



N° d'ordre :

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère

Spécialité : Mathématique

Option : Mathématiques discrètes

Par

AZZEDINE KHENICHE

SUJET

LES RELATIONS FLOUES

Soutenu publiquement le devant le jury composé de :

A. DAHMANI	Professeur à l'université de Bejaia	Président
A. AMROUNE	M.C à l'université de M'sila	Rapporteur
A. M. BOUDAUD	Professeur à l'université de M'sila	Examineur
D. MIHOUBI	M.C à l'université de M'sila	Examineur
L. ZEDAM	C.C à l'université de M'sila	Examineur

Promotion : 2007/2008

Remerciements

Je tiens, tout particulièrement, à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur A. AMROUNE Maître de Conférences à l'Université de M'sila, pour ces conseils précieux et pour ces encouragements, ainsi que pour la confiance et l'aide qu'il m'a accordé pour mener ce travail à terme.

Je remercie Monsieur A. DAHMANI Professeur à l'Université de Bejaia, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur A. M. BOUDAUED Professeur à l'Université de M'sila, D. MIHOUBI Professeur à l'Université de M'sila et L. ZEDAM Chargé de Cours à l'Université de M'sila, pour l'honneur qu'ils me font d'avoir accepté d'examiner ce travail.

En fin, que tous ceux et celles qui m'ont aidé et soutenus durant tout mon parcours trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus sincères.

*A ceux qui m'ont soutenu
pendant toute la durée
de mes études
je dédie ce mémoire.*

Résumé

Dans ce travail, nous traitons plusieurs propriétés relatives aux ordres flous, on introduit les notions de majorants, minorants, borne supérieure, borne inférieures, (par rapport à un ordre flou), les α -ordres flous sont utilisés pour introduire le lemme de Zorn généralisé au cas flou.

Nous présentons aussi la notion d'un treillis flou, et ses propriétés fondamentales, puis on étudie un treillis particulier qui est le treillis de Heyting, et enfin, un aperçu sur la dualité de Priestley dans le cas d'un ordre flou.

Abstract

In this thesis, we discuss the fuzzy ordering, there does not exist a reasonable theory of fuzzy ordered sets, our goal in this paper is to commence a systematic study of fuzzy ordered sets. The concept of fuzzy order was introduced by generalizing the notion of reflexivity, antisymmetry, and transitivity, since then several authors have studied fuzzy relations and orderings.

In this paper we do not intend to study fuzzy relations in general, we restrict our attention to fuzzy relations which are in a suitable sense "reflexive", "antisymmetric", and transitive. In this work, we deal with many properties related to fuzzy ordered, we introduce the notion of the upper-bounds, and lower bounds, according to the fuzzy ordered, we also present The notion of one fuzzy lattice, and its fundamental properties, and we study one particular fuzzy lattice which is a fuzzy lattice of Heyting.

Finally a look on the duality of Priestley in the case of an fuzzy ordered.

خلاصة

في هذه المذكرة, ندرس العديد من الخواص المتعلقة بعلاقة الترتيب الضبابية, ندخل مفهوم الحاد من الأعلى, الحاد من الأسفل المرتبطة بعلاقة الترتيب الضبابية, كما نستعمل α -ترتيب ضبابي لصياغة مبرهنة زورن, في نسختها الضبابية, كما نقدم مفهوم الشبكة الضبابية و خواصها الأساسية, ثم ندرس بصورة خاصة شبكة "هايتين" الضبابية و نبرهن بعض الخواص الأساسية المرتبطة بهذه الشبكة.

أخيرا نقدم نظرة حول ثانوية "بريس تلي" في حالة الترتيب الضبابي لشبكة ضبابية.

Table des matières

Introduction		9
1 Généralités sur les sous-ensembles flous		11
1.1 Introduction		11
1.2 Définitions générales		11
1.2.1 Définition d'un ensemble flou		11
1.2.2 Alpha-coupes d'un ensemble flou (niveau de flou)		18
1.2.3 Opérations algébriques sur les sous-ensembles flous		20
1.2.4 Principe d'extension de Zadeh		21
2 Relations floues		22
2.1 Introduction		22
2.2 Définition		22
2.3 Composition de relations floues		22
2.4 Propriétés des relations floues		23
2.5 Définition d'un ordre flou		26
2.6 Borne supérieure, borne inférieure		27
2.7 Etude des cas spéciaux		33
2.7.1 Cas d'un α -ordre flou		33
2.7.2 Lemme de Zorne: Cas d'un α -ordre flou		35
2.7.3 Cas fini: Algorithme de Floyd		36

3	Treillis flous	40
3.1	Définitions et propriétés des treillis flous	40
3.2	Idéal flou dans un treillis flou	41
3.3	Sous-treillis flou — chaîne floue	43
3.3.1	Sous-treillis flou	43
3.3.2	chaîne floue	43
3.4	Filtre flou dans un treillis flou fermé	43
3.5	Propriétés des treillis flous	44
3.5.1	Treillis flou fermé et distributif	45
4	Etude de treillis de Heyting flou	46
4.1	Rappel (cas net)	46
4.2	Treillis de Heyting dans le cas d'un ordre flou	46
5	Aperçus : dual et bi-dual d'un treillis flou	54
5.1	Espace de Priestley flou	54
	Conclusion	61
	Bibliographie	63

Introduction

La théorie des sous-ensembles flous, débuté en 1965 avec la publication de l'article "fuzzy sets" (ensemble flous) par LOTFI ZADEH, dans la revue "information and control, cette théorie est l'élément de base de la logique floues, une logique qui essaie d'associer l'imprécision inhérente aux phénomènes naturels à la puissance de calcul des ordinateurs, pour réaliser des systèmes de raisonnement intelligents robustes et souples. La logique floues concerne les propriétés d'événements imprécis, elle s'occupe de l'imprécision associée à la description d'un événement, au lieu de l'imprécision associée à son occurrence. La première est une propriété intrinsèque et ne peut être éliminée, tandis que la seconde, souvent appelée la probabilité de l'événement est due à la contingence de l'occurrence future.

Dans ce contexte, lorsque nous parlons de "flous" nous voulons dire l'incertitude ou l'imprécision inhérentes à la manière dont on décrit un objet, ou un événement.

Les relations floues, qui sont des sous-ensembles flous ce n'est qu'une partie de la logique floues, elles nous permis d'étudier quelque treillis flous (les treillis muni d'un ordre flou).

ORGANISATION DE MÉMOIRE

Le but de ce mémoire est d'étudier les propriétés des relations d'ordres floues, les notions de "l'antisymétrie" et "transitivités" sont généralisées au cas où l'ordre est flou, notons que plusieurs définitions de l'anti-

symétrie et la transitivité dans ce cas ont été abordé par les chercheurs celons la qualité de leurs objectifs, autrement dit quelques définitions sont fortes et les quelques autres sont faibles.

Les concepts des treillis flous sont basés sur les ordres flous, nous allons étudier dans ce mémoire quelques propriétés d'un treillis spécial qui est le treillis de Heyting.

Le mémoire est subdivisé en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre nous présentons la théorie des sous-ensembles flous; sa position par rapport à la théorie classique des ensembles, les propriétés fondamentales des ensembles flous et les règles de calculs algébriques dans un ensemble flou.

Dans le deuxième chapitre on étudies les relations d'ordres floues, les notions de majorants, minorants, par rapport a un ordre flou, lemme de zorne généralisé (au cas d'un ordre flou), les α -ordres flous.

Dans le troisième chapitre on étudier les propriétés des treillis flous, les notions d'Idéal et filtre dans un treillis flou.

Dans le quatrième chapitre nous allons étudier un treillis flous particulier (de Heyting) et ses propriétés fondamentales.

En fin nous présentés un aperçu sur l'espace de preistley dans le cas flous, et nous proposons une construction du dual et bi- dual d'un treillis flous quelconque.

Chapitre 1

Généralités sur les sous-ensembles flous

1.1 Introduction

On introduit la théorie des ensembles flous, comme théorie mathématique basée sur la théorie des ensembles, mais qui présente l'intérêt de l'étendre, en modifiant la définition même d'un ensemble, ou plus précisément celle d'un sous-ensemble, car on considère toujours un ensemble ordinaire comme référence pour définir des ensembles flous.

1.2 Définitions générales

1.2.1 Définition d'un ensemble flou

Définition 1.2.1. Soit X un ensemble (classique) de référence, un sous-ensemble flou \tilde{A} de X est défini par une fonction d'appartenance, qui associe à chaque élément x de X le degré $\mu_{\tilde{A}}(x)$ compris entre 0 et 1 [7].

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) / x \in X\}$$

Exemple 1.2.1. Une illustration classique d'ensemble flou est la notion de "GRAND", en logique booléenne, nous devons décider qui est grand par exemple en disant : "toute personne de plus d'un mètre quatre-vingt",

formellement cela définit la fonction caractéristique à l'ensemble :

$$\mu_{grand}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1.80 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

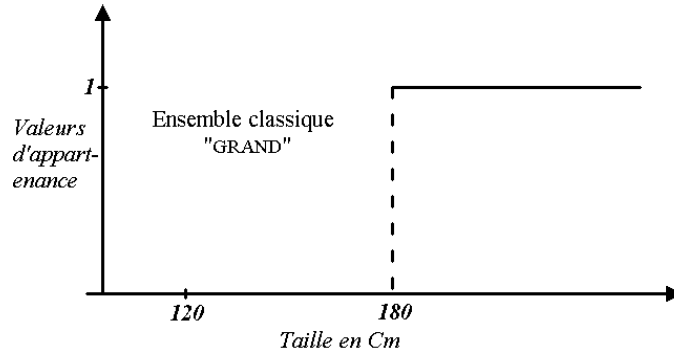


FIG. 1.1 – Concept de "GRAND" en représentation classique.

- Dans la version classique, la fonction entre "GRAND" et "NON-GRAND" correspond à une dichotomie parfaite — toute personne de plus de 1.80 m est "GRAND", il n'y a pas de "degré de grandeur", la taille d'une personne est de 1.75 m alors il est "PETIT", celle d'une autre personne est de 1.80 m, donc il est "GRAND".
- Dans un ensemble flou, néanmoins, l'appartenance admet des degrés, un ensemble flou indique dans quelle mesure quelque chose en fait partie, la FIG. 1.2 montre le concept de "GRAND" en tant qu'ensemble flou.

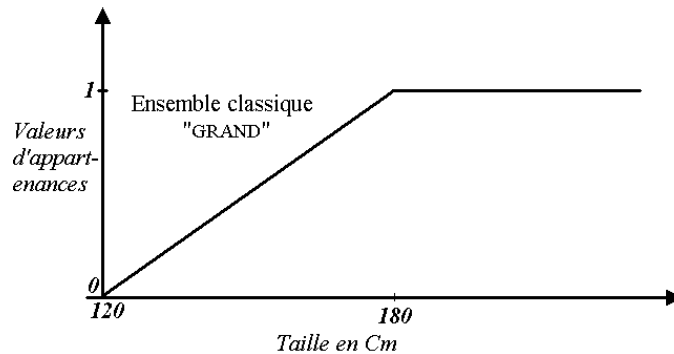


FIG. 1.2 – Concept de "GRAND" en représentation floue.

- Nous constatons que quelqu'un de 1.20 m n'est absolument pas "GRAND", alors que quelqu'un de 1.90 m est parfaitement représentatif du concept, les tailles intermédiaires ont des valeurs d'appartenance différentes à l'ensemble "GRAND", ces valeurs d'appartenance nous indiquent dans quelle mesure une taille donnée est compatible avec la notion "GRAND".
- Les ensembles flous, servent à décrire des concepts vagues imprécis, des propriétés graduelles, ou des évènements incertains, les notions d'inclusion, de réunion, d'intersection, complément, relations, convexité, ..., etc. sont étendues à des tels ensembles, et diverses propriétés de ces notions dans le contexte des ensembles flous sont établis [7]:

✓ Egalité: $\tilde{A} = \tilde{B}$ si $\forall x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$.

✓ Inclusion: $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ si $\forall x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$.

✓ Intersection: $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{C}$ tel que: $\forall x \in X : \mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$.

✓ Union: $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{D}$ tel que: $\forall x \in X : \mu_{\tilde{D}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$.

✓ Complément: $\forall x \in X : \mu_{(\tilde{A})^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$.

✓ Noyau d'un sous-ensemble flou: $N(\tilde{A})$ est défini par: $N(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$ "les éléments vraiment dans A", on le note aussi $Noy(\tilde{A})$.

✓ Support d'un sous-ensemble flou: $Supp(\tilde{A})$ est défini par: $Supp(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) \neq 0\}$ "les éléments qui y sont à des degrés divers".

✓ Hauteur d'un sous-ensemble flou: noté $ht(\tilde{A})$ est défini par:

$$ht(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

Propriétés [7] :

$$\text{Supp}(\tilde{A})^c = X - \text{Noy}(\tilde{A})$$

$$\text{Noy}(\tilde{A})^c = X - \text{Supp}(\tilde{A})$$

Exemple 1.2.2. L'intervalle flou couramment utilisé dans \mathbb{R} est décrit par sa fonction d'appartenance, le plus simple type pour ce qu'il convenu d'appeler un "intervalle flou" est une représentation trapézoïdale, on pose :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a - \alpha \text{ ou } b + \beta < x \text{ (} x \text{ est hors du support de } A\text{)} \\ 1 & \text{si } a < x < b \text{ (} x \text{ dans le noyau de } A\text{)} \\ 1 + (x - a)/\alpha & \text{si } a - \alpha < x < a \\ 1 - (b - x)/\beta & \text{si } b < x < b + \beta \end{cases}$$

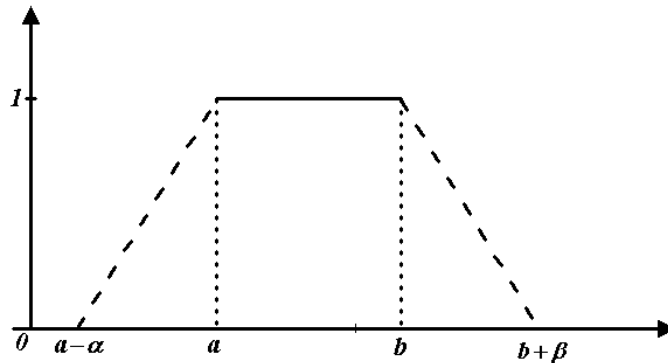


FIG. 1.3 – Ensemble flou trapézoïdale.

$[a, b]$ est le noyau, $[a - \alpha, b + \beta]$ est le support.

Mesure de possibilité [2] : Soit X un ensemble net de référence, une mesure de possibilité sur X est une fonction $\pi : P(X) \rightarrow [0, 1]$ telle que : $\pi(\emptyset) = 0$, $\pi(X) = 1$.

$$\forall (A_i)_{i \in I} \in P(X) : \pi(\cup_{i \in I} A_i) = \sup_i \pi(A_i)$$

Remarque : $\pi(A \cup B) = \max(\pi(A), \pi(B))$.

Distribution de possibilité : est une fonction $\pi : X \rightarrow [0, 1]$, vérifiant

la condition de normalité :

$$\sup_{x \in X} \pi(x) = 1$$

Cardinal d'un ensemble flou [7], [8] :

Si \tilde{A} est un ensemble flou fini, le cardinal de \tilde{A} , noté $|\tilde{A}|$ défini par :

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

Si \tilde{A} n'est pas fini, alors : $|\tilde{A}|$ est l'intégrale de la fonction d'appartenance.

On définit aussi le cardinal relatif de \tilde{A} par :

$$\| \tilde{A} \| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|} \text{ (si } X \text{ est fini)}$$

Ensemble flou normalisé :

Un ensemble flou est dit normalisé s'il est de hauteur 1.

Distance entre deux ensembles flous :

La notion de distance entre ensembles flous, peut-être utile pour définir des relations telles que : "a peut être égale à" ou "très supérieur à", il s'agit de la distance de HAMDING :

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{x \in X} |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)|, \text{ qui est } \int_{\mathbb{R}} |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)| dx$$

On peut définir aussi la distance euclidienne :

$$\varphi^2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x))^2$$

Mesure de nécessité : est une fonction $N : P(X) \rightarrow [0,1]$ telle que : $N(\emptyset) = 0, N(X) = 1$.

$$N(\bigcap_{i \in I} A_i) = \inf_i N(A_i)$$

Remarque : $N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$.

Quantité floue : est un ensemble flou normalisé de \mathbb{R} .

Valeur modale : Une valeur de degré d'appartenance égale à 1 est dite *Valeur modale*.

Partition floue : Pour un ensemble de référence E on dit que les sous-ensembles flous $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E constituent une partition floue si pour tout x :

$$\sum_{i=1}^n \mu_{E_i}(x) = 1 \text{ [voir : Bezdek81 -chap5-]}$$

Si E est un ensemble non vide et $P(E)$ l'ensemble des parties de E , alors $P(E)$ est un treillis de Bool (treillis au sens classique) pour les opérations \cup, \cap .

Soit $\cup = \{0,1\}$, il y a une correspondance bijective entre $P(E)$ et \cup^E (l'ensemble des applications de E dans \cup), tel que à chaque partie A de E on associe χ_A sa fonction caractéristique, par ailleurs, l'ensemble \cup est une chaîne, donc un treillis de Bool avec les opérations \wedge, \vee, \neg .

$$\alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta), \alpha \wedge \beta = \min(\alpha, \beta) \text{ et } \neg \alpha = 1 - \alpha$$

On définit dans le treillis \cup^E les opérations ensemblistes :

$\tilde{A} \cup \tilde{B}$ par :

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x),$$

$\tilde{A} \cap \tilde{B}$:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x),$$

$\mu_{(\tilde{A})^c}$ par :

$$\mu_{(\tilde{A})^c}(x) = \neg \mu_{\tilde{A}}(x),$$

et \emptyset :

$$\mu_{\emptyset}(x) = 0.$$

(voir [1]).

Une structure floue est tout couple (E, J) où E est un ensemble non vide,

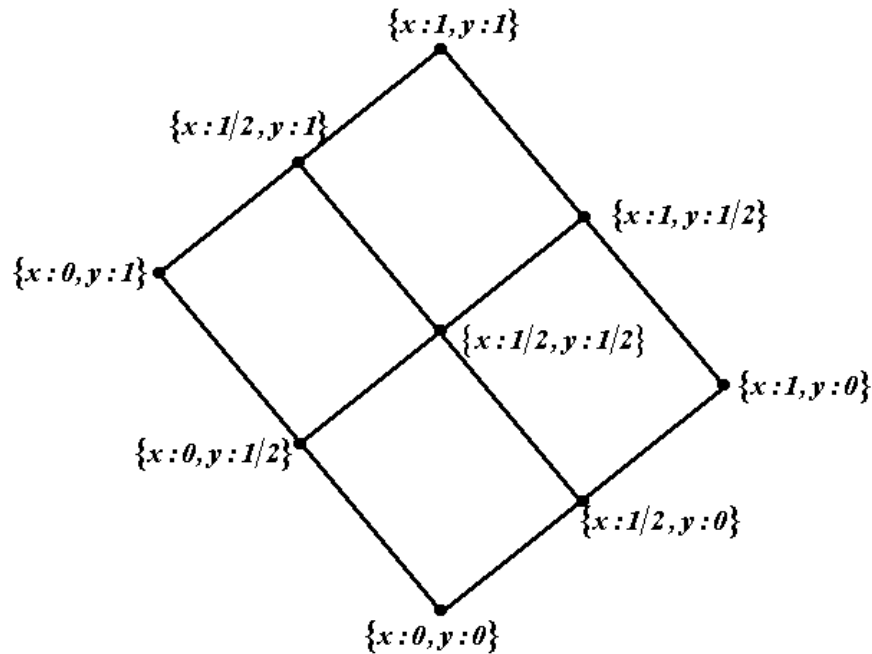
J est une chaîne fermée, dans cette structure floue, une partie floue de E est toute application de E dans J . L'ensemble des parties floues de E sera noté $\tilde{P}(E)$ ce n'est autre que J^E .

Remarque 1.2.1. Si $J = \{0,1\} = \cup$ alors $\tilde{P}(E) = P(E)$ qui est l'ensemble des parties nettes de E [1]. On définit sur $\tilde{P}(E)$ une relation d'ordre \subseteq par :

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in E.$$

Remarque 1.2.2. $(\tilde{P}(E), \cup, \cap, \emptyset, E)$ est un treillis distributif fermé complet si la chaîne J est complète (voir [1]).

Exemple 1.2.3. Exemple des parties floues d'un ensemble fini $E = \{x,y\}$ en se limitant aux seuls degrés d'appartenance : 0, 1/2 et 1, le treillis de tous les sous-ensembles flous avec ces seules valeurs, est formé des 9 parties, dont 4 sont nettes (sans la valeur 1/2) et les 5 autres floues.



1.2.2 Alpha-coupes d'un ensemble flou (niveau de flou)

Pour tout $\alpha \in]0,1]$, on définit le niveau de flou de degré α , comme étant l'application N_α de $\tilde{P}(X)$ dans $P(X)$ définie par [1] :

$$N_\alpha(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

Ce sont des ensembles nettes.

Avec $\tilde{P}(X)$ est l'ensemble des parties floues de X et $P(X)$ l'ensemble des parties de X .

- Rappelons q'une partie floue de X , est toute application de X dans $[0,1]$.

On définit aussi le strict α -coupe (ou le niveau de flou strict de degré α , comme étant l'application N'_α de $\tilde{P}(X)$ dans $P(X)$ définie par :

$$N'_\alpha(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}, \forall \alpha \in [0,1[$$

- Les niveaux de flous vérifient les propriétés suivantes :

1. Si $\alpha \leq \beta$ alors : pour tout \tilde{A} : $N_\beta(\tilde{A}) \subset N_\alpha(\tilde{A})$.
2. Si A est une partie nette, $\forall \alpha \in]0,1]$: $N_\alpha(A) = A$.
3. $\forall \alpha \in]0,1]$, $\forall \beta \in]0,1]$: $N_\alpha \circ N_\beta = N_\beta$.
4. Si $\forall \alpha \in]0,1]$: $N_\alpha(\tilde{A}) = N_\beta(\tilde{B})$ alors : $\tilde{A} = \tilde{B}$.

Ces quatre propriétés restent valables pour les niveaux stricts de flou.

Autres propriétés :

$$\begin{aligned} N_\alpha(\tilde{A} \cup \tilde{B}) &= N_\alpha(\tilde{A}) \cup N_\alpha(\tilde{B}) \\ N_\alpha(\tilde{A} \cap \tilde{B}) &= N_\alpha(\tilde{A}) \cap N_\alpha(\tilde{B}) \end{aligned}$$

(Ces propriétés restent valables pour les niveaux stricts de flou).

- Si on munit la structure floue $(X, [0,1])$, d'une involution décroissante n de $[0,1]$: pour tout α : $nn\alpha = \alpha$ et si $\alpha \leq \beta$ alors $n\beta \leq n\alpha$, $n0 = 1$ et $n1 = 0$
alors :

$$\forall \alpha \in]0,1], \forall \tilde{A} \in \tilde{P}(X) : nN\alpha(\tilde{A}) = Nn\alpha(\tilde{A})$$

Ensemble flou convexe [8] :

Un ensemble flou \tilde{A} de X est dit convexe si :

$$\forall x_1, x_2 \in X : \forall \lambda \in [0,1]$$

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2))$$

Exemple d'intersection et d'union des ensembles flous :

\tilde{A} = "x considérablement supérieur à 10".

\tilde{B} = "x approximativement égale à 11".

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 10 \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \{ (1 + (x - 11)^4)^{-1} \}$$

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 10 \\ \min[(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}] & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max[(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}] , x \in X$$

Ensemble flou intuitionniste: Atanasov et Steova 1983

Soit X un ensemble de référence, un sous-ensemble intuitionniste de X (IFS) \tilde{A} est l'ensemble des triplets $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x), v_{\tilde{A}}(x)) / x \in X\}$ avec $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $v_{\tilde{A}}(x)$ sont des applications de X dans $[0,1]$.

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ le degré d'appartenance de x à A .

$v_{\tilde{A}}(x)$ le degré de non-appartenance de x dans A .

avec la condition $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) + v_{\tilde{A}}(x) \leq 1$.

1.2.3 Opérations algébriques sur les sous-ensembles flous

Produit cartésien [8] :

Soient $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \dots, \widetilde{A}_n$ les sous-ensembles flous de X_1, X_2, \dots, X_n . Le sous-ensemble flou produit $\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times \dots \times \widetilde{A}_n$ de l'espace produit $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ est défini par sa fonction d'appartenance $\mu_{(\widetilde{A}_1 \times \dots \times \widetilde{A}_n)}(x)$ tel que :

$$\mu_{(\widetilde{A}_1 \times \dots \times \widetilde{A}_n)}(x) = \min_i \{ \mu_{\widetilde{A}_i}(x_i) / x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } x_i \in X_i \}$$

L'addition algébrique :

$$\widetilde{C} = \widetilde{A} + \widetilde{B} \text{ est définie par : } \widetilde{C} = \{ (x, \mu_{\widetilde{A}+\widetilde{B}}(x)) / x \in X \}$$

$$\text{avec : } \mu_{\widetilde{A}+\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x) - \mu_{\widetilde{A}}(x) \cdot \mu_{\widetilde{B}}(x)$$

La somme directe de \widetilde{A} et \widetilde{B} :

$$\widetilde{C} = \widetilde{A} \oplus \widetilde{B} \text{ est définie par : } \widetilde{C} = \{ (x, \mu_{\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}}(x)) / x \in X \}$$

$$\text{où : } \mu_{\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}}(x) = \min(1, \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x))$$

Le produit algébrique :

$$\widetilde{C} = \widetilde{A} \cdot \widetilde{B} \text{ est définie par : } \widetilde{C} = \{ (x, \mu_{\widetilde{A}}(x) \cdot \mu_{\widetilde{B}}(x)) / x \in X \}$$

t-Norme (Dubois and Prade 1985, p. 90) :

Une t-norme est une application de $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ vérifiant :

1. $t(0,0) = 0$ et $\forall x \in X : t(\mu_{\widetilde{A}}(x), 1) = t(1, \mu_{\widetilde{A}}(x)) = \mu_{\widetilde{A}}(x)$
2. Si $\mu_{\widetilde{A}}(x) \leq \mu_{\widetilde{C}}(x)$ et $\mu_{\widetilde{B}}(x) \leq \mu_{\widetilde{D}}(x)$ alors : $t(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)) \leq t(\mu_{\widetilde{C}}(x), \mu_{\widetilde{D}}(x))$ (Monotonie).
3. $t(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)) = t(\mu_{\widetilde{B}}(x), \mu_{\widetilde{A}}(x))$ (Commutativité).
4. $t(\mu_{\widetilde{A}}(x), t(\mu_{\widetilde{B}}(x), \mu_{\widetilde{C}}(x))) = t(t(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)), \mu_{\widetilde{C}}(x))$ (Associativité).

Projection : La projection sur X_1 d'un sous-ensemble flou A de $X_1 \cdot X_2$ est le sous-ensemble flou, dont la fonction d'appartenance est définie par : $\forall x_1 \in X_1$:

$$\mu_{\widetilde{proj}_{X_1}(A)}(x_1) = \sup_{x_2 \in X_2} \mu_{\widetilde{A}}(x_1, x_2)$$

1.2.4 Principe d'extension de Zadeh

Zadeh a introduit le principe d'extension, l'un des plus importants de la théorie des sous-ensembles flous, pour permettre d'explorer nos connaissances classiques dans le cas de données floues : arithmétiques floues, relations floues, ..., etc.

Soit A un sous-ensemble flou de X , φ une application de X dans Y , le principe d'extension définit un sous-ensemble flou B de Y associé à A (image directe) par l'intermédiaire de φ par [7] :

$$\forall y \in Y : \mu_{\tilde{B}}(y) = \sup_{\{x/\varphi(x)=y\}} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

avec la condition :

$$\sup_{\emptyset} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$$

Remarque 1.2.3. Dans le cas où φ est injective :

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\tilde{A}}(x) \text{ avec } y = \varphi(x)$$

Cela signifie que chaque fois que y est obtenu, son degré d'appartenance au résultat est le meilleur degré de toutes les façons de l'obtenir, et égal à 0 si non.

Remarque 1.2.4. Une généralisation de ce principe est la suivante : pour toute relation exacte φ entre deux ensembles X, Y : si A est un sous-ensemble flou de X son image B par φ sera définie par :

$$\mu_B(y) = \sup_{\{x \in X\}} (\min(\mu_{\varphi}(x,y), \mu_{\tilde{A}}(x)))$$

Ce principe d'extension est une sorte de "sup-min convolution", il sera d'ailleurs à l'origine de bien des définitions, en particulier du Modus-penens généralisé.

Chapitre 2

Relations floues

2.1 Introduction

La théorie des relations flous, a été initiée par L.A. Zadeh (1971), [14] qu'il a introduit le concept de similarité comme généralisation d'équivalence, et l'ordre flou comme généralisation de réflexivité, antisymétrie et transitivité, mais une théorie générale des ordres flous manque encore, malgré les concepts des bornes supérieurs et inférieurs introduits par Zadeh.

2.2 Définition

X, Y deux ensembles non vide de référence. Une relation binaire floue R de X dans Y est un sous-ensemble flou de $X \times Y$ caractérisé par une fonction d'appartenance $:X \times Y \rightarrow [0,1]$, si $X = Y$ on dit simplement une relation floue sur X .

Soit X un ensemble de référence. Une relation floue sur X est un sous-ensemble flou de $X \times X$, donc une application $X \times X \rightarrow [0,1]$.

2.3 Composition de relations floues

La composition de deux relations floues \widetilde{R}_1 sur $X \times Y$ et \widetilde{R}_2 sur $Y \times Z$ définit une relation floue $\widetilde{R} = \widetilde{R}_1 \circ \widetilde{R}_2$ sur $X \times Z$ de fonction

d'appartenance défini par [2], [7] :

$$\forall (x, z) \in X \times Z$$

$$\mu_{\tilde{R}}(x, z) = \sup_{y \in Y} [\min(\mu_{\tilde{R}_1}(x, y), \mu_{\tilde{R}_2}(y, z))]$$

Elle est associative.

2.4 Propriétés des relations floues

Soit X un ensemble de référence, \tilde{R} une relation floue sur X [2], [7].

1. \tilde{R} est dite **Réflexive** si :

$$\forall x \in X : \mu_{\tilde{R}}(x, x) = 1$$

\tilde{R} est dite **Antiréflexive** si :

$$\forall x \in X : \mu_{\tilde{R}}(x, x) = 0$$

Remarque 2.4.1. Il y a d'autres définitions pour la réflexivité qui exigent seulement la condition : $\mu_{\tilde{R}}(x, x) > 0$, mais puisque nous avons défini la relation floue \tilde{R} sur un ensemble classique X , on utilise alors la condition de Zadeh : $\mu_{\tilde{R}}(x, x) = 1$.

2. \tilde{R} est dite **Antisymétrie** si :

$$\forall (x, y) \in X : (\mu_{\tilde{R}}(x, y) + \mu_{\tilde{R}}(y, x) > 1) \Rightarrow x = y$$

Remarque 2.4.2. La relation : $\mu_{\tilde{R}}(x, y) + \mu_{\tilde{R}}(y, x) > 1$, montre que *ni* $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$, *ni* $\mu_{\tilde{R}}(y, x)$ peut être égale à 0, autrement dit :

$$(\mu_{\tilde{R}}(x, y) + \mu_{\tilde{R}}(y, x) > 1) \Rightarrow x = y$$

ou encore : si $x \neq y$ alors $\mu_{\tilde{R}}(x, y) = 0$ ou $\mu_{\tilde{R}}(y, x) = 0$, donc pour $x \neq y$:

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) > 0 \Rightarrow \mu_{\tilde{R}}(y, x) = 0$$

$$\text{ou } \mu_{\tilde{R}}(y, x) > 0 \Rightarrow \mu_{\tilde{R}}(x, y) = 0$$

Se sont toutes des définitions déduites de la définition principale (2.) (voir [7]).

Remarque 2.4.3. On trouve bien la définition d'antisymétrie dans le cas net (le cas d'une relation classique) car : si $\mu_{\tilde{R}}(x,y) \neq 0$ et $\mu_{\tilde{R}}(y,x) \neq 0$, cela veut dire que xRy et yRx et donc $x = y$.

3. \tilde{R} est dite **Transitive** : si $\forall X \forall Y \forall Z$:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,z) \geq \max_y [\min(\mu_{\tilde{R}}(x,y), \mu_{\tilde{R}}(y,z))]$$

Soit $\mu_{\tilde{R}} \geq \mu_{\tilde{R} \circ \tilde{R}}$, ce qui permet par fois de vérifier plus rapidement la transitivité.

Remarque 2.4.4. On retrouve bien la définition de la transitivité dans le cas classique :

$$\left. \begin{array}{l} xRy \\ yRz \end{array} \right) \Rightarrow xRz$$

En effet :

$$\begin{aligned} xRy &\Rightarrow \mu_{\tilde{R}}(x,y) = 1 \\ yRz &\Rightarrow \mu_{\tilde{R}}(y,z) = 1 \\ \min(\mu_{\tilde{R}}(x,y), \mu_{\tilde{R}}(y,z)) &= 1 \\ \max_y [\min(\mu_{\tilde{R}}(x,y), \mu_{\tilde{R}}(y,z))] &= 1 \\ \mu_{\tilde{R}}(x,z) \geq \max_y [\min(\mu_{\tilde{R}}(x,y), \mu_{\tilde{R}}(y,z))] &= 1 \\ \mu_{\tilde{R}}(x,z) \geq 1 &\Rightarrow \mu_{\tilde{R}}(x,z) = 1 \\ &\Rightarrow xRz \end{aligned}$$

Remarque 2.4.5. Autre définition (P. Venugopalan) [10]

\tilde{R} est dite transitive si : $\forall x \in X, \forall y \in Y, \forall z \in Z$:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,z) \geq [(\mu_{\tilde{R}}(x,y) + \mu_{\tilde{R}}(y,z) - 1) \vee 0]$$

Remarque 2.4.6. La définition de Zadeh de la transitivité pour une relation floue de \tilde{R} est :

$$\forall (x,z) \in X^2 : \mu_{\tilde{R}}(x,z) \geq \max_{y \in X} [\min(\mu_{\tilde{R}}(x,y), \mu_{\tilde{R}}(y,z))] \quad (2.4.1)$$

La définition de P. Venugopalan est :

$$\forall (x,y,z) \in X^3 : \mu_{\tilde{R}}(x,z) \geq [(\mu_{\tilde{R}}(x,y) + \mu_{\tilde{R}}(y,z) - 1) \vee 0] \quad (2.4.2)$$

En effet, on démontre que la définition (2.4.1) entraîne la définition (2.4.2) :

si $\mu_{\tilde{R}}(x,y) + \mu_{\tilde{R}}(y,z) \leq 1$ alors : $(\mu_{\tilde{R}}(x,y) + \mu_{\tilde{R}}(y,z) - 1) \vee 0 = 0$ et donc, puisque $\mu_{\tilde{R}}(x,z)$ est toujours positif,

$$\max_y [\min(\mu_{\tilde{R}}(x,y), \mu_{\tilde{R}}(y,z))] \geq (\mu_{\tilde{R}}(x,y) + \mu_{\tilde{R}}(y,z) - 1) \vee 0$$

(c'est un cas évident).

Supposons alors que $\mu_{\tilde{R}}(x,y) + \mu_{\tilde{R}}(y,z) > 1$, pour y_1 fixé dans X , on a :

$$\min(\mu_{\tilde{R}}(x,y_1), \mu_{\tilde{R}}(y_1,z)) \geq [\mu_{\tilde{R}}(x,y_1) + \mu_{\tilde{R}}(y_1,z) - 1]$$

En effet : notons $\mu_{\tilde{R}}(x,y_1) = R_1$, $\mu_{\tilde{R}}(y_1,z) = R_2$

$\min(R_1, R_2) \geq R_1 + R_2 - 1$ est toujours vrai car $R_1 \leq 1$, $R_2 \leq 1$.

pour chaque y dans X on a $\mu_{\tilde{R}}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}}(y,z) \geq \mu_{\tilde{R}}(x,y) + \mu_{\tilde{R}}(y,z) - 1$ donc

$$\max_{y \in X} [\min(\mu_{\tilde{R}}(x,y), \mu_{\tilde{R}}(y,z))] \geq (\mu_{\tilde{R}}(x,y) + \mu_{\tilde{R}}(y,z) - 1) \text{ et } .CQFD.$$

Remarque 2.4.7. On trouve bien la transitivité dans le cas d'une relation classique, en effet :

$$\text{Si } x\tilde{R}y \Rightarrow \mu_{\tilde{R}}(x,y) = 1$$

$$y\tilde{R}z \Rightarrow \mu_{\tilde{R}}(y,z) = 1$$

$$[(\mu_{\tilde{R}}(x,y) + \mu_{\tilde{R}}(y,z)) - 1] \vee 0 = 1$$

$$\mu_{\tilde{R}}(x,z) \geq [(\mu_{\tilde{R}}(x,y) + \mu_{\tilde{R}}(y,z)) - 1] \vee 0 = 1 \Rightarrow \mu_{\tilde{R}}(x,z) = 1 \text{ donc } x\tilde{R}y$$

Remarque 2.4.8. Quelques autres formes d'une relation floue transitive sont :

1. $R(x,z) \geq T(R(x,y),R(y,z)), \forall (x,y,z) \in X^3$ et T est une T-Norme qu'on a défini dans le chapitre 1 ;
2. $(R(x,y) \geq R(y,x) \text{ et } R(y,z) \geq R(z,y))$ alors $R(x,z) \geq R(z,x)$, $\forall (x,y,z) \in X^3$ (voir [4]).

2.5 Définition d'un ordre flou

Soit X un ensemble, un ordre flou sur X est un sous-ensemble flou \tilde{R} de $X \times X$ noté $\mu_{\tilde{R}}$ tels que les conditions suivantes soient vérifier [7]:

1. $\forall x \in X : \mu_{\tilde{R}}(x,x) = 1$ (Réflexivité) ;
2. $\forall x \in X, \forall y \in X : \mu_{\tilde{R}}(x,y) + \mu_{\tilde{R}}(y,x) > 1 \Rightarrow x = y$ (Antisymétrie) ;
3. $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X : \mu_{\tilde{R}}(x,z) \geq [(\mu_{\tilde{R}}(x,y) + \mu_{\tilde{R}}(y,z) - 1) \vee 0]$ (Transitivité).

Notation [10] : Soit X un ensemble, muni d'un ordre flou \tilde{R} et soit $x \in X$. Notons par $\downarrow x$ l'ensemble flou défini par :

$$\begin{aligned} (\downarrow x)(y) &= \mu_{\tilde{R}}(y,x), \forall y \in X \\ \downarrow x &= \{(y, (\downarrow x)(y)) / y \in X\} = \{(y, \mu_{\tilde{R}}(y,x)) / y \in X\} \end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned} (\uparrow x)(y) &= \mu_{\tilde{R}}(x,y), \forall y \in X \\ \uparrow x &= \{(y, (\uparrow x)(y)) / y \in X\} = \{(y, \mu_{\tilde{R}}(x,y)) / y \in X\} \end{aligned}$$

Si A est un sous-ensemble de X alors :

$$\uparrow A = \bigcup_{x \in A} \uparrow x \text{ et } \downarrow A = \bigcup_{x \in A} \downarrow x$$

2.6 Borne supérieure, borne inférieure

Soit X un ensemble muni d'un ordre flou \tilde{R} et A un sous-ensemble de X .

Les majorants de A est un ensemble flou sur X noté $\widetilde{U}(A)$, dont la fonction d'appartenance est définie comme suit [10] :

$$\mu_{\widetilde{U}(A)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\uparrow x)(y) \leq 1/2, \forall x \in A \\ (\bigcap_{x \in A} \uparrow x)(y) & \text{si non} \end{cases}$$

$$\mu_{\widetilde{U}(A)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{\tilde{R}}(x,y) \leq 1/2, \forall x \in A \\ \bigwedge_{x \in A} \mu_{\tilde{R}}(x,y) & \text{si } \mu_{\tilde{R}}(x,y) > 1/2, \forall x \in A \end{cases}$$

de même, les minorants de A est un ensemble flou $\widetilde{L}(A)$ sur X de fonction d'appartenance définie par :

$$\mu_{\widetilde{L}(A)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\downarrow x)(y) \leq 1/2, \forall x \in A \\ (\bigcap_{x \in A} \downarrow x)(y) & \text{si non} \end{cases}$$

$$\mu_{\widetilde{L}(A)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{\tilde{R}}(y,x) \leq 1/2, \forall x \in A \\ \bigwedge_{x \in A} \mu_{\tilde{R}}(y,x) & \text{si } \mu_{\tilde{R}}(y,x) > 1/2, \forall x \in A \end{cases}$$

Remarque 2.6.1. Si $\mu_{\widetilde{U}(A)}(y) > 0$ on écrit $y \in \widetilde{U}(A)$ de même pour $\widetilde{L}(A)$ donc :

$$\begin{aligned} y \in \widetilde{U}(A) &\Rightarrow \mu_{\widetilde{U}(A)}(y) > 0 \\ &\Rightarrow \mu_{\tilde{R}}(x,y) > 1/2, \forall x \in A \end{aligned}$$

Remarque 2.6.2. Si $A = \{z\}$, on écrit $\widetilde{U}(z)$ est définie alors :

$$\mu_{\widetilde{U}(z)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{\tilde{R}}(z,y) \leq 1/2 \\ (\uparrow z)(y) & \text{si non} \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} y \in \widetilde{U}(z) &\Leftrightarrow \mu_{\widetilde{U}(z)}(y) > 0 \\ &\Leftrightarrow (\uparrow z)(y) > 0 \\ &\Leftrightarrow \mu_{\tilde{R}}(z,y) > 1/2 \end{aligned}$$

Définition 2.6.1. On dit que S est une *borne supérieure* de A et on écrit $S = \sup A$ si :

1. $S \in \widetilde{U}(A)$ donc S est un majorant de A ;
2. Si $y \in \widetilde{U}(A)$ alors $y \in \widetilde{U}(S)$.

De même : S' est une *borne inférieure* de A : $S' = \inf A$ si

1. $S' \in \widetilde{L}(A)$;
2. Si $y \in \widetilde{L}(A)$ alors $y \in \widetilde{L}(S')$.

Interprétation : A un sous-ensemble de X , X muni d'un ordre flou $\mu_{\widetilde{R}}$.

Un élément $a \in X$ est un majorant de A si $\mu_{\widetilde{R}}(y, a) > 1/2, \forall y \in A$.

Si a est un majorant de A et $\forall a \in A$, alors a est dit plus grand élément de A .

- un élément $m \in A$ est maximale de A si :

$$(\mu_{\widetilde{R}}(m, y) > 1/2 \text{ pour un certain } y \in A) \Rightarrow y = m$$

- un élément $S \in X$ est dit une borne supérieure de A si S est un majorant de A et pour tout autre majorant t de A on a : $\mu_{\widetilde{R}}(S, t) > 1/2$, on définit de même $\inf A$.

Remarque 2.6.3. L'ordre \widetilde{R} est dit total si $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$, ou bien $\mu_{\widetilde{R}}(x, y) > 1/2$, ou bien $\mu_{\widetilde{R}}(y, x) > 1/2$. (ou encore (voir [5]), ou bien $\mu_{\widetilde{R}}(x, y) > \mu_{\widetilde{R}}(y, x)$, ou bien $\mu_{\widetilde{R}}(y, x) > \mu_{\widetilde{R}}(x, y)$).

Chaîne floue : Un ensemble muni d'un ordre flou total est dit *chaîne floue* [5].

Proposition 2.6.1. Soit A un sous-ensemble d'un ensemble X muni d'un ordre flou \widetilde{R} .

1. $\sup A$ s'il existe est Unique.
2. $\inf A$ s'il existe est Unique.

Preuve : Soient x et y les bornes supérieures de A alors :

$$\mu_{\widetilde{U}(x)}(y) > 1/2 \Rightarrow \mu_{\widetilde{R}}(x,y) > 1/2$$

$$\mu_{\widetilde{U}(y)}(x) > 1/2 \Rightarrow \mu_{\widetilde{R}}(y,x) > 1/2$$

d'où $\mu_{\widetilde{R}}(x,y) + \mu_{\widetilde{R}}(y,x) > 1$ et par l'antisymétrie de l'ordre flou on aura :
 $x = y$.

De la même façon on démontre la 2^{eme} propriété.

Exemple 2.6.1. Soit $X = \{a,b,c,d\}$, on définit un ordre flou sur X par le tableau :

	a	b	c	d
a	1	0.6	0.6	0.6
b	0	1	0.4	0.7
c	0	0.3	1	0.8
d	0	0.2	0.2	1

On vérifie facilement que \widetilde{R} est un ordre flou sur X .

Exemple 2.6.2. Soit \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs. On définit l'ordre flou \widetilde{R} sur \mathbb{N} comme suit :

$$\mu_{\widetilde{R}}(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a > b \\ 1 - [a \setminus b] \setminus b & \text{si } a \leq b \end{cases}$$

où $[a \setminus b]$ est le reste de la dévision de b par a .

1. \widetilde{R} est réflexive :

$$\mu_{\widetilde{R}}(a,a) = 1 \text{ car } [a \setminus a] = 0 \text{ donc } \widetilde{R} \text{ est réflexive.}$$

2. \widetilde{R} est antisymétrique :

Si $a \neq b$ alors : ou bien $a > b$, ou bien $a < b$, donc $\mu_{\widetilde{R}}(a,b) = 0$ ou $\mu_{\widetilde{R}}(b,a) = 0$ et c'est exactement la définition d'antisymétrie.

3. \widetilde{R} est transitive :

Soit a,b,c éléments de \mathbb{N} .

$$\text{At-on } \mu_{\widetilde{R}}(a,c) \geq [(\mu_{\widetilde{R}}(a,b) + \mu_{\widetilde{R}}(b,c) - 1) \vee 0] ?$$

Si $\mu_{\widetilde{R}}(a,b) = 0$ alors $(\mu_{\widetilde{R}}(a,b) + \mu_{\widetilde{R}}(b,c) - 1) \vee 0 = 0$ et donc

$$\mu_{\tilde{R}}(a,c) \geq [(\mu_{\tilde{R}}(a,b) + \mu_{\tilde{R}}(b,c) - 1) \vee 0].$$

de même si $\mu_{\tilde{R}}(b,c) = 0$.

Supposons que $\mu_{\tilde{R}}(a,b) \neq 0$ et $\mu_{\tilde{R}}(b,c) \neq 0$ donc par hypothèse :
 $a \leq b \leq c$, soit alors

$$b = m.a + x, 0 \leq x < a$$

$$c = n.b + y, 0 \leq y < b$$

$$c = p.a + z, 0 \leq z < a$$

on a :

$$\mu_{\tilde{R}}(a,b) = 1 - x/b$$

$$\mu_{\tilde{R}}(b,c) = 1 - y/c$$

$$\mu_{\tilde{R}}(a,c) = 1 - z/c$$

at-on $(1 - z/c) \geq [(1 - x/b) + (1 - y/c) - 1]$?

Lemme 2.6.1. *Si a,b,c,m,n,p,x,y,z sont des entiers positifs tels que
 $0 < a < b < c$, et :*

$$b = m.a + x, 0 \leq x < a$$

$$c = n.b + y, 0 \leq y < b$$

$$c = p.a + z, 0 \leq z < a$$

Alors : $x/b + y/c \geq z/c$

Preuve : on a :

$$b = m.a + x, 0 \leq x < a$$

$$c = n.b + y, 0 \leq y < b$$

$$c = p.a + z, 0 \leq z < a$$

on montre que $x/c \geq (z - y)/c$

$$\begin{aligned} c = n.b + y &= n(m.a + x) + y \\ &= n.m.a + n.x + y, \quad n.x + y < a \\ &= p.a + z, \quad z < a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = c - p.a &= n.m.a + n.x + y - p.a \\ &= (n.m - p)a + n.x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z < a &\Rightarrow (n.m - p)a + n.x + y < a \\ &\Rightarrow (n.m - p)a < a - (n.x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } 0 \leq n.x + y < a &\Rightarrow (n.m - p)a \leq a \\ &\Rightarrow n.m \leq p \end{aligned}$$

$$z - y = n.m.a + n.x - p.a$$

Il suffit de montrer que $x(n.b + y) \geq b(n.m.a - p.a + n.x)$

$$\left. \begin{array}{l} x.y \geq 0 \\ n.m \leq p \\ a.b > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x.y.a.b(n.m - p) = b(n.m - p)a$$

$$\text{d'où } x.y + n.x.b \geq b(n.m - p)a + n.x.b$$

C'est-à-dire $x(n.b + y) \geq b(n.m.a - p.a + n.x)$. CQFD

Ce lemme complète la preuve de la transitivité, en effet :

$$\begin{aligned} x/b + y/c \geq z/c &\Rightarrow 1 - z/c \geq 1 - x/b - y/c \\ &\Rightarrow 1 - z/c \geq (1 - x/b) + (1 - y/c) - 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \mu_{\tilde{R}}(a,c) \geq \mu_{\tilde{R}}(a,b) + \mu_{\tilde{R}}(b,c) - 1$$

$$\text{ou encore } \mu_{\tilde{R}}(a,c) \geq (\mu_{\tilde{R}}(a,b) + \mu_{\tilde{R}}(b,c) - 1) \vee 0$$

donc R est un ordre flou sur \mathbb{N} .

Notation : On note

$$x \vee y = \sup(x,y)$$

$$x \wedge y = \inf(x,y)$$

Proposition 2.6.2. Sur un ensemble X muni d'un ordre flou $\mu_{\tilde{R}}$, les égalités suivantes sont vérifiées :

1. $x \wedge x = x, x \vee x = x$ (Idempotence).
2. $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x$ (Commutativité).
3. $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ (Absorbtion).
4. $\mu_{\tilde{R}}(x,y) > 1/2$ si seulement si $x \wedge y = x$ et si seulement si $x \vee y = y$ (Consistence).

Preuve : Pour les propriétés 1. et 2. c'est évident.

Montrons la 3. propriété :

Soit $x \vee y = z$ donc $\mu_{\tilde{R}}(x,z) > 1/2$ ce qui veut dire $x \in \widetilde{L(\{x,z\})}$, (x est un minorant de $\{x,z\}$).

Si $u \in \widetilde{L(\{x,z\})}$ alors $\mu_{\tilde{R}}(u,x) > 1/2$ (alors x est le plus grand des mineurants de $\{x,z\}$)

d'où $x = x \wedge z = x \wedge (x \vee y)$, CQFD.

On démontre de même que $x \vee (x \wedge y) = x$.

4. Supposons que $\mu_{\tilde{R}}(x,y) > 1/2$ donc $y \in \widetilde{U(\{x,y\})}$

Si $u \in \widetilde{U(\{x,y\})}$ alors $\mu_{\tilde{R}}(y,u) > 1/2$, donc y est le plus petit des majorants de $\{x,y\}$.

d'où $x \vee y = y$.

De même, on démontre que $x \wedge y = x$.

Proposition 2.6.3. Les opérateurs \wedge et \vee ne sont pas nécessairement associatifs.

Preuve : Il suffit de voir sur l'exemple suivant que les opérateurs \wedge et \vee ne sont pas associatifs.

En effet : on définit un ordre flou $\mu_{\tilde{R}}$ sur l'ensemble $\{x,y,z,a,b,m,n\}$ par

le tableau suivant :

	x	y	z	a	b	m	n
x	1	0	0	0.6	0.4	0.4	0.6
y	0	1	0	0.6	0.6	0.4	0.4
z	0	0	1	0	0.6	0.6	0.4
a	0	0	0	1	0	0.6	0
b	0	0	0	0	1	0.4	0.6
m	0	0	0	0	0	1	0
n	0	0	0	0	0	0	1

$$(x \vee y) \vee z = a \vee z = m$$

$$x \vee (y \vee z) = x \vee b = n$$

d'où $(x \vee y) \vee z \neq x \vee (y \vee z)$.

2.7 Etude des cas spéciaux

2.7.1 Cas d'un α -ordre flou

Soit X un ensemble de référence.

Un α -ordre flou sur X est un sous-ensemble flou R_α de $X \times X$ vérifiant [5], [6] :

1. $\forall x \in X$:

$$\mu_{R_\alpha}(x, x) = \alpha, \alpha \in]0, 1]$$

2. $\forall x, y \in X$:

$$\mu_{R_\alpha}(x, y) + \mu_{R_\alpha}(y, x) > \alpha \Rightarrow x = y$$

3. $\forall x, z \in X$:

$$\mu_{R_\alpha}(x, z) \geq \sup_{y \in X} (\inf \{ \mu_{R_\alpha}(x, y), \mu_{R_\alpha}(y, z) \})$$

Notons que le cas ou $\alpha = 1$ est déjà étudié précédemment.

Définition 2.7.1. Soit X un ensemble non vide de référence et μ_{R_α} un α -ordre flou sur X , X muni de μ_{R_α} sera noté (X, μ_{R_α}) .

Le α -ordre flou sur X , μ_{R_α} est dit total si pour tout $x, y \in X$ avec $x \neq y$, on a :

ou bien $\mu_{R_\alpha}(x, y) > \alpha/2$, ou bien $\mu_{R_\alpha}(y, x) > \alpha/2$ (voir [6]).

Un ensemble muni d'un α -ordre flou μ_{R_α} total est dit une α -chaîne floue.

Borne supérieure, borne inférieure

Soit X un ensemble muni d'un α -ordre flou μ_{R_α} , A un ensemble de X .

- Un élément $a \in X$ est un α -majorant de A si $\mu_{R_\alpha}(y, a) > \alpha/2 \forall y \in A$, et si de plus : $a \in A$, a est alors un plus grand élément de A .
- Un élément $m \in A$ est un élément maximal de A si : $(\mu_{R_\alpha}(m, y) > \alpha/2 \text{ pour un certain } y \in A) \Rightarrow m = y$.
- Un élément $s \in X$ est une borne supérieure de A si s est un α -majorant de A , et pour toute autre α -majorant t de A on a : $\mu_{R_\alpha}(s, t) > \alpha/2$, si s existe on écrit :

$$s = \sup_{R_\alpha}(A)$$

- On définit de même les notions de α -minorant de A plus petit élément de A , élément minimal de A , borne inférieure de A .

$b \in X$ est dit minorant de A si $\mu_{R_\alpha}(b, y) > \alpha/2 \forall y \in A$.

$s' \in X$ est une borne inférieure de A si s' est un minorant de A , et pour tout autre minorant t de A on a : $\mu_{R_\alpha}(t, s') > \alpha/2$, si s' existe on écrit :

$$s' = \inf_{R_\alpha}(A)$$

Inverse d'un α -ordre flou

Soit X un ensemble muni d'un α -ordre flou μ_{R_α} .

La relation inverse de μ_{R_α} est μ_{S_α} définie par :

$$\mu_{S_\alpha}(x,y) = \mu_{R_\alpha}(y,x), \forall x,y \in X$$

Proposition 2.7.1. Si μ_{R_α} est un α -ordre flou sur X alors μ_{S_α} est un α -ordre flou sur X .

Preuve : Evident.

2.7.2 Lemme de Zorne : Cas d'un α -ordre flou

Soit X un ensemble muni d'un α -ordre flou μ_{R_α} .

Si toute chaîne floue de X admet un majorant alors X a un élément maximal.

Preuve : pour démontrer ce lemme, on doit tenir compte de la définition suivante :

Définition 2.7.2. Soit X un ensemble (net) de référence non vide, un ordre partiel sur X est un sous-ensemble P de $X \times X$ tels que :

1. $\forall x \in X : (x,x) \in P$ (réflexivité).
2. $\forall x,y \in X : [(x,y) \in P \text{ et } (y,x) \in P] \text{ implique } x = y$ (antisymétrie).
3. $\forall x,y,z \in X : [(x,y) \in P \text{ et } (y,z) \in P] \text{ implique } (x,z) \in P$ (transitivité).

Preuve du lemme

Soit P_α une relation nette définie sur X par :

$$(x,y) \in P_\alpha \Leftrightarrow \mu_{R_\alpha}(x,y) > \frac{\alpha}{2}$$

I. P_α est une relation d'ordre sur X ?

1. $\forall x \in X : \mu_{R_\alpha}(x,x) = \alpha > \frac{\alpha}{2}$ cependant P_α est réflexive.

2. Soit $(x,y) \in P_\alpha$ et $(y,x) \in P_\alpha$ alors $\mu_{R_\alpha}(x,y) > \frac{\alpha}{2}$ et $\mu_{R_\alpha}(y,x) > \frac{\alpha}{2}$, d'où

$$\mu_{R_\alpha}(x,y) + \mu_{R_\alpha}(y,x) > \alpha \text{ par conséquent } x = y$$

3. Soit $x,y,z \in X$ tels que: $(x,y) \in P_\alpha$ et $(y,z) \in P_\alpha$ donc $\mu_{R_\alpha}(x,y) > \frac{\alpha}{2}$ et $\mu_{R_\alpha}(y,z) > \frac{\alpha}{2}$, d'où

$$\inf\{\mu_{R_\alpha}(x,y), \mu_{R_\alpha}(y,z)\} > \frac{\alpha}{2}$$

et alors

$$\sup_{d \in X} [\inf\{\mu_{R_\alpha}(x,d), \mu_{R_\alpha}(d,z)\}] > \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{d'où } \mu_{R_\alpha}(x,z) > \frac{\alpha}{2} \text{ ou encore } (x,z) \in P_\alpha$$

II. Supposons que toute chaîne floue C sur X admet un majorant et soit

$$s = \sup_{R_\alpha}(c)$$

donc $\forall c \in C : \mu_{R_\alpha}(c,s) > \frac{\alpha}{2}$, par conséquent $(c,s) \in P_\alpha$ pour toute $c \in C$, alors s est un majorant de C dans (X, P_α) . Il résulte que toute chaîne floue non vide de (X, P_α) admet un majorant, d'après lemme de Zorne (dans le cas classique) (X, P_α) a un élément maximal p .

Soit $\forall x \in X$ avec $\mu_{R_\alpha}(x,p) > \frac{\alpha}{2}$, donc $(x,p) \in P_\alpha$ et puisque p est l'élément maximal dans (X, P_α) donc $p = x$, et p est alors maximale dans (X, μ_{R_α}) , C.Q.F.D.

2.7.3 Cas fini : Algorithme de Floyd

Soit $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble fini [9], [11].

$\mu_{\tilde{R}} : E \times E \longrightarrow [0,1]$ une relation floue sur E .

Notons $a_{ij} = \mu_{\tilde{R}}(a_i, a_j)$, $i = \widehat{1, n}$, $j = \widehat{1, n}$

$\mu_{\tilde{R}}$ est réflexive si $a_{ii} = 1$, $\forall i = \widehat{1, n}$.

$\mu_{\tilde{R}}$ est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \widehat{1, n}$.

$\mu_{\tilde{R}}$ est transitive si

$$\mu_{\tilde{R}}(a, c) \geq \sup_{b \in E} \{ \min(\mu_{\tilde{R}}(a, b), \mu_{\tilde{R}}(b, c)) \}$$

Soit

$$a_{ij} \geq \sup_k \{ \min(a_{ik}, a_{kj}) \}, \forall i, j \in [1, n]$$

- Une relation floue réflexive, symétrique est dite relation de proximité.
- Une relation floue réflexive, symétrique, transitive est dite relation de similarité.
- Une relation A contient une relation B , ($A \supseteq B$) si $a_{ij} \geq b_{ij} \forall i, j \in [1, n]$.
- $\mu_{\tilde{R}}$ est antisymétrique si : $a_{ij} + a_{ji} > 1 \Rightarrow a_i = a_j$.

Proposition 2.7.2. Soit X un ensemble muni d'un ordre flou μ_R , et $A \subset X$, si la borne supérieure de A existe, noté s alors $\{x \in X / \mu_R(s, x) = \mu_R(x, s)\} = \{s\}$

Preuve : évident (le faite de remarquer que $x \in X$ est une borne supérieure de A si $\mu_R(x, y) \geq \mu_R(y, x) \forall y \in A$).

Soit μ_R et μ_Q deux relations floues définies sur X . On dit que μ_R est incluse dans μ_Q et on écrit $\mu_R \subset \mu_Q$ si

$$\mu_R(x, y) \leq \mu_Q(x, y), (x, y) \in X \times X$$

Rappel

La relation floue μ_R est transitive si

$$\mu_R(x, z) \geq \sup_y (\mu_R(x, y) \wedge \mu_R(y, z))$$

ou encore $\mu_R \supset \mu_{R \circ R}$ avec $\mu_{R \circ R}$ est la composition $\mu_R \circ \mu_R$.

Définition 2.7.3. Notons par $\mu_{\bar{R}}$ la relation floue $\mu_{\bar{R}} = \mu_{R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots}$, alors $\mu_{\bar{R}}$ est dite la fermeture transitive de la relation floue μ_R .

Remarque 2.7.1. La relation floue $\mu_{\bar{R}}$ est transitive.

Définition 2.7.4. L'ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_m\} \subset X$ tel que :

$$\mu_R(x_i, x_{i+1}) = \alpha_i > 0, i = 0, \dots, m-1 \text{ et } m \geq 1$$

est dite une chaîne floue [6].

Exemple 2.7.1. Exemple d'une relation floue transitive.

" x transmet facilement un message à y " est une relation floue définie par les données :

$$\begin{aligned} \mu_R(x_1, x_1) &= 0.2, \mu_R(x_1, x_2) = \mu_R(x_3, x_2) = 1 \\ \mu_R(x_2, x_1) &= \mu_R(x_3, x_1) = 0, \mu_R(x_2, x_2) = 0.6 \\ \mu_R(x_2, x_3) &= \mu_R(x_3, x_3) = 0.3, \mu_R(x_1, x_3) = 0.4 \end{aligned}$$

La matrice M de la relation floue μ_R est

$$M = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

est la matrice M^2 de la relation floue $\mu_{R \circ R}$ ou $\mu_R \circ \mu_R$ est

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

on voit bien que $\mu_R \geq \mu_{R^2}$ ou $\mu_R \geq \mu_{R \circ R}$ avec

$$\mu_{R \circ R} = \sup_y (\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)))$$

Généralement pour obtenir $\mu_{\bar{R}} = \mu_{R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots}$, (les exposants étant pris au sens de la composition) on utilise l'algorithme de Floyd.

Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ (cas fini).

Initialisons le graphe de $\mu_{\bar{R}}$ par celui de μ_R avec une représentation matricielle formée par tous les degrés de μ_R , c'est-à-dire la matrice des

coefficients $(\mu_R(x_i, x_j))_{ij}$:

pour $k = \widehat{1, n}$

pour $i = \widehat{1, n}$

pour $j = \widehat{1, n}$

$$\mu_{\overline{R}}(x_i, x_j) \leftarrow \max[(\mu_{\overline{R}}(x_i, x_j)) \min(\mu_{\overline{R}}(x_i, x_k)), \mu_{\overline{R}}(x_k, x_j)]$$

pour l'exemple précédent :

$$R = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

et

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$R = R \cup R^2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

En suivant l'algorithme précédent pour $k = 2$ on aura \overline{R} :

par exemple pour $\mu_{\overline{R}}(x_1, x_3)$ on fait :

$k = 2 : i = 1, j = 3 :$

$$\mu_{\overline{R}}(x_1, x_3) \leftarrow \max[(\mu_{\overline{R}}(x_1, x_3)) \min(\mu_{\overline{R}}(x_1, x_2)), \mu_{\overline{R}}(x_2, x_3)]$$

$$\mu_{\overline{R}}(x_1, x_3) \leftarrow \max[0.4, \min(1, 0.3)] = 0.4$$

$$\mu_{\overline{R}}(x_3, x_2) \leftarrow \max[(\mu_{\overline{R}}(x_3, x_2)) \min(\mu_{\overline{R}}(x_3, x_2)), \mu_{\overline{R}}(x_2, x_2)]$$

$$\mu_{\overline{R}}(x_3, x_2) \leftarrow \max[1, \min(1, 0.6)] = 1$$

et ainsi de suite.

Chapitre 3

Treillis flous

3.1 Définitions et propriétés des treillis flous

Un ensemble X muni d'un ordre flou R est dit treillis flou si tout sous-ensemble fini de X possède une borne supérieure et une borne inférieure. Un treillis flou est dit complet si tout sous-ensemble de X a une borne supérieure et une borne inférieure.

Proposition 3.1.1. Soit X un ensemble muni d'un ordre flou R .

Pour que X soit un treillis flou complet, il suffit d'assurer l'existence d'une borne supérieure (ou inférieure) de chaque partie de X .

Preuve : Supposons que toute partie de X possède une borne supérieure, et soit S une partie de X .

Montrons que $\inf S$ existe et égale à $\sup L(S)$ ($L(S)$ les minorants de S).

Soit $a = \sup L(S)$, a existe car $L(S)$ est une partie de X qui possède une borne supérieure par hypothèse.

Soit $x \in S$, donc $\forall y \in L(S) : \mu_R(y, x) > \frac{1}{2}$ alors $x \in \bigcup(y)$, ($\bigcup(y)$ les majorants de y).

$x \in \bigcup(y) \forall y \in L(S)$, donc $x \in \bigcup(L(S))$

$a = \sup L(S) \Rightarrow \mu_R(a, x) > \frac{1}{2}$ donc $a \in (L(S))$ alors $\forall z \in L(S) : a \in \bigcup(z)$.

Ce qui montre que : $a = \inf S$. C.Q.F.D.

Définition 3.1.1. Un sous-ensemble D d'un ensemble X muni d'un ordre flou R , est dit dirigé si pour toute partie finie F de D : $D \cap \bigcup(F) \neq \emptyset$ ($\bigcup(F)$ l'ensemble des majorants de F).

3.2 Idéal flou dans un treillis flou

Un idéal flou d'un ensemble X muni d'un ordre flou R est un sous-ensemble dirigé vérifiant la condition [10] :

si $x \in I$ et $\mu_R(y, x) > \frac{1}{2}$ alors $y \in I$.

Définition 3.2.1. Soient X et Y deux ensembles muni respectivement des ordres flous R et R' .

Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est dite monotone si $\forall x, y \in X : \mu_R(x, y) \leq \mu_{R'}(f(x), f(y))$.

Définition 3.2.2. Soient L, L' deux treillis flous, et $f : L \longrightarrow L'$ une fonction monotone.

f est dite sup-homomorphisme si pour tout sous-ensemble fini F et L : $f(\sup F) = \sup f(F)$.

f est dite inf-homomorphisme si pour toute partie finie F et L : $f(\inf F) = \inf f(F)$.

f est un homomorphisme si elle est a la fois sup-homomorphisme et inf-homomorphisme.

Proposition 3.2.1. Soit L un treillis flou.

$I \subset L$ est un idéal flou si et seulement si :

1. Si $F \subseteq I$, F fini alors $\sup F \in I$.
2. Si $x \in I$ et $\mu_R(y, x) > \frac{1}{2}$ donc $y \in I$ (y est un minorant de x).

Preuve : Si les deux propriétés sont vérifiées alors I est un idéal flou.

Supposons que I est un idéal flou et montrons la 1^{ere} propriété (car la

2^{eme} propriété est triviale).

Soit $x, y \in I$

I est un idéal $\Rightarrow I$ est dirigé.

Donc un majorant u dans $\{x, y\}$ est dans I , mais $x \vee y$ est un minorant de u et d'après la 2^{eme} propriété $x \vee y \in I$.

Proposition 3.2.2. Soit $f: P \longrightarrow Q$ une fonction monotone avec P et Q deux ensembles munis des ordres flous R et R' (respectivement). Si D est un sous-ensemble dirigé de P alors $f(D)$ est un sous-ensemble dirigé de Q .

Preuve: Soit F un sous-ensemble fini de $f(D)$, donc il existe $G \subseteq D$ fini tel que $f(G) = F$ et puisque D est dirigé, il existe $x \in D$ tel que $\mu_R(y, x) > \frac{1}{2}$ pour tout $y \in G$, d'où $\mu_{R'}(f(y), f(x)) > \frac{1}{2}$ pour tout $y \in G$. Et ceci montre que $f(G) = F$ a un majorant dans $f(D)$. C.Q.F.D.

Proposition 3.2.3. Un idéal flou I d'un treillis flou F est propre si et seulement si il existe une f sup-homomorphisme de F dans la chaîne nette $\{0, 1\}$ telle que $I = f^{-1}\{0\} = \{x: f(x) = 0\}$.

Preuve: Soit I un idéal propre flou de F .

On définit $f: F \longrightarrow \{0, 1\}$ comme suit :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \in I \\ f(x) = 1 & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

Supposons $\mu_R(x, y) > 0$.

Si $y \notin I$, $f(y) = 1$ et $\mu_{R'}(f(x), f(y)) = 1$.

Si $y \in I$, alors $x \in I$ et $\mu_{R'}(f(x), f(y)) = 1$.

donc f est monotone.

Si $E \subseteq I$ est fini alors $\sup E \in I$ d'où: $\sup f(E) = 0 = f(\sup E)$

Si $E \not\subseteq I$ alors $\sup E \notin I$ d'où: $\sup f(E) = 1 = f(\sup E)$

3.3 Sous-treillis flou — chaîne floue

3.3.1 Sous-treillis flou

Définition 3.3.1. Soit L un treillis flou.

Un sous-ensemble S de L est dit sous-treillis flou si pour tout $x, y \in S$ [10]:

$$\sup_S(x, y) = \sup_L(x, y)$$

Un sous-treillis flou S d'un treillis flou L est dit convexe si, $\forall x, y \in S$:

$$t \in L \text{ tel que : } \mu_R(x, t) > \frac{1}{2} \text{ et } \mu_R(t, y) > \frac{1}{2} \text{ implique } t \in S$$

3.3.2 chaîne floue

Un ensemble C muni d'un ordre flou μ_R est dit chaîne floue si pour tout $x, y \in C$:

$$\text{ou bien } \mu_R(x, y) > \frac{1}{2}, \text{ ou bien } \mu_R(y, x) > \frac{1}{2}.$$

Remarquons que si $x \neq y$, une parmi ces deux conditions est toujours vérifiée [6].

3.4 Filtre flou dans un treillis flou fermé

Soit $(X, \wedge_f, \vee_f, \mu_R, 0, 1)$ un treillis flou fermé (de plus petit élément noté 0 et de plus grand élément noté 1).

On définit par analogie au cas classique, un filtre flou dans X comme toute partie non vide de X ayant les deux propriétés:

1. $x \in F$ et $y \in F$ alors $x \wedge_f y \in F$;
2. $x \in F$ et $\mu_R(x, y) > \frac{1}{2}$ donc $y \in F$.

F est dit propre si $F \neq X$.

3.5 Propriétés des treillis flous

Dans un treillis flou (L, \wedge, \vee, R) , où les opérateurs \vee et \wedge sont les opérateurs sup et inf par rapport à l'ordre flou R . On a :

1. $\mu_R(x,y) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$;
2. $x \vee y = y \vee x$ et $x \wedge y = y \wedge x$ (commutativité) ;
3. $x \vee x = x$ et $x \wedge x = x$ (idempotence) ;
4. $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ (absorbtion) ;
5. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (associativité).

Remarque 3.5.1. Si L n'est pas un treillis flou (donc un ensemble muni d'un ordre flou μ_R seulement) les opérateurs \vee et \wedge ne sont pas en général associatives (voir l'exemple dans le chapitre 2) et ceci montre que l'ensemble donné et l'ordre flou donné dans l'exemple n'est pas un treillis. [En effet, il suffit de voir que $\{a,b\}$ par exemple, n'a pas de borne supérieure].

Preuve : Pour les propriétés 1., 2., 3. et 4. les démonstrations sont analogues aux précédentes (celles du chapitre 2). Il reste à montrer la 5^{eme} propriété :

$$\forall x,y,z \in L : x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

Soit

$$\begin{aligned} x \vee (y \vee z) = t &\Rightarrow \mu_R(x,t) > \frac{1}{2} \\ \text{et} &\Rightarrow \mu_R((y \vee z),t) > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\mu_R(y \vee z,t) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu_R(z,t) > \frac{1}{2} \tag{3.5.1}$$

$$\mu_R(y \vee z,t) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mu_R(y,t) > \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu_R(x,t) > 1/2 \\ \mu_R(y,t) > 1/2 \end{array} \right) \Rightarrow \mu_R((x \vee y),t) > \frac{1}{2} \quad (3.5.2)$$

de (3.5.1) et (3.5.2) on a :

$$t = (x \vee y) \vee z$$

3.5.1 Treillis flou fermé et distributif

Soit (L, \wedge_f, \vee_f, R) un treillis flou. Le treillis L est dit fermé s'il possède un plus petit élément et un plus grand élément (par rapport à l'ordre flou μ_R).

Un treillis flou est distributif s'il vérifié :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in L : x \vee_f (y \wedge_f z) &= (x \vee_f y) \wedge_f (x \vee_f z) \\ \text{ou } x \wedge_f (y \vee_f z) &= (x \wedge_f y) \vee_f (x \wedge_f z) \end{aligned}$$

\wedge_f et \vee_f sont les opérateurs sup et inf flou (par rapport à μ_R).

Chapitre 4

Etude de treillis de Heyting flou

4.1 Rappel (cas net)

E un ensemble non vide, \leq un ordre sur E [1].

Un treillis de Heyting est un treillis (E, \leq, \wedge, \vee) vérifiant la propriété : $\forall a, b \in E$: l'ensemble $\{x \in E / x \wedge a \leq b\}$ possède un plus grand élément noté $a \rightarrow b$.

C'est-à-dire :

$$a \rightarrow b = \sup\{x \in E / x \wedge a \leq b\}$$

ou encore

$$(a \rightarrow b) \wedge a \leq b$$

on a l'équivalence :

$$(x \wedge a) \leq b \Leftrightarrow x \leq (a \rightarrow b).$$

4.2 Treillis de Heyting dans le cas d'un ordre flou

Définition 4.2.1. Un treillis de Heyting flou est un treillis flou (E, R, \wedge_f, \vee_f) où E est un ensemble de référence, R est un ordre flou sur E .

\wedge_f, \vee_f sont les opérateurs sup et inf par rapport à l'ordre flou μ_R , tel

que $\forall a, b \in E$, l'ensemble $\{x \in E / \mu_R(x \wedge_f a, b) > \frac{1}{2}\}$ possède un plus grand élément noté $a \xrightarrow{f} b$.

Dans tout ce qui suit, on utilise la définition de P. Venugopalan [10] pour les notions de $\sup(\vee_f)$ et $\inf(\wedge_f)$ dans le cas flou.

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} a \xrightarrow{f} b &= \sup\{x \in E / \mu_R(x \wedge_f a, b) > \frac{1}{2}\} \\ &= \sup_E\{x / \mu_R(x \wedge_f a, b) > \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

Notation

Dans tout ce qui suit on note :

$$a \xrightarrow{f} b = \sup_E\{x / \mu_R(x \wedge_f a, b) > \frac{1}{2}\}$$

si $\mu_R(x, y) > \frac{1}{2}$ on écrit $x \leq_f y$

On rappelle que :

$$x \wedge_f y = t \iff \begin{cases} \mu_R(x, t) > \frac{1}{2} \text{ et } \mu_R(y, t) > \frac{1}{2} \\ \text{si } t' \text{ et un autre minorant de } \{x, y\} \\ \text{alors : } \mu_R(t', t) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

de même pour $x \vee_f y = l$.

Propriétés élémentaires

Soit (E, R, \wedge_f, \vee_f) un treillis de Heyting flou.

1. Un treillis de Heyting flou à toujours un plus grand élément. En effet : soit x_0 fixé dans E et $y \in E$.

$$x_0 \wedge_f y \leq_f x_0 \implies y \leq_f x_0 \xrightarrow{f} x_0$$

$$\begin{aligned} x_0 \xrightarrow{f} x_0 &= \sup\{y \in E / (x_0 \wedge_f y) \leq_f x_0\} \\ &= \sup\{y \in E / \mu_R(x_0 \wedge_f y, x_0) > \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

$x_0 \xrightarrow{f} x_0$ est le plus grand élément de ce treillis et il existe car $E \neq \emptyset$.

2. $\mu_R(a,b) > \frac{1}{2} \iff a \xrightarrow{f} b = 1$ (où 1 désigne le plus grand élément de E).

Preuve : si $a \xrightarrow{f} b = 1$ alors $\forall x \in E$:

$$\begin{aligned} \mu_R(x \wedge_f a, b) &> \frac{1}{2} \\ \text{c'est-à-dire : } a \wedge_f x &\leq b, \quad \forall x \in E \\ \text{d'où : } \mu_R(x, a \xrightarrow{f} b) &> \frac{1}{2}, \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

En particulier pour $x = a$: $\mu_R(a \wedge_f a, b) > \frac{1}{2}$

donc $\mu_R(a,b) > \frac{1}{2}$ ou encore $a \leq_f b$.

$$\text{si } \mu_R(a,b) > \frac{1}{2} \implies \mu_R(a \wedge_f x, b) > \frac{1}{2} \quad \forall x \in E$$

$$\text{d'où : } a \xrightarrow{f} b = 1$$

3. $a = b \iff a \xrightarrow{f} b = 1$ et $b \xrightarrow{f} a = 1$.

En effet : $a = b \implies \mu_R(a,b) > \frac{1}{2}$ d'après 2. on a $a \xrightarrow{f} b = 1$

et de même : $a = b \implies \mu_R(b,a) > \frac{1}{2}$ d'après 2. on a $b \xrightarrow{f} a = 1$

4. $\mu_R(a, b \xrightarrow{f} a) > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $a \leq_f (b \xrightarrow{f} a)$

En effet :

$$\text{puisque } a \in \{x \in E / \mu_R(b \wedge_f x, a) > \frac{1}{2}\}$$

$$\text{et } b \xrightarrow{f} a = \sup\{x \in E / \mu_R(b \wedge_f x, a) > \frac{1}{2}\}$$

$$\text{donc } \mu_R(a, b \xrightarrow{f} a) > \frac{1}{2}. \quad \text{CQFD.}$$

5. $\mu_R(a \wedge_f (a \xrightarrow{f} b), b) > \frac{1}{2}$ (ou $a \wedge_f (a \xrightarrow{f} b) \leq_f b$)

En effet :

$$\text{puisque } a \xrightarrow{f} b \in \{x \in E / \mu_R(a \wedge_f x, b) > \frac{1}{2}\}$$

$$\text{d'où } a \wedge_f (a \xrightarrow{f} b) \leq_f b$$

$$6. \mu_R(a \xrightarrow{f} (b \xrightarrow{f} c), (a \xrightarrow{f} b) \xrightarrow{f} (a \xrightarrow{f} c)) > \frac{1}{2}$$

$$\text{ou : } a \xrightarrow{f} (b \xrightarrow{f} c) \leq_f (a \xrightarrow{f} b) \xrightarrow{f} (a \xrightarrow{f} c).$$

$$\mathbf{Preuve : } a \xrightarrow{f} (b \xrightarrow{f} c) \leq_f (a \xrightarrow{f} b) \xrightarrow{f} (a \xrightarrow{f} c)$$

Montrons que :

$$a \xrightarrow{f} (b \xrightarrow{f} c) \leq_f (a \xrightarrow{f} b) \xrightarrow{f} (a \xrightarrow{f} c)$$

Soit

$$x = a \xrightarrow{f} b$$

$$y = a \xrightarrow{f} c$$

$$z = b \xrightarrow{f} c$$

on montre que

$$a \xrightarrow{f} z \leq_f x \xrightarrow{f} y$$

c'est-à-dire

$$\mu_R(a \xrightarrow{f} z, x \xrightarrow{f} y) > \frac{1}{2}$$

Notons que si a, b, c élément de E (le treillis de Heyting flou) alors :

$$a \xrightarrow{f} b = \sup_E \{x / \mu_R(x \wedge_f a, b) > \frac{1}{2}\}$$

$$\text{ie : } a \xrightarrow{f} b = \sup_E \{x / a \wedge_f x \leq_f b\}$$

Si $y \leq_f a \xrightarrow{f} b$ donc $y \in \{x / a \wedge_f x \leq_f b\}$.

donc $a \wedge_f y \leq_f b$, on a alors la propriété :

$$(y \leq_f a \xrightarrow{f} b) \Leftrightarrow (y \wedge_f a) \leq_f b \quad (4.2.1)$$

d'autre part, montrons d'abord que :

$$a \xrightarrow{f} (b \xrightarrow{f} c) = b \xrightarrow{f} (a \xrightarrow{f} c)$$

$$\text{on a : } a \xrightarrow{f} (b \xrightarrow{f} c) = \sup_E \{x / \mu_R(a \wedge_f x, b \xrightarrow{f} c) > \frac{1}{2}\}$$

$$\text{et : } b \xrightarrow{f} (a \xrightarrow{f} c) = \sup_E \{x / \mu_R(b \wedge_f x, a \xrightarrow{f} c) > \frac{1}{2}\}$$

si $a \wedge_f x \leq_f b \xrightarrow{f} c$ alors d'après (4.2.1) :

$$(a \wedge_f x) \wedge b \leq_f c$$

et puisque la loi \wedge_f est associative alors :

$$(a \wedge_f b) \wedge x \leq_f c \Rightarrow b \wedge_f x \leq_f a \xrightarrow{f} c$$

de même pour l'inverse on aura :

$$\text{si : } b \wedge_f x \leq_f a \xrightarrow{f} c$$

$$\text{alors : } a \wedge_f x \leq_f b \xrightarrow{f} c$$

on déduit donc la relation :

$$a \xrightarrow{f} (b \xrightarrow{f} c) = b \xrightarrow{f} (a \xrightarrow{f} c) \quad (4.2.2)$$

Revenons à la démonstration de la propriété initiale, on a (d'après (4.2.2)) :

$$b \wedge_f (a \xrightarrow{f} (b \xrightarrow{f} c)) = b \wedge_f (b \xrightarrow{f} (a \xrightarrow{f} c))$$

$$\text{et : } b \wedge_f (a \xrightarrow{f} (b \xrightarrow{f} c)) \leq_f b \xrightarrow{f} (a \xrightarrow{f} c) \leq_f a \xrightarrow{f} c \leq_f c$$

$$\text{car } a \xrightarrow{f} c = \sup_E \{x / a \wedge_f x \leq_f c\}$$

$$\text{on a alors : } b \wedge_f (a \xrightarrow{f} (b \xrightarrow{f} c)) \leq_f c$$

$$\text{d'où : } b \wedge_f (a \xrightarrow{f} z) \leq_f c$$

Mais puisque :

$$a \wedge_f x = a \wedge_f (a \xrightarrow{f} b) \leq_f b$$

(d'après la propriété 5. déjà démontrée).

alors :

$$(a \wedge_f x) \wedge_f (a \wedge_f z) \leq_f c$$

$$\begin{aligned} & \text{d'où } x \wedge_f (a \xrightarrow{f} z) \leq_f a \xrightarrow{f} c \quad \text{d'après (4.2.1)} \\ & \text{et donc } a \xrightarrow{f} z \leq_f x \xrightarrow{f} y \\ & \text{ie: } a \xrightarrow{f} (b \xrightarrow{f} c) \leq_f (a \xrightarrow{f} b) \xrightarrow{f} (a \xrightarrow{f} c) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\mu_R(a \xrightarrow{f} (b \xrightarrow{f} c), (a \xrightarrow{f} b) \xrightarrow{f} (a \xrightarrow{f} c)) > \frac{1}{2} \quad .\text{CQFD.}$$

Autres propriétés

7. $a \xrightarrow{f} 1 = 1$;
8. $(a \xrightarrow{f} c) \wedge_f (b \xrightarrow{f} c) \leq_f a \vee_f b \xrightarrow{f} c$;
9. $(a \xrightarrow{f} b) \wedge_f (a \xrightarrow{f} c) \leq_f a \xrightarrow{f} (b \wedge_f c)$.

Preuve :

$$7. a \xrightarrow{f} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} a \xrightarrow{f} 1 &= \sup_E \{x / \mu_R(x \wedge_f a, 1) > \frac{1}{2}\} \\ \text{ou } a \xrightarrow{f} 1 &= \sup_E \{x \in E / x \wedge_f a \leq_f 1\} \end{aligned}$$

si $x = 1$ (le plus grand élément de E) alors $1 \wedge_f a \leq_f 1$ est toujours vérifié.

$$8. (a \xrightarrow{f} c) \wedge_f (b \xrightarrow{f} c) \leq_f (a \vee_f b) \xrightarrow{f} c$$

C'est-à-dire :

$$\mu_R((a \xrightarrow{f} c) \xrightarrow{f} (b \xrightarrow{f} c), (a \vee_f b) \xrightarrow{f} c) > \frac{1}{2}$$

$$a \xrightarrow{f} c = \sup_E \{x / a \wedge_f x \leq_f c\}$$

$$b \xrightarrow{f} c = \sup_E \{x / b \wedge_f x \leq_f c\}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \wedge_f x \leq_f c \\ b \wedge_f x \leq_f c \end{array} \right) \Rightarrow (a \wedge_f x) \vee_f (b \wedge_f x) \leq_f c$$

et puisque le treillis de Heyting flou est distributif alors :

$$(a \vee_f b) \wedge_f x \leq_f c$$

$$\text{d'où } (a \vee_f b) \wedge_f x \leq_f c \Rightarrow x \leq_f (a \vee_f b) \xrightarrow{f} c$$

$$\text{on déduit que : } (a \xrightarrow{f} c) \wedge_f (b \xrightarrow{f} c) \leq_f (a \vee_f b) \xrightarrow{f} c$$

$$9. (a \xrightarrow{f} b) \wedge_f (a \xrightarrow{f} c) \leq_f a \xrightarrow{f} (b \wedge_f c)$$

$$a \xrightarrow{f} b = \sup_E \{x/a \wedge_f x \leq_f b\}$$

$$a \xrightarrow{f} c = \sup_E \{x/a \wedge_f x \leq_f c\}$$

Démonstration de la distributivité dans un treillis de Heyting flou :

$$x \wedge_f (y \vee_f z) = (x \wedge_f y) \vee_f (x \wedge_f z)$$

si $y \vee_f z = t$ alors

$$\mu_R(y,t) > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mu_R(z,t) > \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } y \leq_f y \vee_f z$$

$$\text{et } z \leq_f y \vee_f z$$

$$\text{d'où } x \wedge_f y \leq_f x \wedge_f (y \vee_f z)$$

$$\text{et } x \wedge_f z \leq_f x \wedge_f (y \vee_f z)$$

$$\text{d'où } (x \wedge_f y) \vee_f (x \wedge_f z) \leq_f x \wedge_f (y \vee_f z) \quad (4.2.3)$$

Soit $F = \{t \in E / x \wedge_f t \leq_f (x \wedge_f y) \vee_f (x \wedge_f z)\}$ cet ensemble possède un plus grand élément, noté t_0 .

$y \leq_f t_0$ car

$$x \wedge_f y \leq_f (x \wedge_f y) \vee_f (x \wedge_f z)$$

et de même pour $z \leq_f t_0$.

donc $(y \vee_f z) \leq_f t_0$ d'où $y \vee_f z \in F$

et alors

$$x \wedge_f (y \vee_f z) \leq_f (x \wedge_f y) \vee_f (x \wedge_f z) \quad (4.2.4)$$

de (4.2.3) et (4.2.4) on aura l'égalité (par l'antisymétrie).

Chapitre 5

Aperçus : dual et bi-dual d'un treillis flou

5.1 Espace de Priestley flou

Définition 5.1.1. Soit X un ensemble muni d'un ordre flou R , un sous-ensemble E de X est dit croissant si:

$$x \in E \quad \text{et} \quad \mu_R(x,y) > \frac{1}{2} \quad \text{alors} \quad y \in E$$

Un sous-ensemble décroissant se définit dualement.

Notation

$$\begin{aligned} \uparrow x &= \{y / \mu_R(x,y) > \frac{1}{2}\} \\ \downarrow x &= \{y / \mu_R(y,x) > \frac{1}{2}\} \\ \uparrow E &= \{\uparrow x / x \in E\} \\ \downarrow E &= \{\downarrow x / x \in E\} \end{aligned}$$

Définition 5.1.2. Un espace ordonné flou est un espace (X, τ, R) où X un ensemble non vide τ une topologie sur X , R est l'ordre flou sur X .

Définition 5.1.3. Un espace ordonné flou (X, τ, R) est dit totalement discontinu si pour tout $x, y \in X$ telle que $\mu_R(x,y) > \frac{1}{2}$ (ou $\mu_R(y,x) \not> \frac{1}{2}$) il existe un τ -of croissant U est un τ -of décroissant v tels que $U \cap v = \emptyset$ avec $x \in U$, $y \in v$.

Remarque 5.1.1. Un τ -*of* est un ouvert fermé à la fois.

Définition 5.1.4. Un espace ordonné flou (X, τ, R) est un espace de Priestley-flou s'il est compact et totalement discontinu.

Soit H un treillis distributif et fermé, alors son espace dual flou, sera défini par $T(H) = (X, \tau, R')$ où X est l'ensemble des homomorphismes de H dans $[0,1]$ non identiquement nul, τ est la topologie produit induite par celle de $[0,1]^H$ et $\mu_{R'}$ l'ordre flou définit sur X par :

$$\mu_{R'}(f, g) = \bigwedge_{a \in H} \mu_R(f(a), g(a))$$

où μ_R est l'ordre flou sur $[0,1]$ en prenant par exemple μ_R sur $[0,1]$ par

$$\forall x, y \in [0,1] : \mu_R(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > y \\ 1 - \frac{x}{y} & \text{si } x < y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

et on vérifie facilement que μ_R est un ordre flou sur $[0,1]$.

En effet : μ_R est réflexive par construction.

Si $x \neq y$, ou bien $x < y$, ou encore $x > y$ et dans les deux cas on aura :

$$\mu_R(x, y) + \mu_R(y, x) \leq 1, \text{ donc } \mu_R \text{ est antisymétrique,}$$

et pour la transitivité, on distinct six cas :

$x < y < z$, $x < z < y$, $y < z < x$, $y < x < z$, $z < x < y$, $z < y < x$, et dans tout les cas on a :

$$\mu_R(x, z) \geq (\mu_R(x, y) + \mu_R(y, z) - 1) \vee 0.$$

donc μ_R est transitive, et μ_R sera alors un ordre flou sur $[0,1]$.

Revenons maintenant à l'ordre $\mu_{R'}$ sur $T(H)$:

$\mu_{R'}$ est bien un ordre flou sur X , en effet :

$$\forall a \in H : \bigwedge_{a \in H} (\mu_R(f(a), f(a))) = 1$$

car μ_R est réflexive donc $\mu_{R'}$ est réflexive.

$\mu_{R'}$ est antisymétrique ?

μ_R est réflexive

$$\Leftrightarrow [\mu_R(f(a),g(a)) + \mu_R(g(a),f(a)) > 1 \Rightarrow f(a) = g(a) \quad \forall a \in H]$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{a \in H} (\mu_R(f(a),g(a)) + \mu_R(g(a),f(a))) > 1 \Rightarrow f(a) = g(a) \quad \forall a \in H$$

$$\Leftrightarrow [\mu_{R'}(f,g) + \mu_{R'}(g,f) > 1 \Rightarrow f = g]$$

$$\Leftrightarrow \mu_{R'} \text{ est antisymétrique.}$$

$\mu_{R'}$ est transitive ? $\forall f,g,h \in \tau(H)$:

at-on :

$$\mu_{R'}(f,g) \geq [(\mu_{R'}(f,h) + \mu_{R'}(h,g) - 1) \vee 0]$$

μ_R est transitive donc :

$$\mu_R(f(a),g(a)) \geq [(\mu_R(f(a),h(a)) + \mu_R(h(a),g(a)) - 1) \vee 0] \quad \forall a \in H$$

$$\bigwedge_{a \in H} \mu_R(f(a),g(a)) \geq \bigwedge_{a \in H} [(\mu_R(f(a),h(a)) + \mu_R(h(a),g(a)) - 1) \vee 0]$$

$$\bigwedge_{a \in H} \mu_R(f(a),g(a)) \geq [\bigwedge_{a \in H} \mu_R(f(a),h(a)) + \bigwedge_{a \in H} \mu_R(h(a),g(a)) - 1] \vee 0]$$

$$\text{d'où : } \mu_{R'}(f,g) \geq [(\mu_{R'}(f,h) + \mu_{R'}(h,g) - 1) \vee 0]$$

donc $\mu_{R'}$ est transitive.

Théorème 5.1.1.

a) Si H est un treillis flou distributif alors $T(H) = (X, \tau, \mu_R)$ est un espace de Priestley.

b) Si $\mathcal{X} = (X, \tau, \mu_R)$ est un espace de Priestley alors $L(\mathcal{X})$ est treillis distributif fermé.

Preuve :

1. $T(H)$ est compact ?

X étant l'ensemble de tous les homomorphismes de treillis de H dans $[0,1]$.

X étant fermé dans la topologie induite par celle produit de $[0,1]^H$ qui est compact, d'où X est compact.

2. Montrons que $T(H)$ est totalement discontinu :

Soit $f, g \in X$ tels que $\mu_R(g, f) \leq \frac{1}{2}$, donc il existe $a \in H$ tel que $\mu_R(g(a), f(a)) \leq \frac{1}{2}$.

Soit $\bigcup = \{h \in X / \mu_R(f_1, f_2) > \frac{1}{2}\}$

\bigcup est croissant ?

Soit $f_1 \in \bigcup$ tel que $\mu_R(f_1, f_2) > \frac{1}{2}$

at-on $f_2 \in \bigcup$?

$$f_1 \in \bigcup \Rightarrow \mu_R(g, f_1) > \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu_R(g, f_1) > \frac{1}{2} \\ \mu_R(f_1, f_2) > \frac{1}{2} \end{array} \right) \text{ at-on } f_2 \in \bigcup ?$$

on a :

$$g \vee_f f_1 = f_1$$

$$f_1 \vee_f f_2 = f_2$$

$$g \vee_f f_2 = g \vee_f (f_1 \vee_f f_2) = (g \vee_f f_1) \vee_f f_2 = f_1 \vee_f f_2 = f_2$$

donc $\mu_R(g, f_2) > \frac{1}{2}$ et alors $f_2 \in \bigcup$.

Cependant \bigcup est un τ -of croissant contenant g et $X \setminus \bigcup$ est un τ -of décroissant contenant f et $\bigcup \cap (X \setminus \bigcup) = \emptyset$.

$T(H)$ est par conséquent un espace de Priestley.

b) La démonstration est analogue.

Soit H un treillis flou distributif fermé. $T(H) = (X, \tau, \mu_{R'})$ est appelé l'espace dual de H , avec X est l'ensemble des homomorphismes treillis de H dans $[0,1]$ et $\mu_{R'}$ l'ordre flou défini précédemment, τ une topologie sur X , induite par celle de $[0,1]^H$. $T(H)$ sera alors un espace de Priestley (dit : flou).

Notons par $L(T(H))$ l'ensemble des τ -of croissant de $T(H)$, on munit $L(T(H))$ d'un ordre flou noté $\mu_{R''}$ défini par

$$\forall A, B \in L(T(H)) : \mu_{R''}(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = B \\ \bigwedge_{f \in A, g \in B} \mu_{R'}(f, g) & \text{si non} \end{cases}$$

avec $\mu_{R'}$ est l'ordre flou défini précédemment sur $T(H)$.

Dans un premier temps, on démontre que chaque $\bigcup \in L(T(H))$ est un τ -of croissant s'il est de la forme :

$$\bigcup = F_H(a) = \{f : H \rightarrow [0,1] / \mu_R(f(x), f(a)) > \frac{1}{2}, \forall x \in H\}$$

avec μ_R est l'ordre flou sur $[0,1]$.

Soit donc deux ensembles :

$$S_1 = \{F_H(a) / a \in H\} \text{ et } S_2 = \{X - F_H(a) / a \in H\}$$

avec $F_H(a) = \{f : H \rightarrow [0,1], f \text{ homomorphisme, } \mu_R(f(x), f(a)) > \frac{1}{2}, \forall x \in H\}$ et $X = \{f : H \rightarrow [0,1] / f \text{ est un homomorphisme}\}$.

Ces deux familles sont stables pour la réunion et l'intersection finies.

Soit \bigcup un τ -of croissant dans $L(T(A))$, montrons que $\bigcup \in S_1$:

Si $f \in \bigcup$ et $g \in X - \bigcup$ alors : $\mu_R(f, g) \not> \frac{1}{2}$, il s'ensuit qu'il existe deux ensembles disjoints $R_1(f, g)$ et $R_2(f, g)$ tels que :

$$R_1(f, g) \in S_1, R_2(f, g) \in S_2 \text{ et } f \in R_1(f, g), g \in R_2(f, g).$$

La compacité de l'ensemble $X - \bigcup$, nous permet de l'exprimer comme une union finie d'ensembles $R_2(f, g_i)$, $g_i \in X - \bigcup, i = \widehat{1, n}$.

Posons :

$$R_1(f) = \bigcup_{0 \leq i \leq n} R_1(f, g_i)$$

on a :

$$\bigcup = \bigcup_{0 \leq i \leq n} R_1(f)$$

mais \bigcup est compact, donc \bigcup est une réunion finie d'élément de S_1 , d'où $\bigcup \in S_1$ et donc il existe $a \in A$ tel que :

$$\bigcup = F_A(a) = \{f : A \rightarrow [0,1] / f \text{ homomorphisme et } \mu_R(f(x), f(a)) > \frac{1}{2}, \forall x \in A\}.$$

Conclusion 5.1.1. \bigcup est un τ -of croissant si \bigcup est de la forme :

$$\bigcup = F_A(a) = \{f : A \rightarrow [0,1] / f \text{ homomorphisme et } \mu_R(f(x), f(a)) > \frac{1}{2}, \forall x \in A\}.$$

Montrons maintenant que la relation $\mu_{R''}$ définie par $L(T(H))$ précédemment par :

$$\forall A, B \in L(T(H)) : \mu_{R''}(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = B \\ \bigwedge_{f \in A, g \in B} \mu_{R'}(f, g) & \text{si non} \end{cases}$$

est un ordre flou sur $L(T(H))$ avec $\mu_{R'}$ est l'ordre flou sur $T(H)$ qu'on déjà défini.

$\mu_{R''}(A, A) = 1$ alors $\mu_{R''}$ est réflexive.

Pour l'antisymétrie, on utilise la définition de Zadeh :

$$R(x, y) > 0 \Rightarrow R(x, y) = 0$$

Soit donc $\mu_{R''}(A, B) > 0$, d'où

$$\bigwedge_{f \in A, g \in B} \mu_{R'}(f, g) > 0$$

elle est vraie alors pour tout $f \in A$ et $g \in B$.

mais, $\mu_{R'}$ est antisymétrique, d'où $\mu_{R''}(f, g) = 0$ et alors

$$\bigwedge_{f \in A, g \in B} \mu_{R'}(g, f) = 0, \text{ ie: } (B, A) = 0$$

$\mu_{R''}$ est antisymétrique.

Montrons que $\mu_{R''}$ est transitive :

$\forall A, B, C \in L(T(H))$, at-on :

$$\mu_{R''}(A, C) \geq \{\mu_{R''}(A, B) + \mu_{R''}(B, C) - 1\} \vee 0?$$

on a : $\mu_{R'}$ est transitive donc

$$\forall f, g, h \in T(H) : \mu_{R'}(f, h) \geq \{\mu_{R'}(f, g) + \mu_{R'}(g, h) - 1\} \vee 0$$

d'où :

$$\bigwedge_{f \in A, h \in C} \mu_{R'}(f, h) \geq \left\{ \bigwedge_{f \in A, g \in B} \mu_{R'}(f, g) + \bigwedge_{g \in B, h \in C} \mu_{R'}(g, h) - 1 \right\} \vee 0$$

alors :

$$\mu_{R''}(A, C) \geq \{\mu_{R''}(A, B) + \mu_{R''}(B, C) - 1\} \vee 0$$

donc $\mu_{R''}(A, C)$ est transitive et par conséquent un ordre flou sur $L(T(H))$.

Si $A, B \in L(T(H))$, on note par $A \tilde{\cup} B$ à $\sup A, B$ par rapport à l'ordre flou $\mu_{R''}$, de même pour $A \tilde{\cap} B$ pour $A \wedge B$ (par rapport à $\mu_{R''}$).

$(L(T(H)), \tilde{\cup}, \tilde{\cap}, \mu_{R''})$ est il cependant un treillis flou ?

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié quelques propriétés des relations d'ordres flous, et leurs applications au treillis flous, (treillis muni d'un ordre flou), notamment le treillis de Heyting.

Nous constatons que les propriétés de treillis Heyting dans le cas d'un ordre classique (cas net) se généralise par analogie au cas d'un ordre flou. Mais les opérateurs "inf" et "sup" dans un treillis classique ne conservent pas en générale toutes les propriétés au cas d'un ordre flou.

Nous signalons par ailleurs que le problème de représentation demeure encore ouvert, nous avons proposé un aperçu sur la dualité de Priestley seulement.

Bibliographie

- [1] A. AMROUNE, *Représentation des algèbres de lu Kasiewicz o-valentes involutives par des structures floues*, Busefol (institut de recherche en informatique de Toulouse) 43 (1990), 5–11.
- [2] M. DEMIRCI, *Fuzzy sets and systems*, 151 (2005), 437–472.
- [3] G. J. KLIR and BOYUAN, *Fuzzy sets and fuzzy logic, theorie and applications*, Upper Saddle River, New Jersey 07458, QA248. K-487 (1995).
- [4] G. ELSALAMONY, *Fuzzy fmg ideals on T-fuzzy ordred sets*, Int-Journal of Math. Analysis, Vol. 1, 2007, No. 23, 1137–1156.
- [5] A. STOUTI, *Archivum mathematicum*, (Bruno): Tomus 40 (2004), 273–279 and 41 (2005), 117–122.
- [6] I. BEG, *Fixed points of fuzzy monotone maps: Archivum mathematicum*, (Bruno) 35 (1999), 141–144 and *On Fuzzy zorne lemma, fuzzy sets and system*, 101 (1999), 181–183.
- [7] L. GACÔGNE, *Logique floue et application*, Institut d’Informatique d’Evry, 9–36, Novembre 2003.
- [8] H. ZEMMERMAN, *Fuzzy sets theory and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrehlt, London 1991.

- [9] T. MITSUISHI and G. BANCEREK, *Lattice of fuzzy sets*, Formalised Mathematics, 11(4), 393–398 (2003).
- [10] P. VENUGOPALAN, *Fuzzy ordred sets*, *Fuzzy sets and systems*, 46 (1992), 221–226.
- [11] L. GARMENDIA and A. SALVADOR, *On the new method to: T-transitivize fuzzy relation in technologies for constructing intelligent systems 2*, Springer, (2000), 251–260.
- [12] W. GÄHLER, *Fuzzy sets and systems*, 98 (1998), 153–173.
- [13] L. A. ZEDAH, *Fuzzy sets*, Informatique et contrôle, (1965). 8. 338–353.
- [14] L. A. ZEDAH, *Simularity relation and fuzzy ordering*, (1971). 3. 171–200.