Université de M'sila
Faculté des Mathématiques et Informatiques
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Discrètes

Par:

Belkheir Rima

Sujet:

Sur les formes bilinéaires alternées (où bivecteurs)

Dirigé par: prof.Midoune Nourdine

Promotion: 2012/2013

Remerciements

J *e rends ma profonde gratitude à dieu qui m'a aidé à réaliser ce modeste travail.*

J *e tiens tout particulièrement à exprimer ma profonde gratitude à mes parents pour leur encouragement, leur soutien et pour les sacrifices qu'ils ont enduré.*

J *e tiens à remercier vivement mon promoteur* ***Mr:MIDOUNE.N****, d'avoir accepté de diriger ce travail et de créer auteur de moi un environnement de recherche par ses conseils et son soutien permanent.*

E*n fin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont participé de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.*

Table des matières

Introduction

L'une des applications de la théorie des groupes est liée au problème de classification.

La classification des bivecteurs est l'étude de l'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\Lambda^2 E$.

Dans ce mémoire , On étudier les formes bilinéaires alternées (où bivecteurs), nous donnons aussi des exemples pour tout les cas possiples .

Le mémoire est composer de trois chapitres, le premier chapitre contient des définitions et propriétés de base (module sur un anneau, le produit tensoriel , le produit exterieur,...).

Le deuxiéme chapitre contient les formes bilinéaires alternées (forme alternée, multi-vecteurs, Algèbre extérieure et groupes d'automorphismes ,...).

Le troisiéme chapitre contient la classification des bivecteurs en dimension n.

Chapitre 1

Définitions et propriétés de base

1.1 Modules sur un anneau

La notion des modules sur un anneau K ne sont valables que moyennant certaines hypothèses concernant l'anneau K : par exemple, la théorie de la «dimension» suppose que K est un corps.

Par contre, les résultats les plus simples sont valables pour tout anneau K; ce sont ces résultats qu'on trouvera dans ce chapitre.

1.1.1 Définition des modules sur un anneau

Soit K un anneau, on appelle module à gauche sur l'anneau K, ou encore K module à gauche l'objet formé par un ensemble M, une loi de composition sur M, noté $(x, y) \longmapsto x+y$, et une application de l'ensemble $K \times M$ dans M, notée $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$, ces données étant assujetties à vérifier les deux conditions que voici :

(M_1) : l'ensemble M muni de la loi de composition $(x, y) \rightarrow x + y$ est un groupe commutatif.

(M_2) : on a les relations $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, $1x = x$, $(\lambda+\mu)x = \lambda x+\mu x$; $\lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y$, quels que soient $x, y \in M$ et $\lambda, \mu \in K$.

Dans la théorie des modules l'anneau K est fixé une fois pour toutes, et s'appelle généralement l'anneau de base, les éléments des K - modules s'appellent au contraire des vecteurs.

Lorsque l'anneau K est un corps, on dit espace vectoriel à gauche sur K au lieu de K-module module à gauche, en particulier un espace vectoriel sur le corps R des nombres réels s'appelle un espace vectoriel réel, et un espace vectoriel sur le corps C des nombres complexes un espace vectoriel complexe, ces deux notions sont de loin les plus importantes en Analyse et en Physique; par contre les espaces vectoriels sur des corps arbitraires, et les modules sur l'anneau Z ou sur un « anneau de polynômes » jouent dans beaucoup de branches desMathématiques un rôle beaucoup plus important que les espaces vectoriels réels ou complexes, mais même en Physique théorique on utilise des modules sur des anneaux qui ne sont pas des corps, et ne sont pas commutatifs (représentations linéaires du groupe de Lorentz, spineurs, etc....) bien que les physiciens n'utilisent pas encore le langage de la théorie des modules.

Notons enfin qu'on définit la notion de K-module à droite comme suit, on appelle ainsi l'objet formé par un groupe additif M et par une application, notée $(x, \lambda) \to x\lambda$, de $M \times K$ dans M, qui vérifie les conditions exprimées par les identités suivantes :

$$(x\lambda)\mu = x(\lambda\mu), x1 = x; \; x(\lambda + \mu) = x\lambda + x\mu; \quad (x + y)\lambda = x\lambda + y\lambda.$$

On peut montrer facilement que les K-modules à droite ne sont autres que les modules à gauche sur un anneau déduit de K par un procédé très simple (et du reste identique à K si K est commutatif, de sorte que la distinction entre les deux notions n'a d'intérêt que pour les anneaux non commutatifs), il nous arrivera d'utiliser tantôt le langage des modules à gauche, tantôt celui des modules à droite; il va de soi qu'on peut passer de l'un à l'autre par des traductions triviales.

Nous allons maintenant donner quelques exemples importants de modules et d'espaces vectoriels.

1.1.2 Exemples de module

Exemple 1.1.1 *Pour tout anneau K et tout entier $n \geq 1$, on peut considérer l'ensemble $K^n = K \times .... \times K$ (n facteurs) comme un K-module à gauche, en posant, par définition,*

$$(\xi_1, ..., \xi_n) + (\eta_1, ..., \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, ..., \xi_n + \eta_n)$$

$$\lambda(\xi_1, ..., \xi_n) = (\lambda\xi_1, ..., \lambda\xi_n);$$

Le fait que l'axiome (M_1) *et on vérifiera facilement, en utilisant les axiomes des anneaux, les identités figurant dans l'axiome* (M_2) *des modules, par la suite, quand nous parlerons de* K^n *comme d'un* K *-module à gauche, ce sera toujours du module ci-dessus qu'il s'agira, pour* $n = 1$ *la construction précédente permet de regarder* K *lui-même comme un* K *-module à gauche (ce qui montre que les « scalaires» sont aussi des « vecteurs » ...), on peut naturellement regarder aussi* K^n *comme un* K*-module à droite; il suffit pour cela de définir l'addition dans* K^n *comme ci-dessus, et de poser :*

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n).\lambda = (\xi_1\lambda, ..., \xi_n\lambda)$$

C'est le K*-module à droite* K^n *qui intervient naturellement dans la théorie des équations linéaires comme on le verra (mais il est clair, encore une fois, que la distinction est sans intérêt si* K *est commutatif !).*

Exemple 1.1.2 *Soient* K *un anneau,* M *un* K*-module à gauche (par exemple* K *lui-même), et* X *un ensemble quelconque, désignons par* E *l'ensemble de toutes les applications* $f : X \to M$*; on va en faire un* K*-module à gauche, pour cela on doit définir la somme* $f+g$ *de deux applications de* X *dans* M*, ce sera la fonction* $f(x)+g(x)$*, dont la valeur en chaque* $x \in X$ *s'obtient en additionnant (dans* M*) les valeurs de* f *et* g *en* x*; on doit aussi définir le produit* λf *d'unscalaire* $\lambda \in K$ *et d'une* f *de* X *dans* M *, ce sera la fonction* $\lambda f(x)$*, dont la valeur en chaque* $x \in X$ *s'obtient en multipliant par* λ *la valeur de* f *en* x*, on notera que si* $M = K$ *et si l'on prend* $X = \{1, 2, ..., n\}$*, une application* f *de* X *dans* M *n'est autre qu'une suite* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *d'éléments de* K *à savoir* $\xi_1 = f(1), \ldots, \xi_n = f(n)$*; on retrouve alors le module* K^n *de l'exemple 1.1.1.*

Exemple 1.1.3 *Montrons que tout groupe commutatif* G *peut être regardé comme un* Z*-module à gauche, pour cela, on écrit* G *additivement, ce qui permet déjà de définir la somme de deux éléments de* G *et l'axiome* (M_1) *est alors trivialement vérifié, il reste à définir le produit* nx *d'un* $n \in Z$ *et d'un* $x \in G$*, i.e, en posant*

$$nx = \begin{cases} x + ... + x(n facteurs) & si \quad n \geq 1 \\ 0 & si \quad n = 0 \\ (-n)(-x) & si \quad n \leq -1 \end{cases}$$

L'axiome (M_2) *se réduit alors aux règles de calcul établies, si le groupe* G *était écrit multiplicativement, il faudrait bien entendu définir la « somme » de deux éléments* x *et* y *de* G *comme étant* xy, *et le « produit » d'un* $x \in G$ *par un entier rationnel* n *comme étant* x^n *; il n'y a aucune différence avec ce qui précède, si ce n'est dans les notations adoptées. Enfin on peut facilement vérifier que on peut facilement vérifier que tout* Z*-module s'obtient, par le procédé ci-dessus, à partir d'un groupe additif .Cet exemple montre que la théorie des modules contient, entre autres, celle des groupes commutatifs, ce qui n'est pas le cas de la théorie des espaces vectoriels (et encore moins si possible de celle des espaces vectoriels réels).*

Exemple 1.1.4 *Prenons* $K = R$ *et formons l'ensemble* M *de toutes les applications (fonctions réelles d'une variable réelle) qui sont continues partout, on démontre en Analyse que si* f *et* g *sont deux telles fonctions, la fonction* $f + g$ *est elle aussi partout continue, donc appartient à* M *; et que si* $f \in M$, *alors* $\lambda f \in M$ *pour tout scalaire* $\lambda \in R$ *(les fonctions* $f + g$ *et* λf *sont définies comme dans l'exemple 2 ci-dessus), il est immédiat de voir que le triplet formé par l'ensemble* M, *l'application* $(f, g) \longmapsto f + g$ *de* $M \times M$ *dans* M, *et l'application* $(\lambda, f) \longmapsto \lambda f$ *de* $R \times M$ *dans* M, *est un espace vectoriel réel.*

Cet exemple (qui est à l'origine de l'introduction des espaces vectoriels en Analyse) est susceptible de nombreuses variantes; au lieu d'imposer aux fonctions f *considérées d'être partout continues, on peut exiger qu'elles soient continues en un point donné, ou dérivables en un point donné, ou qu'elles admettent partout une dérivée seconde continue, etc ...*

1.2 Sous-modules, sous-espaces vectoriels

Soit M un module à gauche sur un anneau K, on appelle sous-module de M toute partie M' de M vérifiant les deux conditions que voici:

(i): M' est un sous-groupe du groupe additif M.

(ii) : les relations $x \in M'$ et $\lambda \in K$ impliquent $\lambda x \in M'$.

Pour vérifier qu'une partie M' de Mest un sous-module, on doit vérifier que M' est non vide (pratiquement on vérifie que $0 \in M'$), et que l'on a $\lambda x + \mu y \in M'$ quels que soient $\lambda, \mu \in K$ et $x, y \in M'$, cette condition est évidemment nécessaire, inversement, supposons la vérifiée ; faisant $\mu = 0$ on obtient déjà la condition (ii)ci-dessus ; pour obtenir la condition(i), il suffit de faire $\lambda = 1$, $\mu = -1$, et de remarquer que dans un module on a, $-x = (-1)x$ pour tout $x \in M$

$$\text{(en effet : } (-1)x + x = (-1)x + (+1)x = (-1+1)x = 0x = 0).$$

Un module M possède toujours au moins deux sous-modules, à savoir M lui-même, et l'ensemble réduit au seul vecteur 0, soit M' un sous-module d'un module M ; la condition (i) ci-dessus permet déjà de regarder M' comme un groupe additif ; la condition (ii) permet en outre de définir une application $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ de $K \times M'$ dans M', et les identités qui figurent dans l'axiome (M_2) des modules, étant vérifiées dans M, le sont a fortiori dans M', par suite; on peut regarder tout sous-module M' de M comme un K-module à gauche, lorsque K est un corps, on dit sous-espace vectoriel au lieu de sous-module.

1.3 Module à droite et modules à gauche

Soit K un anneau, nous allons construire un nouvel anneau qu'on appelle l'opposé de K, et qu'on désigne par la notation K^o; comme on le montrera ensuite, les modules à droite sur K ne sont autres que le module à gauche sur K^o.

Pour construire K^o, on doit se donner un ensemble, et deux lois de composition sur cet ensemble, une «addition» et une «multiplication » par définition, l'ensemble K^osera l'ensemble K (les anneaux K et K^o ont donc les mêmes éléments), et l'addition sur K^o sera l'addition sur K (la somme $x + y$ de deux éléments de K a donc la même valeur, qu'on la calcule dans l'anneau K ou dans l'anneau K^o), par contre, la multiplication dans K^o, au lieu d'être la multiplication $(x, y) \longmapsto xy$ donnée sur K, sera l'application $(x, y) \longmapsto yx$ autrement dit, si l'on désigne par xy le produit de deux éléments dans l'anneau K , et par $x * y$ leur produit dans l'anneau K^o, on a la relation $x * y = yx$ il est facile de voir que l'ensemble $K^o(= K!)$ muni des deux opérations qu'on vient de définir, est un anneau; par exemple la formule $(x + y) * z = x * z + y * z$ se ramène évidemment à la relation $z(x + y) = zx + zy$ dans l'anneau K il va de soit que, si K est un anneau commutatif, l'anneau K^o est identique à l'anneau K, la construction de K^o n'a donc d'intérêt que dans le cas non commutatif, soit M un module à droite sur l'anneau K, définissons une application $(\lambda, x) \longmapsto \lambda * x$ de $K^o \times M$ dans M en posant $\lambda * x = x\lambda$ pour tout $x \in M$ et tout $\lambda \in K$ alors le groupe additif M, muni de l'application qu'on vient de construire, est un module à gauche sur l'anneau KG opposé à K, on a en effet:

$$\lambda * (x + y) = (x + y)\lambda = x\lambda + y\lambda = \lambda * x + \lambda * y,$$

$$(\lambda + \mu) * x = x(\lambda + \mu) = x\lambda + x\mu = \lambda * x + \mu * x,$$

$$\lambda * (\mu * x) = (\mu * x)\lambda = (x\mu)\lambda = x(\mu\lambda) = (\mu\lambda) * x = (\lambda * \mu) * x,$$

et enfin $I * x = xI = I$ ce qui établit le résultat annoncé.

1.4 Le produit tensoriel

Nous abordons maintenant les applications multilinéaires et les théorèmes principaux concernant leur structure, il existe un module universel représentant les applications multilinéaires, appelé le produit tensoriel, il tire son nom de l'usage en géométrie différentielle, où il est appliqué aux espaces tangents et cotangents d'une variété, le produit tensoriel peut être conçu comme permettant « étendre la base », autrement dit, de passer d'un module sur un anneau à un module sur une algèbre sur cet anneau, cette « extension» peut aussi impliquer une réduction modulo un idéal, car la chose essentielle est la donnée d'un homomorphisme d'anneaux $f : A \to B$ permettant de passer d'un module sur A à un module sur B, l'homomorphisme f peut être une injection ou une projection canonique, avec

$B = A/\ J$ pour un idéal J, ou un composé des deux.

1.4.1 Définition de produit tensoriel

Soit R un anneau commutatif , si $E_1, ..., E_n$, F sont des modules, nous noterons $L^n(E_1, ..., E_n; F)$, le module des applications n-linéaires $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$.

Rappelons qu'une application multilinéaire est une application qui est linéaire (R-linéaire, plus précisément) en chaque variable les mots linéaires et homomorphisme sont ici interchangeables sauf mention contraire, les modules, les homomorphismes, les applications linéaires et multilinéaires se rapportent à l'anneau R, on peut considérer les applications multilinéaires d'un ensemble fixé de modules $E_1, ..., E_n$ comme des objets d'une catégorie en effet, si les applications :

$$f : E_1 \times ... \times E_n \to F \qquad \text{et}$$

$$g : E_1 \times ... \times E_n \to G$$

sont multilinéaires, on définit un morphisme $f \to g$ comme un homomorphisme $h : F \to G$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & f \nearrow & F \\ E_1 \times ... \times E_n & & \downarrow h \\ & g \searrow & G \end{array}$$

Un objet universel de cette catégorie est appelé un produit tensoriel des $E_1, ..., E_n$ (sur R), nous allons maintenant prouver que les produits tensoriels existent et en construire un de manière naturelle par les principes généraux, on sait déjà qu'un produit tensoriel est déterminé de manière unique, à unique isomorphisme près, soit M le module libre engendré par l'ensemble de tous les n-uplets $(x_1, ..., x_n)(x_i \in E_i)$, donc engendré par l'ensemble $E_1 \times \ldots\ldots\ldots \times E_n$, soit N le sous-module engendré par tous les éléments de type

$$(x_1, ..., x_i + x_i', \ldots, x_n) - (x_1, ..., x_i, ..., x_n) - (x_1, ..., x_i', \ldots, x_n),$$

$$(x_1, \ldots, ax_i, ..., x_n) - a(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$$

pour tous $x_i \in E_i$, $x_i' \in E_i$ et $a \in R$, en composant l'injection canonique $E_1 \times ... \times E_n \to M$, de l'ensemble générateur dans le module engendré, avec la projection canonique $M \to M/N$ sur le module quotient, on obtient une application :

$$\varphi : E_1 \times \ldots.. \times E_n \to M/N$$

nous affirmons que φ est multilinéaire et est un produit tensoriel, que φ soit multilinéaire est évident, par sa construction même, soit :

$$f : E_1 \times \ldots.. \times E_n \to G$$

une application multilinéaire. Par la définition du module libre engendré par $E_1 \times \ldots.. \times E_n$ il existe une application linéaire $M \to G$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & F \\ E_1 \times ... \times E_n & & \downarrow \\ & f \searrow & G \end{array}$$

comme f est multilinéaire, l'application $M \to G$ induite s'annulle sur N, par la propriété universelle des modules quotients, f se factorise ainsi par M/N et on obtient un homomorphisme

$$f_* : M/N \to G$$

qui rend commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & \varphi \nearrow & M/N \\ E_1 \times ... \times E_n & & \downarrow f_* \\ & f \searrow & G \end{array}$$

comme l'image de φ engendre M/N, l'application induit f_* est déterminée de façon unique , la preuve est ainsi complète , le module M/N sera noté $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ ou aussi

$$\otimes_{i=1}^{n} E_i.$$

Nous avons ainsi construit un produit tensoriel spécifique dans la classe d'isomorphisme des produits tensoriels et nous l'appelerons le produit tensoriel des $E_1, \ldots, E_n$, pour $x_i \in E_i$, on pose:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n = x_1 \otimes_R \ldots \otimes_R \ x_n$$

on a , pour tout i et pour tous $x_i, x_i' \in E_i$, $a \in R$,

$$x_1 \otimes \ldots \otimes ax_i \otimes \ldots \otimes x_n = a(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \text{ et}$$

$$x_1 \otimes \ldots \otimes (x_i + x_i') \otimes \ldots \otimes x_n = (x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) + (x_1 \otimes \ldots \otimes x_i' \otimes \ldots \otimes x_n)$$

Dans le cas de deux facteurs, E et F, tout élément de $E \otimes F$ peut s'écrire comme une somme de termes $x \otimes y$, avec $x \in E$ et $y \in F$, car ces termes engendrent $E \otimes F$ et, pour $a \in R$, $a(x \otimes y) = ax \otimes y$.

Proposition 1.4.1 *Soient E et F des modules, il existe un unique isomorphisme $E \otimes F \to F \otimes E$, tel que $x \otimes y \longmapsto y \otimes x$, pour $x \in E$ et $y \in F$.*

Démonstration. L'application $E \times F \to F \otimes E$ définie par $(x, y) \longmapsto y \otimes x$ est bilinéaire et se factorise par le produit tensoriel $E \otimes F$, envoyant $x \otimes y$ sur $y \otimes x$ comme cette dernière application a un inverse (par symétrie), on obtient l'isomorphisme cherché le produit tensoriel a diverses propriétés factorielles, supposons, tout d'abord que

$$f_i : E_i' \to E_i (i = 1, \ldots , n)$$

soit une famille d'applications linéaires, on obtient une application induite sur le produit

$$\Pi f_i : \Pi E_i' \to \Pi E_i$$

si on compose Πf_i avec l'application canonique dans le produit tensoriel , on obtient une application induite , que l'on peut noter $T(f_1, \ldots, f_n)$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} E_1' \times \ldots \times E_n' & \to & E_1' \otimes \ldots \otimes E_n' \\ \Pi f_i \downarrow & & \downarrow T(f_1, \ldots, f_n) \\ E_1 \times \ldots \times E_n & \to & E_1 \otimes \ldots \otimes E_n \end{array}$$

On vérifie immédiatement que T est factorielle, à savoir que , pour des composées

$$f_i o\, g_i (i = 1, \ldots, n)$$

d'applications linéaires, on a

$$T(f_1 o\, g_1, \ldots, f_n o\, g_n) = T(f_1, \ldots, f_n)\, o\, T(g_1, \ldots, g_n)$$

ainsi que $T(Id, \ldots, Id) = Id$, on remarque $T(f_1, ..., f_n)$ est l'unique application linéaire dont l'image d'un élément

$$x_1' \otimes \ldots\ldots \otimes x_n' \in E_1' \otimes \ldots \otimes E_n'$$

est donnée par

$$x_1' \otimes \ldots. \otimes x_n' \mapsto f_1(x_1') \otimes \ldots. \otimes f_n(x_n')$$

on peut voir T comme une application

$$\Pi_{i=1}^n (E_i', E_i) \to L(\otimes_{i=1}^n E_i', \otimes_{i=1}^n E_i)$$

et le lecteur vérifiera que cette application est multilinéaire dans le cas de deux facteurs , on a $(f, g) \mapsto T(f, g)$ étant donnés des homomorphismes $f : F' \to F$ et $g_1, g_2 : E' \to E$, on a

$$T(f, g_1 + g_2) = T(f, g_1) + T(f, g_2)$$

$$T(f, ag_1) = aT(f, g_1)$$

soient, en particulier, un module fixé F et le foncteur $\tau = \tau_F$ (de la catégorie des modules dans elle-même), tel que $\tau(E) = F \otimes E$ alors τ induit l'application linéaire

$$\tau : L(E', E) \to L(\tau(E'), \tau(E))$$

pour tout couple de modules E' et E, par la formule $\tau(f) = T(Id, f)$. ■

1.4.2 Propriété de base

La relation la plus fondamentale reliant applications linéaires , application bilinéaires et produit tensoriel , est la suivante : pour trois modules E , F et G,

$$L(E, L(F, G) \approx L^2(E, F; G) \approx L(E \otimes F, G)$$

les isomorphismes en question admettent une interprétation naturelle.

(i) $L^2(E, F; G) \to L(E, L(F, G)$, si $f : E \times F \to G$ est bilinéaire et si $x \in E$ l'application $f_x : F \to G$, telle que $f_x(y) = f(x, y)$, est linéaire de plus , l'application $x \mapsto f_x$ est linéaire d'où le résultat.

(ii) $L(E, L(F, G)) \to L^2(E, F; G)$ soient $\varphi \in L(E, L(F, G))$ et $f_\varphi : E \times F \to G$ l'application bilinéaire telle que $f_\varphi(x, y) = \varphi(x)(y)$ alors $\varphi \mapsto f_\varphi$ est l'application cherchée, il est clair que les deux homomorphismes précédents sont mutuellement inverses, ce qui prouve le premier isomorphisme de la formule.

(iii) $L^2(E, F; G) \to L(E \otimes F, G)$ il s'agit de l'application $f \mapsto f_*$ qui à chaque application bilinéaire f assoie l'application linéaire induite sur le produit tensoriel , cette association est injective (car f_* est déterminée de manière unique par f) et aussi surjective, parce que toute application linéaire sur le produit tensoriel composée avec l'application canonique $E \times F \to E \otimes F$, donne lieu à une application bilinéaire sur $E \times F$.

Proposition 1.4.2 *Soit $E = \oplus_{i=1}^n E_i$ une somme directe, il existe isomorphisme*

$F \otimes E \approx \oplus_{i=1}^n (F \otimes E_i)$.

Démonstration. On obtient cet isomorphisme par des considérations générales abstraites, pour F fixé, on considère le foncteur $\tau : X \mapsto F \otimes X$ on a déjà vu que τ est linéaire notons π_i les projections de E sur E_i alors $\pi_i o \pi_i = \pi_i$, $\pi_i o \pi_j = 0$ si $i \neq j$ et $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = Id$, on applique le foncteur τ et on voit que (π_i) satisfait aux même relations ; il donne ainsi une décomposition en somme directe de $\tau(E) = F \otimes E$ noter que $(\pi_i) = Id \otimes \pi_i$. ∎

1.5 Le produit extérieur

Le produit extérieur a des applications dans toutes les branches des mathématiques, en géométrie différentielle, on considère le produit extérieur maximal de l'espace tangent pour obtenir un fibré canonique sur une variété, des produits extérieurs intermédiaires sont à l'origine des formes différentielles (sections de ces produits sur la variété) dans ce partie, nous allons exposer les fondements algébriques de ces constructions pour une étude concise de l'opération des divers groupes d'automorphismes de formes bilinéaires sur des algèbres tensorielles et extérieures, avec bon nombre d'exemples classiques.

1.5.1 Définition et propriété de base

Considérons la catégorie des modules sur un anneau commutatif R, rappelons qu'une application r-linéaire $f : E^r \to F$ est dite alternée si $f(x_1, \ldots, x_r) = 0$ dès que $x_i = x_j$, pour un couple d'indices $i \neq j$, soit a_r le sous-module du produit tensoriel $T^r(E)$, engendré par tous les éléments de type $x_1 \otimes \ldots \otimes x_r$, avec $x_i = x_j$ pour une paire $i \neq j$, on pose

$$\wedge^r(E) = T^r(E)/a_r.$$

On obtient ainsi une application r-linéaire $E^r \to \wedge^r(E)$ (dite canonique), par la composition

$$E^r \to T^r(E) \to T^r(E)/a_r = \wedge^r(E)$$

il est clair que l'application est alternée, de plus, elle est universelle pour les applications r-linéaires alternées sur E, autrement dit, si $f : E^r \to F$ est une telle application, il existe une unique application linéaire $f_* : \wedge^r(E) \to F$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \wedge^r(E) \\ E^r & & \downarrow f_* \\ & f \searrow & F \end{array}$$

l'application f_* existe car on peut d'abord trouver une application $T^r(E) \to F$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & T^r(E) \\ E^r & & \downarrow \\ & f \searrow & F \end{array}$$

cette application s'annulle sur a_r, induisant ainsi f_* l'image d'un élément $(x_1, ... , x_r) \in E^r$ par l'application canonique dans $\wedge^r(E)$ sera notée $x_1 \wedge \ldots \wedge x_r$, c'est aussi l'image de $x_1 \otimes ... \otimes x_r$ pour la projection canonique $T^r(E) \to \wedge^r(E)$ de cette façon, $\wedge^r$ devient un foncteur, de la catégorie des modules dans elle-même soit, en effet, $u : E \to F$ un homomorphisme, pour $x_1, ..., x_r \in E$, l'application :

$$(x_1, \ldots, x_r) \to u(x_1) \wedge \ldots \wedge u(x_r) \in \wedge^r(F)$$

est $r-$linéaire alternée, induisant un homomorphisme

$$\wedge^r(u) : \wedge^r(E) \to \wedge^r(F)$$

il est clair que l'association $u \longmapsto \wedge^r(u)$ est factorielle, soit $\wedge(E)$ la somme directe

$$\wedge(E) = \oplus_{r=0}^{\infty} \wedge^r (E)$$

nous allons munir $\wedge(E)$ d'une structure de R-algèbre graduée, appelée algèbre extérieure de E ou algèbre de Grassmann, nous allons d'abord examiner la situation générale, pour des anneaux gradués arbitraires, un idéal a de A est appelé idéal homogène et on peut définir une structure graduée sur A/a, en effet, l'application bilinéaire $A_r \times A_s \to A_{r+s}$ envoie $a_r \times A_s$ dans a_{r+s} et aussi, $A_r \times a_s$ dans a_{r+s} en utilisant des représentants dans A_r et A_s , on peut définir une application bilinéaire

$$A_r/a_r \times \ A_s/a_s \to A_{r+s}/a_{r+s}$$

donc aussi une application bilinéaire

$$A/a \times A/a \to A/a$$

qui munit A/a d'une structure de R-algèbre, appliquons ces résultats à $T^r(E)$ et aux modules a_r, définis plus haut si, pour $i \neq j$, $x_i = x_j$ dans un produit $x_1 \wedge \ldots \wedge x_r$ alors, pour tous $y_1, ..., y_s \in E$, on voit que :

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge ... \wedge y_s$$

est dans a_{r+s}; on a aussi un résultat analogue dans l'autre sens, la somme directe $\oplus a_r$ est ainsi un idéal de $T(E)$ et on peut définir une structure de R-algèbre sur $T(E)/a$, le produit sur les éléments homogènes est donné par la formule :

$$((x_1 \wedge \ldots \wedge x_r), (y_1 \wedge ... \wedge y_s)) \longmapsto x_1 \wedge \ldots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_s.$$

On utilise le symbole $\wedge$ pour noter aussi le produit dans $\wedge(E)$, ce produit est appelé produit extérieur (ou produit alterné) si $x, y \in E$, alors $x \wedge y = -y \wedge x$, comme on le voit en développant $(x+y) \wedge (x+y) = 0$, nous observons que est un foncteur de la catégorie des modules dans celle des R-algèbres graduées, pour chaque application linéaire $f : E \to F$ on obtient une application

$$\wedge(f) : \wedge(E) \to \wedge(F)$$

telle que, pour $x_1, ..., x_r \in E$,

$$\wedge(f)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r) = f(x_1) \wedge \ldots . \wedge f(x_r)$$

de plus, $\wedge(f)$ est un homomorphisme de R-algèbres graduées.

Exemple 1.5.1 *Soit L un module libre de rang 1 sur R, le module dual*

$$L^{\vee} = Hom_R(L, R)$$

est également libre, de même rang, pour un entier positif m, on pose

$$L^{\otimes -m} = (L^{\vee})^{\otimes m} = \underbrace{L^{\vee} \otimes ... \otimes L^{\vee}}_{mfois}$$

on définit ainsi le produit tensoriel d'une ligne avec elle-même par des entiers négatifs. Posons $L^{\otimes 0} = R$ *il est facile de vérifier que, pour* $p, q \in \mathbb{Z}$ *il existe un isomorphisme canonique*

$$L^{\otimes p} L^{\otimes q} \approx L^{\otimes (p+q)}$$

en particulier, si $q = -p$, *on obtient* R *à droite, soit maintenant* E *une suite exacte de modules libres*

$$E : 0 \to E_0 \to E_1 \to \ldots \to E_m \to 0$$

le déterminant de cette suite est défini par

$$det(E) = \otimes det(E_i)^{\otimes (-1)^i}.$$

Chapitre 2

Formes bilinéaires alternées

2.1 Formes alternées

2.1.1 Définition des formes alternées

Soit E un espace vectoriel sur un corps K sur lequel on n'impose pas de conditions supplémentaires , soit f une forme alternée sur E c'est-à-dire, une application bilinéaire

$$f : E \times E \to K$$

telle que $f(x,x) = 0$, pour tout $x \in E$, alors $x.y = -y.x$ pour tous $x, y \in E$, comme on peut le voir en substituant $(x + y)$ à x dans $x^2 = 0$.

On définit un plan hyperbolique (pour la forme alternée) comme un espace non dégénéré de dimension 2, on sait qu'il existe un élément ω non nul, tel que $\omega^2 = 0$, si P est un plan hyperbolique et si $\omega \in P$, $\omega \neq 0$, il existe un élément non nul $y$de P tel que $\omega.y \neq 0$, quitte à diviser y par une constante, on peut supposer que $\omega.y = 1$, on a ainsi $y.\omega = -1$ et la matrice de la forme par rapport à la base (ω, y) est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le couple (ω, y) est appelé base hyperbolique (pour le plan considéré), ètant donnés un espace bidimensionnel sur K, muni d'une forme bilinéaire, et un couple d'éléments (ω, y) vérifiant

$\omega^2 = y^2 = 0$, $\omega.y = 1$, $y.\omega = -1$, on voit que la forme est alternée et que (ω, y) définit un plan hyperbolique.

Étant donnée une forme alternée f sur E, on dit que E (ou f) est hyperbolique si E est somme orthogonale, plans hyperboliques, on dit que E (ou f) est totalement isotrope si $x.y = 0$ pour tous $x, y \in E$.

Théorème 2.1.1 *Soit f une forme alternée sur un espace vectoriel de dimension finie E sur K, alors E est somme orthogonale de son noyau et d'un sous-espace hyperbolique, si f est non dégénérée, alors E est un espace hyperbolique et sa dimension est un nombre pair.*

Démonstration. Un espace complémentaire du noyau étant non dégénéré, nous pouvons nous ramener au cas où Eest non dégénéré, soit ω un élément non nul de E, il existe $y \in E$ tel que $\omega.y \neq 0$ et $y \neq 0$, le couple (ω, y) est non dégénéré et définit un plan hyperbolique P, on a ainsi $E = P \oplus P^{\perp}$, avec $P^{\perp}$ non dégénéré la démonstration est complétée par récurrence. ■

Corollaire 2.1.1 *Toutes les formes alternées non dégénérées de dimension donnée sur un corps K sont isométriques.*

Démonstration. D'après le théorème 2.1.1, il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de la forme alternée est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & 0 & & & & & \\ & & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

pour la commodité de l'écriture, on réarrange les éléments de la base de la somme orthogonale de plans hyperboliques de manière à obtenirun matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r & 0 \\ -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice unité d'ordre r, la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}$$

est appelée la matrice alternée (ou antisymétrique) standard . ∎

Corollaire 2.1.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K, muni d'une forme symétrique non dégénérée, notée $\langle , \rangle$, soit Ω une forme alternée non dégénérée sur E, il existe alors une décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus E_2$ et un automorphisme symétrique de E (par rapport à $\langle , \rangle$) tels que, si $x, y \in E$ et $x = (x_1, x_2)$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, $y = (y_1, y_2)$ avec $y_1 \in E_1$ et $y_2 \in E_2$, alors*

$$\Omega(x, y) = \langle Ax_1, y_2 \rangle - \langle Ax_2, y_1 \rangle.$$

Démonstration. Considérons une base de E pour laquelle la matrice de Ω est la matrice antisymétrique standard, soit f la forme symétrique non dégénérée sur E définie par le produit scalaire par rapport à cette base, on a alors une décomposition en somme directe des sous-espaces E_1 et E_2(correspondant respectivement aux n premières et n dernières coordonnées), telle que

$$\Omega(x, y) = f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1)$$

comme $\langle , \rangle$est par hypothèse non dégénérée, on peut trouer un automorphisme A ayant les propriétés souhaitées et A est symétrique parce que f est symétrique. ∎

2.1.2 Le Pfaffien

Une matrice alternée est une matrice G telle que ${}^tG = -G$, dont les éléments diagonaux sont égaux à 0, c'est la matrice d'une forme alternée, supposons G carrée d'ordre n avec

n pair considérons, pour commencer, un corps de caractéristique 0, il existe une matrice C non singulière telle que la matrice ${}^tCGC$ soit:

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r & 0 \\ -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi $det(C)^2 det(G) = 1$ ou 0, selon que le noyau de la forme alternée est trivial ou non, dans tous les cas, on voit que $det(G)$ est un carré dans le corps de base.Plaçons-nous maintenant dans le cas des entiers $\mathbb{Z}$, soient $t_{ij}(1 \leq i < j \leq n)$, $n(n-1)/2$ éléments algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, tels que $t_{ii} = 0$ pour $i = 1, ..., n$ et $t_{ij} = -t_{ji}$ pour $i > j$, alors la matrice $T = (t_{ij})$ est alternée et $det(T)$ est ainsi un carré dans le corps $\mathbb{Q}(t)$, obtenu à partir de $\mathbb{Q}$ par adjonction de tous les éléments t_{ij}, cependant, $det(T)$ est un polynôme de $\mathbb{Z}[t]$, de l'unicité de la décomposition en facteurs dans $\mathbb{Z}[t]$, il s'ensuit que $det(T)$ est le carré d'un polynôme de $\mathbb{Z}[t]$; on peut donc écrire $det(T) = P(t)^2$, le polynôme P est unique à un facteur $\pm$ 1 près, si nous substituons des valeurs aux t_{ij} telles que la matrice T devienne :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ -I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$$

Nous voyons qu'il existe un unique polynôme P à coefficients entiers prenant la valeur 1 pour cet ensemble spécifique de valeurs de (t), on appelle P pfaffien d'ordre n et on le note Pf.

Soit R un anneau commutatif, on a un homomorphisme $\mathbb{Z}[t] \to R[t]$ induit par l'unique homomorphisme de $\mathbb{Z}$ dans R, l'image du pfaffien dans $R[t]$ est un polynôme à coefficients dans R, que nous noterons toujours Pf, si $G = (g_{ij})$ est une matrice alternée à éléments dans R, on note $Pf(G)$ la valeur de $Pf(t)$ quand on substitue ces g_{ij} aux t_{ij} , comme le déterminant commute avec les homomorphismes.

Théorème 2.1.2 *Soient R un anneau commutatif et $G = (g_{ij})$ une matrice alternée, avec $g_{ij} \in R$, on a*

$$det(G) = (Pf(G))^2$$

de plus, si C est une matrice carrée d'ordre n sur R, alors

$$Pf(CG^tC) = det(C)Pf(G).$$

Démonstration. Le premier résultat a été démontré plus haut, le second sera établi si on le démontre sur $\mathbb{Z}$, soient u_{ij} $(i, j = 1, ..., n)$ des éléments algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, tels que u_{ij} , t_{ij} soient algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, soit U la matrice (u_{ij}), on a

$$Pf(UT^tU) = \pm det(U)Pf(T)$$

comme on peut le voir en prenant les carrés des deux membres, prenons des valeurs pour U et T telles que U devienne la matrice unité et T la matrice antisymétrique standard, il en résulte qu'on a le signe + à droite comme on peut substituer une matrice quelconque à U et une matrice alternée à T, le théorème est démontré. ■

2.1.3 Le Théorème de Witt

Nous revenons aux formes symétriques et nous supposons que le corps k est de caractéristique $\neq 2$.

Soit E un espace vectoriel sur k , muni d'une forme symétrique. Rappelons que E est un plan hyperbolique si la forme est non dégénérée, si E est de dimension 2 et s'il existe un élément $\omega \neq 0$ dans E tel que $\omega^2 = 0$. Rappelons aussi que E est un espace hyperbolique s'il est somme orthogonale de plans hyperboliques. On dit aussi que la forme sur E est hyperbolique.

Soient E un plan hyperbolique et ω un élément non nul de E tel que $\omega^2 = 0$. Si $u \in E$ est tel que $E = (\omega, u)$, alors $u.\omega \neq 0$, car sinon ω serait un élément non nul du noyau. Soit $b \in k$ tel que $\omega.bu = b\omega.u = 1$. On peut trouver $a \in k$ telque

$$(a\omega + bu)^2 = 2ab\omega.u + b^2u^2 = 0$$

car cette équation est linéaire en a. En posant $v = a\omega + bu$, on a une base (ω, v) de E telle que

$$\omega^2 = v^2 = 0 \text{ et } \omega.v = 1.$$

Par rapport à cette base, la matrice de notre forme est ainsi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observons que, réciproquement, un espace E ayant une base (ω, u) satisfaisant à $\omega^2 = v^2 = 0$ et $\omega.v = 1$ est non dégénéré et est ainsi un plan hyperbolique. Rappelons qu'une telle base est appelée hyperbolique.

Une somme orthogonale d'espaces non dégénérés étant non dégénérée, un espace hyperbolique est non dégénéré. Notons qu'un espace hyperbolique est nécessairement de dimension paire.

Lemme 2.1.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur k, muni d'une forme symétrique non dégénérée g. Soient F un sous-espace, F_0 1e noyau de F et supposons donnée une décomposition orthogonale $F = F_0 \perp U$.*

Si $(\omega_1, \ldots, \omega_s)$ est une base de F_0, il existe des éléments $v_1, \ldots, v_s$ de E, orthogonaux à U, tels que chaque couple (ω_i, v_i) soit une base hyperbolique et engendre un plan hyperbolique P_i , donnant lieu à une décomposition orthogonale $U \perp P_1 \perp \ldots \perp P_s$.

Démonstration. Soit $U_1 = (\omega_2, \ldots, \omega_s) \oplus U$.

Alors U_1 est strictement contenu dans $F_0 \oplus U$ et par conséquent $(F_0 \oplus U)^\perp$ est strictement contenu dans $U_1^\perp$. Il existe donc un élément $u_1 \in U_1^\perp$ tel que $u_1 \notin (F_0 \oplus U)^\perp$.

On a $\omega_1.u_1 \neq 0$, d'où (ω_1, u_1) est un plan hyperbolique P_1. On a déjà vu qu'il existe $v_1 \in P_1$ tel que (ω_1, v_1) soit une base hyperbolique. On a, en plus, la décomposition en somme orthogonale $F_1 = (\omega_2, \ldots, \omega_s) \perp P_1 \perp U$.

Il est alors clair que $(\omega_2, \ldots, \omega_s)$ est le noyau de F_1 , d'où le résultat, par récurrence.

Théorème 2.1.3 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur k et g une forme symétrique non dégénérée sur E. Soient F et F' des sous-espaces de E et $\sigma : F \to F'$ une isométrie. Alors peut être prolongée en une isométrie de E sur lui-même.*

■

Démonstration. Nous allons d'abord donner la démonstration dans le cas où F est non dégénéré.

On peut écrire $F = F_0 \perp U$, comme dans le lemme précédent, auquel cas $\sigma F = F' = \sigma F_0 \perp \sigma U$. Par ailleurs, $\sigma F_0 = F_0'$ est le noyau de F'. D'après le lemme, on peut étendre F et F' en des sommes orthogonales

$$U \perp P_1 \perp \ldots \perp P_s \quad \text{et} \quad \sigma U \perp P_1' \perp \ldots \perp P_s',$$

correspondant au choix d'une base dans F_0 et de son image dans F_0' . On peut ainsi prolonger σ en une isométrie sur ces espaces étendus, non dégénérés, ce qui complète la première étape.

Soient donc F et F' non dégénérés ; nous allons procéder par récurrence.

On suppose tout d'abord que $F' = F$, autrement dit, que σ est une isométrie de F sur lui-même. On peut prolonger σ à E en laissant simplement tout élément de $F^{\perp}$ invariant.

Supposons ensuite $dimF = dimF' = 1$ et $F \neq F'$ Si $F = (v)$ et $F' = (v')$, on a $v^2 = v'^2$. De plus, (v, v') est de dimension 2.

Si (v, v') est non dégénéré, il existe une isométrie prolongeant σ , qui envoie v sur v' et v' sur v. On peut conclure la démonstration en invoquant l'étape précédente.

Si (v, v') est dégénéré, son noyau est de dimension 1. Soit ω une base de ce noyau. Il existe $a, b \in k$ tels que $v' = av + b\omega$. Alors $v'^2 = a^2v^2$ et ainsi $a = \pm 1$. En remplaçant v' par $-v'$ au besoin, on peut supposer que $a = 1$. En remplaçant ω par $b\omega$ on peut supposer que $v' = v + \omega$. Soit $z = v + v'$.On applique le lemme 2.1.1 à l'espace

$$(\omega, z) = (\omega) \perp (z).$$

On peut trouver un élément $y \in E$ tel que $y.z = 0$, $y^2 = 0$ *et* $\omega.y = 1$.

L'espace $(z, \omega, y) = (z) \perp (\omega, y)$ est non dégénéré, en tant que somme orthogonale de (z) et du plan hyperbolique (ω, y). Il a une isométrie telle que

$$z \longleftrightarrow z,\ \omega \longleftrightarrow -\omega,\ \ y \longleftrightarrow -y.$$

L'image de $v = \frac{1}{2}(z - \omega)$ par cette isométrie est $v' = \frac{1}{2}(z + \omega)$. Ceci complète la démonstration pour le cas envisagé.

On termine la démonstration par récurrence. Par l'existence d'une base orthogonale , tout sous-espace F de dimension > 1 admet une décomposition en somme orthogonale de sous-espaces de dimension inférieure. Si $F = F_1 \perp F_2$, avec $dimF_1$, $dimF_2 \geq 1$,alors

$$\sigma F = \sigma F_1 \perp \sigma F_2.$$

Soit $\sigma_1 = \sigma \restriction F_1$ la restriction de σ à F_1 . Par récurrence, on peut prolonger σ_1 en une isométrie $\overline{\sigma}_1 : E \to E$.

On a alors $\overline{\sigma}_1\ (F_1^{\perp}) = (\sigma_1 F_1)^{\perp}$ .Comme σF_2 est orthogonal à $\sigma F_1 = \sigma_1 F_1$, on en déduit que σF_2 est contenu dans $\overline{\sigma}_1\ (F_1^{\perp})$. Soit $\sigma_2 = \sigma \restriction F_2$. Alors l'isométrie

$$\sigma_2 : F_2 \to \sigma_2 F_2 = \sigma F_2$$

se prolonge par récurrence en une isométrie $\overline{\sigma}_2 : F_1^{\perp} \rightarrow \overline{\sigma}_1(F_1^{\perp})$.

Le couple $(\sigma_1, \overline{\sigma}_2)$ donne une isométrie de $F_1 \perp F_1^{\perp} = E$ sur lui-même. ■

2.2 Multivecteurs

2.2.1 L'action gauche

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K, la classification des p- vecteurs est l'étude de l'action gauche du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\Lambda^P E$ définie par

$$\forall f \in GL(E),\ \forall \omega \in \Lambda^P E,\ \ f.\omega = (\Lambda^P f)(\omega),\ \Lambda^P f : \Lambda^P E \rightarrow \Lambda^P E$$

définie par

$$\Lambda^P f(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p) = f(x_1) f(x_2) \ldots . f(x_p)$$

est un endomorphisme de $\Lambda^P E$.

On appelle support de ω et on note S_ω le plus petit sous-espace F de E tel que $\omega \in \Lambda^P F$; sa dimension est le rang de ω, noté $r(\omega)$, le rang est invariant par l'action du groupe linéaire $GL(E)$ et par extension des scalaires, soit maintenant $\omega \in \Lambda^P E^*$ une forme p-linéaire : R_ω le radical de ω, est l'ensemble des x de E tels que $\omega\ (x, x_2, \ldots, x_p) = 0$ quels que soient $x_2, \ldots, x_p$ dans E, si $R_\omega = \{0\}$, on dit que ω est non dégénérée ou de rang maximal.

Un p-vecteur non nul ω est décomposable s'il existe $x_1 ... x_p$ dans E tel que $\omega = x_1 ... x_p$, le support de ω est le sous-espace vectoriel engendré par

$$x_1, ..., x_p : S_\omega = Vect\{x_1, ..., x_p\}.$$

Rappelons l'action de E^*, dual de E, sur ΛE définie par :

i) $d_f(1) = 0$

ii) $d_{f\ |E} = f$

iii) $d_f(xu) = -x d_f(u) + f(x) u$ pour $x \in E$ et $u \in \Lambda E$.

d_f est une anti dérivation de degré -1, nulle sur la sous-algèbre $\Lambda\ (ker f)$, de carré nul et

$$f \longmapsto d_f$$

est une application linéaire, ainsi pour $\omega \in \Lambda^P E$ fixé,

$$f \longmapsto d_f(\omega)$$

est une application linéaire de E^* dans $\Lambda^{P-1}E$ dont le noyau est le sous-espace R_ω de E^*; son orthogonal R_ω° dans E coïncide avec le support de ω, par dualité, cette anti dérivation correspond à l'évaluation partielle $x \longmapsto \omega_x$ où

$$\omega_x(x_2, \ldots, x_p) = \omega(x, x_2, \ldots, x_p).$$

Si M est un module sur un anneau commutatif A,

$$\Lambda_0 M = \oplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k} M$$

possède un système de puissances divisées, si M est projectif de type fini de rang $2m$, on obtient une forme polynôme (de degré m) $\gamma_m : \Lambda^2 M^* \to \Lambda^{2m} M^*$ qui est le pfaffien : si $u \in \Lambda^2 M^*$, u est non dégénérée si et seulement si $\gamma_m(u)$ engendre le A-module $\Lambda^{2m} M^*$, si $u = \sum_{i=1}^{i=r} x_{2i-1}x_{2i}$ où $\{x_1, \ldots, x_{2r}, \ldots, x_n\}$ est une base de E,

$$\gamma_k(u) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots . < i_k} x_{2i_1-1}x_{2i_1} \ldots x_{2i_k-1}x_{2i_k}$$

de sorte que $rg(u) = 2k$ équivaut à $\gamma_k(u) \neq 0$ et $\gamma_{k+1}(u) = 0$, les puissances divisées permettent d'étudier les sous-espaces vectoriels de $\Lambda^2 E$, donc les algèbres de lie 2-nilpotentes.

Eléments scindables

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E; $\Lambda^P E$ s'identifie à

$$\oplus_{k=0}^{k=p} (\Lambda^k E_1 \otimes \Lambda^{P-k} E_2)$$

un élément $\omega \in \Lambda^P E$ est dit scindable s'il existe une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ telle que $\omega \in E_1 \otimes \Lambda^{P-1} E_2$ vu comme facteur direct de $\Lambda^P E$, si $dim E_1 = r$, on dit que ω est r-scindable, la scindabilité est une généralisation de la divisibilité; en effet ω est divisible si et seulement si ω est 1-scindable, propriété qui ne dépend pas du corps de base car c'est équivalent à dire que l'application $E \to \Lambda^{P+1}E$, $x \longmapsto x\ \omega$, n'est pas injective, notons aussi que ω r-scindable implique $d_r(\omega) = 0$ car $\varpi_{E_i} = 0$.

Soit ω un élément r-scindable et $\{e_1, ..., e_r\}$ une base de

$$E_1 : \omega = \sum_{i=1}^{r} e_i u_i$$

où $u_i \in \Lambda^{P-1}E_2$, les u_i sont déterminés de façon unique par la base $e_1, \ldots, e_r$ de E_1 car $u_i = d_{e_i^*}(\omega)$ où $e_i^* \in E^*$ est définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ et $e_i^*(E_2) = 0$, alors ω est déterminé par le sous-espace vectoriel F de $\Lambda^{P-1}E_2$ engendré par les u_i ; en effet, si on change de base dans E_1, et si la nouvelle base f_j est donnée par

$$e_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} f_j$$

$$\omega = \sum_{1}^{r} e_i u_i = \sum_{j=1}^{r} f_j (\sum_{j=1}^{r} a_{ij} u_i) = \sum_{j=1}^{r} f_j v_j$$

les v_j s'obtiennent donc à partir des u_i par le changement de base contragredient de celui qui fait passer de la base $\{f_j\}$ à la base $\{e_i\}$, cela se voit aussi en utilisant l'isomorphisme naturel entre $E_1 \otimes \Lambda^{P-1}E_2$ et $Hom\ (E_1^*, \Lambda^{P-1}E_2)$: si φ est l'élément de $Hom\ (E_1^*, \Lambda^{P-1}E_2)$ canoniquement associé à ω, F n'est autre que $\varphi(E_1^*)$ pour classifier les éléments r-scindables de rang maximal dans $\Lambda^P E$, il suffit donc d'étudier l'action de $GL(E_2)$ sur la grassmannienne $Gr_r(\Lambda^{P-1}E_2)$ des sous-espaces vectoriels de dimension r de $\Lambda^{P-1}E_2$, c'est ce qui est fait pour $p = 3$ et pour certaines valeurs du couple $(r = dimE_1, n - r = dimE_2)$ le cas où $n - r$ est pair est plus simple car on peut y utiliser les puissances divisées sous la forme de pfaffiens.Remarquons qu'un même p-vecteur peut être scindable pour plusieurs valeurs de l'entier r.

2.2.2 Commutant

Un invariant a été introduit par B. Kahn , le commutant de ω: si $\omega \in \Lambda^P E^*$, on note $C(\omega)$ l'ensemble des endomorphismes

$$f : E \to E$$

tels que l'application

$$\omega_f : (x_1, ..., x_p) \to \omega(x_1, \ldots, x_{i-1}, fx_i, x_{i+1}, \ldots, x_p)$$

ne dépende pas de i, on la note $\omega_f(x_1, ..., x_p)$ et c'est clairement une forme p-linéaire alternée.

2.3 Algèbre extérieure et groupes d'automorphismes

2.3.1 Généralités

Algèbre extérieure d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K, dans l'algèbre tensorielle $T^P(E)$, désignons par $D(E^2)$ l'idéal engendré par les carrés des éléments de E, et définissons l'algèbre extérieure de E comme l'algèbre - quotient graduée,

$$\Lambda^P(E) = T^P(E)/D(E^2).$$

si $a, b \in \Lambda^P(E)$, on note l'opération du produit extérieur par $a \wedge b$.

Dualité dans l'algèbre extérieure

On exprime le dual de $\Lambda^P(E)$ au moyen de E^*, en effet: étant donné p formes linéaires f_1 , $f_2, ..., f_p \in E^*$ et p éléments $x_1, x_2, ..., x_p \in E$, formons d'abord la matrice A du type $(p\ , p)$ qui a pour termes

$$A_{i,j} = f_i(x_j)$$

on sait que tout déterminant est une fonction multilinéaire alternée de ces lignes et de ces colonnes, par suite, étant donnée une liste f de formes linéaires, $|A|$ est une fonction p-linéaire alternée de $x_1, x_2, ..., x_p$, puisque

$$(x_1, x_2, ..., x_p) \longmapsto x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p$$

est une application universelle de ce type, il existe une application linéaire

$$t(f_1, f_2, ..., f_p) : \Lambda^P(E) \to K$$

telle que :

$$[t(f_1, f_2, ..., f_p)](x_1, x_2, ..., x_p) = |A|; \quad A_{i,j} = f_i(x_j)$$

chaque $t(f_1, f_2, ..., f_p)$ est donc un élément de $[\Lambda^P(E)]^*$, puisque le déterminant $|A|$ est une fonction multilinéaire alternée de ses lignes, l'application

$$(f_1, f_2, ..., f_p) \longmapsto t(f_1, f_2, ..., f_p)$$

est alternée et multilinéaire, comme

$$(f_1, f_2, ..., f_p) \longmapsto f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_p \in \Lambda^P(E^*)$$

est universelle , il existe une application linéaire

$$\psi : \Lambda^P(E^*) \to [\Lambda^P(E)]^*$$

telle que:

$$\psi(f_1 \wedge \quad f_2 \ \wedge ... \wedge \ f_p) = (f_1, f_2, ..., f_p)$$

c-à-d

$$\psi(f_1 \wedge \quad f_2 \ \wedge ... \wedge \ f_p)(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_p) = |A| \, (1)$$

A ayant pour termes $A_{i,j} = f_i(x_j)$ pour $i, j \in p$.

Théorème 2.3.1 *Si E un espace vectoriel de dimension finie n , sur un corps commutatif K alors pour tout entier naturel p l'application linéaire ψ de (1) est un isomorphisme,*

$$\psi : \Lambda^P(E^*) \cong [\Lambda^P(E)]^*(2).$$

Démonstration. Prenons une base $x_1, x_2, ..., x_p$ de E et la base duale $f_1, f_2, ..., f_p$ de E^*; on a donc $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour $i, j \in n$, $\Lambda^P(E^*)$ à alors pour base l'ensemble des $f_n = f_{n_1} \wedge \ldots \wedge f_{n_p}$, pour toutes les listes strictement croissantes $h : p \longmapsto n$, tandis que $\Lambda^P(E)$ à pour base l'ensemble des $x_k = x_{k_1} \wedge ...\wedge x_{k_p}$ pour toutes les listes strictement croissantes $h : n \to p$ $\quad [\psi f_n](x_k) = |A|$ $\quad A$ étant la matrice (p,p) qui a pour termes $A_{i,j} = f_{k_i}(x_{k_j})$, étant donné un indice - ligne i de cette matrice , $f_{n_i}(x_{k_j})$, est nul sauf si i1 y a donc une ligne de A qui s'annule à moins que chaque h_i ne soit pas égal à un k_j , cela ne peut se produire que si les deux listes croissantes sont égales : $k = h$ dans ce cas , A est la matrice unité du type (p,p), qui a pour déterminant 1, par suite $[\psi f_n](x_k)$ est égal à zéro ou un, suivant que $h \neq k$ ou $h = k$ cela établit que les éléments ψf_n forment une base de $[\Lambda^P(E)]^*$ duale de la base x_k de $\Lambda^P(E)$ autrement dit , ψ transforme une base $\Lambda^P(E^*)$ en une base de $[\Lambda^P(E)]^*$; c'est donc bien un isomorphisme. ■

Proposition 2.3.1 *Pour tout espace vectoriel E sur A, toute forme linéaire $t : \Lambda^P(E) \to K$ détermine une forme p- linéaire alternée $h : E^P \to K$ par l'intermédiaire de*

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_p) = t(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

l'application $t \to h$ est un isomorphisme

$$[\Lambda^P(E)]^* \cong ALT_P(E).$$

Puissance divisée

Théorème 2.3.2 *Un système de puissances divisées existe dans l'idéal $\oplus_{k\geq 1}\Lambda^{2k}E$ l'algébre extérieure E.*

Ce résultat est bien connu dans le cas des corps , il admet une généralisation au cas d'un anneau quelconque et d'un module non nécessairement libre sous la forme suivante: soit M un A-module, ΛM son algèbre extérieure ; de puissances divisées existent dans l'idéal (la sous - algèbre commutative des éléments de l'algèbre paire de l'algèbre extérieur de E)

$$\oplus_{k\geq 1}\Lambda^{2k}E$$

si M est projectif de type fini de rang $2m$, on obtient une forme polynôme (de degré m)

$$Y_m : \Lambda^2 M^* \to \Lambda^2 M^*$$

qui est le pfaffien, si $u \in \Lambda^2 M^*$, u est non dégénérée si et seulement si $Y_m(u)$ engendre, le A-module $\Lambda^{2m} M^*$, si

$$u = \sum_{i=1}^{r} x_{2i-1} x_{2i}$$

où $\{x_1, ..., x_{2r}, \ldots, x_n\}$ est une base de E

$$\sum_{1\leq i_1<...<i_k} x_{2i_1-1}x_{2i_1}...x_{2i_k-1}x_{2i_k}$$

de sorte que $rg(u) = 2k$, équivaut à

$$y_k(u) \neq 0, \quad y_{k+1}(u) = 0.$$

Remarque 2.3.1 *Si A est une Q- algèbre commutative, les puissances divisées sont définies par :*

$$\gamma_k(u) = \frac{u^k}{k!}$$

Remarque 2.3.2 *Du fait de l'isomorphisme*

$$\Lambda^P E^* \approx \Lambda^P(E)^*$$

on emploiera le langage des formes alternées ou des p- vecteurs l'étude est consacrée au cas $p = 3$ et $n = 8$, sur un corps algébriquement clos, c'est-à-dire l'action de $GL_8(K)$ sur $\Lambda^3 E$.

Vecteur décomposable

Un p-vecteur non nul ω est décomposable s'il existe $x_1, x_2, ..., x_p$ dans E tel que

$$\omega = x_1 \wedge x_2 \wedge \; ... \wedge \; x_p$$

le support de ω est le sous-espace vectoriel engendré par x_1 , $x_2, ..., x_p$, donc

$$S_\omega =< x_1 \; , x_2, ..., x_p >$$

dans ce cas $d_0(\omega) = dimS_\omega = p$. Un trivecteur est somme de trivecteurs décomposables.

Lemme 2.3.1 *Etant donnée qu'il existe un isomorphisme entre $\Lambda^3 K^4$ et $\Lambda^1 K^4$, il y a pas de trivecteurs de rang 4.*

Preuve. Mettons, d'abord en évidence l'isomorphisme entre $\Lambda^3 K^4$ et $\Lambda^1 K^4$, soient une base de $\Lambda^1 K^4$ donnée par $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, et une autre de $\Lambda^3 K^4$ donnée par

$$\{\omega_1 = e_1e_2e_3, \omega_2 = e_2e_3e_4, \omega_3 = e_1e_3e_4, \omega_4 = e_1e_2e_4\}$$

et considérons f définie par : $f : \Lambda^1 K^4 \to \Lambda^3 K^4$

$$x = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i \longmapsto f(x) = f(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \ \omega_i$$

f tel qu'elle est définie,est linéaire bijective et donc c'est un isomorphisme , montrons qu'il n'y a pas de trivecteurs de rang 4, du fait de l'isomorphisme f tout

élément de $\Lambda^3 K^4$ s'écrit sous la forme $\omega = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \ \omega_i$, soit ω non nul, et étudions son rang :

- si $\omega = \alpha_i \ \omega_i$, $\alpha_i \neq 0$, $i \in 1, 4$, donc $rg(\omega) = rg(\omega_i) = 3$.
- si $\omega = \alpha_i \ \omega_i + \alpha_j \omega_j$, $i \neq j$, $i, j \in 1, 4$, comme $dim(S_{\omega_i} \cap S_{\omega_i}) = 2 \quad \forall \ i \neq j$, i , $j \in 1, 4$.

Donc l'écriture de ω se ramène à un trivecteur décomposable donc $rg(\omega) = 3$, si

$$\omega = \alpha_i \ \omega_i + \alpha_j \omega_j + \alpha_k \omega_k$$

avec $\alpha_i \neq 0$, $\alpha_j \neq 0$, $\alpha_k \neq 0$, $i \neq j \neq k$, $i, j, k \in 1, 4$,on envisage quatre cas possibles dans l'étude du rang de chaque trivecteur est identique , traitons par exemple ,le cas où

$$\omega = \alpha_1 e_1 e_2 e_3 + \alpha_2 e_2 e_3 e_4 + \alpha_3 e_1 e_3 e_4$$

avec $\alpha_i \neq 0$, $i \in 1, 3$, on peut écrire ,

$$\omega = e_3(\alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_4 e_2 + \alpha_3 e_4 e_1)$$

soit $u = \alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_4 e_2 + \alpha_3 e_4 e_1$, comme

$$\gamma_2(u) = \frac{U^k}{2!} = 0 \Rightarrow rgu = 2$$

$e_3 \notin S_u$ d'où $rg(\omega) = 3$.

-Si $\omega = \alpha_1 e_1 e_2 e_3 + \alpha_2 e_2 e_3 e_4 + \alpha_3 e_1 e_3 e_4 + \alpha_4 e_1 e_2 e_4$, avec $\alpha_i \neq 0$, $i \in 1, 4$,

$\omega = e_2 e_3(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4) - e_1 e_4(\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4)$

$\omega = \alpha_4^{-1}(\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2) e_3(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4) - \alpha_1^{-1}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4) e_4(\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2)$

$\omega = (\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2)(\alpha_4^{-1} e_3 + \alpha_1^{-1} e_4)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4)$.

On en déduit que $rg(\omega) = 3$ car les vecteurs qui le composent, sont linéairement indépendant, alors dans tout les cas $rg(\omega) = 3$, ainsi il n'y a pas de trivecteurs de rang 4. ■

Groupe d'automorphismes

Le groupe des automorphismes de ω , $Aut(\omega)$ est le stabilisateur de ω dans l'action de $GL(E)$ c'est à dire le sous-groupe de $GL(E)$ des automorphismes de E, qui laissent invariant:

$$Aut(\omega) = \{f/f \in GL(E) \text{ et } \wedge^p f(\omega) = \omega\} = \{f/f \in GL(E) \text{ et } f.\omega = \omega\}.$$

l'orbite de ω par $GL(E)$ est alors en bijection avec l'ensemble des classes à gauche

$$GL(E)/Aut(\omega)$$

Invariant numérique $\mathbf{d}_1(\omega)$

On associe à un 3-vecteur (trivecteur) d'autre invariant numérique que son rang, soit $G_1(E)$ l'espace projectif $IP(E)$ et considérons la projection :

$$P_\alpha : \Lambda^3 E \to \Lambda^3(E/\alpha)$$

pour $\alpha \in G_1(E)$, on appelle $\varpi(\alpha)$ l'image de ω par P_α et on pose:

$$d_1(\omega) = inf_a(rang(\varpi(\alpha)), \;\; \alpha \in G_1(E)$$

on a

$$d_0(\omega) = rg(\omega) > d_1(\omega), d_1(\omega)$$

est invariant par l'action de $GL(E)$, mais il ne l'est pas par extension des scalaires.

Lemme 2.3.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension paire et ω un trivecteur de rang maximal, alors : $d_1(\omega) \neq 0$, en particulier si $dimE = 8, d_1(\omega) \neq 0$.*

Preuve. On a $d_1(\omega) = inf_a(rg\varpi(\alpha))$, où parcourt l'espace projectif $IP(E)$ des droites de E si $d_1(\omega) = 0$, il existe $\alpha = Kx, x \neq 0$ tel que $\varpi(\alpha) = 0$, soit E' un supplémentaire de Kx dans E : de $E = E' \oplus Kx$. Résulte

$$\Lambda^3 E \approx \Lambda^3 E' \oplus (Kx \otimes \Lambda^2 E')$$

alors $\omega = ux+ \omega'$ et $\varpi(\alpha) = 0$ signifie que ω' est nul ; de plus $S_\omega = S_u \oplus Kx = E$ comme ω est de rang maximal, $S_u = E'$ et E'est de dimension paire ce qui contredit l'hypothèse sur la dimension de E. ■

Vecteur divisible

Soit ω un trivecteur non nul, ω est un trivecteur divisible s'il existe, un $x \in E/\{0_E\}$ et $u \in \Lambda^2 E_2$ tel que

$$E = Kx \oplus E_2 \qquad \text{et}$$

$$\omega = x\Lambda u$$

Proposition 2.3.2 *ω est un vecteur divisible si et seulement si $d_1(\omega) = 0$.*

Preuve. Si $\omega = x\Lambda u \Longrightarrow d_1(\varpi(Kx) = 0$, si

$$d_1(\omega) = 0 \Longrightarrow \exists \alpha \in G_1/rg(\varpi(\alpha)) = 0$$

d'ou $\varpi(\alpha) = 0$ donc si on prend $\alpha = kx$ on obtient : $\omega = y\Lambda u$ ce qu'il fallait montrer. ■

Remarque 2.3.3 *Comme $d_1(\omega) \neq 0$ si ω est de rang maximal, alors on en déduit qu'il n'y a pas de trivecteur de rang 8 divisible.*

2.3.2 Parties stables

Lemme 2.3.3 *Soit E un espace vectoriel sur le corps K et considérons la ferme bilinéaire alternée par*

$$f^x(y, z) = f(x, y, z), \ (y, z \in E)$$

et f une forme trilinéaire alternée ; alors l'ensemble

$$\overline{R}_i = \{x \in E/rg\, f^x \ = 2i\} \ \ (0 \leq 2i \leq n)$$

est stable par $Aut(\omega)$.

Lemme 2.3.4 *L'ensemble $R_i(\omega) = \{x \in E/\varpi(x)$ est de type ω_i $\}$ une une partie stable pour $Aut(\omega)$.*

Preuve. Prenons $E =< x > \oplus E'$, alors ω s'écrit : $\omega = xu+ \omega'$ avec

$\omega' \in \Lambda^3 E'$, $(dim E' = n-1)$ et $\varpi(x) = \omega'(x)$, comme $x \notin E'$ alors ϖ' est de même type que ϖ' (x) d'où ϖ $(f(x))$ $= \overline{\Lambda^3 f(\varpi')f(x)}$ comme f est une application linéaire bijective , elle transforme le trivecteur ω' à un trivecteur de même type , c'est àdire $f(\omega')$ est dans l'orbite de ω' , par suite $\varpi\ (f(x))$ est de type ω_i d'où $f(x) \in R_i(\omega)$ et $f(R_i(\omega)) \subset R_i(\omega)$, en particulier $R_{6,1}$, et $R_{6,2}$ sont des parties stables. ■

Lemme 2.3.5 *Soit E un espace vectoriel sur le corps K de dimension finie V_1, V_2 deux sous espaces de E différents et tel que $dimV_1 = dimV_2$ si f est un endomorphisme de E qui laissent stable la réunion de V_1 et V_2 c-à-d $(f(V_1 \cup V_2) \subset V_1 \cup V_2)$ alors on a $(f(V_1) \subset V_1)$ et $(f(V_2) \subset V_2)$ ou $(f(V_1) \subset V_2)$ et $(f(V_2) \subset V_1)$.*

Preuve. Comme on a $f(V_1) \cup f(V_2) \subset V_1 \cup V_2$ on tire:

$$\begin{cases} (f(V_1) \subset (V_1 \cup V_2) \\ (f(V_2) \subset (V_1 \cup V_2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (f(V_1) \cap (V_1 \cup V_2) = f(V_1) \\ (f(V_2) \cap (V_1 \cup V_2) = f(V_2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (f(V_1) \cap V_1) \cup (f(V_1) \cap V_2) = f(V_1)\mathrm{I} \\ (f(V_2) \cap V_1) \cup (f(V_1) \cap V_2) = f(V_2)\mathrm{II} \end{cases}$$

Or la réunion de deux sous espaces vectoriels est un sous espaces vectoriel si et seulement si l'un est inclus dans l'autre ainsi

$(f(V_1) \cap V_1) \subset (f(V_1) \cap V_2)$ ou $(f(V_1) \cap V_2) \subset (f(V_1) \cap V_1)$

et

$(f(V_2) \cap V_1) \subset (f(V_2) \cap V_2)$ ou $(f(V_2) \cap V_2) \subset (f(V_2) \cap V_1)$

on remplace dans I et Il on obtient:

$f(V_1) \cap V_1 = f(V_1)$ ou $f(V_1) \cap V_2 = f(V_1)$

$f(V_2) \cap V_1 = f(V_2)$ ou $f(V_2) \cap V_2 = f(V_2)$

ce qui implique que:

$(f(V_1) \subset V_2$ ou $f(V_1) \subset V_2)$ et $(f(V_2) \subset V_1$ ou $f(V_2) \subset V_2)$

on a quatre cas qui figurent

$(f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2)$ ou $(f(V_1) \subset V_2$ et $f(V_2) \subset V_1)$

$(f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_1)$ ou $(f(V_1) \subset V_2$ et $f(V_2) \subset V_2)$

les deux derniers cas sont impossibles car par exemple :

si $(f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_1)$

comme $dim\ f(V_1) = dimV_1$ et $dimf(V_2) = dimV_2$

d'où $f(V_1) = V_1$ et $f(V_2) = V_1 \Longrightarrow V_1 = V_2$

(f injective) ce qui est absurde car $V_1 \neq V_2$. ■

Lemme 2.3.6 *Soit $\lambda \in K^*$, $u \in K$ et $dim_k E = 7$*

$h_{\lambda,u} = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda e_4e_5e_6 + ue_2e_3e_6$

$h_\lambda = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + \lambda e_4e_5e_6$

alors $h_{\lambda,u}$ et h_λ sont des trivecteur rang 6 du type 6.1

Preuve. Soit $f \in GL(E)$ définie par :

$f(e_1) = e_i - ue_6$, $f(e_2) = e_2 - \lambda^{-1}e_6$, $f(e_4) = e_4 - \lambda^{-1}e^3$, $\quad f(e_i) = e_i, \quad \forall i = 3, 5, 6, 7$

$f.h_{\lambda,u} = (e_1 - ue_6)(e_2 - \lambda^{-1}e_6)e_3 + (e_1 - ue_6)(e_4 - \lambda^{-1}e_3)e_6 + e_3e_5e_6 +$

$\lambda(e_4 - \lambda^{-1}e_3)e_5e_6 + u(e_2 - \lambda^{-1}e_6)e_3e_6.$

$f.h_{\lambda,u} = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + \lambda e_4e_5e_6 = h_\lambda$

donc $h_{\lambda,u}$ et équivalent à h_λ .

Montrons que h_λ est du type $6,1$, soit $g \in GL(E)$ définie par:

$g(e_5)$=e$_5 + \lambda^{-1}e_1$,$g(e_i) = e_i \quad \forall i \neq 5.$

$gh_\lambda = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + \lambda e_4(e_5 + \lambda^{-1}e_1)e_6$

$gh_\lambda = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + \lambda e_4e_5e_6 + e_4e_5e_6 + e_4e_1e_6.$

$gh_\lambda = e_1e_2e_3 + \lambda e_4e_5e_6.$

c'est un trivecteur du type $6, 1$. ■

Lemme 2.3.7 *Soit E un K-e-v de dimension 7 et un trivecteur donné par*

$$\omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + ue_1e_2e_3 + \lambda e_4e_5e_6$$

avec $u, \lambda \in K$,si $u = 0$ ou $\lambda^2 u = -4\omega$ est du type $6, 2$ et il est ω du $6, 1$ dans les autres cas.

Preuve. Si $u = 0$, $\omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda e_4e_5e_6.$

considérons $f \in GL(E)$ définie par : $f(e_3) = e_3 - \lambda e_4, f(e_i) = e_i, \forall i \neq 3.$

$\Lambda^3 f(\omega) = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + (e_3 - \lambda e_4)e_5e_6 + \lambda e_4e_5e_6$.

$\Lambda^3 f(\omega) = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6$

du type $6, 2$, supposons que $u \neq 0_K$.

comme K est un corps algébriquement clos alors l'équation $x^2 = u \quad$ (I)

admet des solutions dans K, soit a une solution de (I) et considérons

$f \in GL(E)$ définie par :

$f(e_4) = ae_4, \quad f(e_i) = a^{-1}e_i, \quad i = 1, 2, \quad f(e_j) = ae_j, \quad j = 3, 5, 6, 7,$ d'ou

$\Lambda^3 f(\omega) = a^{-1}e_1(ae_4)e_5 + a^{-1}e_2ae_4e_6 + e_3e_5e_6 + ua^{-2}e_1e_2e_3 + \lambda ae_4e_5e_6.$

$\Lambda^3 f(\omega) = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + e_1e_2e_3 + \lambda ae_4e_5e_6.$

Si on pose $\lambda' = \lambda a$, on remarque que l'étude du type trivecteur ω $(u \neq 0)$ revient à l'étude du trivecteur ω lorsque $u = 1$

$\omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda' e_4e_5e_6$, $\lambda' \in K$, soit $g \in GL(E)$,

définie par:

$g(e_1) = e_1 + \alpha e_6, \quad g(e_2) = e_2 + ye_5, \quad g(e_3) = e_3 + \xi e_4$

$g(e_6) = e_6 + \beta e_1, \quad g(e_5) = e_5 + \delta e_2, \quad g(e_4) = e_4 + \eta e_3$

avec $\alpha, \xi, \beta, \delta, \eta, y \in K, \quad \alpha\beta \neq 1, \quad y\delta \neq 1, \quad \xi\eta \neq 1$

alors:

$$\Lambda^3 f(\omega) = \begin{cases} (1 - y\beta + \beta\xi + \beta\lambda')e_1e_4e_5 + (\beta - \delta - \beta\delta\xi + \xi - \beta\lambda'\delta)e_1e_2e_4 + \\ (\eta - \beta y\eta + \beta - y + \beta\lambda'\eta)e_1e_3e_5 + (-\delta\eta + \beta\eta - \beta\delta + 1 - \beta\delta\lambda'\eta)e_1e_2e_3 \\ +(\alpha - y + \xi - \xi y\alpha + \lambda')e_4e_5e_6 + (-\alpha\delta + 1 - \xi\delta - \alpha\xi - \lambda'\delta)e_2e_4e_6 + \\ (1 + \alpha\eta - y\eta - \alpha y + \lambda'\eta)e_3e_5e_6 + (\eta - \delta - \alpha\eta\delta + \alpha - \lambda'\eta\delta)e_2e_3e_6 \end{cases}$$

Supposons que la caractéristique de K est impaire et posons

$y = \delta = \alpha = 0$ et $\beta = y = -\xi = \frac{1}{2}\lambda$ alors:

$\Lambda^3 g(\omega) = (1 + \frac{1}{4}\lambda'^2)e_1e_4e_5 + e_1e_2e_3 + e_2e_4e_6 + e_1e_5e_6.$

si $\lambda'^2 + 4 = 0$ dans ce cas $\Lambda^3 g(\omega)$ est du type $6, 2$ car ω est du type$6, 2$

si $\lambda'^2 u = -4$ si $\lambda' = 0, \omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + e_1e_2e_3.$

On applique la transformation g avec $\beta = \delta = y = 1$ et $\alpha = y = \xi = -1.$

On obtient $\Lambda^3 g(\omega) = 2(e_1e_3e_5 + e_2e_4e_6)$ ainsi ω est équivalent à $6, 1$

Supposons maintenant que la caractéristique de Kest paire et soit $\psi \in K^*$

tel que : $\alpha = \delta = y = 0$ et $\beta \ = y = \xi = \psi.$

d'ou $\Lambda^3 g(\omega) = e_1e_2e_3 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda' e_4e_5e_6.$

Si $\lambda' = 0_K$, ω est équivalent à $6, 2$ et si $\lambda' \neq 0_K$, ω est équivalent à $6, 2$ d'après le lemme 2.3.4. ∎

Chapitre 3

Classification des bivecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K, muni d'une forme bilinéaire alternée φ.

3.1 Classification

Définition 3.1.1 *On dit que E est un plan hyperbolique si $dimE = 2$ et φ est non dégénérée.*

Définition 3.1.2 *Si E est somme orthogonale de plans hyperboliques, on dit que E est un espace hyperbolique.*

Théorème 3.1.1 *Soit E un K-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire alternée φ. Alors E est somme orthogonale du radical de φ et d'un sous-espace hyperbolique. Si φ est non dégénérée, E est hyperbolique et de dimension paire.*

Preuve. Soit $\{e_1, \dots, e_p, \dots, e_n\}$ une base de E telle que $\{e_1, \dots, e_p\}$ est une base du radical de φ , posons $E_1 = Vect\{e_{p+1}, ..., e_n\}$, alors $E = R_\varphi \oplus^\perp E_1$ (il s'agit d'une somme orthogonale car $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour $i \leq p$ et $j \geq p+1$) et $\varphi_{|E_1}$ est non dégénérée. Pour $x \in E_1 - \{0\}$ il existe $y \in E_1 - \{0\}$ tel que $\varphi(x, y) \neq 0$, donc on peut choisir un élément y de $E_1 - \{0\}$ de sorte que $\varphi(x, y) = 1$, ce qui montre que $P = Vect\{x, y\}$ est un plan hyperbolique ; par suite $E_1 = P \oplus^\perp P^\perp$, Comme $\varphi_{|P^\perp}$ est non dégénérée, la démonstration se conclut par récurrence sur la dimension de E. Si φ est non dégénérée, $E = E_1$ est un espace hyperbolique, donc de dimension paire. ■

Corollaire 3.1.1 *Soit ω un bivecteur de rang maximal de $\Lambda^2 E$: il existe une base $\{e_1, ..., e_n\}$ de E sorte que*

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} e_{2i-1}e_{2i} \quad et \quad 2k \leq n \leq 2k+1 \ .$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème précédent en considérant ω comme une forme bilinéaire alternée sur E^* : $E^* = R_\omega \oplus E_1$.

Alors E_1 est somme orthogonale de k plans hyperboliques P_i : pour chacun d'eux, il existe une base $\{x_{2i-1}, x_{2i}\}$ telle que $\omega(x_{2i-1}, x_{2i}) = 1$. On complète alors $\{x_1, ..., x_{2k}\}$ en une base $\{x_1, ..., x_n\}$ de E^*en prenant les $x_i, i > 2k$, dans R_ω. La base $\{e_1, ..., e_n\}$ cherchée est la base duale de la base $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

D'après ce qui précède, on conclut que si $dimE = n$, $\Lambda^2 E$ admet $[\frac{n}{2}] + 1$ orbites par l'action du groupe linéaire $GL(E)$. Dans une base (e_i), $1 \leq i \leq n$,de E un représentant de chaque orbite est donné par $\sum_{i=1}^{m} e_{2i-1}e_{2i}$ où $0 \leq m \leq [\frac{n}{2}]$.

Tout élément ω de $\Lambda^2 E$ est scindable : en effet ω s'écrit $\sum_{i=1}^{m} e_{2i-1}e_{2i}$ dans une base convenable (e_i) et il suffit de prendre

$$E_1 = Vect\{e_1, e_3, \ldots, e_{2n-1}\} \text{ et } E_2 = Vect\{e_2, \ldots, e_{2m}\}, \omega \in E_1 \otimes E_2.$$

Notons enfin que pour tout bivecteur ω , les invariants d_k (ω)sont donnés par

$$d_k(\omega) = sup(0, r(\omega) - 2k).$$

■

3.2 Groupe symplectique

Dans ce qui suit on suppose que $dimE = 2m$ et φ non dégénérée. Dans le paragraphe précédent on a montré l'existence d'une base (e_i),$1 \leq i \leq 2m$, dans laquelle φ s'écrit $\sum_{i=1}^{m} e^*_{2i-1}e^*_{2i}$: cette base est dite "base symplectique".

Le groupe symplectique $Sp(\varphi)$ est le sous-groupe de $GL(E)$ automorphismes de E qui laisse φ invariante :

$$\forall f \in Sp(\varphi), \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y).$$

Il est clair que f transforme toute base symplectique en une autre :

$$\varphi(f(e_{2i-1}),\, f(e_{2i})) = \varphi(e_{2i-1}, e_{2i}) = 1 \text{ et } \varphi(f(e_k), f(e_l)) = 0$$

si $\{k, l\}$ n'est pas de la forme $\{2i-1, 2i\}$.

Si $\{u_1, \ldots, u_{2m}\}$ est une base symplectique de E, on définit un élément f de $Sp(\varphi)$ par $f(e_i) = u_i$, $1 \leq i \leq 2m$. Donc $Sp(\varphi)$ est en bijection avec l'ensemble des bases symplectiques de E. On note $Sp_{2m}(K)$, le groupe $Sp(\varphi)$ où φ est la forme bilinéaire alternée canonique sur K^{2m}.

Proposition 3.2.1 *Soit* $K = Fq$, *on a* $| Sp_{2m}(K) |= q^{m^2}\Pi_{k=1}^{m}(q^{2k}-1)$.

Preuve. Une base symplectique de E s'obtient en ajoutant à la paire $\{x, y\}$ une base symplectique de $P_1^{\perp}$.Comme le nombre de bases symplectiques de $P_1^{\perp}$ est $| Sp_{2m-2}(K) |$, on a $| Sp_{2m}(K) |= h_{2m} \mid Sp_{2m-2}(K) \mid$ où h_{2m} est le cardinal de l'ensemble des paires hyperboliques de

$$E : H = \{(x, y) \in E^2/\varphi(x, y) = 1\}.$$

Comme $h_{2m} = (q^{2m}-1)q^{2m-1}$, le résultat s'obtient par récurrence sur m. ∎

Remarque 3.2.1 *De ce qui précède et de l'isomorphisme entre* $\Lambda^{n-p}E^*$ *et* $\Lambda^p E$ *on déduit la classification des p-vecteurs dans* $\Lambda^p K^{p+2}$. *Ainsi il existe* $[\frac{p}{2}] + 2$ *orbites dans* $\Lambda^p K^{p+2}$*: par exemple, dans* $\Lambda^4 K^6$, *il y a* 4 *orbites dont des représentants respectifs sont donnés, dans une base* (e_i), *par* 0, $e_1e_2e_3e_4$, $e_1e_2(e_3e_4 + e_5e_6)$ *et* $e_1e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_3e_4e_5e_6$.

3.3 Propriétés des formes bilinéaires alternées

Dans ce paragraphe on va démontrer trois lemmes qui nous seront utiles dans la suite.

Lemme 3.3.1 *Soit* $u \in \Lambda^2 E^*$ *une forme bilinéaire alternée sur un espace vectoriel de dimension finie. Soit* W *un sous-espace de codimension* k *de* E, W° *son orthogonal dans* E^* *et* ω *un k-vecteur non nul de* $\Lambda^k W^{\circ} \subset \Lambda E^*$: W *est totalement isotrope pour* u *si et seulement si* $u\omega = 0$.

Soient $\{f_1,\ldots,f_k\}$ une base de W° telle que $\omega = f_1f_2...f_k$, complétée en une base $\{f_1,\ldots,f_n\}$ de E^* et $\{e_1,...,e_n\}$ la base duale de E : $\{e_{k+1},...,e_n\}$ est une base de W. Ecrivons $u = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}\, f_i\, f_j$: $u\omega = 0$ équivaut à $a_{ij} = 0$ pour $k < i < j$. Comme $a_{ij} = u(e_i, e_j)$, W est totalement isotrope pour u.

Remarque 3.3.1 *Si u et ω sont des bivecteurs tels que $S_\omega \subset S_u$ et $(rg(u), rg(\omega)) = (4,2)$ et $u\omega = 0$: $\omega = xy$ et $u = ax + by$, où $a, b,\ x, y \in E^*$. Si par contre $u\omega \neq 0$, $\gamma_2(u - \lambda\omega)$ est un polynôme du premier degré en λ et il existe λ non nul tel que $u = \lambda\omega + v$ avec $rg(v) = 2 : u = \lambda xy + ab,\ a, b, x, y \in E^*$.*

Supposons maintenant que u est un bivecteur de rang 6, ω un trivecteur de rang 3, $S_\omega \subset S_u$, et $u\omega = 0$: alors $\omega = xyz$ et $u = ax + by + cz$, où a, b, c, x, y et z sont dans E^*.Si par contre $u\omega \neq 0$, la restriction de u à S_ω° est de rang 2; il existe un bivecteur v divisant ω tel que $u = v + u_1$ avec $rg\, u_1 = 4$: $S_{u_1} \cap S_\omega$ est de dimension 1 et on peut trouver une base $\{a, b, c, x, y, z\}$ de E^* telle que $u = ab + cx + yz$ et $\omega = xyz$. On conclut donc que

** si u et ω sont des bivecteurs tels que $S_\omega \subset S_u$ et $(rg(u), rg(\omega)) = (4,2)$ alors il existe $\{a, x, b, y\}$ une base de S_u telle que*

$$\begin{cases} si\ \ u\omega = 0, \omega = xy \ \ et\ \ u = ax + by \\ si\ \ u\omega \neq 0, \omega = xy \ \ et\ \ u = \lambda xy + ab \end{cases}$$

** si u est un bivecteur de rang 6, ω un trivecteur de rang 3 tels que $S_\omega \subset S_u$ alors il existe $\{a, b, c, x, y, z\}$ une base de S_u telle que*

$$\begin{cases} si\ \ u\omega = 0, \omega = xyz \ \ et\ \ u = ax + by + cz \\ si\ \ u\omega \neq 0, \omega = xyz \ \ et\ \ u = ab + cx + yz \end{cases}$$

Lemme 3.3.2 *Soit H un plan vectoriel dans Λ^2K^5 non contenu dans Λ^2E, pour tout hyperplan E de K^5 . Alors H possède une base de l'un des types suivants :*

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2 \\ u_2 = e_2e_3 + e_4e_5 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 \\ u_2 = e_1e_3 + e_4e_5 \end{cases}$$

où $\{e_1, ..., e_5\}$ est une base convenable de K^5.

Supposons d'abord que H contient un bivecteur u_1 de rang 2. Tout bivecteur u_2 non colinéaire à u_1 est de rang 4 car $H \subset \Lambda^2(S_{u_1} + S_{u_2})$.

Alors $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est une droite Ke_2 et on peut écrire $u_1 = e_1e_2$, $u_2 = e_2e_3 + e_4e_5$ d'où le premier type.

Supposons maintenant que tout élément non nul de H est de rang 4. Soit $\{u_1, u_2\}$ une base de H : $S_{u_1} \cap S_{u_2} = W$ est de dimension 3. Considérons l'application

$$\pi : \Lambda^2 W \to \Lambda^4 S_{u_1} \oplus \Lambda^4 S_{u_2}$$

qui à v associe le couple (vu_1, vu_2).Comme $dim \Lambda^2 W = 3$, $ker\pi$ contient une droite

$$D = Ke_1e_4$$

de $\Lambda^2 S_H$: en effet l'hypothèse $rg\ (u_i) = 4$ entraîne que l'application

$$\pi_i : \Lambda^2 W \to \ \Lambda^4 S_{u_i}$$

définie par $\pi_i(v) = vu_i$, $i = 1, 2$, est surjective ; par suite $dim(ker\pi_1 \cap ker\pi_2) = 1$ et $ker\pi_1 \cap ker\pi_2$ est une droite $D = Ke_1e_4$ de $\Lambda^2 H$: on peut écrire $u_i = e_1x_i + e_4y_i$. Posons $x_1 = e_2$, $y_1 = -e_3$ et $y_2 = e_5$, on a alors $x_2 = \sum_i a_i\ e_i$, $a_i \in K$. Par un changement de base, on a $u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$ et $u_2 = e_1(a_2e_2 + a_3e_3) + e_4e_5$. Si a_3 était nul, $u_1 -\ a_2u_2$ serait de rang 2 : par homothétie sur u_2 et e_5, on peut supposer $a_3 = 1$ et en remplaçant u_2 par $u_2 - a_2u_1$, on obtient la forme demandée.

Nous avons vu en 1, que la donnée d'un trivecteur scindable ω revient à celle d'un sous-espace vectoriel d'un espace $\Lambda^2 E$: ainsi le lemme précédent donne deux classes de trivecteurs 2-scindables de rang 7. Les trivecteurs 2-scindables de rang 8 s'obtiennent par l'étude des sous-espaces de dimension 2 de $\Lambda^2 K^6$. Nous supposons maintenant K algébriquement clos et soit H un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\Lambda^2 K^6$: choisissons un générateur φ de $\Lambda^6 K^6$ et $\{u_1, u_2\}$ une base de H .Tout élément de H s'écrit

$$u = xu_1 + yu_2 : \ \gamma^3(u) = f(u)\varphi$$

et $f(u)$ est une fonction homogène de degré 3 de u . En fonction des composantes x et y de u, f est donnée par un polynôme homogène de degré 3 en les variables x et y. Effectuer un changement de base dans H revient à effectuer, pour f, un changement de variables linéaire, de sorte que f est un covariant pour H. A changement de variable linéaire près, f peut prendre les 4 formes suivantes : $f = 0$, f est le cube d une forme linéaire sur H, f est le produit d'une forme linéaire par le carré d'une forme linéaire indépendante de la première ou bien f est le produit de trois formes linéaires deux à deux linéairement indépendantes. Cela signifie qu'en changeant éventuellement de base $\{u_1, u_2\}$ dans H, on a les quatre possibilités suivantes : $f = 0$, $f = x^3$, $f = x^2y$ et $f = xy(x+y)$. Remarquons que si $H \subset \Lambda^2 V$ où V est un hyperplan de K^6 (on dit alors que H n'est pas de rang maximal), $\gamma_3(u) = 0$ quelque soit u dans H et donc $f = 0$. Nous ne considérons maintenant que des sous-espaces H de rang maximal (le cas de rang 5 est le lemme précédent ; ceux de rang 3 ou 4 sont faciles).

Lemme 3.3.3 $\Lambda^2 K^6$ *admet six types de sous-espaces vectoriels de dimension* 2 *et de rang maximal donnés par une base* $\{u_1, u_2\}$*:*

H_1	$u_1 = e_1e_3 + e_2e_4$	$u_2 = e_1e_5 + e_2e_6$	$\gamma_3 = 0$
H_2	$u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6$	$u_2 = e_1e_2$	$\gamma_3 = x^3$
H_3	$u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6$	$u_2 = e_1e_2 + e_3e_4$	$\gamma_3 = x^3$
H_4	$u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$	$u_2 = e_1e_3 + e_5e_6$	$\gamma_3 = x^2y$
H_5	$u_1 = e_1e_2$	$u_2 = e_3e_4 + e_5e_6$	$\gamma_3 = x^2y$
H_6	$u_1 = e_1e_2 + e_5e_6$	$u_2 = e_1e_2 + e_3e_4$	$\gamma_3 = xy(x+y)$

Dans le premier cas, soit $\{u_1, u_2\}$ une base quelconque de H: comme $f = 0$,

$\gamma^3(u_1) = \gamma^3(u_2) = u_1\gamma^2(u_2) = u_2\gamma^2(u_1) = 0$. Les rangs de u_1 et u_2 valent donc 2 ou 4; si, par exemple rang $u_1 = 2$, la relation $u_1\gamma^2(u_2) = 0$ implique $S_{u_1} \cap S_{u_2} \neq \{0\}$, donc H qui est contenu dans $\Lambda^2(S_{u_1} + S_{u_2})$, n'est pas de rang maximal. Posons $S_i = S_{u_i}$: $dim S_i = 4$ et $S_1 + S_2 = K^6$, donc $S_1 \cap S_2$ est de dimension 2. Il existe une base $\{e_i\}$ de K^6 telle que

$\gamma^2(u_1) = e_1e_2e_3e_4$ et $\gamma^2(u_2) = e_1e_2e_5e_6$; $S_1 \cap S_2$ est le plan de base $\{e_1, e_2\}$.

Si $e_1e_2u_1 \neq 0$, $u_1 = \lambda e_1e_2 + v$ où $rgv = 2$ et $u_1\gamma^2(u_2) \neq 0$; c'est donc que

$e_1e_2u_1 = e_1e_2u_2 = 0$. On peut donc écrire

$$u_1 = e_1x_1 + e_2y_1$$
$$u_2 = e_1x_2 + e_2y_2$$

ce qui donne, à un changement de notations près, le résultat annoncé.

Supposons maintenant $f(x,y) = x^3$: il existe une base $\{u_1, u_2\}$ de H telle que $\gamma^3(u_1) \neq 0$, $\gamma^2(u_1)u_2 = u_1\gamma^2(u_2) = \gamma^3(u_2) = 0$. Le bivecteur u_2 est unique à homothétie près car $\gamma^3(u) = 0$ implique $x = 0$. Si le rang de u_2 vaut 2, la seule relation à satisfaire est

$\gamma^2(u_1) \,.\, u_2 = 0$; on peut donc écrire $u_2 = e_1e_2$ et $u_1 = \lambda e_1e_2 + e_1x + e_2y + v$ où x, y et v s'expriment en fonction des quatre derniers vecteurs d'une base $\{e_i\}$ de K^6. Quitte à enlever à u_1 un multiple de u_2, on peut supposer $\lambda = 0$: la relation $u_2\gamma^2(u_1) = 0$ signifie que v est de rang 2. Comme $\gamma^3(u_1) = e_1xe_2yv \neq 0$, en changeant les quatre derniers vecteurs de la base $\{e_i\}$, on obtient $u_1 = e_1e_3 + e_2e_4 + e_5e_6$.

Si le rang de u_2 est 4, la relation $u_1\gamma^2(u_2) = 0$ a la signification suivante: $S^{\circ}_{u_2}$ est un plan du dual de K^6 sur lequel la forme bilinéaire alternée u_1 est dégénérée. En effet sinon u_1 est dégénérée. En effet sinon u_1 s'écrirait $v + v'$ où $rg\, v = 2$, $rg\, v' = 4$ et $S_{v_1} = S_{u_2}$ et on aurait $u_1\gamma^2(u_2) = v\gamma^2(u_2) \neq 0$. Donc u_1 peut s'écrire $ax + by + zt$ où $\{x, y, z, t\}$ est une base de S_{u_2} : $\gamma^2(u_1) = abyx + axzt + byzt$. Comme u_2 est de rang 4, $\gamma^2(u_2)$ est proportionnel à $xyzt$ et $u_2\gamma^2(u_1) = abyxu_2$. Il en résulte que $xyu_2 = 0$ et u_2 peut s'écrire $xz' + yt'$ où $\{x, y, z', t'\}$ est une autre base de S_{u_2}. Comme $zt = \lambda z"t"$ $+x\alpha + y\beta$ où λ est un scalaire non nul et α et β deux vecteurs de S_{u_2}, on remplace u_1 par $\lambda^{-1}u_1$ qui s'écrit

$(\lambda^{-1}a + \alpha)x + (\lambda^{-1}b + \beta)y + z't'$. On a donc bien une base$\{u_1^1, u_1\}$ de H et une base $\{e_i\}$ de K^6 dans laquelle

$$u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6 \quad \text{et} \quad u_2 = e_1e_2 + e_3e_4$$

Supposons maintenant que $f(x, y) = x^2y = 0$. On a une base $\{u_1, u_2\}$de H telle que $\gamma^3(u_1) = \gamma^3(u_2) = u_1\gamma^2(u_2) = 0$ et $\gamma^2(u_1)u_2 \neq 0$. Le rang de u_1 est nécessairement 4; celui de u_2 vaut 2 ou 4. S'il vaut 2, $\gamma^2(u_1)u_2 \neq 0$ implique $S_{u_1} \cap S_{u_2} = \{0\}$ et on obtient $u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$ et $u_2 = e_5e_6$. Si le rang de u_2 est 4, $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est un plan P de base $\{a, b\}$: $u_1 = ax + by + v$ où le support de v est contenu dans un supplémentaire de P dans S_{u_1}. Comme $\gamma^2(u_2)$ est divisible par ab, $u_1\gamma^2(u_2) = v\gamma^2(u_2) = 0$ implique $v = 0$. Comme $\gamma^2(u_1)u_2 \neq 0$, $abu_2 \neq 0$ et $u_2 = ab + cd$; posant $e_1 = a$, $e_2 = x$, $e_3 = b$, $e_4 = y$, $e_5 = c$ et $e_6 = d$ on obtient les écritures de u_1 et u_2 annoncées.

Supposons maintenant que $f(x, y) = xy(x + y)$. Il existe alors une base $\{u_1, u_2\}$ de H telle que $\gamma^3(u_1) = \gamma^3(u_2) = 0$ et $u_1\gamma^2(u_2) = u_2\gamma^2(u_1) \neq 0$. L'intersection $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est un plan P de K^6 et $\gamma^2(u_1) = e_1e_2e_3e_4$, $\gamma^2(u_2) = e_3e_4e_5e_6$ où $\{e_3, e_4\}$ est une base de P et $\{e_i\}$ une base de K^6. Comme $u_1\gamma^2(u_2) \neq 0$, $u_1e_3e_4 \neq 0$, donc $u_1 = \lambda e_3e_4 + v_1$ où v_1 est de rang 2; de la même façon, on a $u_2 = e_3e_4 + v_2$ avec $rg\, v_2 = 2$. De $u_1\gamma^2(u_2) = u_2\gamma^2(u_1)$, on déduit que $\lambda = \mu$, qu'on peut prendre égal à 1; de même en modifiant e_1 et e_2, et e_5 et e_6, on trouve la base annoncée.

Résumé

Dans ce mémoire, nous rappelons l'essentiel des résultats connus sur la classification des formes bilinéaires alternées de rang n.

Cette classification aide à classifier les sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\wedge^2 K^5$ et $\wedge^2 K^6$.

Bibliographie

[1] N.Bourbaki , Algébre, chapitres 1 à 3 , Hermann , Paris , 1970.

[2] H.Busemann and D.E.Glassco , Irreducible sums of simple multivectors, Pacific Journal of Mathematics , 49 (1973) 13-32.

[3] G.B.Gurevitch , Theory of algebraic invariants . P.Noordhof LTD , Groningen , the Netherland , 1964.

[4] S.Lang , Algebra , second edition , Addisson-Wesley publishing company Inc California 1984.

[5] L.Noui et Ph.Revoy, Formes multilinéaires alternées , Ann.Math.Blaise Pascal Vol 1 , n°2 , 1994 , p.43-69.