UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées et Fondamental

Par

Somia GUECHI

Sujet

Relation les équations intégrales et différentielles

Soutenu le /06 /2012 devant le jury composé de

Promoteur :	M. NADIR	Professeur	M'sila
Président :	A. GASMI	Maître de Conférences A	M'sila
Examinateurs :	A. MAROUANI	Maître de Conférences A	B.B.A
	A. RAHMOUNE	Maître de Conférences B	B.B.A

Promotion: 2011/2012

بسم الله الرحمن الرحيم

REMERCIEMENTS

Ces recherches ont été réalisées sous l'excellente direction de Monsieur M. NADIR, Professeur à l'Université de Med Boudiaf de M'sila. Je tiens à vous exprimer toute mes immenses gratitudes pour avoir encadré, orienté et suivi le travail pendant la duré d'élaboration et de la rédaction de ce mémoire, aussi pour m'avoir accordé votre confiance. Je tiens à vous remercier très chaleureusement pour m'avoir donné l'occasion de travailler sur un sujet d'un tel intérêt et pour le temps qu'il a pu me consacrer. Ses compétences scientifiques, ses remarques et sa patience m'ont été d'un grand secours dans la réalisation de ce mémoire. J'espère avoir à nouveau l'occasion de travailler avec lui.

Mes plus vifs remerciements s'adressent à Monsieur, A. GASMI Maître de conférences à l'Université Med Boudiaf de M'sila, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de soutenance de ce mémoire.

J'exprime enfin mes remerciements aux honorables membres du jury de soutenance: Messieurs A. MAROUANI, et A. RAHMOUNE de l'Université de Bachir Ibrahimi de B.B.A.

Fait à Magra, le 30 Mai 2012
Somia GUECHI

guechi.s2711@Gmail.com

Table des matières

	Notations
$C([a,b])$	Espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$.
$C^k[a,b]$	Classe des fonctions k fois continûment dérivables sur $[a,b]$.
L	Constant de Lipschitz.
y	Fonction inconnue dans l'équation différentielle.
φ	Fonction inconnue dans l'équation intégrale.
φ_n	Solution approchée de l'équation intégrale.
f	Terme libre dans l'équation intégrale.
f_n	Suite d'approximation de f.
A	Opérateur intégral.
T, U	Opérateurs intégraux compacts.
I	Opérateur d'identité.
E	Espace normé.
X	Espace de Banach.
H	Espace de Hilbert.
$k(x,y)$	Noyau de l'intégrale.
$k_n(x,y)$	Noyau itéré d'ordre n donné par $k_n(x,y) = \int_x^y k(x,z)k_{n-1}(z,y)dy$.
T	Opérateur linéaire où $T = I - A$.
T^{-1}	Inverse de l'opérateur T.
A^*	Adjoint de l'opérateur A.
$\langle u, v\rangle$	Produit scalaire de u et v.
D-F	Méthode des différences finies.
EI	Équation intégrale.
EDO	Équation différentielle ordinaire.

Introduction

Les équations différentielles et les équations intégrales ont une importance fondamentale dans l'analyse fonctionnelle et les problèmes pratiques. Ceci est dû au fait qu'un grand nombre de lois et de relations physiques se traduisent mathématiquement sous forme des équations différentielles ou des équations intégrales.

Le bût de ce travail est de trouver une relation entre les équations différentielles et les équations intégrales. Le mémoire est représenté comme suit :

Le premier chapitre aborde des notions sur les équations différentielles, ainsi que l'existence et l'unicité de leurs solutions en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz et en étudiant la solution de certain nombre de types classiques des équations différentielles de second ordre. Plusieurs travaux de [Nad1, 04], [Dem, 06], [KKM, 87], ou [Qui, 77], ou bien [FLL, 78] et autres étudiés les solutions des équations différentielles.

Le deuxième chapitre. On a commencé dans ce chapitre par une introduction sur les opérateurs compacts et les équations intégrales, dans les espaces des fonctions continues et quelques propriétés, ainsi que l'existence et l'unicité des solutions pour les équations intégrales de type Volterra de seconde espèce, et en étudiant la relation entre les équations différentielles et les équations intégrales.

Le troisième chapitre représente le but de ce mémoire, il est consacré aux méthodes numériques et approximatives des résolutions des équations différentielles et des équations intégrales, telles que la méthode d'Euler, la méthode des différences finies, et la méthode de Trapèze qui permettent de trouver une solution numérique de ces équations. Et nous donnons une comparaison numérique entre les équations différentielles et intégrales.

Chapitre 1

Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

Dans ce chapitre, on a défini les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, ainsi on se propose d'étudier un certain nombre de types classiques de ces équations différentielles pour lesquelles on sait ramener le calcul des solutions à des calculs de primitives, et on introduit quelques définitions, propositions et théorème. Pour plus de détails voir par exemple [Nad1, 04], [Dem, 06], [KKM, 87], ou [Qui, 77], ou bien [FLL, 78]

1.1 Généralités

Définition 1.1. On appelle équation différentielle linéaire, une relation entre une variable t, une fonction de cette variable $y = y(t)$, et ses dérivées $y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots y^{(n)}$, c'est à dire une équation de la forme

$$F\left(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.1}$$

Définition 1.2. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre, une relation entre une variable t, une fonction de cette variable, sa dérivée première et sa dérivée seconde, et de la forme

$$F\left(t, y, \dot{y}, \ddot{y}\right) = 0. \tag{1.2}$$

1.1.1 Existence et unicité de la solution des équations différentielles

Théorème 1.3 (*Voir par exemple* [KKM, 87]). *On considère l'équation différentielle*

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)}), \tag{1.3.A}$$

si, dans l'équation $(1.3.A)$*, la fonction* $f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)})$

1) *est continue en tous ses arguments* $t, y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)}$ *dans un certaine domaine* $[a, b]$ *de leur variation.*

2) *possède dans le demain* $[a, b]$ *des dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial \dot{y}}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *continues par rapport aux arguments* $y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)}$.

Alors il existe un intervalle $t_0 - h < t < t_0 + h$ *dans le quel il existe une solution unique* $y = \varphi(t)$ *de l'équation* $(3.1.A)$ *qui satisfait aux conditions initiales*

$$y/_{t=t_0} = y_0, \dot{y}/_{t=t_0} = \dot{y_0}, ..., y^{(n-1)}/_{t=t_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{1.3.B}$$

Cas particulaire.

Pour une équation du second ordre $\ddot{y} = (t, y, \dot{y})$, les conditions initiales sont de la forme

$$y/_{t=t_0} = y_0, \dot{y}/_{t=t_0} = \dot{y}_0, \text{ ou } t_0,\ y_0 \text{ et } \dot{y}_0 \text{ sont des nombres donnés.}$$

1.1.2 Réduction d'une équation différentielle d'ordre supérieur à un système différentiel d'ordre un

Il clair que l'équation différentielle $(1.3.A)$ est équivalente au système différentiel d'ordre un

$$\begin{cases} \dfrac{dY_0}{dt} = Y_1 \\ \dfrac{dY_1}{dt} = Y_2 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dY_{n-2}}{dt} = Y_{n-1} \\ \dfrac{dY_{n-1}}{dt} = f(t, Y_0, Y_1, ..., Y_{n-1}). \end{cases} \tag{E}$$

Si l'on pose $Y_0 = y, Y_1 = \dot{y}, ...$. Le système (E) peut encore s'écrire

$$\dot{Y} = F(t, Y), \tag{E}$$

avec

$$\begin{aligned} &Y = (Y_0, Y_1, ..., Y_{n-1}), \\ &F = (F_0, F_1, ..., F_{n-1}), \\ &F_0(t, Y) = Y_1, ..., F_{n-2}(t, Y) = Y_{n-1}, F_{n-1}(t, Y) = f(t, Y). \end{aligned}$$

Remarque 1.4. Il est toujours possible de transformer une équation différentielle d'ordre n en un système d'équations différentielles d'ordre un, alors on résulte que le théorème d'existence et d'unicité pour l'équation différentielle $(1.3.A)$ est encore vrai pour le système différentiel d'ordre un (E).

Théorème 1.5 (*Voir par exemple* [KKM, 87]). *Soit $I = [t_0, t_0 + a]$ un intervalle réel avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que*

$$\|f(t, Y_2) - f(t, Y_1)\| \leq L \|Y_2 - Y_1\|, \quad \forall\, t \in I, \forall\, Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^n \text{ et } L \geq 0. \tag{1.5}$$

Alors pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ unique telle que

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = f(t, Y(t)) \quad \textit{sur } I. \\ Y(t_0) = Y_0 \quad \textit{(donnée initiale).} \end{cases}$$

Démonstration. En intégrant l'équation différentielle (E) entre t_0 et t, on obtient

$$Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, Y(x))dx$$

On pose pour $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$

$$\varphi(u)(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, u(x))dx$$

On définit ainsi une application φ de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, et $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ muni par la norme $\|u\| = \sup_{x \in I} |u(x)|$, $\forall u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Et la fonction Y cherchée est solution de

$$Y = \varphi(Y). \tag{1.5.A}$$

C'est une équation de type point fixe.

- *Unicité* : Si u vérifie $u = \varphi(u)$, on a aussi

$$\varphi^p(u) = u \text{ et } \varphi^{p+1}(u) = u.$$

Si u, v sont deux solution on a

$$\begin{aligned} \|\varphi(u) - \varphi(v)\| &\leq \left\|\varphi^{p+1}(u) - \varphi^{p+1}(v)\right\| \\ &\leq c \|\varphi(u) - \varphi(v)\|, \end{aligned}$$

d'où

$$(1-c)\left\|\varphi(u)-\varphi(v)\right\| \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(u)=\varphi(v) \quad \Longrightarrow \quad u=v.$$

- *Existence* : On se donne $u_0 \in C^1\left(I, \mathbb{R}^n\right)$, et on construit

$$u_1=\varphi^p(u_0), u_2=\varphi^p(u_1), \ldots, u_n=\varphi^p(u_{n-1})$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left\|u_{m+1}-u_m\right\| & \leq c\left\|u_m-u_{m-1}\right\| \\
& \leq c^2\left\|u_{m-1}-u_{m-2}\right\| \\
& \vdots \\
& \leq c^m\left\|u_1-u_0\right\|.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\left\|u_{m+k}-u_m\right\| & \leq \left\|u_m-u_{m+k-1}\right\|+\left\|u_{m+k-1}-u_{m+k-2}\right\|+\cdots+\left\|u_1-u_0\right\| \\
& \leq c^m\left(c^{p-1}+c^{p-2}+\cdots+c+1\right)\left\|u_1-u_0\right\| \\
& \leq \frac{c^m}{1-c}\left\|u_1-u_0\right\|.
\end{aligned}$$

Donc $\left\|u_{m+p}-u_m\right\|$ tend vers zéro lorsque m tend vers $+\infty$. La suite (u_n) est de Cauchy dans $C^1\left(I, \mathbb{R}^n\right)$ donc converge. On note u sa limite qui vérifie nécessairement $\varphi^p(u)=u$. Or

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi(u)-u\right\| & \leq \left\|\varphi^{p+1}(u)-\varphi^p(u)\right\| \\
& \leq c\left\|\varphi(u)-u\right\|,
\end{aligned}$$

donc

$$(1-c)\left\|\varphi(u)-u\right\| \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(u)=u,$$

et u est bien solution de $(1.3.A)$. $\square$

Remarque 1.6. La condition de Lipschitz (1.5) n'implique pas que la dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial Y}$ est continue.

Définition 1.7 (*Solution générale*). On appelle solution générale de l'équation différentielle (1.2) une fonction

$$y = \varphi(t, C_1, C_2), \tag{1.7}$$

dépendant de deux constantes arbitraires C_1, C_2 telle que, ils satisfont à l'équation (1.2) pour toutes les valeurs admissibles des constantes C_1, C_2.

Définition 1.8 (*Solution particulière*). On appelle solution particulière de l'équation différentielle (1.2) une solution obtenue à partir de la solution générale (1.7) pour des valeurs quelconques déterminées des constantes arbitraires C_1, C_2.

Définition 1.9 (*Intégrale générale*). Une relation de la forme $\phi(t, y, C_1, C_2) = 0$, qui définit implicitement la solution générale s'appelle intégrale générale de l'équation différentielle du second ordre (1.2).

Il y a deux classes principales d'équations différentielles linéaires du second ordre,

1. Équations incomplètes (se rament au premier ordre).
2. Équations complètes.

1.2 Équations différentielles linéaires incomplètes du second ordre

On appelle équation différentielle linéaire incomplète du second ordre toute équation prenant l'une des formes des types suivants,

1.2.1 Équations incomplètes du premier type

Définition 1.10. Une équation différentielle du second ordre est dite incomplète du premier type si elle est de la forme

$$\ddot{y}= f\left(t\right), \tag{1.10}$$

où t est la variable indépendante, $y\left(t\right)$ la fonction inconnue, et f est une fonction continue donnée.

Remarque 1.11. Il est aisé de voir que la solution de l'équation (1.10) est simple. En effet, il suffit réécrire l'équation sous la forme explicite

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = f\left(t\right).$$

Après multiplication des deux membres de dernière équation par dt, et intégration de ces deux membres, on obtient

$$\int d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \int f\left(t\right)dt.$$

ou encore

$$\frac{dy}{dt} = \int f\left(t\right)dt + C_1 = F\left(t\right) + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$$

Multiplication des deux membres de dernière équation par dt, et intégration de ces deux membres, on obtient la solution générale sous la forme suivante

$$y\left(t\right) = \int F\left(t\right)dt + C_1 t + C_2, C_2 \in \mathbb{R}.$$

1.2.2 Équations incomplètes du deuxième type

Définition 1.12. Une équation différentielle de second ordre est dite incomplète du deuxième type si elle est de la forme

$$\ddot{y} = f(y), \tag{1.12}$$

où t est la variable indépendante et $y(t)$ la fonction inconnue.

Remarque 1.13. On résout l'équation (1.12) comme suit, réécrivons l'équation sous la forme explicite

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = f(y),$$

multiplions les deux de dernière équation par l'expression $2\dfrac{dy}{dt}dt$, on aura

$$2\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}dt = 2f(y)\frac{dy}{dt}dt,$$

après simplification, l'équation prend la forme suivante

$$d\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = 2f(y)\,dy,$$

intégration de ces deux membres, il vient

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \int 2f(y)\,dy + C_1 = F(y) + C_1,$$

ou encore

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{F(y) + C_1},$$

que l'on peut ramener à une équation à variables séparables

$$\int \frac{dy}{\sqrt{F(y) + C_1}} = \int dt.$$

D'où la solution générale de l'équation (1.12) donnée sous la forme

$$y = \varphi(t).$$

1.2.3 Équations incomplètes du troisième type

Définition 1.14. Une équation différentielle de second ordre est dite incomplète du troisième type si elle est de la forme

$$\ddot{y} = f(t, \dot{y}), \tag{1.14}$$

où t est la variable indépendante et $y(t)$ la fonction inconnue.

Remarque 1.15. Il est aisé de voir que la solution de l'équation (1.14) est simple. En effet, on se ramène aussitôt au premier ordre on posant $F = \dot{y}$, alors

$$\dot{F} = f(t, F).$$

La solution générale de cette dernière équation sera de la forme $F(t, C_1), C_1 \in \mathbb{R}$ et on obtient donc

$$y(t) = \int F(t, C_1)dt + C_2, \text{ où } C_2 \in \mathbb{R}.$$

1.2.4 Équations incomplètes du quatrième type

Définition 1.16. Une équation différentielle de second ordre est dite incomplète du quatrième type si elle est de la forme

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y}), \tag{1.16}$$

où t est la variable indépendante et $y(t)$ la fonction inconnue.

Remarque 1.17. La résolution de l'équation (1.16) se fait comme suit, on se ramène au premier ordre grâce à l'artifice suivant : on pose $\dot{y} = p$ comme fonction inconnue de y.

Alors

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dp}{dy}p,$$

l'équation différentielle (1.16) devient

$$p\frac{dp}{dy} = f\left(y, p\right),$$

c'est une équation du premier ordre.

Si l'on sait former son intégrale générale

$$p = F\left(y, C_1\right) = \dot{y},$$

on obtient t en fonction de y par la quadrature

$$t = \int \frac{dy}{F\left(y, C_1\right)} + C_2, \text{ pour } F\left(y, C_1\right) \neq 0.$$

1.3 Équations différentielles linéaires complètes du second ordre

Définition 1.18. On appelle équation différentielle linéaire complète du second ordre à coefficients constants toute équation de la forme

$$A\ddot{y} + B\dot{y} + Cx = f\left(t\right), \tag{1.18}$$

où $y(t)$ est une fonction inconnue de la variable indépendante t, f une fonction continue donnée, les constantes A, B et C sont des réels donnés avec $A \neq 0$.

1.3.1 Équations différentielles linéaires sans second membre

Définition 1.19. Une équation différentielle linéaire sans second membre (ou homogène) est une équation dont le second membre $f(t)$ est nul

$$A\ddot{y} + B\dot{y} + Cx = 0, \tag{1.19}$$

Propositions 1.20 (*Voir par exemple* [Qui, 77]).

- *Si les coefficients A et B sont nuls, il ne s'agit plus d'une équation différentielle.*
- *Si le coefficient A de l'équation* (1.19) *est nul, et $B \neq 0$, alors l'équation linéaire de premier ordre*

  $$B\dot{y} + Cx = 0,$$

  admet la solution non nulle $y(t)$ donnée par

  $$y(t) = K \exp(\lambda t), \text{ où } \lambda \text{ et } K \text{ sont des constantes avec } K \neq 0.$$

1.3.2 Équations différentielles linéaires avec second membre

Définition 1.21. On appelle équation différentielle linéaire complète de second ordre à coefficients constants toute équation de la forme

$$A\ddot{y} + B\dot{y} + Cx = f(t), \tag{1.21}$$

où $y(t)$ et $f(t)$ sont des fonctions de la variable indépendante t, et $f(t) \neq 0$.

Lemme 1.22. *La solution générale $y(t)$ de l'équation différentielle linéaire (1.21) est somme d'une de ses solutions particulières $y_1(t)$ et de la solution générale de l'équation différentielle homogène (1.19) associée $y_2(t)$.*

Chapitre 2

Transformation des équations différentielles à des équations intégrales de type Volterra

Dans ce chapitre on aborde des notions sur les ensembles compacts et les équations intégrales, et en étudiant la relation entre les équations différentielles et les équations intégrales de type Volterra. Pour plus de détails voir par exemple [Nad3, 08], [Nad2, 04], [Veo, 02], [Col, 06], ou bien [Tri, 57] .

2.1 Rappels et notions fondamentales

2.1.1 Opérateur compact

Nous commençons d'abord par rappeler la définition et quelques propriétés des ensembles compacts. Pour plus de détails voir [NAD2, 04], ou [VEO, 02]

Définition 2.1. Soit G un ensemble d'un espace normé E, G est dit compact si de tout recouvrement de G par des ouverts de V on peut extraire un sous-recouvrement fini,

$$\forall U_j, j \in J \text{ (ouverts) tels que } G \subset \underset{i \in J}{\cup} U_j, \exists U_{j(k)}, j(k) = 1, 2, ..., n \text{ tel que } G \subset \overset{n}{\underset{k=1}{\cup}} U_{j(k)}.$$

Définition 2.2. Un ensemble G est dit séquentiellement compact si pour toute suite d'éléments dans G contient une sous suite converge vers un élément dans G.

Théorème 2.3 (*Voir par exemple* [NAD2, 04], *ou bien* [VEO, 02]). *Un sous ensemble d'un espace normé est compact si et seulement si il est séquentiellement compact.*

Définition 2.4. Soit H un espace de Hilbert et A un endomorphisme de H. On dit que A est compact s'il transforme tout sous-ensemble borné G de H en un ensemble relativement compact.
En d'autres termes, A est un opérateur compact si, pour toute suite bornée (x_n) dans H, la suite (Ax_n) contient une sous-suite convergente.

Théorème 2.5 (*Voir par exemple* [NAD3, 08]). *Soit* $k : C(G) \times C(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire sur* $C(G)$ *est définit par :* $\varphi \in C(G) \longrightarrow A\varphi \in C(G)$, *tel que*

$$A\varphi(t) = \int_G k(t,x)\varphi(x)dx, \quad t, x \in G$$

A est un opérateur compact.

Notation 2.6. La fonction $k(t, x)$ s'appelle noyau de l'opérateur intégral A.

Définition 2.7 (*Noyau faiblement singulier*). Soit $k : C(G) \times C(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ un noyau de l'opérateur intégral A est faiblement singulier si

$$\forall t, x \in G \subset \mathbb{R}^n, t \neq x, \exists M \in \mathbb{R}^+, \text{ tel que } |k(t,x)| < \frac{M}{|t-x|^{n-\alpha}} \quad , \text{ où } 0 < \alpha \leq n.$$

Théorème 2.8 (*Voir par exemple* [Nad3, 08]). *Soit $k : C(G) \times C(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction faiblement singulier, l'opérateur intégral linéaire A sur $C(G)$ est aussi un opérateur compact.*

Proposition 2.9 (*Voir par exemple* [Rah, 11]). *L'opérateur intégrale A à noyau continu k est borné, avec*

$$\|A\|_\infty = \max_{t \in G} \int_G |k(t,x)| \, dx.$$

Théorème 2.10 (*Voir par exemple* [Rah, 11]). *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique sur X. Alors $I - A$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

de plus

$$\left\|(I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Démonstration. Comme $\|A\| < 1$, on a la convergence absolue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|},$$

dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(X)$, par conséquent la série de Neumann converge en norme et définit un opérateur linéaire borné

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \text{ avec } \|S\| \leq (1 - \|A\|)^{-1},$$

de plus S est l'inverse de $I-A$.

En effet, en utilisant les notations $A^0=I$, $A^k=AA^{k-1}$ on peut voir que

$$(I-A)\,S=(I-A)\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n}A^k=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(I-A^{n+1}\right)=I,$$

aussi

$$S\,(I-A)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n}A^k\,(I-A)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(I-A^{n+1}\right)=I,$$

puisque $\|A^{n+1}\|\leq\|A\|^{n+1}\longrightarrow 0$, lorsque $n\longrightarrow\infty$. $\square$

Théorème 2.11 (*Voir par exemple* [RAH, 11]). *Sous les hypothèses du théorème* (2.10)*, la méthode des approximations successives*

$$\varphi_{n+1}=A\varphi_n+f,\quad n=0,1,2,\ldots$$

où φ_0 est arbitraire dans X, converge vers l'unique solution φ de l'équation $\varphi-A\varphi=f$ pour tout $f\in X$.

2.1.2 Opérateur adjoint

Définition 2.12. Soit H un espace de Hilbert et soit A un opérateur linéaire borné défini sur H à valeur dans H. L'opérateur adjoint de A noté par A^*, est l'opérateur unique $A^*:H\longrightarrow H$, avec

$$\langle A\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,A^*\psi\rangle\,,\text{ où }\varphi,\psi\in H.$$

Proposition 2.13. *Soit A l'opérateur intégral de noyau k. Alors l'opérateur adjoint A^* est un opérateur intégral de noyau k^*, avec*

$$k^*(t,x)=k(x,t).$$

Corollaire 2.14. *L'opérateur intégral A de noyau k est auto-adjoint si et seulement si, le noyau est symétrique*

$$k(t,x)=k(x,t),\ \textit{où}\ t,x\in[a,b]\,.$$

2.1.3 Équation intégrale

Définition 2.15. Toute équation fonctionnelle de la forme

$$\lambda\varphi(t) + f(t) = \int_G k(t,x)\varphi(x)dx, \quad t, x \in G \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

est appelée équation intégrale, où φ est l'inconnue, f est une fonction donnée, G est un ensemble fermé, borné et mesurable et k est le noyau de l'équation intégrale.

Remarque 2.16.

- Si $f(t) \neq 0$, l'équation (2.15) est dite équation intégrale non homogène.
- Si $f(t) = 0$, l'équation (2.15) est dite équation intégrale homogène.

1) Équation de Fredholm

A) Équation de première espèce

Définition 2.17. L'équation de Fredholm non homogène de première espèce est définie par la relation suivante

$$\int_a^b k(t,x)\varphi(x)dx = f(t), \tag{2.17}$$

où φ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer et f le terme de source.

B) Équation de seconde espèce

Définition 2.18. L'équation de Fredholm non homogène de deuxième espèce est définie par la relation suivante

$$\lambda\varphi(t) = \int_a^b k(t,x)\varphi(x)dx + f(t), \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.18}$$

où φ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer et f le terme de source.

2) Équation de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans lesquelles le noyau k est tel que

$$k(t,x) = 0 \quad \text{pour } x > t.$$

A) Équation de première espèce

Définition 2.19. L'équation de Fredholm non homogène de première espèce est définie par la relation suivante

$$\int_a^t k(t,x)\varphi(x)dx = f(t),\ a \leq t \leq b \tag{2.19}$$

où φ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer et f le terme de source.

B) Équation de seconde espèce

Définition 2.20. L'équation de Fredholm non homogène de deuxième espèce est définie par la relation suivante

$$\lambda\varphi(t) = \int_a^t k(t,x)\varphi(x)dx + f(t), \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.20}$$

où φ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer et f le terme de source.

Corollaire 2.21. *Soit k un noyau continu vérifiant*

$$\max_{t\in G} \int_G |k(t,x)|\, dx < 1.$$

Alors l'équation intégrale de seconde espèce

$$\varphi(t) - \int_G k(t,x)\varphi(t)dx = f(t), \quad t \in G,$$

admet une solution unique $\varphi \in C(G)$ pour toute $f \in C(G)$. De plus, la méthode des approximations successives

$$\varphi_{n+1}(t) = \int_G k(t,x)\varphi_n(t)dx + f(t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

converge uniformément vers cette solution pour tout φ_0 arbitraire dans $C(G)$.

2.2 Existence et unicité de la solution des équations intégrales de type Volterra

On va appliquer les théorèmes classiques du point fixe pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de ces équations.

Définition 2.22. Soient H est un espace de Hilbert et U un opérateur borné, l'opérateur U est dit opérateur contractant s'il existe une constante positive k telle que : $0 < k < 1$ et

$$\|U\varphi_1 - U\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\| .$$

Théorème 2.23 (*Voir par exemple* [Khi, 11]). *Soit U un opérateur contractant dans un espace de Hilbert H, alors l'équation*

$$U\varphi = \varphi,$$

admet une solution unique φ dans H, cette solution est le point fixe de cet opérateur.

Corollaire 2.24 (*Voir par exemple* [Khi, 11]). *Supposons que l'opérateur U admet un point fixe dans l'espace de Hilbert H alors l'opérateur U^n admet le même point fixe φ.*

Corollaire 2.25 *(Voir par exemple* [Khi, 11]). *Soit U un opérateur dans l'espace H tel que l'opérateur est un opérateur contractant, alors U admet un point fixe unique φ dans l'espace H.*

Théorème 2.26 (*Voir par exemple* [Khi, 11]). *Soit H est un espace de Hilbert et A un opérateur borné dans H avec la propriété suivante*

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\| ,$$

alors l'équation suivante

$$\varphi - \lambda A\varphi = f,$$

admet une solution unique pour toute $f \in H$ à condition que $|\lambda|$ est petit.

Théorème 2.27 (*Voir par exemple* [NAD3, 08], *ou bien* [COR, 02]). *Soit $k(t,y)$ est une fonction continue pour $t, y \in [a,b]$, alors l'équation de Volterra*

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^t k(t,x)\varphi(x)dx = f(t), \quad a \leq t \leq b \tag{2.27}$$

admet une solution unique φ pour toute f dans $\mathbb{L}^2([a,b])$ et λ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Pour l'équation intégrale de Volterra nous considérons l'opérateur

$$T\varphi(t) = f(t) + \lambda A\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t,x)\varphi(x)dx, \quad a \leq t \leq b.$$

Et nous essayons de prouver que l'opérateur T^n est une contraction pour un certain $n \in \mathbb{N}$, donc $T\varphi$ admet un point fixe qui doit être une solution de l'équation (2.27)

$$\begin{aligned}
T\varphi(t) &= f(t) + \lambda A\varphi(t),\\
T^2\varphi(t) &= T(f(t) + \lambda A\varphi(t)) = f(t) + \lambda A(f(t) + \lambda A\varphi(t)) = f(t) + \lambda Af(t) + \lambda^2 A^2\varphi(t),\\
&\vdots\\
T^n\varphi(t) &= f(t) + \lambda Af(t) + \lambda^2 A^2\varphi(t) + \cdots + \lambda^{n-1}A^{n-1}\varphi(t) + \lambda^n A^n\varphi(t).
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\|T^n\varphi_2(t) - T^n\varphi_1(t)\| &= \|\lambda^n A^n\varphi_2(t) - \lambda^n A^n\varphi_1(t)\|\\
&= |\lambda|^n \left\| \int_a^t k_n(t,y)(\varphi_2(y) - \varphi_1(y))\, dy \right\|.
\end{aligned}$$

Rappelons que $k_n(t,y)$ est le noyau itéré d'ordre n donné par

$$k_n(t,y) = \int_t^y k(t,z)k_{n-1}(z,y)\, dz,$$

puisque on a par hypothèse

$$|k(t,y)| \leq M.$$

Alors

$$|k_n(t,y)| \leq \frac{M^n\,(t-y)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad a \leq y \leq t \leq b. \tag{2.27.A}$$

Pour $n=1$ l'expression $(2.27.A)$ est évidente.

Supposons qu'elle est vraie pour $m \in \mathbb{N}$

$$|k_m(t,y)| \leq \frac{M^m\,(t-y)^{m-1}}{(m-1)!}, \quad a \leq y \leq t \leq b.$$

Alors

$$\begin{aligned}
|k_{m+1}(t,y)| &= \left|\int_y^t k(t,z)k_m(z,y)\,dz\right| \\
&\leq \int_y^t |k(t,z)k_m(z,y)|\,dz \\
&\leq \frac{M^{m+1}}{(m-1)!}\int_y^t (t-z)^{m-1}\,dz \\
&\leq \frac{M^{m+1}\,(t-y)^m}{m!},
\end{aligned}$$

tel que

$$\|T^n\varphi_2 - T^n\varphi_1\| \leq \frac{|\lambda|^n\,M^n}{(n-1)!}\,\|\varphi_2-\varphi_1\|.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand on obtient

$$\frac{|\lambda|^n\,M^n}{(n-1)!} < 1,$$

ainsi que l'opérateur T^n est contractant ce qui implique que T admet un point fixe, on écrit

$$T\varphi = \varphi \Longleftrightarrow \varphi(t) = f(t) + \int_a^t k(t,y)\varphi(y)dy. \quad \square$$

Proposition 2.28 (*Voir par exemple* [Col, 06]). *Soient $a:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $b:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1, si $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$* et *$\frac{\partial f}{\partial t}$ sont continues, alors*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(t,x)dx\right) = b'(t)f(t,b(t)) - a'(t)f(t,a(t)) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx. \tag{2.28}$$

Lemme 2.29 (*Lemme de remplacement*) [COL,06]. *On suppose que* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors*

$$\int_a^t \int_a^{t'} f(x)dxdt' = \int_a^t (t-x)f(x)dx, \quad t \in [a,b].$$

Démonstration. On définit une fonction $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(t) = \int_a^t (t-x)f(x)dx, \text{où } t \in [a,b] \tag{2.29.A}$$

D'après l'utilisation de la proposition (2.28) sur les fonctions continues $(t-x)f(x)$ et $\frac{\partial}{\partial t}\left[(t-x)f(x)\right]$.

Pour chaque $t, x \in [a,b]$, on obtient

$$\begin{aligned} F'(t) &= \left[(t-x)f(x)\right]_{x=t} \frac{d}{dt}t + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t}\left[(t-x)f(x)\right]dx \\ &= \int_a^t f(x)dx. \end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned} F(t') &= F(t') - F(a) \\ &= \int_a^{t'} F'(t)dt \end{aligned}$$

d'où

$$F(t') = \int_a^{t'} \int_a^t f(x)dxdt. \tag{2.29.B}$$

D'après (2.29.A) et (2.29.B), on obtient

$$F(t) = \int_a^t (t-x)f(x)dx = \int_a^t \int_a^{t'} f(x)dxdt'.$$

Ceci termine la démonstration. $\square$

Et l'utilisation du théorème de Fubini est une autre méthode pour la démonstration. $\square$

Lemme 2.30 (*Lemme général de remplacement*) [Col, 06]. *Soit f une fonction n fois intégrable sur $[a,b]$, et $t, t_i \in [a,b]$ pour $i = 1, \ldots, n-1$, alors on a*

$$\int_a^t \int_a^{t_{n-1}} \cdots \int_a^{t_2} \int_a^{t_1} f(t_1)dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1}dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx. \qquad (2.30)$$

2.3 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de type Volterra

On va étudier la relation qui existe entre les équations intégrales et les équations différentielles. D'abord en notant qu'un problème à valeurs initiales se réduit à une équation intégrale de Volterra. On utilise le lemme président (2.29) qui remplace une intégrale double par une intégrale simple. Pour plus de détails, voir [Tri, 57].

Proposition 2.31 (*Voir par exemple* [Tri, 57]). *La résolution de l'équation différentielle linéaire non homogène*

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)y = f(t), \quad a \leq t \leq b \qquad (2.31.A)$$

à coefficients continus $a_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$ avec les conditions initiales (n valeurs initiales)

$$y(a) = C_0, \dot{y}(a) = C_1, \ldots, y^{(n-1)}(a) = C_{n-1}. \qquad (2.31.B)$$

Peut être ramener à la résolution d'une équation de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^t k(t,x)\varphi(x)dx = F(t), \quad a \leq t \leq b$$

où

$$k(t,x) = -\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!},$$

et $F(t) = f(t) - C_{n-1}a_1(t) - [(t-a)C_{n-1} - C_{n-2}]\, a_2(t) - \cdots - [\dfrac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}C_{n-1} + \cdots + (t-a)C_1 + C_0]a_n(t)$.

Démonstration. En posant

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \varphi(t), \tag{N}$$

par intégration sur l'intervalle $[a, t]$, et on utilise la proposition (2.30), on obtient

$$\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = \int_a^t \varphi(x)dx + C_{n-1}, \tag{N-1}$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} = \int_a^t (t-x)\varphi(x)dx + (t-x)C_{n-1} + C_{n-2}, \tag{N-2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy}{dt} = \int_a^t \frac{(t-x)^{n-2}}{(n-2)!}\varphi(x)dx + \frac{(t-a)^{n-2}}{(n-2)!}C_{n-1} + \cdots + (t-a)C_2 + C_1, \tag{1}$$

$$y = \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(x)dx + \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}C_{n-1} + \cdots + (t-a)C_1 + C_0. \tag{0}$$

En multipliant les relations $(N), (N-1), (N-2), \ldots, (1)$ et (0) par $1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ et a_n respectivement, et en additionnant on retrouve le problème aux valeurs initiales définit par $(2.31.A)$ et $(2.31.B)$, et en posant

$$k(t,x) = -\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!},$$

$F(t) \;= f(t) - C_{n-1}a_1(t) - [(t-a)C_{n-1} - C_{n-2}]\, a_2(t) - \cdots - [\dfrac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}C_{n-1} + \cdots + (t-a)C_1 + C_0]a_n(t)$.

On obtient l'équation de Volterra désirée. $\square$

Exemple 2.32 (*Pour* $n = 2$). Considérons, par exemple le problème de Cauchy (aussi appelé problème aux valeurs initiales) suivant

$$\begin{cases} \ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = f(t) \\ y(0) = A, \ \dot{y}(0) = B \end{cases} \tag{2.32}$$

où a, b et f sont des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et où y désigne une fonction inconnue.

En posant

$$\varphi(t) = \ddot{y}(t),$$

par intégration sur l'intervalle $[0, t]$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi(x)dx &= \int_0^t \ddot{y}(x)dx \\ &= \dot{y}(t) - \dot{y}(0) \\ &= \dot{y}(t) - B. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^t \varphi(x)dx = \dot{y}(t) - B, \tag{2.32.A}$$

alors on peut écrire $\dot{y}$ sous la forme

$$\dot{y}(t) = \int_0^t \varphi(x)dx + B. \tag{2.32.B}$$

En intégrant la relation (2.32.A), on obtient

$$\int_0^t \int_0^x \varphi(z)dz = y(t) - y(0) - Bx + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

D'après la proposition (2.29), on a donc

$$\int_0^t (t-x)\varphi(x)dx = y(t) - A - Bx + C, \text{ et } y(0) = A.$$

D'où

$$y(t) = \int_0^t (t-x)\varphi(x)dx + Bx + A.$$

Le changement d'inconnue $\ddot{y}(t) = \varphi(t)$ nous conduit directement à l'équation suivante

$$\varphi(t) + a(t)\left[\int_0^t \varphi(x)dx\right] + b(t)\left[\int_0^t (t-x)\varphi(x)dx\right] = f(t) - Bb(t)t - Ba(t) - Ab(t),$$

donc d'après simplification

$$\varphi(t) - \int_0^t k(t,x)\varphi(x)dx = F(t), \qquad (2.32.C)$$

où $k(t,x) = -a(t) - (t-x)b(t)$, et $F(t) = f(t) - Bb(t)t - Ba(t) - Ab(t)$.
Nous obtenons une équation intégrale de Volterra de deuxième espace.

Remarque 1.33. L'unicité de la solution de l'équation intégrale $(2.32.C)$ résulte de l'existence de la solution du problème de Cauchy (2.32) pour l'équation différentielle linéaire à coefficients continue dans un voisinage du point $t = 0$.

Chapitre 3

Comparaison numérique des résolutions des équations différentielles et des équations intégrales de type Volterra

Nous abordons dans ce chapitre les résolutions numériques du problème de Cauchy à conditions initiales pour les équations différentielles ordinaires et les équations intégrales de type Volterra de seconde espèce. Puis nous introduisons des techniques pour l'approximation numérique. Pour plus de détails voir par exemple [QSS, 00]. On présente enfin une comparaison numérique entre ces équations.

3.1 Résolution numérique des problèmes aux valeurs initiales

Notre objectif dans ce paragraphe est de trouver une solution approchée à la solution exacte de problème de Cauchy (ou problème aux valeurs initiales) et en utilisant la méthode d'Euler.

3.1.1 Principe de la méthode numérique de d'Euler

Soient $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, une suite de nombres réels. On note

$$h = \frac{b-a}{n} = x_{i+1} - x_i \text{ et } (0 \leq i \leq n).$$

On notera par Y_i une approximation de $Y(x_i)$. Dans le système différentiel (E), pour $x = x_i$ on a

$$Y'(x_i) = f(x_i, Y(x_i)).$$

On approche la dérivée $Y'(x_i)$ en utilisant le développement de la série de Taylor de $Y(x_i)$, et on arrête à l'ordre 1 on obtient

$$Y(x_{i+1}) \simeq Y(x_i) + hY^{(1)}(x_i).$$

L'application de cette formule pour calculer les $Y(x_i)$ est connue comme méthode d'Euler.

3.1.2 Application au problème aux valeurs initiales

L'objectif dans cette section est de résoudre numériquement le problème de Cauchy à conditions initiales sur l'intervalle $[a, b]$

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)}), \\ y/_{t=t_0} = y_0, \dot{y}/_{t=t_0} = \dot{y_0}, ..., y^{(n-1)}/_{t=t_0} = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

où f satisfait le théorème (1.3), et $y_0, \dot{y}_0, ..., y_0^{(n-1)}$ sont des réels donnés.

Il est facile de vérifier que toute équation différentielle peut être écrite comme un système d'équations différentielles du premier ordre,

$$\begin{cases} \dot{Y} = F(t, Y(t)), \\ Y(t_0) = (y_0, \dot{y}_0, ..., y_0^{(n-1)}). \end{cases}$$

Effectuons la méthode d'Euler, on obtient

$$\begin{cases} Y(t_{i+1}) \simeq Y(t_i) + h\dot{Y}(t_i), \\ Y(t_0) = (y_0, \dot{y}_0, ..., y_0^{(n-1)}). \end{cases}$$

Par récurrence, on peut calculer la fonction Y en tous les nœuds t_i pour $i = 0, 1, ..., n$.

3.1.3 Principe de la méthode numérique des différences finies

La méthode des différences finies consiste à remplacer approximativement chaque dérivée contenue dans l'équation différentielle du problème aux valeurs initiales par le rapport des différences. Pour accomplir ceci on divise l'intervalle $[a, b]$ en $n+1$ intervalles de longueur $h = \dfrac{b-a}{n+1}$ et dont les extrémités sont données par $x_i = a + ih$ avec $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

3.1.4 Application au problème aux valeurs initiales

Soit $(t_k), k = 0, ..., n$ une subdivision de $[a, b]$, avec

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

Pour $i = 0, 1, \dots, n$, on note $h = t_{i+1} - t_i$ et on définit le pas du maillage par $h = \dfrac{b-a}{n+1}$.

Donc on écrit le problème aux valeurs initiales aux points t_i,

$$\begin{cases} \ddot{y}(t_i) + a(t_i)\dot{y}(t_i) + b(t_i)y(t_i) = f(t_i) \\ y(t_0) = A, \ \dot{y}(t_0) = B \end{cases}, \ \forall i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Effectuons un développement de Taylor d'ordre un et deux en t_i

$$\begin{aligned}
y(t_{i+1}) &= y(t_i) + h\dot{y}(t_i) + O(h). \\
y(t_{i+1}) &= y(t_i) + h\dot{y}(t_i) + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(t_i) + O(h^2). \\
y(t_{i-1}) &= y(t_i) - h\dot{y}(t_i) + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(t_i) + O(h^2).
\end{aligned}$$

En additionnant, on obtient

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) = 2y(t_i) + h^2\ddot{y}(t_i) + O(h^2).$$

Il semble donc raisonnable d'approcher les dérivées première et seconde par le quotient différentiel

$$\ddot{y}(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - 2y(t_i) + y(t_{i-1})}{h^2}, \text{ et } \dot{y}(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h}.$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} \dfrac{y(t_{i+1}) - 2y(t_i) + y(t_{i-1})}{h^2} + a(t_i)\dfrac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} + b(t_i)y(t_i) = f(t_i) \\ y(t_0) = A, \text{ et } y(t_1) = Bh + y(t_0) \end{cases}$$

On note $y(t_i) = y_i, a(t_i) = a_i, b(t_i) = b_i$, et $f(t_i) = f_i$, alors la formule précédente devient

$$\left(\frac{1}{h^2} + \frac{a_i}{h}\right) y_{i+1} + \left(-\frac{2}{h^2} - \frac{a_i}{h} + b_i\right) y_i + \left(\frac{1}{h^2}\right) y_{i-1} = f_i.$$

Par récurrence, on peut calculer la fonction y en tous les nœuds t_i pour $i = 2, ..., n$.

3.2 Résolution numérique des équations intégrales de type Volterra de seconde espèce

Notre objectif dans ce paragraphe est de trouver une solution approchée à la solution exacte de l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce en utilisant la méthode du trapèze.

3.2.1 Principe de la méthode numérique de Trapèze

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On se propose de cherche de formule approchée pour l'intégral

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Pour cela, on choisit d'abord une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

de l'intervalle $[a, b]$, la méthode de Trapèze donne

$$\int_a^b f(x)dt \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2} \left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right).$$

3.2.2 Application à l'équation intégral de type Volterra de seconde espèce

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(t) = f(t) - \int_a^t k(t, x)\varphi(x)dx, \quad \text{et} \quad \varphi(a) = f(a) \quad ,a \leq t \leq b.$$

Tout d'abord, on commence par la discrétisation de l'intervalle $[a, b]$ en sous intervalles $[t_j, t_{j+1}]$, $1 \leq j \leq n+1$, sont équidistants, c'est à dire :

$$t_j = a + (j-1)h, \quad \text{et} \quad h = \frac{b-a}{n+1} = t_{i+1} - t_i,$$

et h est le pas de la discrétisation.

Calculons la solution en ces nœuds, donc l'équation de Volterra devient

$$\begin{aligned}
\varphi(t_j) &= f(t_j) - \int_a^{t_j} k(t_j, x)\varphi(x)dx, \;\; \varphi(t_1) = f(t_1), \quad a \leq t_j \leq b. \\
&= f(t_j) - \int_a^{t_1} k(t_j, x)\varphi(x)dx - \int_{t_1}^{t_2} k(t_j, x)\varphi(x)dx - \cdots - \int_{t_{j-1}}^{t_j} k(t_j, x)\varphi(x)dx, \\
&= f(t_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(t_j, x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Alors

$$\varphi(t_{j+1}) = f(t_{j+1}) - \sum_{i=1}^{j} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(t_{j+1}, x)\varphi(x)dx, \; \varphi(t_1) = f(t_1).$$

Effectuons la méthode du trapèze, on obtient une autre discrétisation par rapport à la variable d'intégration t comme suit

$$\varphi(t_{j+1}) = f(t_{j+1}) - \left[\frac{h}{2}k(t_{j+1}, t_1)\varphi(t_1) + \frac{h}{2}k(t_{j+1}, t_{j+1})\varphi(t_{j+1}) + h\sum_{i=2}^{j} k(t_{j+1}, t_i)\varphi(t_i)\right].$$

On note $\varphi(t_j) = \varphi_j$, $f(t_j) = f_j$ et $k(t_j, t_i) = k_{j,i}$, alors la formule précédente devient

$$\varphi_{j+1} = f_{j+1} - \left[\frac{h}{2}k_{j+1,1}\varphi_1 + \frac{h}{2}k_{j+1,j+1}\varphi_{j+1} + h\sum_{i=2}^{j} k_{j+1,j}\varphi_i\right], \text{ et } \varphi_1 = f_1.$$

Donc

$$\varphi_{j+1} = \frac{1}{1 + \frac{h}{2}k_{j+1,j+1}}\left[f_{j+1} - \left(\frac{h}{2}k_{j+1,1}\varphi_1 + h\sum_{i=2}^{j} k_{j+1,j}\varphi_i\right)\right], \text{ et } \varphi_1 = f_1.$$

par récurrence, on peut calculer la fonction φ en tous les nœuds t_j pour $j = 1, 2, ..., n+1$.

3.3 Exemples

Exemple 3.1.

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + t\dot{y}(t) + \exp(-t)y(t) = (1 - t + \exp(-t))\exp(-t), \quad 0 \le t \le 1. \\ y(0) = 1, \ \dot{y}(0) = -1. \end{cases} \tag{3.1.A}$$

Qui équivalente

$$y(t) - \int_0^t \left[-t + (x - t)\exp(-t)\right] y(x)dx = t + \exp(-2t), \quad 0 \le t \le 1. \tag{3.1.B}$$

Avec la solution exacte est donnée par

$$y(t) = \exp(-t).$$

TAB 3.1.A : Comparaison des résultats, erreur absolue. EDO (3.1.A)

t	La solution exacte	Euler	L'erreur	D-F	L'erreur
0.0	1.0000e+000	1.0000e+000	*0.0000e+000*	1.0000e+000	*0.0000e+000*
0.1	9.0484e-001	9.0000e-001	*4.8374e-003*	9.0000e-001	*4.8374e-003*
0.2	8.1873e-001	8.1100e-001	*7.7308e-003*	8.0910e-001	*9.6344e-003*
0.3	7.4082e-001	7.3188e-001	*8.9356e-003*	7.2647e-001	*1.4344e-002*
0.4	6.7032e-001	6.6161e-001	*8.7116e-003*	6.5140e-001	*1.8924e-002*
0.5	6.0653e-001	5.9922e-001	*7.3156e-003*	5.8319e-001	*2.3336e-002*
0.6	5.4881e-001	5.4382e-001	*4.9957e-003*	5.2126e-001	*2.7548e-002*
0.7	4.9659e-001	4.9460e-001	*1.9854e-003*	4.6505e-001	*3.1533e-002*
0.8	4.4933e-001	4.5083e-001	*1.5005e-003*	4.1406e-001	*3.5272e-002*
0.9	4.0657e-001	4.1184e-001	*5.2704e-003*	3.6782e-001	*3.8752e-002*
1.0	3.6788e-001	3.7704e-001	*9.1574e-003*	3.2591e-001	*4.1965e-002*

TAB 3.1.B : Comparaison des résultats, erreur absolue. EI (3.1.B)

t	La solution exacte	Méthode de Trapèze	L'erreur
0.0	1.0000e+000	1.0000e+000	*0.0000e+000*
0.1	9.0484e-001	9.0468e-001	*1.5427e-004*
0.2	8.1873e-001	8.1845e-001	*2.8307e-004*
0.3	7.4082e-001	7.4043e-001	*3.8658e-004*
0.4	6.7032e-001	6.6985e-001	*4.6559e-004*
0.5	6.0653e-001	6.0601e-001	*5.2146e-004*
0.6	5.4881e-001	5.4826e-001	*5.5604e-004*
0.7	4.9659e-001	4.9601e-001	*5.7158e-004*
0.8	4.4933e-001	4.4876e-001	*5.7060e-004*
0.9	4.0657e-001	4.0601e-001	*5.5580e-004*
1.0	3.6788e-001	3.6735e-001	*5.2990e-004*

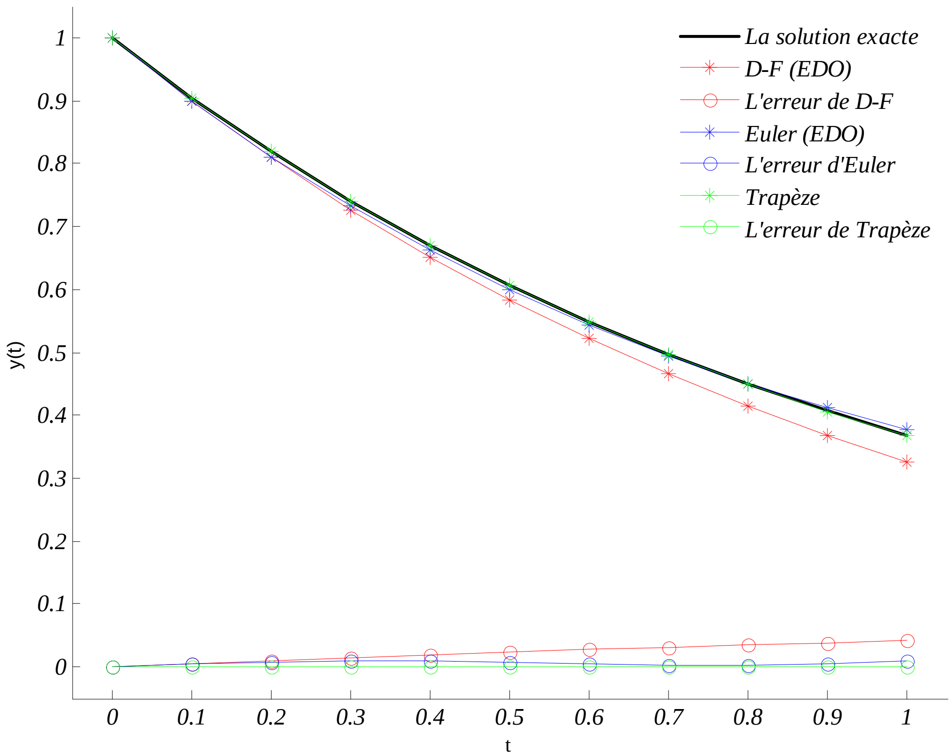

FIG 3.1 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée.

Exemple 3.2.

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + \dfrac{t}{4}\dot{y}(t) - \cos(t)y(t) = -\cos(t)(1+\cos(t)) + \dfrac{t}{4}, \quad 0 \leq t \leq 1. \\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0. \end{cases} \tag{3.2.A}$$

Qui équivalente

$$y(t) - \int_0^t \left[-\frac{t}{4} + (x-t)\cos(t)\right] y(x)dx = \frac{t}{4}\sin(t) + \cos^2(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{3.2.B}$$

Avec la solution exacte est donnée par

$$y(t) = \cos(t).$$

Tab 3.2.A : Comparaison des résultats, erreur absolue. EDO (3.2.A)

t	La solution exacte	Euler	L'erreur	D-F	L'erreur
0.0	1.0000e+000	1.0000e+000	*0.0000e+000*	1.0000e+000	*0.0000e+000*
0.1	9.9500e-001	1.0000e+000	*4.9958e-003*	1.0000e+000	*4.9958e-003*
0.2	9.8007e-001	9.9000e-001	*9.9334e-003*	9.9015e-001	*1.0083e-002*
0.3	9.5534e-001	9.7005e-001	*1.4714e-002*	9.7079e-001	*1.5456e-002*
0.4	9.2106e-001	9.4040e-001	*1.9340e-002*	9.4246e-001	*2.1404e-002*
0.5	8.7758e-001	9.0150e-001	*2.3916e-002*	9.0588e-001	*2.8296e-002*
0.6	8.2534e-001	8.5398e-001	*2.8649e-002*	8.6191e-001	*3.6578e-002*
0.7	7.6484e-001	7.9868e-001	*3.3839e-002*	8.1160e-001	*4.6757e-002*
0.8	6.9671e-001	7.3658e-001	*3.9874e-002*	7.5609e-001	*5.9385e-002*
0.9	6.2161e-001	6.6883e-001	*4.7220e-002*	6.9666e-001	*7.5045e-002*
1.0	5.4030e-001	5.9671e-001	*5.6405e-002*	6.3463e-001	*9.4325e-002*

Tab 3.2.B : Comparaison des résultats, erreur absolue. EI (3.2.B)

t	La solution exacte	Méthode de Trapèze	L'erreur
0.0	1.0000e+000	1.0000e+000	*0.0000e+000*
0.1	9.9500e-001	9.9501e-001	*6.2169e-006*
0.2	9.8007e-001	9.8009e-001	*2.4536e-005*
0.3	9.5534e-001	9.5539e-001	*5.3968e-005*
0.4	9.2106e-001	9.2115e-001	*9.2886e-005*
0.5	8.7758e-001	8.7772e-001	*1.3906e-004*
0.6	8.2534e-001	8.2553e-001	*1.8969e-004*
0.7	7.6484e-001	7.6508e-001	*2.4153e-004*
0.8	6.9671e-001	6.9700e-001	*2.9092e-004*
0.9	6.2161e-001	6.2194e-001	*3.3396e-004*
1.0	5.4030e-001	5.4067e-001	*3.6665e-004*

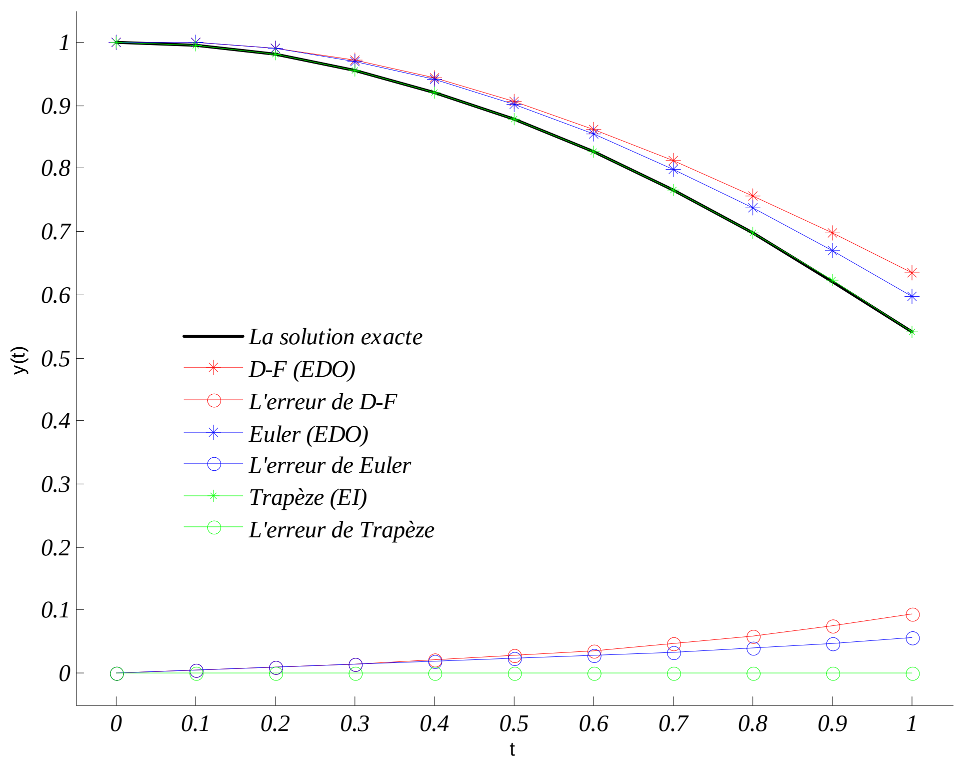

FIG 3.2 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée.

Exemple 3.3.

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) - \dfrac{1}{t+2}\dot{y}(t) + \dfrac{t}{2}y(t) = \dfrac{t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 4t + 8}{2t+2}, \quad 0 \leq t \leq 1. \\ y(0) = 2, \; \dot{y}(0) = 0. \end{cases} \tag{3.3.A}$$

Qui équivalente

$$y(t) - \int_0^t \left[\frac{1}{t+2} + \frac{t}{2}(x-t)\right] y(x)dx = \frac{1}{24}\left(t^5 + 12t^3\right) - \frac{t^3 + 6t}{3t+6} + t^2 + 2, \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{3.3.B}$$

Avec la solution exacte est donnée par

$$y(t) = t^2 + 2.$$

TAB 3.3.A : Comparaison des résultats, erreur absolue. EDO (3.3.A)

t	**La solution exacte**	**Euler**	**L'erreur**	**D-F**	**L'erreur**
0.0	2.0000e+000	2.0000e+000	*0.0000e+000*	2.0000e+000	*0.0000e+000*
0.1	2.0100e+000	2.0000e+000	*1.0000e-002*	2.0000e+000	*1.0000e-002*
0.2	2.0400e+000	2.0200e+000	*2.0000e-002*	2.0200e+000	*1.9995e-002*
0.3	2.0900e+000	2.0600e+000	*3.0005e-002*	2.0600e+000	*2.9968e-002*
0.4	2.1600e+000	2.1200e+000	*4.0030e-002*	2.1201e+000	*3.9894e-002*
0.5	2.2500e+000	2.1999e+000	*5.0101e-002*	2.2003e+000	*4.9733e-002*
0.6	2.3600e+000	2.2997e+000	*6.0256e-002*	2.3006e+000	*5.9435e-002*
0.7	2.4900e+000	2.4195e+000	*7.0540e-002*	2.4211e+000	*6.8940e-002*
0.8	2.6400e+000	2.5590e+000	*8.1014e-002*	2.5618e+000	*7.8176e-002*
0.9	2.8100e+000	2.7183e+000	*9.1747e-002*	2.7229e+000	*8.7059e-002*
1.0	3.0000e+000	2.8972e+000	*1.0282e-001*	2.9045e+000	*9.5497e-002*

TAB 3.3.B : Comparaison des résultats, erreur absolue. EI (3.3.B)

t	**La solution exacte**	**Méthode de Trapèze**	**L'erreur**
0.0	2.0000e+000	2.0000e+000	*0.0000e+000*
0.1	2.0100e+000	2.0101e+000	*8.1728e-005*
0.2	2.0400e+000	2.0402e+000	*1.6217e-004*
0.3	2.0900e+000	2.0902e+000	*2.4406e-004*
0.4	2.1600e+000	2.1603e+000	*3.3002e-004*
0.5	2.2500e+000	2.2504e+000	*4.2251e-004*
0.6	2.3600e+000	2.3605e+000	*5.2378e-004*
0.7	2.4900e+000	2.4906e+000	*6.3591e-004*
0.8	2.6400e+000	2.6408e+000	*7.6068e-004*
0.9	2.8100e+000	2.8109e+000	*8.9961e-004*
1.0	3.0000e+000	3.0011e+000	*1.0538e-003*

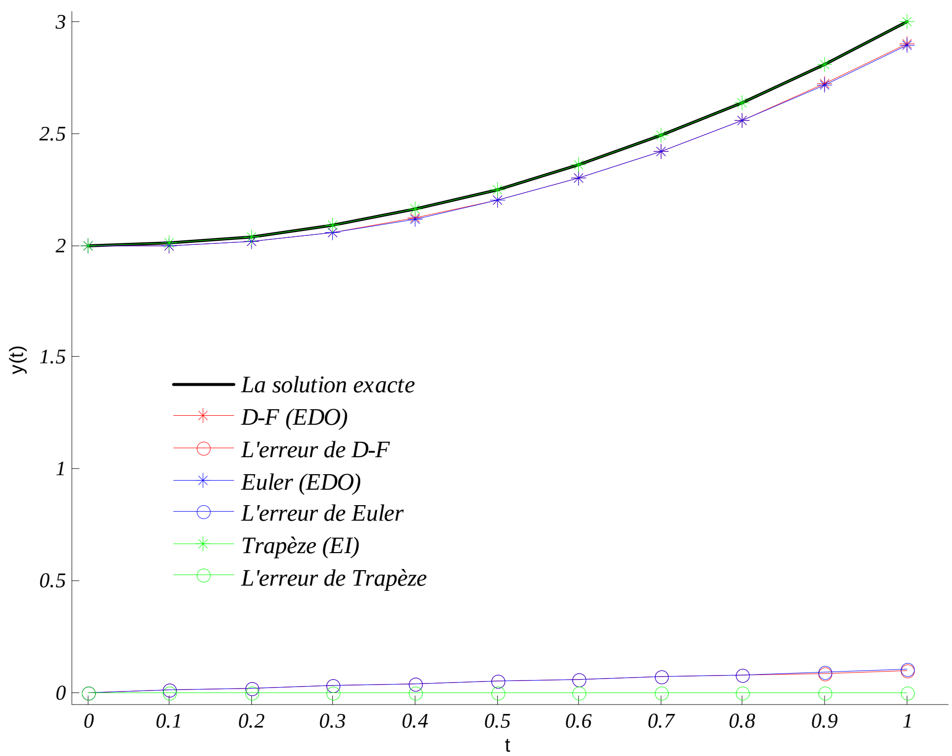

FIG 3.3 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée.

3.4 Conclusion

Notre but est de faire une comparaison entre les solutions numériques d'une équation différentielle et celle d'une équation intégrale, dont on ne connaît pas leurs solutions analytiques. Notons que la comparaison entre la résolution numérique d'une équation différentielle (pour les deux méthodes Euler et les différences finies) et la même équation transforme en une équation intégrale (pour la méthode du Trapèze) ne donne pas toujours les mêmes résultats numériques, et les résultats numériques d'une équation intégrale sont les plus précises.

Conclusion générale

Dans ce mémoire on a étudié une relation entre les équations différentielles ordinaires aux conditions initiales et les équations intégrales linéaires de type Volterra de seconde espèce.

On a commencé par une introduction sur les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants dans le premier chapitre, ainsi on se propose d'étudier la solution d'un certain nombre de types classiques de ces équations différentielles et l'existence et l'unicité de leurs solutions.

Le deuxième chapitre présente une introduction sur les opérateurs compacts, les équations intégrales et quelques propriétés, et on a fait une étude sur la relation entre ces équations sous forme analytique.

Dans le troisième chapitre on a traité les équations différentielles de second ordre aux conditions initiales et les équations intégrales de type Volterra de seconde espèce numériquement avec des exemples.

Bibliographie

[BFM, 09] F. Bertrande, D. Fredon, M. Maumy-Bertrande. *Mathématiques analyse en 30 fiches,* Dound, Paris, 2009.

[Bur, 05] T. A Burton. *Volterra integral and differential equation, Department of mathematics,* Southern Illinois university, Carbonale, Illinois, USA, 2005.

[Col, 06] P. Collins, *Differential and integral equation,* Oxford, université de Press. New York, 2006.

[Cor, 02] C. Corduneanu. *Functional equations with causal operators. Department of mathematics,* Taylor & Francis Groupe, London and New York, 2002.

[Dem, 06] J. P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentiels,* EDP Sciences, Paris, 2006.

[FLL, 78] P. Florent, G. Lauton, M. Lauton. *Équations et système différentiels,* Librairie Vuibert, Paris, 1978.

[Khi, 11] A. Khirani. *Résolution des équations intégrales non linéaire type Volterra*, mémoire de magister université de M'sila, 2011.

[KKM, 87] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko. *Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires.* Edition MIR. Moscou, 1987.

[MP, 07] A. V. Manzhirov, A. D. Polyanin. *Mathematics for engineers and scientists,* Taylor & Francis Group, London and New York, 2007.

[Nad1, 04] M. Nadir. *Cours équations différentielles ordinaires.* Université de M'sila, Algérie, 2004.

[Nad2, 04] M. Nadir. *Cours d'analyse fonctionnelle.* Université de M'sila, Algérie, 2004.

[Nad3, 08] M. Nadir. *Cours sur les équations intégrales.* Université de M'sila, Algérie, 2008.

[QSS, 00] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. *Méthodes numériques pour le calcul scientifique,* Spring, Paris, 2000.

[Qui, 77] J. Quinet. *Cours élémentaire de mathématiques supérieures,* Bordas, Paris, 1977.

[Rah, 11] A. Rahmone. *Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales,* thèse de Doctorat université de Batna, 2011.

[Tri, 57] F. G. Tricomi. *Integral equations,* Université de Press, Cambridge, London , 1957.

[Veo, 02] J. Voedts. *Cours de mathématiques.* Ellipses, Paris, 2002.

Résumé

Les équations différentielles et les équations intégrales ont une importance fondamentale dans l'analyse fonctionnelle et les problèmes pratiques, et plusieurs domaines de la recherche scientifique. Cependant, la résolution analytique des équations différentielles à coefficients constants est facile, mais la résolution de ces équations à coefficients variables est pratiquement ardue, à savoir impossible dans la majeure partie des cas. Ce mémoire présente une méthode analytique transforme des équations différentielles aux conditions initiales à des équations intégrales de type Volterra de seconde espèce, des méthodes numériques efficaces pour la résolution approchée de ces équations, l'analyse de l'existence des solutions, et l'étude de la convergence de l'erreur.
Mots clés : *Équation différentielles, équation intégrale de Volterra, méthode d'Euler, méthode des différences finies, méthode de Trapèze.*

Abstract

Differential and integral equations have a fundamental importance in the functional analysis and the practices problems, and many domains of scientific research. However, the resolution of differential equations with constants coefficients is easy, but the resolution of these equations with variables coefficients is practically difficult with knowing impossible in more part of the cases. This work present a analytical method which it transform a differential equations with initials conditions to a Volterra equations of second kind, efficient methods for approximate numerical solution of these equations, the analysis of the existence of their solutions, and the convergence study of the error.
Keywords : *Differential equations, Volterra equations, Euler method, finites differences method, trapeze method.*

الملخص

المعادلات التفاضلية و التكاملية لها أهمية أساسية في التحليل الدالي و المسائل التطبيقية، و في العديد من مجالات البحث العلمي. و مع ذلك فان حل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة يكون بسيطا، لكن حل هذه المعادلات بمعاملات متغيرة تطبيقيا يكون صعب أو غير ممكن في الكثير من الحالات. في هذا العمل نقدم طريقة تحليلية تقوم بتحويل كل معادلة تفاضلية ذات شروط ابتدائية إلى معادلة تكاملية من نوع فولتيرا (Volterra)، طرق عددية فعالة من اجل إيجاد حل تقريبي لهذه المعادلات، دراسة وجود الحل، و دراسة تقارب الخطأ.

الكلمات المفتاحية: *المعادلات التفاضلية، المعادلة التكاملية من نوع فولتيرا (Volterra)، طريقة أولر(Euler)، طريقة الفروق المنتهية، طريقة ترباز(Trapèze) .*