire)

Pour représenter un système d'ordre fractionnaire oscillatoire par un modèle d'un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer pour une bande de fréquence limitée d'intérêt pratique $[0, w_h]$ Pour cela on doit approximer le zéro à puissance fractionnaire (ZPF) par une fonction rationnelle dans la bande de fréquence $[0, w_h]$

$$(1 + s\tau_0)^{2-\alpha} = \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

$G(s) = \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}$; c'est un système du second ordre régulier.

où : $z_0 < p_0 < z_1 < \dots < z_N < p_N$

$$z_i = (ab)^i z_0 \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

$$p_i = (ab)^i a z_0 \quad i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_0 = \omega_c \sqrt{b}; \text{ premier zéro.}$$

$$a = 10^{\lfloor y^{10(1-(2-a))} \rfloor}, b = 10^{\lfloor y^{10(2-a)} \rfloor}, ab = 10^{\lfloor y^{10(2-a)(-1+a)} \rfloor}, N = \text{Integer} \left(\frac{\log \left(\frac{\omega_{\max}}{z_0} \right)}{\log(ab)} \right) + 1$$

En remplaçant l'approximation du ZPF

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^a} \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-a}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \approx \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

$$G(s) \approx \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)}$$

Par décomposition en éléments simples on obtient la forme suivante :

$$G(s) = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad k_i (i = 0, 1, \dots, N)$$

pour avoir B : posons $s=0$

$$G(0) = 1 = B + \sum_{i=0}^N k_i$$

$$\Rightarrow B = 1 - \sum_{i=0}^N k_i$$

pour avoir A : calculons la limite suivante :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = 0 \quad \text{donc on a :}$$

$$A = -\tau_0^2 \sum_{i=0}^N k_i p_i, \tau_0 = \frac{1}{\omega_n}$$

$$A = -\frac{1}{\omega_n^2} \sum_{i=0}^N k_i p_i$$

$$k_i = G(s)|_{s=-p_i}$$

k_i ($i=0,1,\dots,N$) ; sont les résidus des pôles qui peuvent être calculés comme suit :

$$k_i = \frac{1}{(a\sqrt{b}(ab)^i)^2 - 2\xi(a\sqrt{b}(ab)^i) + 1} \frac{\prod_{j=0}^N (1 - a(ab)^{i-j})}{\prod_{j=0}^N (1 - (ab)^{i-j})}$$

$$G(s) = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_i}}$$

- **Conclusion**

La synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire nécessite leur approximation à des modèles d'ordre entier. Dans ce chapitre, nous avons fait un exposé théorique des différentes méthodes d'approximation connues dans la littérature.

Tout d'abord, on s'est brièvement intéressé aux méthodes d'approximation numériques. Puis on s'est intéressé aux méthodes d'approximation analogiques notamment les méthodes de Charef et d'Oustaloup, auxquelles nous avons porté un intérêt particulier et que nous avons détaillées.

Chapitre IV

IV. Applications : Simulation et étude comparative

IV.1 Introduction :

- Caractéristiques dynamiques d'un procédé

IV.1. a. Temps de réponse

Elle traduit pratiquement la durée transitoire. Plus précisément, elle s'exprime par le temps de réponse T_r ou temps d'établissement, qui est le temps mis par la mesure pour atteindre sa valeur définitive à $\pm 5\%$ de sa variation tout en se maintenant dans cette zone des $\pm 5\%$.

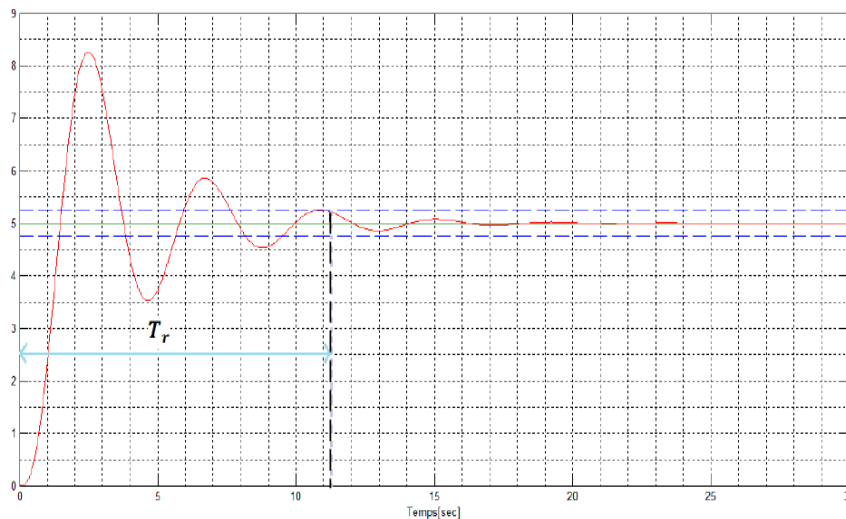


Figure 8: Représentation graphique du temps de réponse .

- Les deux lignes pointillées horizontales sur le graphique de la Figure IV.1 représentent la valeur supérieure et inférieure de 5% standard affinity à la valeur finale. Il est à noter que le critère de temps de réponse peut se comporter de manière non linéaire. Effectivement, si la dernière swaying entre dans le passage way à cause d'une baisse de child adequacy, alors elle fera baisser rapidement la valeur du critère.

IV.1.b. Temps de montée

Le temps de montée est la mesure du temps écoulé entre l'échelon de consigne et le premier passage de la sortie à 90% de la valeur finale. Le graphique sur la Figure IV.2 présente une valeur de la sortie atteint 90% de la valeur finale.

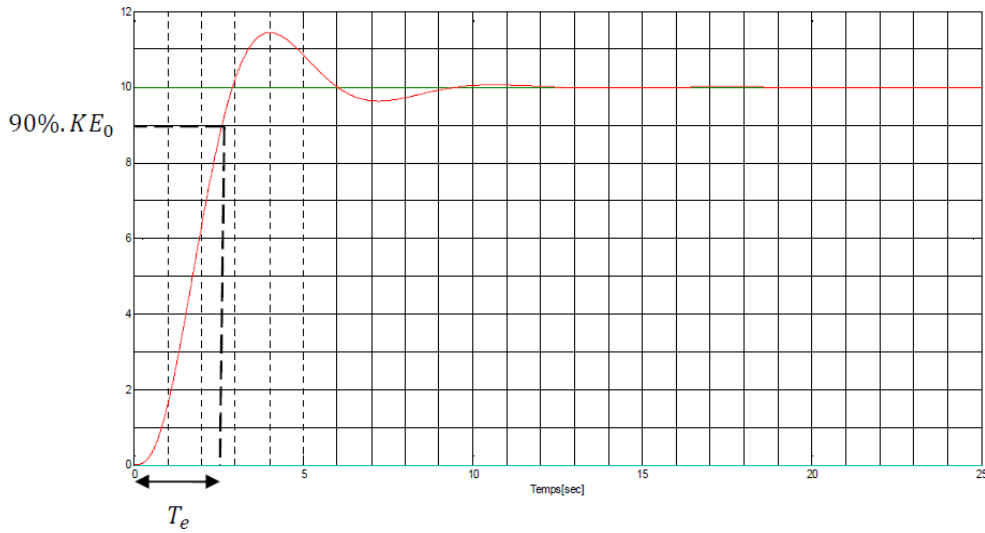


Figure 9: Représentation graphique du temps de montée.

IV.1.c. Dépassement

Le dépassement se produit si la sortie du système sort à certains instants de l'intervalle [valeur initiale, valeur finale], et généralement est donné en pourcentage. L'équation du dépassement est la suivante :

$$\text{Dépassement (\%)} = \frac{D_1 \times 100}{\Delta M}$$

La Figure IV.3, présente le dépassement lors d'un changement de consigne en échelon ou D_1 représente le dépassement maximal

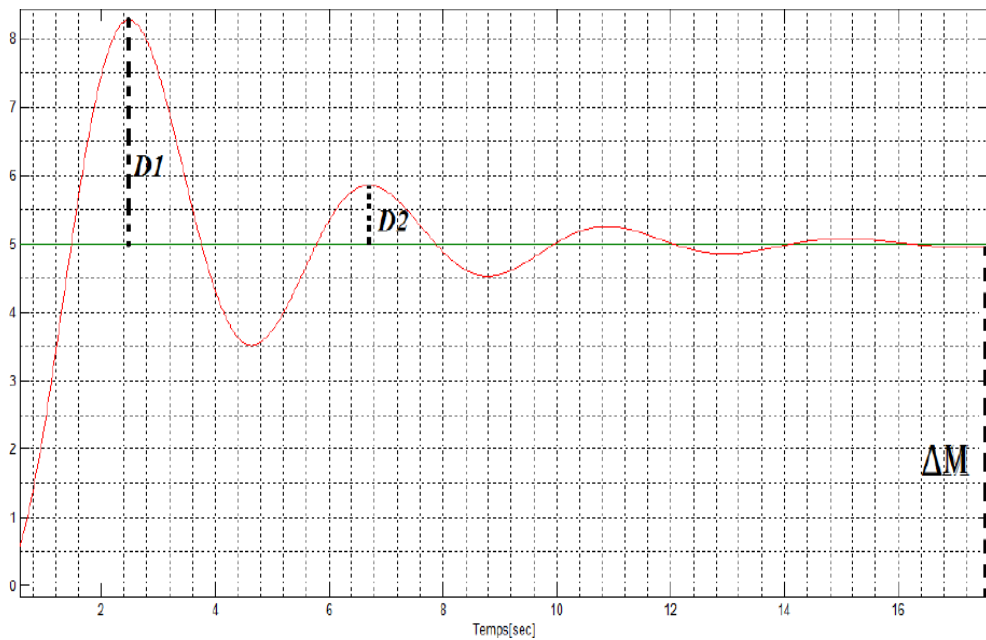


Figure 10 : Représentation graphique du dépassement.

Le chief dépassement permet de qualifier la stabilité d'un système. Par ailleurs, celui-ci sera signifiant, in addition to le système sera proche de l'instabilité. Dans certaines régulations, aucun dépassement n'est toléré, dans d'autre un dépassement inférieur à 15 % est considéré comme adéquate.

IV.2. Performances des systèmes

Pour définir l'objectif global d'une régulation, les critères qualitatifs du cahier des charges sont traduits par des critères quantitatifs, les qualités exigées les plus rencontrées industriellement sont la stabilité, la précision et la rapidité.

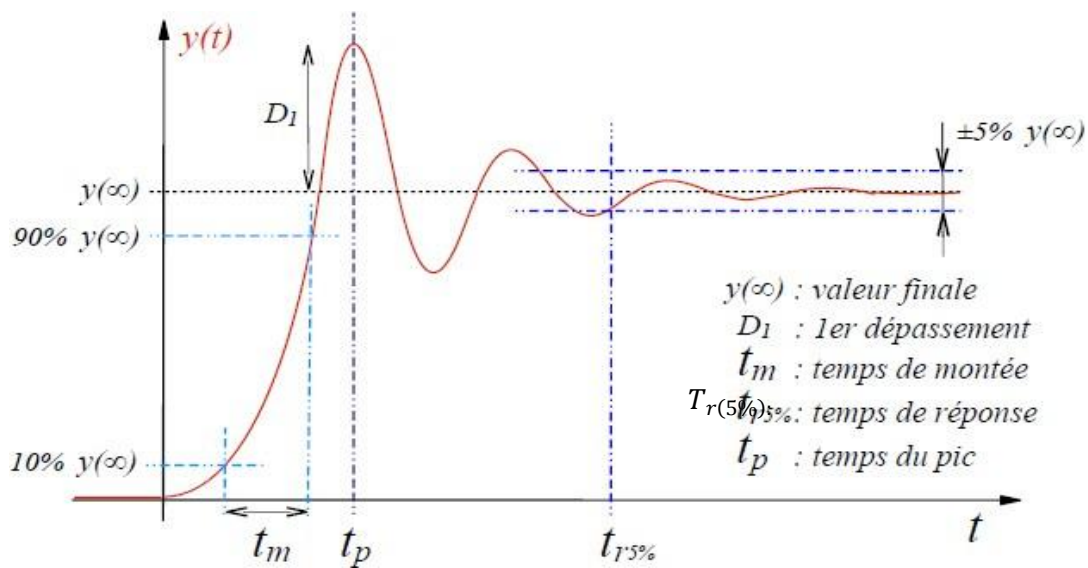


Figure 11: Performances d'un système de commande.

IV.2.b. Rapidité

La rapidité quantifie le temps de réponse du système. Elle correspond au temps de réaction de la sortie par rapport à la consigne. Le temps mis par la réponse pour ne plus dépasser 5% de la valeur finale. Ce temps est retenu comme critère de rapidité 5%.

IV.2.c. Précision

La précision quantifié l'erreur lorsque l'équilibre est atteint, Avec l'entrée $e(t)$ et la fight $s(t)$ de même nature. Autrement, un système est précis si la fight suit la consigne en toutes circonstances avec un écart inférieur à la valeur définie dans un cahier des charges. On peut trouver deux types de précision :

- **Précision dynamique** : caractérisé pendant le régime transitoire essentiellement pour une sollicitation en échelon de position. Elle est liée directement au degré de la stabilité (marge de gain et marge de phase).
- **La précision statique** : a pour but d'évaluer l'aptitude du système à suivre. Elle est caractérisée standard la différence en régime long-lasting entre l'entrée (consigne) et la sortie (réponse), cette différence appelée écart ou erreur.
- **Erreur statique** : on appelle erreur statique la valeur lorsque le temps tend vers l'infini de $\varepsilon(t)$ pour une réponse d'asservissement à un échelon unitaire.
- **Erreur de vitesse** : on appelle erreur de vitesse la valeur de lorsque le temps tend vers l'infini pour une réponse d'asservissement à une rampe unitaire.

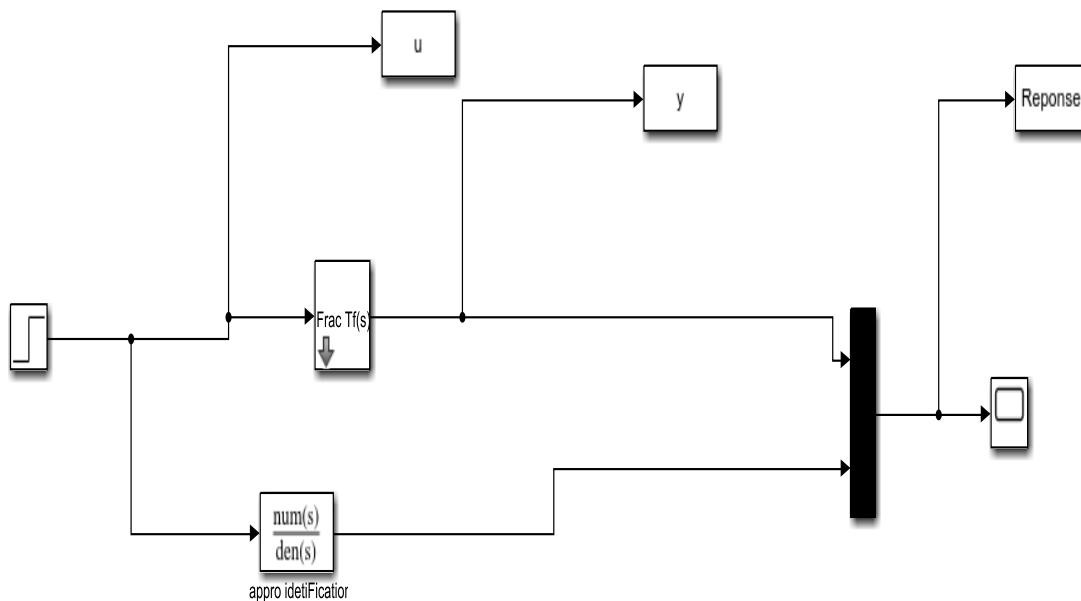
IV.2 Applications

IV.2.A Système 1 :

On donne le système fractionnaire typique de l'équation suivante

$$G = \frac{1}{s^{2.5} + 2 * s^{1.3} + 2}$$

IV.A.1 Approximation par identification:



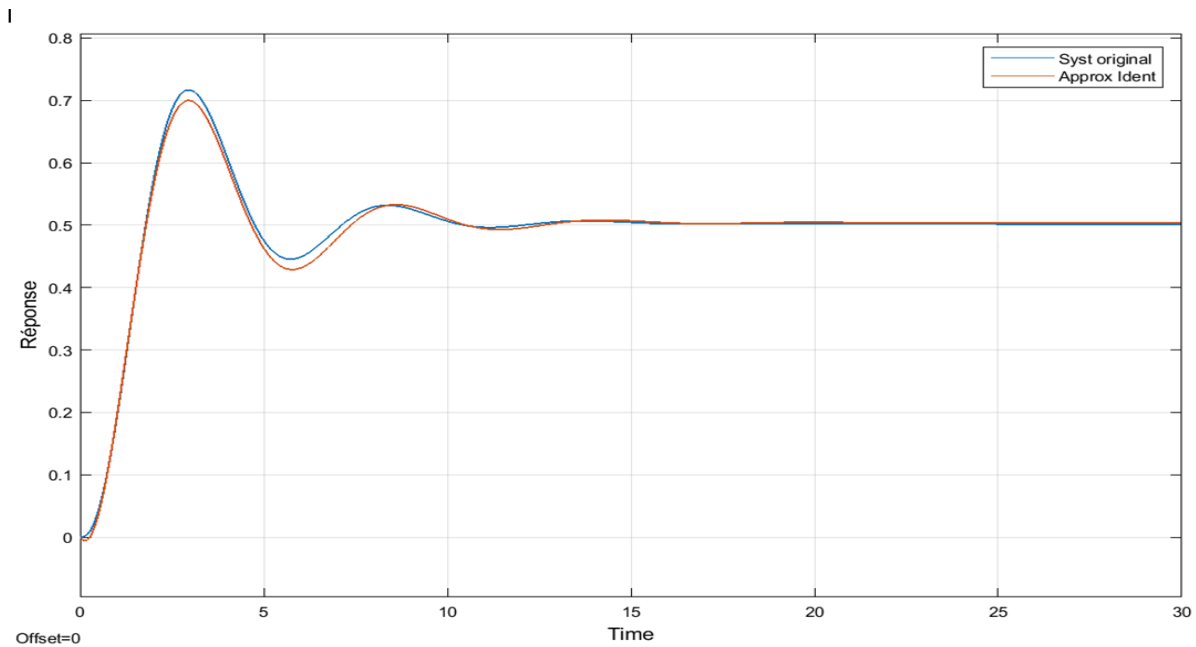


Figure 12 : Approximation par identification

Tableaux Approximation par identification

Identification	D	Tp	Tm	Tr
System B.F	0.2	2.5	1	13.5

Réponse Step : Système originale et système

IV.2.A.2 Approximation par Oustaloup :

On utilise les paramètres suivantes $r=0.3$; $r=0.5$; $N=5$; $w_b=0.001$; $w_h=1000$

$$G = \frac{s^{22} + 1922s^{21} + 1.331e^{06}s^{20} + 4.158e^{08}s^{19} + 6.446e^{10}s^{18} + 5.113e^{12}s^{17} + 2.129e^{14}s^{16} + 4.666e^{15}s^{15} + 5.445e^{16}s^{14} + 3.37s^{17}s^{13} + 1.115s^{18}s^{12} + 1.959s^{18}s^{11} + 1.842s^{18}s^{10} + 9.204e^{17}s^9 + 2.458s^{17}s^8 + 3.481s^{16}s^7 + 2.625s^{15}s^6 + 1.042s^{14}s^5 + 2.17s^{12}s^4 + 2.314s^{10}s^3 + 1.224s^{18}s^2 + 2.922s^{15}s + 251.2}{31.62s^{24} + 4.574s^{04}s^{23} + 2.333s^{07}s^{22} + 5.364s^{09}s^{21} + 6.105s^{11}s^{20} + 3.574s^{13}s^{19} + 1.105e^{15}s^{18} + 1.833s^{16}s^{17} + 1.675s^{17}s^{16} + 8.722s^{17}s^{15} + 2.737s^{18}s^{14} + 5.548e^{18}s^{13} + 7.748s^{18}s^{12} + 7.631s^{18}s^{11} + 5.109s^{18}s^{10} + 2.144s^{18}s^9 + 5.265s^{17}s^8 + 7.178s^{16}s^7 + 5.32s^{15}s^6 + 2.096s^{14}s^5 + 4.352s^{12}s^4 + 4.632s^{10}s^3 + 2.45s^{08}s^2 + 5.844s^{05}s + 502.4}$$

Code Matlab

Alors :

```
Num = [1 1922 1.331e06 4.158e08 6.446e10 5.113e12 2.129e14 4.666e15 5.445e16 3.37e17
1.115e18 1.959e18 1.842e18 9.204e17 2.458e17 3.481e16 2.625e15
1.042e14 2.17e12 2.314e10 1.224e08 2.922e05 251.2]
```

```
Den = [31.62 4.574e04 2.333e07 5.364e09 6.105e18 11 3.574 e13 1.105e15 1.833e16
1.675e17 8.722e17 2.737e18 5.548e18 7.748e18 7.631e18 5.109e18 2.144e18 5.265e17
7.178e16 5.32e15 2.096e14 4.352e12 4.632e10 2.45e08 5.844e05 502.4]
```

Bloc Smulink :

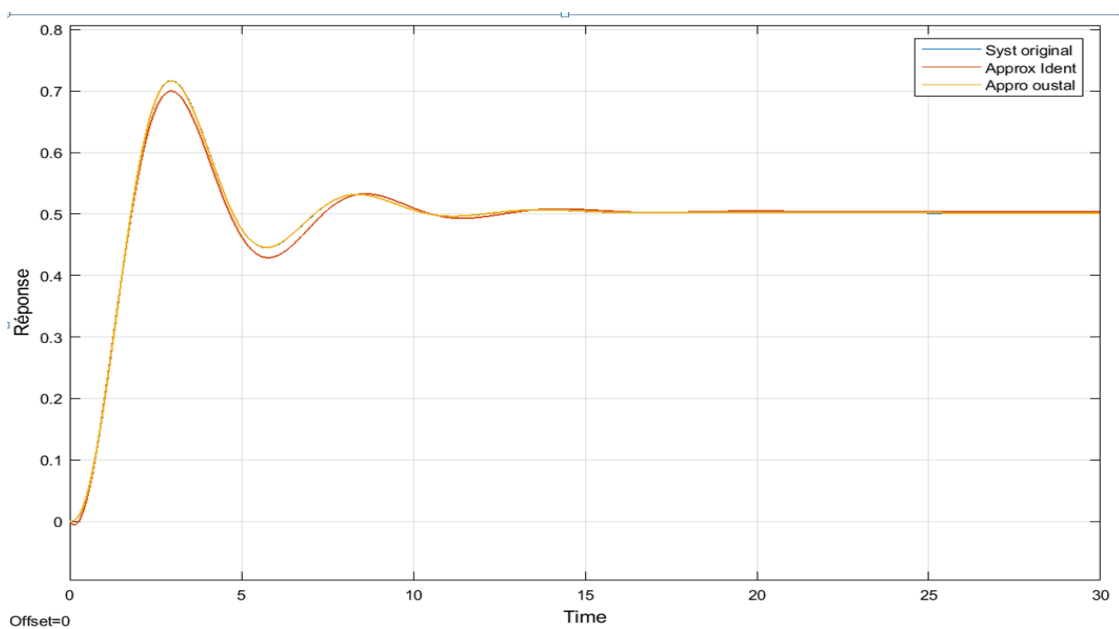
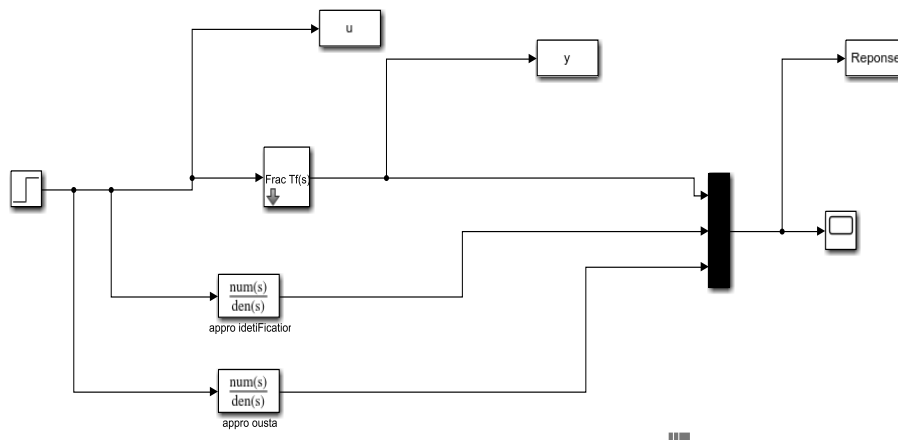


Figure 13 : Approximation d'Oustaloup

IV.2.A.3 Approximation de Charef:

on applique l'algorithme de Charef on obtient l'approximation comme suit :

$$\begin{aligned}
 & 1.628e^{-028} s^{20} + 1.059e^{-023} s^{19} + 2.34e^{-019} s^{18} + 2.114e^{-015} s^{17} \\
 & + 8.582e^{-012} s^{16} + 1.598e^{-008} s^{15} + 1.388e^{-005} s^{14} + 0.005674 s^{13} \\
 & + 1.086 s^{12} + 98.74 s^{11} + 4192 s^{10} + 8.492e^{004} s^9 + 8.02e^{005} s^8 \\
 & + 3.609e^{006} s^7 + 7.573e^{006} s^6 + 7.514e^{006} s^5 + 3.461e^{006} s^4 \\
 & + 7.346e^{005} s^3 + 6.968e^{004} s^2 + 2714 s + 35.5 \\
 G = & \frac{\text{-----}}{5.783e^{-031} s^{23} + 5.923e^{-026} s^{22} + 1.914e^{-021} s^{21} + 2.562e^{-017} s^{20} \\
 & + 1.507e^{-013} s^{19} + 4.118e^{-010} s^{18} + 5.184e^{-007} s^{17} + 0.0003098 s^{16} \\
 & + 0.08631 s^{15} + 11.45 s^{14} + 715.4 s^{13} + 2.139e^{004} s^{12} + 3.095e^{005} s^{11} \\
 & + 2.237e^{006} s^{10} + 8.663e^{006} s^9 + 1.966e^{007} s^8 + 2.932e^{007} s^7 \\
 & + 2.987e^{007} s^6 + 2.008e^{007} s^5 + 7.745e^{006} s^4 + 1.531e^{006} s^3 \\
 & + 1.413e^{005} s^2 + 5447 s + 71.01}
 \end{aligned}$$

Code Matlab :

```

Num=[1.628e-028 1.059e-023 2.34e-019 2.114e-015 8.582e-012 1.598e-008 1.388e-005
0.005674 1.086 98.74 4192 8.492e004 8.02e005 3.609e006 7.573e006 7.514e006 3.461e006
7.346e005 6.968e004 2714 35.5]
Den= [5.783e-031 5.923e-026 1.914e-021 2.562e-017 1.507e-013 4.118e-010 5.184e-007
0.0003098 0.08631 11.45 715.4 2.139e004 3.095e005 2.237e006 8.663e006 1.966e007
2.932e007 2.987e007 2.008e007 7.745e006 1.531e006 1.413e005 5447 71.01]

```

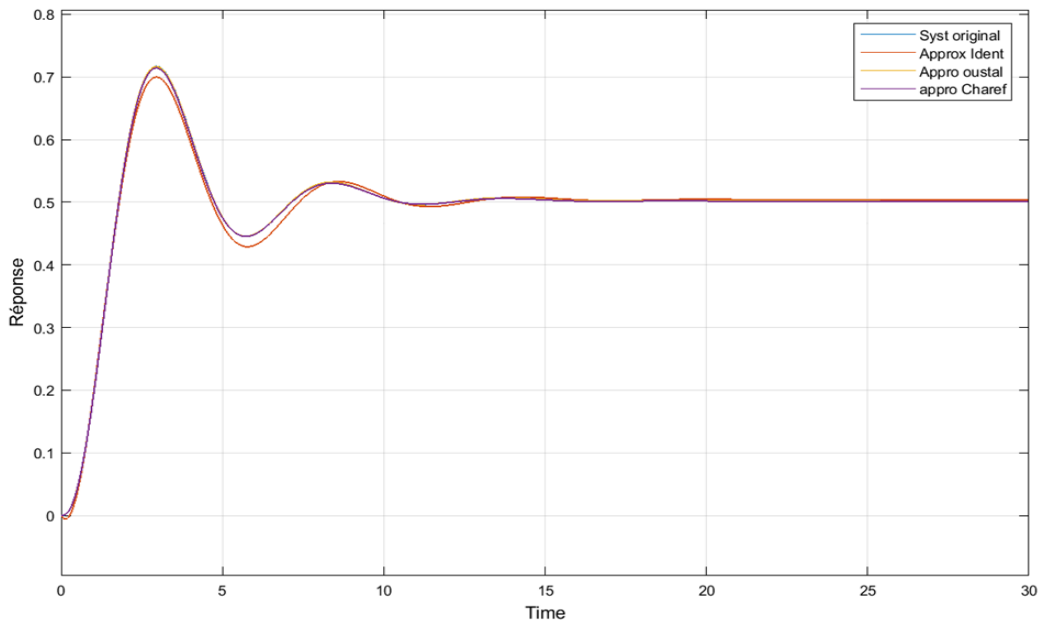


Figure 14 : Approximation de Charef

IV.2.B Système 2 :

Dans cette section, nous considérons le modèle d'ordre fractionnaire d'un système de four régi par :

$$G_{FOM}(s) = \frac{1}{14994s^{1.31} + 6009.5s^{0.97} + 1.69}$$

IV.2.B.1 . Approximation Oustaloup

$$G = \frac{s^{22} + 2279s^{21} + 1.843e^{06}s^{20} + 6.721e^{08}s^{19} + 1.212e^{11}s^{18} + 1.12e^{13}s^{17} + 5.42e^{14}s^{16} + 1.383e^{16}s^{15} + 1.874e^{17}s^{14} + 1.35e^{18}s^{13} + 5.188e^{19}s^{12} + 1.061e^{19}s^{11} + 1.159e^{19}s^{10} + 6.738e^{18}s^9 + 2.09e^{18}s^8 + 3.444e^{17}s^7 + 3.016e^{16}s^6 + 1.392e^{15}s^5 + 3.367e^{13}s^4 + 4.17e^{11}s^3 + 2.555e^{09}s^2 + 7.057e^{06}s + 6918}{1.276e^{05}s^{23} + 2.584e^{08}s^{22} + 1.779e^{11}s^{21} + 5.495e^{13}s^{20} + 8.331e^{15}s^{19} + 6.488e^{17}s^{18} + 2.644e^{19}s^{17} + 5.714e^{20}s^{16} + 6.577e^{21}s^{15} + 4.054e^{22}s^{14} + 1.339e^{23}s^{13} + 2.379e^{23}s^{12} + 2.272e^{23}s^{11} + 1.169e^{23}s^{10} + 3.236e^{22}s^9 + 4.826e^{21}s^8 + 3.869e^{20}s^7 + 1.662e^{19}s^6 + 3.809e^{07}s^5 + 4.6e^{15}s^4 + 2.873e^{13}s^3 + 8.904e^{10}s^2 + 1.257e^{08}s + 6.284e^{04}}$$

Code Matlab :

```
Num=[ 1 2279 1.843e06 6.721e08 1.212e11 1.12e13 5.42e14 1.383e16 1.874e17 1.35e18
5.188e18 1.061e19 1.159e19 6.738e18 2.09e18 3.444e17 3.016e16 1.392e15 3.367e13 4.17e11
2.555e09 7.057e06 6918]
```

```
Den=[1.276e05 2.584e08 1.779e11 5.495e13 8.331e15 6.488e17 2.644e19 5.714e20 6.577e21
4.054e22 1.339e23 2.379e23 2.272e23 1.169e23 3.236e22 4.826e21 3.869e20 1.662e19
3.809e17 4.6e15 2.873e13 8.904e10 1.257e08 6.284e04]
```

IV.2.B.2 . Approximation de Charef

$$\frac{1.043e^{-013}s^{10} + 2.268e^{-009}s^9 + 9.311e^{-006}s^8 + 0.01103s^7 + 4.653s^6 + 544.5s^5 + 1.394e^{004}s^4 + 7.246e^{004}s^3 + 7.475e^{004}s^2 + 1.486e^{004}s + 490.5}{7.416e^{-013}s^{12} + 4.836e^{-008}s^{11} + 0.0005482s^{10} + 1.457s^9 + 1269s^8 + 3.819e^{005}s^7 + 2.955e^{007}s^6 + 4.954e^{008}s^5 + 1.731e^{009}s^4 + 1.258e^{009}s^3 + 1.89e^{008}s^2 + 5.545e^{006}s + 2.325e^{004}}$$

Code Matlab

```
Num=[ 1 2279 1.843e06 6.721e08 1.212e11 1.12e13 5.42e14 1.383e16 1.874e17 1.35e18
5.188e18 1.061e19 1.159e19 6.738e18 2.09e18 3.444e17 3.016e16 1.392e15 3.367e13 4.17e11
2.555e09 7.057e06 6918]
```

```
Den= [7.416e-013 4.836e-008 0.0005482 1.457 1269 3.819e005 2.955e007 4.954e008
1.731e009 1.258e009 1.89e008 5.545e006 2.325e004]
```

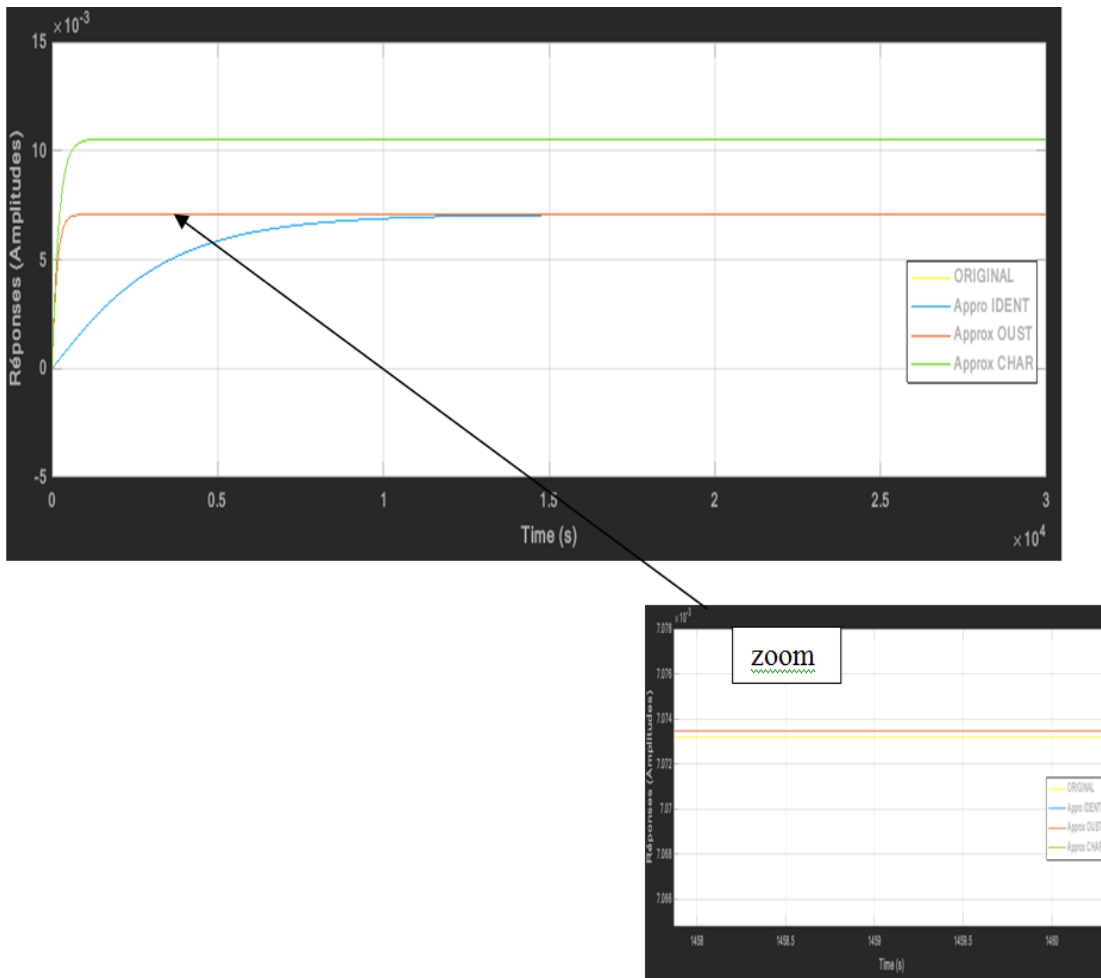


Figure 15 : Approximation par les methods (ident ,oust,char)

Remarque : Le Zoom indiqué entre l’approximation d’Oustaloup (rouge) et la fonction fractionnaire originale (jaune).

System B.F	Identification	Oustaloup	Charef
Tr	0.25	0.1	0.08

Conclusions:

Dans ce mémoire, nous avons introduit l'installation de systèmes par une nouvelle approche d'extension, notre objectif de cette étude est d'étudier un système fractionnaire stable. Les résultats de notre étude sur le Matlab 2018a ont été montrés dans des deux exemples. Nous avons traité ces systèmes par la méthode de comparaison selon les conditions dépassement temps de pic temps de monte tempe de réponse, et nous avons remarqué que le plus proche et le meilleur approximation de ce système à travers les conditions que nous avons faites sont par la méthode de Charef. Ainsi les résultats de notre étude ont été présentés dans le deuxième exemple, et nous avons traité la méthode de comparaison selon les conditions l'échelon Step, nous avons remarqué que le plus proche et meilleur pour ce système est l'approximation d'Oustaloup. Nous avons introduit dans (chapitre1) quelques concepts de base de la méthode de comparaison ce qui nous semble utile pour bien comprendre notre travail.

Conclusion Générale

Aujourd'hui, beaucoup de chercheurs s'intéressent au développement de méthodes et techniques d'identification de systèmes d'ordre fractionnaire et du réglage du correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$. L'intérêt pour ce type de correcteurs est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande, puisqu'il possède deux paramètres en plus qui sont les ordres fractionnaires, en plus des actions dérivée et intégrale. Ce qui rend le correcteur capable de satisfaire des performances additionnelles dans la commande, alors leur simulation et implémentation sont devenus des axes de recherche très importants. Or ceci, vu l'impossibilité d'implémentation directe, nécessite l'approximation la plus fidèle possible au fonctionnement réel.

L'objectif de ce mémoire était de connaître et exposer les différentes méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire par des modèles entiers, en appliquant deux d'entre elles pour confirmer les hypothèses posées et comparer leurs résultats pour voir laquelle d'entre elles est la plus adéquate pour réaliser des approximations désirées.

En conclusion, et d'après les résultats de simulation sous Matlab 2018a, on peut dire que sous certaines conditions et choix des paramètres les deux méthodes de Charef et d'Oustaloup sont performantes, et qu'il n'est pas possible, dans le cadre de notre étude, de trancher et de tirer une règle sur l'efficacité des deux méthodes. C'est pour cela, que nous pouvons poser comme perspective d'étendre la comparaison à l'application des deux méthodes à des systèmes physiques réels qui offriraient une meilleure analyse des deux méthodes

Références et bibliographie

- [1] Concepción Alicia Monje; Yangquan Chen; Blas Manuel Vinagre; Dingyü Xue; Vicente Feliu «Fractional-order Systems and Controls ; Fundamentals and Applications» edition Industrial Control Centre Glasgow Scotland, UK 2010. Springer. DOI : 10.1007/978-1-84996-335-0.Pages {3}.
- [2] Bertram Ross «Fractional Calculus and Its Applications » Actes de la Conférence internationale de Dr. Bertram Ross Département de mathématiques École des arts et des sciences Université de New Haven, juin 1974. Springer. DOI: 10.1007/BFb0067095.Pages {1-5}.
- [3] Jocelyn Sabatier; Patrick Lanusse; Pierre Melchior and Alain Oustaloup «Fractional Order Differentiation and Robust Control Design CRONE, H-infinity and Motion Control» Springer 2015.DOI: 10.1007/978-94-017-9807-5.Pages {3-8}.
- [4] R. Hilfer «Applications of Fractional Calculus in Physics». World Scientific Public (2000).<http://gen.lib.rus.ec/>.Pages {3-6}.
- [5] J. Sabatier, O.P. Agrawal, and J.A. Tenreiro Machado «Advances in fractional calculus». Springer (2007). DOI: 10.1007/978-1-4020-6042-7.Pages {3-5}
- [6] Assabaa Mohamed « Contribution à la Commande d'Ordre Fractionnaire » thèse de doctorat Université des Frères Mentouri-Constantine Faculté des Sciences de la Technologie. Année 2015.
- [7] Indranil Pan and Saptarshi Das «Intelligent Fractional Order Systems and Control » Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013. DOI: 10.1007/978-3-642-31549-7; Pages {13-41}.
- [8] Shantanu Das « Functional Fractional Calculus for System, Identification and Controls» Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008 DOI:10.1007/978-3-540-72703-3 Pages {4, 7-16}.
- [9] Samir LADACI « Contribution à la Commande Adaptative d'ordre fractionnaire » thèse de doctorat ; Université de Mentouri de Constantine, Faculté des Sciences de L'Ingénieur, département de l'Electronique. Année2007.

Références et bibliographie

- [10] Tadeusz Kaczorek , Krzysztof Rogowski «Fractional Linear Systems and Electrical Circuits » Springer International Publishing Switzerland 2015. DOI: 10.1007/978-3-319-11361-6. Pages {3}
- [11] Charef A., Sun. H.H., Tsao .Y.Y., Onaral. B. «Fractal system as represented by singularity function»; IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. 37, No. 9, pp.1465-1470, 1992.
- [12] Bensafia.Yassine« Utilisation des filtres fractionnaires pour la conception de régulateurs adaptatifs robustes. » thèse de doctorat en Science Automatique, le 03/05/2016. Code : D012116008D.
- [13] S. Ladaci, J.J. Loiseau, and A. Charef. ‘Using fractional order filter in adaptive control of noisy plants’ Proc. ICAMEM 2006, the third International Conference on Advances in Mechanical Engineering and Mecanics, Hammamet, Tunisia, December, 2006.
- [14] Aouina. H et Ben Hammada. Y ‘Commande adaptative par modèle de référence D’une machine asynchrone’ PFE, université de M’sila, 2006
- [15] A. Charef, ‘Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional controllers ’, IEE proceedings on control theory and Applications, Vol 153, Issue 6, pp 714-720, 2006.
- [16] A. Charef, A. Djouambi, and A.V.Besancon, ‘Optimal approximation, Simulation and analog realization of the fundamental fractional order transfer function ’, Int. J. Appl. Math. Comput. , Vol. 17, No. 4, 455–462 DOI: 10.2478/v10006-007-0037-9, 2007.
- [17] M.L. Hadjil, ‘ Commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire ’, Mémoire de Magister, Département d’électronique, université Mentouri de Constantine, 1994.
- [18] S. Ladaci and A. Charef, ‘On fractional adaptive control ’. Nonlinear Dynamics, 43(4):365_378, Springer, Mars 2006.
- [19] B.M. Vinagre, I. Petras, I. Podlubny, and Y.Q. CHEN, ‘ Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control’, Nonlinear Dynamics, 29 :269_279, 2002.
- [20] S. Ladaci, J.J. Loiseau, and A. Charef. ‘Using fractional order filter in adaptive control of noisy plants’ Proc. ICAMEM, on Advances in Mechanical Engineering and Mechanics, Hammamet, Tunisia, December, 2006.

Références et bibliographie

- [21] Petras, I., Podlubny, I., O’Leary, P., Dorcak, L., and Vinagre, B.M., Analogue, ‘realization of fractional-order controllers’, Fakulta Berg, TU Kosice, 2002.
- [22] : F. Dubois, A.C. Galucio, et N. Point « Introduction à la dérivée fractionnaire : Théorie et applications », Conservatoire des Arts et Métiers, Mathématiques, Paris, France. EADS Innovation Works, Suresnes, France. 29 mars 2010
- [23] : A. Neçaibia « Contribution à la commande $PI \lambda D \mu$ adaptative et aux régulateurs autoajustables d’ordre fractionnaire », Thèse de Doctorat en sciences. Université 20 Aout 1955, de Skikda. Soutenu en 2016
- [24] : B. Bouhraoua, B. Musabyimana « Commande des systèmes par un correcteur $PI \lambda D \mu$ d’ordre fractionnaire. Application : commande d’un quadri rotor », Mémoire de Master. Université Hassiba Benbouali de Chlef. Soutenu en 2016
- [25] : A. Djouambi « Contribution à la commande CRONE ». Thèse de Doctorat, Université Mentouri de Constantine. Soutenu en 2008
- [26] : R. Mansouri « Contribution à l’analyse et la synthèse des systèmes d’ordre fractionnaire par la représentation d’état ». Thèse de Doctorat. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou. Soutenu en 2008
- [27] : A. SI Ammour « Contribution à la commande par mode glissants d’ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou. Soutenu en 2011.
- [28]: S. Hammouche « Identification d’un modèle fractionnaire à l’aide des réseaux de neurones ». Mémoire de Magistère. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou. Soutenu en 2012
- [29]: I. Ndoye « Généralisation du Lemme Gronwald-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires ». Thèse de Doctorat. Université Henri Poincaré, Nancy 1 et Université Hassan II Aïn Chock, Casablanca. Soutenu en 2011.
- [30]: D. Slimani « Dérivation non entière : Application en traitement d’images ». Mémoire de Magistère. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou.
- [31]: S. Oukacine « Identification des systèmes non linéaires : Application au cas des systèmes d’ordre non entier ». Mémoire de Magistère. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou. Soutenu en 2012 . 83
- [32]: K. Bettou « Analyse et réalisation de correcteurs analogiques d’ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mentouri de Constantine. Soutenu en 2011

Références et bibliographie

- [33]: M. Assaba « Contribution à la commande d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université de Constantine. Soutenue en 2015
- [34]: V. M. L. Fadiga « Commande H_∞ à base de modèles non entiers ». Thèse de Doctorat. Université de bordeaux. Soutenue le 12 juillet 2014
- [35]: Z. Korichi « Statistique quantique basée sur la mécanique quantique fractionnaire ». Mémoire de Master. Université Kasdi Merbah Ouergla. Soutenu en 2013
- [36]: Xavier MOREAU, Pascal SERRIER et Alain OUSTALOUP « La dérivation non entière en isolation vibratoire : application au contrôle global de la suspension de véhicule » (Equipe CRONE - LAPS - UMR 5131 CNRS - ENSEIRB - Université Bordeaux 1)
- [37] : R.MALTI, S. Victor, A. Oustaloup « System identification using fractional models : state of the art ». Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2007 September 4-7, 2007, Las Vegas, Nevada, USA
- [38] : R. MALTI, M. Aoun, J. Sabatier, A. Oustaloup « Tutorial of system identification using fractional differentiation models » . 14th IFAC Symposium on System Identification, Newcastle, Australia, 2006
- [39] : O. Cois « Systèmes linéaire non entiers et identification par modèle non entier : Application thermique ». Thèse de Doctorat. Université de Bordeaux 1. Soutenue en 2002.
- [40] : M. Chetoui « Identification des systèmes par modèle non entier à partir de signaux d'entrée sortie bruités ». Thèse de Doctorat. Universités de Gabès et Bordeaux. Soutenue en 2013
- [41] : S . Victor « Identification Par modèle non entier pour la poursuite robuste de trajectoire par platitude ». Thèse de Doctorat. Université de Bordeaux 1. Soutenue en 2010.
- [42] : K. Matsuda et H. Fujii « H_∞ optimized wave-absorbing control : Analytical and experimental results ». JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL, AND DYNAMICS Vol. 16, No. 6, November-December 1993