



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Algèbre et Mathématiques Discrètes

Thème

Invariant polynômial pour les formes trilinéaires alternées

Présenté par :
GHADBANE Nesrine

Devant le jury composé de :

M ^r MIHOUBI Douadi	Pr,	Université de M'sila	Président.
M ^r MIDOUNE Nourdine	M.CA,	Université de M'sila	Encadreur.
M ^r HABOB Lakhdar	M.CB,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Tout d'abord, je remercie **Dieu** Tout-Puissant d'avoir élevé et éclairé ma vie et d'avoir renforcé mon courage et mon compromis, pour terminer ce travail.

Je tiens particulièrement à remercier mon directeur de thèse, Monsieur

M. Midoun Nouredine et **Rakdi Muhammad Anwar** pour toute l'aide qu'ils ont apporté m'ont accordé, pour leur patience et leurs conseils, et pour avoir guidé ce travail avec grand intérêt. Je remercie également Monsieur **Mihoubi Douadid** d'avoir accepté de présider notre travail de synthèse. Je tiens à remercier Monsieur

Lakhdar Habob d'avoir accepté de revoir mon résumé. Je tiens à remercier tous les professeurs du Département de Mathématiques sans oublier aussi mes collègues et amis, tous les étudiants de ma classe, ainsi que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la formulation de cette thèse. Nous rendons tout respect à ceux qui m'ont soutenu, en particulier mes chers parents et frères, je remercie toutes les personnes, famille et amis qui ont directement ou indirectement contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Produit tensoriel	2
1.2 produit extérieure	2
1.2.1 Support et Rang	3
1.2.2 Radical	3
1.2.3 Vecteur décomposable	3
1.2.4 Vecteur divisible	3
1.2.5 L'action d'un groupe sur un ensemble	3
1.2.6 Formes trilinéaires alternées	4
1.2.7 Parties stables	4
1.2.8 Eléments scindables	5
1.2.9 Invariant et trivecteurs : l'invariant $P(\omega)$	6
2 Classification des trivecteurs et polynôme radical	7
2.1 Classification des trivecteurs	7
2.1.1 Classification des trivecteurs en dimension inférieure 6	7
2.1.2 Classification des trivecteurs en dimension 6	7
2.1.3 Classification des trivecteurs en dimension 7	8
2.1.4 Classification des trivecteurs en dimension 8	8
2.2 polynôme radical des trivecteurs	8
2.3 polynôme radical	9
2.3.1 Polynôme radical d'une forme trilinéaire alternée décomposable	9
2.3.2 polynôme radical en dimension sept	14
Conclusion	15
Bibliographie	15

Introduction

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K .

La classification des trivecteurs (ou formes trilinéaires alternées), c'est-à-dire la détermination des orbites, et un représentant typique de chaque orbite, est l'étude de l'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel des trivecteurs $\Lambda^3 E$ (ou des formes trilinéaires alternées $Alt_3(E)$).

De l'isomorphisme $\Lambda^3 E^* \simeq (\Lambda^3 E)^* \simeq Alt_3(E)$, on parle indifféremment des formes trilinéaires alternées et des trivecteurs .

Plusieurs auteurs ont étudié les formes trilinéaires alternées. Il n'y a qu'un nombre fini d'orbites pour $n \leq 8$ dont la liste est donnée dans [2], [4], [9],

[11] et [10].

Pour classifier les trivecteurs, on utilisera le plus souvent les invariants algébriques, par exemple, le polynôme radical d'un trivecteur ω , $P(\omega)$, car, deux trivecteurs ω_1 et ω_2 sont équivalents si et seulement si leurs polynôme radical $P(\omega_1)$ et $P(\omega_2)$ le sont.

si $P(\omega_1)$ et $AP(\omega_2)$ ne sont pas isomorphes, alors, leurs trivecteurs ω_1 et ω_2 ne le sont pas De même sur un corps fini $\mathbb{F}_2$, le polynôme radical d'un trivecteur ω , $p(\omega)$ est un invariant intéressant pour trouver le classes d'équivalent des trivecteurs..

Donc, pour classifier les trivecteurs, il est indispensable de déterminer ses invariant .

Dans ce mémoire, nous rappelons l'essentiel des résultats connus sur la classification des trivecteurs de rang $n \leq 7$,

puis nous déterminons les polynôme radical de chaque trivecteur , pour $n \leq 6$.

Dans le premier chapitre, on donne des généralités sur le produit tensoriel, produit extérieure, scindabilité , invariants , groupe d'automorphismes, polynôme radical

Le deuxième chapitre est consacré aux trivecteurs et leur polynôme radicalde

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Produit tensoriel

Définition 1.1.1 Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K .

Il existe un espace vectoriel sur K , notée $E \otimes E$ qui se lit E tenseur E et une forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \varphi_1 : E \times E &\rightarrow E \otimes E \\ (u, v) &\rightarrow \varphi_1(u, v) \end{aligned}$$

tel que, pour toute forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \varphi_2 : E \times E &\rightarrow E \otimes E \\ (u, v) &\rightarrow \varphi_2(u, v) \end{aligned}$$

il existe une unique forme linéaire $\varphi : E \otimes E \rightarrow K$ telle que

$$\varphi_2 = \varphi \circ \varphi_1.$$

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{\varphi_2} & K \\ \exists \varphi_1 \downarrow & \nearrow \exists ! \varphi & \\ E \otimes E & & \end{array}$$

l'ensemble des forme bilinéaires de $E \times E$ dans K , s'identifie à
l'ensemble des forme linéaires de $E \otimes E$ dans K

$$\begin{aligned} \varphi_1(E, E; K) &\simeq (E \otimes E; K) \\ \varphi_2 &\rightarrow \varphi \end{aligned}$$

et cette propriété caractérise $E \otimes E$.

On pose $T^3(E) = E \otimes E \otimes E = \otimes^3 E$.

1.2 produit extérieure

Définition 1.2.1 On note $\Lambda^3 E$ le quotient de $T^3(E)$ par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments $x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$ où $x_i = x_j$ pour 2 indices $i \neq j$. On appelle $\Lambda^3 E$ la puissance extérieure 3-ième de E .

On note $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = \overline{x_1 \otimes x_2 \otimes x_3}$ qui se lit x_1 extérieur x_2 extérieur x_3 .

1. La puissance extérieure $\Lambda^3 E$ est définissable d'une manière analogue au produit tensoriel.

$$\begin{array}{ccc}
 \omega : E \times E \times E & \xrightarrow{\forall \omega_1} & K \\
 (x_1, x_2, x_3) & \rightarrow & \omega(x_1, x_2, x_3) \\
 \omega_2 \downarrow & \nearrow \exists! \omega & \\
 \Lambda^3 \omega & & \\
 \omega_1 = \omega \circ \omega_2 & & \\
 \omega(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 & & \\
 \omega(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) = \omega(x_1, x_2, x_3) & &
 \end{array}$$

2.

$$\begin{aligned}
 (x + y) \wedge (x + y) &= 0 \\
 &= x \wedge x + y \wedge y + x \wedge y + y \wedge x \\
 x \wedge y &= -y \wedge x.
 \end{aligned}$$

1.2.1 Support et Rang

On appelle support de ω et on note S_ω le plus petit sous-espace F de E tel que $\omega \in \Lambda^3 F$; la dimension de S_ω s'appelle le rang de ω qu'on note $rg(\omega)$.

Exemple Si $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, $rg(\omega) = 3$.

1.2.2 Radical

Soit $\omega \in \Lambda^3 E^*$ une forme trilinéaire alternée, le radical de ω est l'ensemble

$$Rad(\omega) = \{x \in E \mid \omega(x, y, z) = 0, \forall y, z \in E\}$$

Si $Rad \omega = \{0\}$, on dit que ω est non dégénérée ou de rang maximal.

1.2.3 Vecteur décomposable

Un trivecteur non nul ω est appelé décomposable s'il existe x, y, z dans E tel que $\omega = x \wedge y \wedge z$. Un trivecteur est somme de trivecteurs décomposables :

Si $\dim E = n$ et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E , $\omega = \sum \alpha_{ijk} e_i e_j e_k$ et $\dim \Lambda^3 E = C_n^3$.

Remarque 1.1 On écrit souvent $x_1 x_2 x_3$ ou lieu de $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$.

1.2.4 Vecteur divisible

Soit ω un trivecteur non nul, ω est un trivecteur divisible s'il existe un

$$x \in E - \{0_E\} \text{ et } u \in \Lambda^2 E_2 \text{ tel que } E = Kx \oplus E_2 \text{ et } \omega = x \wedge u.$$

1.2.5 L'action d'un groupe sur un ensemble

Définition 1.2.2 L'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'ensemble des formes trilinéaires alternées $Alt_3(E)$, est définie par :

Pour $f \in GL(E)$ et $\omega : E \times E \times E \rightarrow K$ une forme trilinéaire alternée, on a $f.\omega(x, y, z) = \omega(f(x), f(y), f(z))$ satisfaisant aux conditions suivantes :

pour tous $f_1, f_2 \in GL(E)$, ω une forme trilinéaire alternée

1. $(f_1 \circ f_2) \cdot \omega = f_1 \cdot (f_2 \cdot \omega)$
2. $Id_E \cdot \omega = \omega$.

Définition 1.2.3 L'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\Lambda^3 E$, est définie par : pour tous $f \in GL(E)$, $\omega \in \Lambda^3 E$, $f \cdot \omega = (\Lambda^3 f)(\omega)$ où $\Lambda^3 f$ est un endomorphisme de $\Lambda^3 E$, définie par $:\Lambda^3 f(x \wedge y \wedge z) = f(x) \wedge f(y) \wedge f(z)$.

D'après l'isomorphisme $\Lambda^3 E^* \simeq (\Lambda^3 E)^*$, on emploie les deux définitions.

1.2.6 Formes trilinéaires alternées

L'espace vectoriel $\Lambda^3 E$ peuvent être défini d'une autre manière en utilisant les formes trilinéaires alternées pour tout espace vectoriel E sur un corps commutatif K , l'ensemble $Alt_3(E)$ des formes trilinéaires alternées $h: E \times E \times E \rightarrow K$ est lui-même un K espace vectoriel pour les opérations terme à terme habituelles.

Définition 1.2.4 Une forme trillinéaire

$$\begin{aligned} \omega : E \times E \times E &\rightarrow K \\ (x, y, z) &\rightarrow \omega(x, y, z) \end{aligned} ,$$

est dite alternée si $\omega(x, y, z) = 0$ dèsque $x_i = x_j$; pour un couple d'indices $i \neq j$.

Pour chaque application linéaire

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E \\ \Lambda^3 f : \omega^3 E &\rightarrow \omega^3 E \\ x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 &\rightarrow \Lambda^3 f(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \\ &= f(x_1) \wedge f(x_2) \wedge f(x_3) \end{aligned}$$

1.2.7 Parties stables

Lemme 1.1 Soit E un espace vectoriel sur le corps K et considérons la forme bilinéaire alternée définie par :

$$\omega^x(y, z) = \omega(x, y, z) \text{ (} \omega \text{ une forme trillinéaire alternée) .}$$

Alors, l'ensemble $R_i = \{x \in E / rg \omega^x = 2i\}$ ($0 \leq 2i \leq n$) est stable par $Aut(\omega)$, c'est-à-dire $f(R_i(\omega)) \subset R_i(\omega)$ pour $f \in Aut(\omega)$.

L'ensemble $R_i(\omega) = \{x \in E / \varpi(x) \text{ est de type } \omega_i\}$ une partie stable pour $Aut(\omega)$.

On utilise les parties stables pour déterminer les groupes d'automorphismes.

Lemme 1.2 Soit E un espace vectoriel sur le corps K , de dimension finie, V_1 et V_2 deux sous-espace de E différents et tel que $\dim V_1 = \dim V_2$.

Si f est un endomorphisme de E qui laissent stable la réunion de V_1 et V_2 , c'est-à-dire $f(V_1 \cup V_2) \subset V_1 \cup V_2$, alors on a $[f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2]$ ou $[f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_1]$.

Comme $f(V_1 \cup V_2) \subset V_1 \cup V_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(V_1) \subset V_1 \cup V_2 \\ f(V_2) \subset V_1 \cup V_2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f(V_1) \cap (V_1 \cup V_2) = f(V_1) \\ f(V_2) \cap (V_1 \cup V_2) = f(V_2) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (f(V_1) \cap V_1) \cup (f(V_1) \cap V_2) = f(V_1) & \text{I} \\ (f(V_2) \cap V_1) \cup (f(V_2) \cap V_2) = f(V_2) & \text{II} \end{cases} \end{aligned}$$

Or, la réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous espaces vectoriel

si et seulement si l'un est inclus dans l'autre, ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} ((f(V_1) \cap V_1) \subset (f(V_1) \cap V_2)) \text{ ou } ((f(V_1) \cap V_2) \subset (f(V_1) \cap V_1)) \\ \text{et} \\ ((f(V_2) \cap V_1) \subset (f(V_2) \cap V_2)) \text{ ou } ((f(V_2) \cap V_2) \subset (f(V_2) \cap V_1)) \end{array} \right.$$

On remplace dans I et II on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} ((f(V_1) \cap V_1) = f(V_1)) \text{ ou } ((f(V_1) \cap V_2) = f(V_1)) \\ \text{et} \\ ((f(V_2) \cap V_1) = f(V_2)) \text{ ou } ((f(V_2) \cap V_2) = f(V_2)) \end{array} \right.$$

Ce qui implique que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(V_1) \subset V_1) \text{ ou } (f(V_1) \subset V_2) \\ \text{et} \\ (f(V_2) \subset V_1) \text{ ou } (f(V_2) \subset V_2) \end{array} \right.$$

On a quatre cas qui figurent :

$$\left\{ \begin{array}{l} (f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2) \text{ ou } (f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_1) \\ \text{et} \\ (f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_1) \text{ ou } (f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_2) \end{array} \right.$$

Les deux derniers cas sont impossibles car par exemple :

Si $f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_1$ comme $\dim f(V_1) = \dim V_1$.

et $\dim f(V_2) = \dim V_2$.

D'où $f(V_1) = V_1$ et $f(V_2) = V_1 \Rightarrow V_1 = V_2$ (f injective) ce qui est absurde car $V_1 \neq V_2$.

1.2.8 Éléments scindables

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , $\Lambda^3 E$ s'identifie à :

$$\sum_{k=0}^{k=3} (\Lambda^k E_1 \otimes \Lambda^{3-k} E_2).$$

Un élément $\omega \in \Lambda^3 E$ est dit scindabl, s'il existe une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ telle que : $\omega \in E_1 \otimes \Lambda^2 E_2$ vu comme facteur direct de $\Lambda^3 E$. Si $\dim E_1 = r$, on dit que ω est r -scindable. La scindabilité est une généralisation de la divisibilité. en effet ω est divisible si et seulement si ω est 1-scindable, propriété qui ne dépend pas du corps de base car c'est équivalent à dire que l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \Lambda^4 E \\ x & \longrightarrow & x\omega \end{array} \quad \text{n'est pas injective.}$$

Soit ω un élément r -scindable et $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base de E_1 , $\omega = \sum_{i=1}^r e_i u_i$ où $u_i \in \Lambda^2 E_2$. Les u_i sont déterminés de façon unique par la base $e_1, \dots, e_r$ de E_1 . Alors ω est déterminé par le sous-espace vectoriel F de $\Lambda^2 E_2$ engendré par les u_i , en effet, si on change de base dans E_1 , et si la nouvelle base f_j est donnée par :

$$e_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} f_j,$$

$$\omega = \sum_{i=1}^r e_i u_i = \sum_{j=1}^r f_j \left(\sum_{i=1}^r a_{ij} u_i \right) = \sum_{j=1}^r f_j v_j,$$

les v_j s'obtiennent donc à partir des u_i par le changement de base contragrédiel de celui qui fait passer de la base $\{f_j\}$ à la base $\{e_i\}$. Cela se voit aussi en utilisant l'isomorphisme naturel entre $E_1 \otimes \Lambda^2 E_2$ et $\text{Hom}(E_1^*, \Lambda^2 E_2)$, si φ est l'élément de $\text{Hom}(E_1^*, \Lambda^2 E_2)$ canoniquement associé à ω , F n'est autre que $\varphi(E_1^*)$.

un même trivecteur peut être scindable pour plusieurs valeurs de l'entier r comme le montre l'exemple :

$\omega_{7,3} = e_1 e_2 e_3 + e_3 e_4 e_5 + e_5 e_6 e_7$ qui est 2 et 3-scindable :

$$\omega_{7,3} = e_3 (e_1 e_2 + e_4 e_5) + (e_5 e_6) e_7 = e_1 (e_2 e_3) + e_4 (e_5 e_3) + (e_5 e_6) e_7.$$

1.2.9 Invariant et trivecteurs : l'invariant $P(\omega)$

Alors $P(\omega)$ est un polynôme homogène de degré n , il s'écrit sous la forme :

$$P(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i y^{n-1-i}.$$

Chaque i est un entier non négatif avec

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = q^n.$$

Classification des trivecteurs et polynôme radical

2.1 Classification des trivecteurs

Soit K un corps algébriquement clos, et E un K -e.v.

2.1.1 Classification des trivecteurs en dimension inférieure 6

1. Pour $\dim E = 3$, il n'y a qu'une orbite de trivecteurs non nuls : si $\omega \in \Lambda^3 E - \{0\}$ il existe $\{e_1, e_2, e_3\}$, une base de E telle que $\omega = e_1 e_2 e_3$.
2. Pour $\dim E = 4$, tous les trivecteurs non nuls sont décomposables, donc $\Lambda^3 E$ a deux orbites, dans une base (e_i) , $1 \leq i \leq 4$, un représentant de chaque orbite est donné par :

$$\begin{cases} 0, \\ e_1 e_2 e_3. \end{cases}$$

1. Pour $\dim E = 5$, l'isomorphisme $\Lambda^3 E \simeq \Lambda^2 E^*$ montre qu'il y a trois orbites dans $\Lambda^3 E$: en effet si un trivecteur est non nul et non décomposable, il est nécessairement de rang maximal, donc divisible par un vecteur e_1 : $\omega = e_1 u$ où u est un bivecteur de rang 4 ; on peut choisir pour S_u , tout supplémentaire de Ke_1 dans E et il existe une base (e_i) , $1 \leq i \leq 5$, de E telle que un représentant de chaque orbite est donné par :

$$\begin{cases} 0, \\ e_1 e_2 e_3, \\ e_1 (e_2 e_3 + e_4 e_5). \end{cases}$$

2.1.2 Classification des trivecteurs en dimension 6

Soit E un e.v de $\dim E = 6$ et soit $\omega \in \Lambda^3 E$ un trivecteur de rang maximal $rg(\omega) = \dim E = 6$.

Il existe une base (e_i) , $1 \leq i \leq 6$, de E telle que ω s'écrit :

$$\begin{aligned} \omega_{6,1} &= e_1 e_2 e_3 + e_4 e_5 e_6 \\ \omega_{6,2} &= e_1 e_2 e_3 + e_2 e_3 e_5 + e_1 e_3 e_6. \end{aligned}$$

i.e. Il existe donc 2 orbites de rang maximal.

2.1.3 Classification des trivecteurs en dimension 7

Il y a cinq orbites de rang 7, et quatre orbites de rang 6, une orbites de rang 5, une orbites de rang 3, et l'orbites 0 :

ω_0	0
ω_1	$e_1e_2e_3; rg(\omega_1) = 3$
ω_2	$e_1e_2e_3 + e_3e_4e_5; rg(\omega_2) = 5$
ω_3	$e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6; rg(\omega_3) = 6$
ω_4	$e_1e_2e_3 + e_3e_4e_5 + e_1e_5e_6; rg(\omega_4) = 6$
ω_5	$e_1e_2e_3 + e_3e_4e_5 + e_1e_5e_6; rg(\omega_5) = 6$
ω_6	$e_1e_2e_3 + e_1e_4e_5 + e_1e_6e_7 + e_3e_5e_7; rg(\omega_6) = 7$
ω_7	$e_1e_2e_3 + e_1e_6e_7 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_7; rg(\omega_7) = 7$
ω_8	$e_1e_2e_3 + e_1e_4e_5 + e_1e_6e_7; rg(\omega_8) = 7$
ω_9	$e_1e_2e_3 + e_1e_4e_5 + e_1e_2e_7 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_7; rg(\omega_9) = 7$
ω_{10}	$e_1e_2e_3 + e_2e_3e_4 + e_3e_5e_4 + e_2e_4e_6 + e_1e_5e_6; rg(\omega_{10}) = 6$
ω_{11}	$e_1e_2e_3 + e_2e_3e_4 + e_3e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_1e_5e_6 + e_3e_6e_7; rg(\omega_{11}) = 7$

2.1.4 Classification des trivecteurs en dimension 8

Il existe 13 classes d'équivalence de trivecteurs de rang 8. Dans une base (e_i) de $E, 1 \leq i \leq 13$, un représentant de chaque classe est donné par $\omega_{8,i}, 1 \leq i \leq 13$, de la table 1.

Table 1

$\omega_{8,i}$	Expression d'un représentant de l'orbite
$\omega_{8,1}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6e_7e_8$
$\omega_{8,2}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_5e_6e_8$
$\omega_{8,3}$	$e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_5 + e_7e_8)$
$\omega_{8,4}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_7 + e_4e_8)$
$\omega_{8,5}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_3 + e_7e_8)$
$\omega_{8,6}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_8(e_4e_3 + e_5e_6)$
$\omega_{8,7}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_6 + e_5e_7) + e_2(e_5e_6 + e_7e_8)$
$\omega_{8,8}$	$e_1(e_2e_8 + e_3e_6 + e_4e_7) + e_6e_7e_8 + e_3e_4e_5$
$\omega_{8,9}$	$e_1[e_2(e_3 + e_4) + e_5e_6] + e_3e_5e_7 + e_4e_6e_8$
$\omega_{8,10}$	$e_1(e_2e_8 + e_6e_7) + e_2e_3e_5 + e_3e_4e_6 + e_4e_5e_7$
$\omega_{8,11}$	$e_1(e_3e_7 + e_5e_4 + e_8e_2) + e_8(e_4e_3 + e_6e_7) + e_2e_4e_6$
$\omega_{8,12}$	$e_1[(e_4 - e_7)(e_3 - e_8) + e_5e_7] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$
$\omega_{8,13}$	$e_1[e_5(e_3 - e_7) + e_8e_4] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$

2.2 polynôme radical des trivecteurs

Définition 2.2.1 : Une forme trilinéaire alternée $\omega : E^3 \rightarrow K$ satisfait légalité

$$\omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(v_1, v_2, v_3).$$

Pour chaque permutation $\sigma \in s_3$. Soit $\omega[v]$ la forme bilinéaire $\omega(v, -, -)$ et soit $\omega[v_1, v_2]$ la forme linéaire $\omega(v_1, v_2, -)$. On dit qu'un automorphisme Φ de E est un automorphisme de f si

$$\omega(v_1, v_2, v_3) = \omega(\Phi(v_1), \Phi(v_2), \Phi(v_3)) \text{ pour tous } v_1, v_2, v_3 \in E.$$

Le group des automorphismes de ω seront notés $\text{Aut}(\omega)$. Soit ω une forme trilinéaire sur E . L'ensemble

$$\text{Rad}_\omega = \{x \in E; \omega[x] = 0\}.$$

est appelé le radical de ω . Si $\text{Rad } \omega$ est trivial $\text{Rad } \omega = \{0\}$, alors ω est appelé non dégénéré. Fixons $v \in E$ et on définit le radical $\text{Rad}_\omega(v)$ de v de la manière suivante :

$$\text{Rad}_\omega(v) = \{u \in E; \omega[v, u] = 0\}.$$

Le radical de tout vecteur v est clairement un sous-espace de E . On dit que les vecteurs $u, v \in E \setminus \{0\}$ sont orthogonaux (notés $u \perp v$) si $u \in \text{Rad}(v)$. Pour deux sous-espaces V_1 et V_2 de E , on écrit $V_1 \perp V_2$ si $v_1 \perp v_2$ pour tout $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$ on dit qu'une forme non dégénérée w sur E est décomposable si $E = W_1 \oplus \dots \oplus W_m, m \geq 2$, et $W_i \perp W_j, i \neq j$. Étant donné une décomposition (orthogonale) de w , soit Π_i la projection de E sur W_i , et W la restriction de w à W . On peut alors exprimer la forme ω comme $\omega(u, v, z) = \sum_i \omega_i(\pi_i(u), \pi_i(v), \pi_i(z))$, et nous écrirons $\omega = \omega_i$.

2.3 polynôme radical

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps fini

$\mathbb{F}_q = GF(p^m) = GF(q)$ et ω une forme trilinéaire alternée sur E .

On fixe $v \in E$, on définit le radical $\text{Rad}_\omega(v)$ de v par:

$$\text{Rad}_\omega(v) = \{u \in E, \omega(v, u, z) = 0, \forall z \in E\}$$

Le rang de v et le codimension de $\text{Rad}_\omega(v)$ dans

$$r_\omega(v) = n - \dim \text{Rad}_\omega(v)$$

Le polynôme radical de ω est défini par :

$$P(\omega) = \sum_{v \in E} x^{r(v)} y^{n-r(v)}.$$

Alors $P(\omega)$ est un polynôme homogène de degré n , il s'écrit sous la forme :

$$P(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i y^{n-i}.$$

Chaque i est un entier non négatif avec

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = q^n.$$

2.3.1 Polynôme radical d'une forme trilinéaire alternée décomposable

Lemme 2.1 Soit ω une forme trilinéaire alternée sur E et soit $V_1 \oplus V_2$ une décomposition orthogonale de ω . Alors pour tout $u \in V_1$ et $v \in V_2$, on a

$$\text{Rad}(u + v) = \text{Rad}(u) \cap \text{Rad}(v).$$

L'inclusion $\text{Rad}(u + v) \supseteq \text{Rad}(u) \cap \text{Rad}(v)$ est évident. Considérons un vecteur différent de zéro $x \in \text{Rad}(u + v)$. Nous voulons que $x \in \text{Rad}(u)$. Est l'équation

$$\omega[u + v, x] = 0,$$

équivalent à

$$\omega[u, x] = -\omega[v, x].$$

Si les deux côtés de (3) sont des formes linéaires nulles, donc la démonstration est terminée. Supposons le contraire, il existe un vecteur y tel que $\omega(u, x, y) \neq 0$. On peut écrire $y = y_1 + y_2$, où $y \in E$. Puisque y_2 appartient à $Rad(u)$, on obtient

$$\omega(u, x, y) = \omega(u, x, y_1 + y_2) = \omega(u, x, y_1) \neq 0.$$

Mais on a aussi (3), ce qui donne

$$\omega(v, x, y_1) = -\omega(u, x, y_1) \neq 0,$$

une contradiction avec $y \in E \subseteq Rad v$.

Lemme 2.2 Soit ω une forme sur E et soit $V_1 \oplus V_2$ une décomposition orthogonale de ω . Alors pour tout $u \in V_1$ et $v \in V_2$, on a $r(u + v) = r(u) + r(v)$.

Puisque $V_1 \subseteq Rad(v)$ et $V_2 \subseteq Rad(u)$, on obtient $Rad(u) \cup Rad(v) = E$. En utilisant le lemme 2.1, ce qui donne

$$\begin{aligned} r(u + v) &= n - \dim Rad(u + v) = n - \dim (Rad(u) \cap Rad(v)) \\ &= n - (\dim Rad(u) + \dim Rad(v) - \dim (Rad(u) \cup Rad(v))) \\ &= (n - \dim Rad(u)) + (n - \dim Rad(v)) = r(u) + r(v) \end{aligned}$$

Lemme 2.3 Soit f une forme trilinéaire sur E et soit W un hyperplan dans E notons g la restriction de f à W . Pour tout $\omega \in W$ On :

1. $Rad_\omega(\omega) \subseteq W \implies r_g(\omega) = r_f(\omega) - 2$.
2. $Rad_\omega(\omega) \not\subseteq W \implies r_g(\omega) = r_f(\omega)$.

(1) Supposons d'abord que $Rad_f(\omega) \subseteq W$. Puisque $r_g(\omega)$ est pair et $Rad_f(\omega) \subseteq Rad_g(\omega)$, l'ensemble $X = Rad_g(\omega) \setminus Rad_f(\omega)$

$$\dim Rad_g(\omega) > \dim Rad_f(\omega) + 1.$$

Alors il existe deux vecteurs $x, y \in X$ et $x \notin \langle y, Rad_f(\omega) \rangle$. Choisissez $v \notin w$, on obtient

$$f(\omega, x, v) \neq 0 \wedge f(\omega, y, v) \neq 0.$$

Ce qui implique $f(\omega, x + \alpha y, v) = 0$, pour un $0 \neq \alpha \in F$, et le vecteur $x + \alpha y$ dans $Rad_f(\omega)$ donc une contradiction

(2) Soit $Rad_f(\omega) \not\subseteq W$. Montrons que $Rad_g(\omega) = \omega \cap Rad_f(\omega)$.

l'inclusion

$$Rad_g(\omega) \supseteq \omega \cap Rad_f(\omega),$$

est évident. Choisissons v dans $Rad_f(\omega) \setminus W$. Si x est dans $Rad_g(\omega)$ alors la forme linéaire $g[\omega, x]$ est zéro, Mais nous avons aussi $f(\omega, x, v) = 0$, car $\omega \perp v$, donc x est dans $Rad_f(\omega)$, ce qui prouve la deuxième inclusion. Nous pouvons conclure que $\dim Rad(\omega) = \dim Rad(\omega) - 1$, ce qui équivaut à $r_g(\omega) = r_f(\omega)$.

Lemme 2.4 Soit ω une forme sur E et soit $V_1 \oplus V_2$ une décomposition orthogonale. Notons g la restriction de f à V_1 . Alors pour tout $u \in E$, on a $r_g(u) = r_f(u)$.

Soit $\{b_1, \dots, b_m\}$ une base de V_2 , et notons W , le sous-espace $\langle V_1, b_1, \dots, b_i \rangle, 0 \leq i \leq m$. Notons g , la restriction de w à W . Puisque $Rad_f(u)$ est contenu dans W , pour $1 \leq i \leq m - 1$ et $g = g_0$, nous obtenons l'égalité en utilisant le lemme 2.2.

Théorème 2.3.1 Soit E un espace vectoriel de dimensions n sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ et soit ω une forme trilinéaire alternant sur E . Supposons que $V = \oplus V_i, 1 \leq i \leq m$ soit une décomposition orthogonale de f . On note la restriction de f à V_i alors

$$p(\omega) = \prod_{i=1}^m p(\omega_i).$$

par récurrence, $m = 2$ Considérons une décomposition $E = V_1 \oplus V_2$, de ω et noton n la dimension de V Puisque E est un somme direct de V_1 et V_2 , nous pouvons exprimer le polynôme radical de ω comme

$$p(\omega) = \sum_{v \in v} x^{r_\omega(v)} y^{n-r_\omega(v)} = \sum_{v_1 \in v_1} \sum_{v_2 \in v_2} x^{r_\omega(v_1+v_2)} y^{n-r_\omega(v_1+v_2)},$$

utilisons le lemme 2.2

$$\begin{aligned} p(\omega) &= \sum_{v_1 \in v_1} \sum_{v_2 \in v_2} x^{r_\omega(v_1)+r_\omega(v_2)} y^{n_1-r_\omega(v_1)+n_2-r_\omega(v_2)} \\ &= \sum_{v_1 \in v_1} x^{r_\omega(v_1)} y^{n_1-r_\omega(v_1)} \sum_{v_2 \in v_2} x^{r_\omega(v_2)} y^{n_2-r_\omega(v_2)}. \end{aligned}$$

On utilise le lemme 2.4, on obtient :

$$p(\omega) = \sum_{v_1 \in v_1} x^{r_{\omega_1}(v_1)} y^{n_1-r_{\omega_1}(v_1)} \sum_{v_2 \in v_2} x^{r_{\omega_2}(v_2)} y^{n_2-r_{\omega_2}(v_2)} = p(\omega_1) p(\omega_2).$$

Lemme 2.5 Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps fini $\mathbb{F}_q = GF(q)$. soit R une sous -espace de dimension k de E contenant v , $1 \leq k \leq n$. Alors le nombre d'hyperplans contenant R (et donc u) est égal à $\frac{q^{n-k}-1}{q-1}$, et le nombre d'hyperplans contenant v et ne contenant pas R est égal à $\frac{q^{n-1}-q}{q-1} q^{n-k}$. Pour w un sous-espace de E contenant u on note par $r^w(v)$ le rang de v avec la restriction de $f|_w$ de f à w et par $p(f|_w)$ le polynôme radical.

Théorème 2.3.2 Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{F}_q = GF(q)$ et. Soit ω une forme trilinéaire et soit $P = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i y^{n-i}$ son polynôme radical. Soit $p_1, \dots, p_k$ tous les polynômes radicaux distinct. Alors il existe des entiers non négatifs $a_1, \dots, a_k$ satisfaisant $\sum a_i = q^n - 1$ tels que

$$y \sum_{j=1}^k a_j p_j = (q^n - 1) \alpha_0 y^n + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i \frac{q^i - 1}{q - 1} x^{i-2} y^{n-(i-2)} + \frac{q^{n-1} - q}{q - 1} x^i y^{n-i}. \quad (4)$$

pour prouver l'égalité, on calcul de deux manières différentes la somme

$$S = \sum_{v \in v} \sum_{\{w, v \in w\}} x^{r^w(v)} y^{n-1-r^w(v)}.$$

Où W un hyperplans contenant E . Après avoir changé l'ordre des sommes, on trouve

$$S = \sum_w \sum_{v \in w} x^{r^w(v)} y^{n-1-r^w(v)} = \sum_w p(f|_w) = \sum_{j=1}^k a_j p_j. \quad (5)$$

Où a_j , est le nombre d'hyperplans W tels que le polynôme $p(f|_W)$ égal à p_j . Ensuite fixons $v \in V$, Si $v \in Rad \omega$, alors $r^W(v)$ est égal à zéro pour tout hyperplan W , et nous obtenons

$$S = (q^n - 1) \alpha_0 y^{n-1} + \sum_{v \notin Rad f} \sum_{\{w, v \in w\}} x^{r^w(v)} y^{n-1-r^w(v)},$$

$v \notin Rad \omega$. Le lemme 2.5 nous permet de déterminer le nombre d'hyperplans W $Rad(v)$, et par le lemme 2.3 nous avons

$$\begin{aligned} S &= (q^n - 1) \alpha_0 y^{n-1} + \sum_{v \notin Rad f} \left[\frac{q^{n-1} - q^{r(v)}}{q - 1} x^{r(v)} y^{n-1-r(v)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q^{r(v)} - 1}{q - 1} x^{r(v)-2} y^{n-1-(r(v)-2)} \right]. \end{aligned}$$

Par définition de α_i , nous pouvons regrouper les membres de la somme qui correspondent on obtient :

$$S = (q^n - 1) \alpha_0 y^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left[\frac{q^{n-1} - q^i}{q-1} x^i y^{n-1-i} + \frac{q^i - 1}{q-1} x^{i-2} y^{n-1-(i-2)} \right].$$

Exemple 2.1 On prend le trivecteur ω_9 du tableau 1 et on utilise à l'équation (4), on trouve

$$127y^7 + 63 \cdot 15x^2y^5 + 63 \cdot 48x^4y^3 + 64 \cdot 63x^4y^3.$$

Puisque le coefficient de y^7 est 127, les restriction de ω à chaque hyperplan est une forme non dégénérée, donc il ya seulement 3 formes ω_3, ω_4 et ω_{10} du tableau 1 (leur polynôme radical est sans facteurs 2y). Donc le terme gauche de l'équation (4) est égal á

$$a_1 (y^7 + 14x^2y^5 + 49x^4y^3) + a_2 (y^7 + 7x^2y^5 + 56x^4y^3) + a_3 (y^7 + 63x^4y^3).$$

En comparant les coefficients aux puissances correspondantes, nous obtenons

$14a_1 + 7a_2 = 63 \cdot 15$ et $49a_1 + 56a_2 + 63a_3 = 63 \cdot 112$. De plus la somme de a_i est égale à 127. avace le tableau 1 de [6] disons que a_2 égal à 127 ou 63, qui permet une seule solution de nos équations : $a_1 = 36, a_2 = 63, et a_3 = 28$.

Exemple 2.2 Il n'y a pas de forme ω en dimension 8 sur $GF(2)$ ayant une restriction tout hyperplan équivalent à la forme du table 1.

Noton $p(\omega) = \sum_{i=0}^6 \alpha_i x^i y^{8-i}$ le polynôme radical de ω . Nous utiliserons le théorème 2.2 on calcul que le coefficients de $x^6 y^2$, nous obtenons

$$y(2^8 - 1)(y^7 + 3x^2y^5 + 76x^4y^3 + 48x^6y),$$

et le coefficient est égal à $(2^8 - 1) \cdot 48$, ce coefficient est $64\alpha_6$, une contradiction, puisque α_6 doit être un entier. De même pour f_{11}

polynôme radical en dimension 6 [6]

ω_i	$p(\omega_i)$
$e_1 e_2 e_3$	$y^3 + 7x^2y$
$e_1 e_2 e_3 + e_3 e_4 e_5$	$y^5 + 15x^2y^3 + 16x^4y$
$e_1 e_2 e_3 + e_4 e_5 e_6$	$(y^3 + 7x^2y)(y^3 + 7x^2y)$
$e_1 e_2 e_3 + e_3 e_4 e_5 + e_1 e_5 e_6$	$y^6 + 7x^2y^4 + 56x^4y^2$
$e_1 e_2 e_3 + e_2 e_3 e_4 + e_3 e_4 e_5 + e_2 e_4 e_6 + e_1 e_5 e_6$	$y^6 + 63x^4y^2$

Quelques exemples

pour $n = 3$, le polynôme radical de ω_1

$$p(\omega_1) = y^3 + 7x^2y, \text{ où } f = e_1 e_2 e_3 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \in \wedge^3 E$$

En effet

$$E = \mathbb{F}_2^3 \text{ et } \text{card } E = 8 = 2^3$$

et $\dim E = 3, B = (e_1, e_2, e_3)$ une base

$$\text{or } \text{Rad}_\omega(v) = \{u \in E; \omega(v, u, z) = 0, \forall z \in E\}$$

$$\begin{cases} \omega(e_1 e_2 e_3) = 1, \\ \omega(e_i e_j e_k) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Rad}_\omega(0) = \{u \in E; \omega(0, u, z) = 0, \forall z \in E\} = E$$

i.e $\dim Rad_\omega(0) = 3$, donc $r(0) = 3 - 3 = 0$

• $r(e_1) = 3 - \dim Rad_\omega(e_1)$

$Rad_\omega(e_1) = \{u \in E; \omega(e_1, u, z) = 0, \forall z \in E\} = \langle e_1 \rangle$

et $\dim Rad_\omega(e_1) = 1$, donc $r(e_1) = 3 - 1 = 2$.

• $r(e_2) = 3 - \dim Rad_\omega(e_2)$

$Rad_\omega(e_2) = \{u \in E; \omega(e_2, u, z) = 0, \forall z \in E\} = \langle e_2 \rangle$

et $\dim Rad_\omega(e_2) = 1$, donc $r(e_2) = 3 - 1 = 2$

• $r(e_3) = 3 - \dim Rad_\omega(e_3)$

$Rad_\omega(e_3) = \{u \in V; \omega(e_3, u, z) = 0, \forall z \in V\} = \langle e_3 \rangle$

et $\dim Rad_\omega(e_3) = 1$, donc $r(e_3) = 3 - 1 = 2$

• $r(e_1 + e_2) = 3 - \dim Rad_\omega(e_1 + e_2)$

$Rad_\omega(e_1 + e_2) = \{u \in E; \omega(e_1 + e_2, u, z) = 0, \forall z \in E\} = \langle e_1 + e_2 \rangle$

et $\dim Rad_\omega(e_1 + e_2) = 1$, donc $r(e_1 + e_2) = 3 - 1 = 2$

• $r(e_1 + e_3) = 3 - \dim Rad_\omega(e_1 + e_3)$

$Rad_\omega(e_1 + e_3) = \{u \in E; \omega(e_1 + e_3, u, z) = 0, \forall z \in E\} = \langle e_1 + e_3 \rangle$

et $\dim Rad_\omega(e_1 + e_3) = 1$, donc $r(e_1 + e_3) = 3 - 1 = 2$

• $r(e_2 + e_3) = 3 - \dim Rad_\omega(e_2 + e_3)$

$Rad_\omega(e_2 + e_3) = \{u \in E; \omega(e_2 + e_3, u, z) = 0, \forall z \in E\} = \langle e_2 + e_3 \rangle$

et $\dim Rad_\omega(e_2 + e_3) = 1$, donc $r(e_2 + e_3) = 3 - 1 = 2$

• $r(e_1 + e_2 + e_3) = 3 - \dim Rad_\omega(e_1 + e_2 + e_3)$

$Rad_\omega(e_1 + e_2 + e_3) = \{u \in E; \omega(e_1 + e_2 + e_3, u, z) = 0, \forall z \in E\} = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$

et $\dim Rad_\omega(e_1 + e_2 + e_3) = 1$, donc $r(e_1 + e_2 + e_3) = 3 - 1 = 2$.

Le vecteur avec le radical de est dimension 3 (est vecteur nulle) donc

$i = r(0) = 0 \implies \alpha_0 = 1$.

Les autres 7 vecteurs sont :

$e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3$ avec où sont radical est dimension 1,

$r(v) = 2 \implies \alpha_1 = 7$.

D'où le polynôme radical de f_3 est

$$y^3 + 7x^2y.$$

Pour : $\omega_2 = e_1e_2e_3 + e_3e_4e_5 \in \wedge^3 E$

$\dim E = 5$

$B = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ une base

$\text{card } E = 2^5 = 32$

$$E = \left\{ \begin{array}{l} 0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_1 + e_5, e_2 + e_3, e_2 + e_4, e_2 + e_5, \\ e_3 + e_4, e_3 + e_5, e_4 + e_5, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_4, e_1 + e_2 + e_5, e_2 + e_3 \\ + e_4, e_2 + e_3 + e_5, e_3 + e_4 + e_5, e_1 + e_4 + e_5, e_1 + e_3 + e_4, e_1 + e_3 + e_5, \\ e_2 + e_4 + e_5, e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 + e_4 + e_5, e_3 + e_4 + e_5 + e_2, \\ e_4 + e_5 + e_1 + e_3, e_5 + e_2 + e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5. \end{array} \right\}$$

donc

$$P(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i y^{n-i} = \sum_{v \in V} x^{r(v)} y^{n-r(v)},$$

$i = r(v)$

$r(v) = n - \dim Rad_\omega(v)$

$Rad_\omega(v) = \{u \in E; \omega(v, u, z) = 0, \forall z \in E\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(e_1e_2e_3) = 1, \\ \omega(e_3e_4e_5) = 1, \\ \omega(e_ie_je_k) = 0. \end{array} \right.$$

$$\text{or } P(\omega) = \sum_{v \in V} x^{r(v)} y^{n-r(v)}.$$

Le radical du vecteur nul est de dimension 5 donc $i = r(0) = 0 \implies \alpha_0 = 1$

Il existe 15 vecteurs où le radical est de dimension 3 :

$$\begin{aligned} &e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_1 + e_5, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_4, e_1 + e_2 + e_5, \\ &e_1 + e_3 + e_5, e_1 + e_3 + e_4, e_1 + e_4 + e_5, e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_4 + e_5 + e_1 + e_3 \\ &e_5 + e_2 + e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \text{ donc } i = r(v) = 2 \implies \alpha_2 = 15 \end{aligned}$$

Il existe 16 vecteurs où le radical est de dimension 1

$$\begin{aligned} &e_2, e_3, e_4, e_5, e_2 + e_3, e_2 + e_4, e_2 + e_5, e_3 + e_4, e_3 + e_5, e_4 + e_5, e_2 + e_3 + e_4 \\ &, e_2 + e_3 + e_5, e_3 + e_4 + e_5, e_2 + e_4 + e_5, e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \\ &\text{donc } i = r(v) = 4 \implies \alpha_4 = 16. \end{aligned}$$

Le polynôme radical de ω_5 est

$$p(\omega_3) = y^5 + 15x^2y^3 + 16x^4y.$$

Soit $\omega_{6,1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6$.

Pour polynôme $(y^3 + 7x^2y)(y^3 + 7x^2y)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{6,1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6, \dim E = 6, \\ V = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle, V_2 = \langle e_4, e_5, e_6 \rangle \text{ donc } V_1 \oplus V_2 = V, \\ \text{comme } V_1 \perp V_2 = E. \end{array} \right.$$

D'après théorème 2.1

$$\begin{aligned} P(\omega_{6,1}) &= P(e_1e_2e_3) \bullet P(e_4e_5e_6), \\ &= (y^3 + 7x^2y)(y^3 + 7x^2y). \end{aligned}$$

Le résultat suivant utilise la classification des formes trilinaire en dimension 7 sur $GF(2)$, faite dans [1].

La table 1 contient des représentants de toutes les classes d'équivalence avec leur polynôme radical.

Soit ω une forme trilinaire alterné sur un espace vectoriel de dimension 7 sur $GF(2)$. Alors le polynôme radical de ω est donné par

2.3.2 polynôme radical en dimension sept

ω_i	$p(\omega_i)$
ω_0	$128y^7$
ω_1	$16y^4(y^3 + 7x^2y)$
ω_2	$4y^2(y^5 + 15x^2y^3 + x^4y)$
ω_3	$2y(y^3 + 7x^2y)(y^3 + 7x^2y)$
ω_4	$2y(y^6 + 7x^2y^4 + 56x^4y^2)$
ω_5	$2y(y^6 + 63x^4y^2)$
ω_6	$y^7 + 7x^2y^5 + 56x^4y^3 + 64x^6y$
ω_7	$y^7 + 3x^2y^5 + 76x^4y^3 + 48x^6y$
ω_8	$y^7 + 63x^2y^5 + 64x^6y$
ω_9	$y^7 + 63x^4y^3 + 64x^6y$
ω_{10}	$2y(y^6 + 63x^4y^2)$
ω_{11}	$y^7 + x^2y^5 + 30x^4y^3 + 96x^6y$

Conclusion

L'étude présentée dans ce mémoire s'articule essentiellement sur la classification des trivecteurs de rang ≤ 7 , et leur polynôme radical.

Cette classification est interprétable pour décrire certaines classes en théorie des codes.

Bibliographie

- [1] **A.Cohen et A.Helminck** , Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7 , Communications in Algebra 16(1) , 1988, p.1-25.
- [2] **D.Djokovic** , Classification of trivectors of an eight dimensional real vector space , Linear and multilinear Algebra , 13(3) , 1983, p.3-39.
- [3] **E.M. Rain , J.A. Sloane** , Self-dual codes , Handbook of Coding Theory , press V.S. Huffman W.C (editors , Elsevier ,Amsterda , 1998 , p.177-294.
- [4] **G.B.Gurevitch** , Theory of algebraic invariants. P.Noordhof LTD,Groningen, the Netherland , 1964..
- [5] **J. Hora** (2010). An easily computable invariant of trilinear alternating forms. Acta Univ. Carol. Math. Phys.51(2) :9-15.
- [6] **Jan Hora** Italian Journal of pure and applied Mathematics { N. 41 2019 p.633
- [7] **Jan Hora and Petr Pudk**,Classificatiton of 8-dimensional trilinear alternating forms over GF2. Communications in Algebra, 43 : 3459–3467, 2015
- [8] **L.Noui et Ph.Revoy**, Formes multilinéaires alternées, Ann.Math.Blaise Pascal Vol 1 , n°2 , 1994 , p.43-69
- [9] **L.Noui**, Classification des trivecteurs par l'action du groupe linéaire, Thèse de Doctorat , Université de Montpellier II , France, 1995 .
- [10] **Ph.Revoy**, Formes trilinéaires alternées de Rang 7 , Bul.Sc. Math.112 ,1988 , p.357-368.
- [11] **Ph.Revoy**, Trivecteurs de rang 6 , in coll. Sur les formes quadratiques , Bulletin SMF , 59 , 1979 , p.141-155.
- [12] **Rakdi .M.A. et Midoune N.** Weights of the Fq-forms of 2-step splitting trivectors of rank 8 over a finite field, Carpathian Mathematical Publications,Vol. 11 No. 2 (2019)
- [13] **S.Lang**, Algebra, second edition, Addisson-Wesley publishing company Inc,California 1984.

Résume

L'étude présentée dans ce mémoire s'articule essentiellement sur la classification des trivecteurs (ou formes trilinéaires alternées).

Pour classer les trivecteurs, on utilise des invariants algébriques qui permettent de mieux

comprendre la classification de ces formes, par exemple, le polynôme radical d'un trivecteur ω , $P(\omega)$, car deux trivecteurs ω_1 et ω_2 sont équivalents si et seulement si leur polynôme radical le sont

Dans ce mémoire, nous rappelons l'essentiel des résultats connus sur la classification des trivecteurs, puis nous déterminons les polynômes radicaux de certains trivecteurs.

Abstract

The study presented in this thesis is essentially based on the classification of trivectors (or alternating trilinear forms). To classify the trivectors, we use algebraic invariants that allow us to better understand the classification of these forms, for example, the radical polynomial of a trivector ω , $P(\omega)$, because two trivectors ω_1 and ω_2 are equivalent if and only if their radical polynomials are. In this thesis, we recall the main part of the known results on the classification of trivectors, then we determine the radical polynomials of some trivectors.

ملخص

تعتمد الدراسة المقدمة في هذه الأطروحة أساساً على تصنيف الأشعة لثلاثية (أو الأشكال ثلاثية الأشعة المتناوبة). ، نستخدم الثوابت الجبرية التي تسمح لنا بفهم أفضل لتصنيف هذه الأشكال ، على سبيل المثال ، كثير الحدود الجذري ، $P(\omega)$ ، لأن اثنين من المتغيرات ω_1 و ω_2 متكافئان إذا وفقط إذا كان لهما نفس كثيرات الحدود الجذري. في هذه الأطروحة ، نتذكر الجزء الرئيسي من النتائج المعروفة حول تصنيف ثلاثية الأشعة، ثم نحدد كثيرات الحدود الجذرية لبعض ثلاثية الأشعة .