

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## *Mémoire de Master*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** Equations aux dérivées partielles et applications

### Thème

---

*Multiplicité de solutions pour un problème aux limites quasi-linéaire de second ordre via lemme du Col et principe variationnel d'Ekeland.*

---

**Présentée par :**

M<sup>lle</sup> HAMMOU Bouthina Sabah

**Membres de jury :**

Mr. Abdelhak MOKHTARI

M.C.B., Université de M'sila

**Président.**

Mr. Dahmane BOUAFIA

M.C.B., Université de M'sila

**Encadreur.**

Mr. Nour Eddine DACHOUCHA

M.A.A., Université de M'sila

**Examineur.**

Année universitaire 2019/2020.

---

# Remerciements

---

*Je voudrais tout d'abord remercier ALLAH pour m'a donné la santé, la volonté, la patience et la force durant toute mes années d'étude.*

*Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma encadreur  
Mr : Dahmane BOUAFIA, je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé*

*Je tenais à remercier tous les membres du jury pour acceptant de présider et examiner ce travail.*

*J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants de département de mathématique et spécialement, les enseignants de spécialité équations aux dérivées partielles et applications qui par leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions.*

*Enfin, je remercie ma mère qui est toujours été là pour moi et qui m'a encouragé à chaque étape, tu es une femme d'or. je ne voudrais pas oublier de remercier mon père Allah yarhmou et je lui dis, j'aimerais que tu sois avec moi. Je remercie mon frère Abdallah et toute ceux contribués d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.*

---

# Dédicace

---

*Je dédie ce travail accompagné profond amour*

*A ma mère, source de vie, d'amour et ma dirigé vers la gloire. Aucun mot ne saurait exprimer ma gratitude et ma respect, qu'ALLAH te garde et t'accord la santé et longue de vie. je t'aime mama.*

*A mon père, J'espère que vous êtes satisfait de moi. Tu me manques.*

*A mon frère source de joie et de bonheur.*

*A ma meilleures amies qui n'ont jamais cessé de me soutenir.*

*A mon oncle Moussa, merci pour tout vous donné.*

*A toutes ma famille Hammou qui m'a supporté, je ne pourrais nommer de peur d'oublier quelqu'un.*

*A toutes la promotion 2019/2020 de l'EDP.*

*A toutes mes proches dans cette vie.*

*A vous cher lecteur .*

*Hammou Bouthaina Sabah*

---

---

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Dédicace</b>	<b>ii</b>
<b>Notation</b>	<b>v</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach . . . . .	3
1.1.1 Semi-continuité . . . . .	4
1.1.2 Continuité et compacité des opérateurs . . . . .	4
1.1.3 Cas particulier (l'injection continu et compact) . . . . .	5
1.1.4 Semi-continuité forte et faible . . . . .	5
1.2 Théorie des points critiques . . . . .	10
1.3 Espace de Lebesgue $L^p$ . . . . .	12
1.3.1 Lemme de compacité . . . . .	13
<b>2 Variantes Le lemme du Col de la montagne</b>	<b>14</b>
2.1 Principe variationnel d'Ekeland . . . . .	14
2.2 Lemme du Col de la Montagne . . . . .	16
2.2.1 Lemme du Col en dimension finie . . . . .	16
2.2.2 <b>Suit et condition de Palais-Smale</b> . . . . .	18
2.2.3 Lemme du Col en dimension infinie . . . . .	19
<b>3 Multiplicité de solutions positives pour un problème aux limites quasi-linéaire de second ordre</b>	<b>22</b>
3.1 Introduction . . . . .	22
3.2 Les résultats principaux d'existence . . . . .	28

3.2.1	Existence d'une première solution . . . . .	31
3.2.2	Existence d'une seconde solution . . . . .	40
3.3	Exemple . . . . .	42
<b>Conclusion</b>		<b>44</b>



---

# Notation

---

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$H$	Espace de Hilbert.
$X'$	Dual topologique de $X$ .
BVP	Problème aux limites de second ordre.
$L^p(\Omega)$	$= \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} :  u ^p \in L^1(\Omega) \right\}$ avec $1 \leq p < \infty$ .
$\ u\ _{L^p}$	$= \left( \int_{\Omega}  u(x) ^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ .
$L^\infty(\Omega)$	$= \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \exists C :  u(x)  \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$ .
$\ u\ _{L^\infty}$	$= \inf \{ C :  u(x)  \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$ .
$C(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur $\Omega$ .
$D(A)$	: Domaine de définition d'un opérateur borné $A$ .
$R(A)$	: Image de $A$ qui est noté aussi par $ImA$ .
$(X, d)$	: Espace métrique .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: Définit un produit scalaire.
$\mathcal{L}(X, Y)$	: Ensemble des applications linéaires continues.
$\hookrightarrow$	: On écrit $X \hookrightarrow Y$ pour signifier que $X$ est inclus dans $Y$ et que l'injection canonique de $X$ dans $Y$ est continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	: On écrit $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ pour signifier que $X$ est inclus dans $Y$ et que l'injection canonique de $X$ dans $Y$ est compacte.
p.p	Presque partout.
$\partial_v F$	Dérivée directionnelle de $F$ dans la direction $v$ .
$dF$	Dérivée au sens de Fréchet qui est noté aussi par $F'$ .
$d_G F$	Dérivée au sens de Gâteaux.
EVP	Principe variationnel d'Ekeland .
s.c.i	Semi continue inférieur.
s.c.s	Semi continue supérieur.
f.s.c.i	Faiblement semi continue inférieur.

f.s.c.s Faiblement semi continue supérieur .  
 $\mathcal{D}(J)$  Domaine de définition de  $J$ .



---

# Introduction générale

---

Un equation quasi-linéaire est un type d'équation différentielle, où le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé ne dépend pas de la dérivée de la fonction inconnue.

L'ambition de ce mémoire est l'étude de l'existence et la multiplicité de solutions positives pour un problème aux limite quasi-linéaire de second ordre. La preuve du resultat principal repose sur le lemme du Col et le principe variationnel d'Ekeland .

Le principe de lemme du Col établit l'existence d'un point Col (point critique), l'intuition qui sous-tend ce lemme se trouve dans le mot « Col » lui-même. Supposons que  $I$  désigne l'altitude. Il existe alors deux points bas : l'origine, car  $J(0) = 0$ , et un autre point  $v$  où  $J(v) \leq 0$ . Entre ces deux points se situe une chaîne de montagnes (à distance  $\|u\| = r$  de l'origine) où l'altitude est élevée (plus grande que  $a > 0$ ). Pour aller de l'origine à  $v$  en suivant un chemin  $g$ , il faut traverser les montagnes, c'est-à-dire d'abord monter, puis redescendre. Comme  $J$  est plus ou moins régulière, elle doit atteindre un point critique quelque part entre les deux. L'intuition suggère que si un tel point se situe sur un chemin qui traverse les montagnes à l'altitude la plus basse, ce sera presque toujours un point Col.

Dans ce travail, on présente deux version de lemme du Col (en dimension finie et en dimension infinie). En outre, le principe variationnel d'Ekeland est un resultat très important dans l'optimisation pour les quatre dernière décennies, calcul différentielle, l'analyse, ..., etc.

Dans ces contextes, on présente quelques-uns des travaux dans l'article [2] qui utilisent le lemme du Col et le principe variationnel d'Ekeland pour résoudre nos résultats.

Cette thèse comprend trois chapitre :

Le première chapitre est préliminaires qui contient quelque utils de base dont on ferq fréquemment usage par la suite. Nous avons dévisé le chapitre par trois section, le premier section contient ces operateur sur les espaces de banach comme la continuité et la compacité, injection continue et injection compact et les propriétés de semi-continuité de fonctionnelles. Nous avons présenté dans la deuxième section la théorie de point critique.

Dans la troisième section nous avons donné un rappel sur l'espace  $L^p$  et lemme de compacité. Ensuit, Le deuxième chapitre est les variantes de lemme du Col de la montagne qui contient

deux section, le première section le principe variationnel Ekeland (forme forte et forme faible) et quelques corollaires.

Dans la deuxième section nous avons présenté deux version de lemme du Col (en dimension finie et en dimension infinie).

En fin, on va présenter le travaille de l'article [2], nous discutons l'existence et la multiplicité des solutions positives pour un problème aux limite quasi-linéaire du second ordre suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \lambda h(x)|u(x)|^{\beta-2}u(x) + q(x)f(x, u(x)), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

Dans ce cas, nous avons trouvé que le résultat dit que sous les conditions suivantes sur les fonctions  $h, q, f$  et les constantes suivantes :

(H<sub>0</sub>)  $h$  et  $q : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  appartenir à  $L^1(0, +\infty) \cap L^\infty(0, +\infty)$ ;

(H<sub>1</sub>) Il existe une fonction continument différentiable et bornée

$p : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  appartenir à  $L^1(0, +\infty) \cap L^\infty(0, +\infty)$  de telle sorte que les fonctions  $\frac{q}{p}, \frac{q}{p^2}, \frac{q}{p^\beta}, \frac{q}{p^{\beta+1}}, \frac{h}{p^{\beta-1}}$ , et  $\frac{h}{p^\beta}$  tous appartiennent à  $L^1(0, +\infty)$ ;

(H<sub>2</sub>)  $M = \max(\|p\|_{L^2}, \|p'\|_{L^2}) < +\infty$ ,

$$M_{r,g} = \|p\|_{\infty}^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^{+\infty} g(x) \left( \int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right)^{\frac{r}{2}} dx \right]^{\frac{1}{r}} < +\infty,$$

pour tous  $r \in \{\beta, 2, \beta + 1\}$  et toutes  $g \in \{q, h\}$  et

$$M_{2,q} = \|p\|_{\infty}^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^{+\infty} q(x) \left( \int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{A}},$$

où la constante  $A$  satisfait

(H<sub>3</sub>)  $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{|u|} = A \in (0, \bar{\lambda}_{2,q}^2)$  et  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{|u|^\beta} = B \in (\bar{\lambda}_{2,q}^2, +\infty)$ , où  $\bar{\lambda}_{2,q}$  est la première valeur propre du problème (3.2) qui est définie dans le lemme 3.3,

(H<sub>4</sub>) Il existe  $\mu > \beta + 1$  tel que

$$F(s) \leq \frac{1}{\mu} s f(s), \quad \text{pour tout } |s| > 0, \quad \text{où } F(s) = \int_0^s f(t) dt.$$

Donc,  $u_1$  la première solution faible de notre problème, on utilisé le lemme du Col pour la démonstration.  $u_2$  la deuxième solution faible de notre problème, on utilisé le principe variationnel d'Ekeland pour la preuve.

# PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on donne quelques notions élémentaires qui sont nécessaire par la suite.

## 1.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach

Soit  $X$  et  $Y$ , deux espaces de Banach normés.

**Définition 1.1. (Opérateur linéaire borné)**[17] Soit  $A$  un opérateur linéaire, tel que  $D(A) = X$  et  $R(A) \subset Y$ . On dit que  $A$  est borné, s'il est borné sur la boule unité  $\bar{B}(0, 1)$ . C'est-à-dire, si l'ensemble

$$\{\|Ax\|, \|x\| \leq 1\}$$

est borné.

Conformément à cette définition, si  $A$  est borné, il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour tout  $x$  avec  $\|x\| \leq 1$ , on a l'inégalité

$$\|Ax\| \leq c.$$

**Théorème 1.1.** [17]  $A$  est borné, si et seulement si, il existe une constante  $c > 0$ , telle que

$$\|Ax\| \leq c\|x\|,$$

pour tout  $x \in X$ .

**Définition 1.2. (Espace dual)**[16] L'ensemble des fonctionnelles linéaires continues définies sur un espace vectoriel normé constitue un espace vectoriel. On l'appelle dual de l'espace  $X$  et on note  $X'$ .

On munit  $X'$  de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|, \quad \forall f \in X'.$$

$X'$  muni de cette norme est un espace de Banach et on a l'inégalité

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X, \quad \forall f \in X', \quad \forall x \in X.$$

## 1.1.1 Semi-continuité

**Définition 1.3.** 1. On dit qu'une fonctionnelle  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point  $x_0$ , si pour chaque suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightarrow x_0$ , on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. On dit que  $f$  est semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point  $x_0$ , si pour toute suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightarrow x_0$ , on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

**Définition 1.4.** On dit qu'une suite  $(x_n) \in X$  converge faiblement vers  $x$ , si

$$\text{pour tout } f \in X', \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle,$$

et on écrit  $x_n \rightharpoonup x$ .

**Proposition 1.1.** [7] Soit  $(x_n)$  une suite de  $X$ . On a

1. Si  $x_n \rightarrow x$ , alors  $x_n \rightharpoonup x$ .
2. Si  $x_n \rightharpoonup x$ , alors  $(x_n)$  est bornée et  $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ .

**Proposition 1.2.** [7] Lorsque  $X$  est de dimension finie, une suite  $(x_n)$  converge faiblement, si et seulement si, elle converge fortement.

**Définition 1.5. (Réflexivité)** Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $\mathbf{i}$  l'injection canonique de  $X$  dans  $X''$ . On dit que  $X$  est réflexif, si  $\mathbf{i}(X) = X''$ , où  $X''$  est le bidual de  $X$ .

**Définition 1.6. (Séparabilité)** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On dit que  $X$  est séparable si  $X$  admet une partie dénombrable et dense.

**Théorème 1.2.** [7] Un espace de Banach  $X$  est réflexif, si et seulement si sa boule fermée est faiblement compacte.

**Corollaire 1.1.** [7] Si  $X$  est un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée  $(x_n) \subset X$  avec  $\|x_n\| \leq M$  contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément  $x \in X$  vérifiant  $\|x\| \leq M$ .

## 1.1.2 Continuité et compacité des opérateurs

On va considérer des opérateurs  $T$  de  $X$  dans  $Y$  et on va donner une définition concernant les propriétés de la continuité de  $T$ .

La notion plus simple est la suivante

**Définition 1.7.** L'opérateur  $T : X \rightarrow Y$  est dit continu en  $x$ , si pour toute suite  $(x_n) \subset X$  qui converge vers  $x$ ,  $T(x_n)$  converge vers  $T(x)$ .

$T$  est dit continu sur  $\Omega \subset X$  si  $T$  est continu en tout point  $x \in \Omega$ .

**Définition 1.8.** Un opérateur  $T : X \rightarrow Y$  est dit compact s'il est continu et a la propriété. Pour toute suite  $(x_n)$  bornée dans  $X$ , la suite  $(T(x_n))$  admet une sous suite convergente.

**Définition 1.9.** Soit  $(X, \|\cdot\|_1)$  et  $(Y, \|\cdot\|_2)$  deux espaces de Banach. Un opérateur  $T : X \rightarrow Y$  est dit complètement continu s'il est continu et l'image de tout ensemble borné de  $X$  est relativement compact dans  $Y$ .

### 1.1.3 Cas particulier (l'injection continu et compact)

L'injection définissent les relations qui existent entre différents espaces fonctionnels. Ils sont très importants dans l'analyse moderne et les problèmes aux limites.

**Définition 1.10.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. On dit que  $X$  est injecté dans  $Y$  et on écrit  $X \hookrightarrow Y$ , si pour tout  $x \in X$  on a  $x \in Y$  et  $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$ , où la constante  $c$  ne dépend pas de  $x \in X$ . On définit l'opérateur d'injection  $i : X \rightarrow Y$ , qui nous permet de considérer le même élément  $x \in X$  comme un élément de  $Y$ .

$X \hookrightarrow Y$  est équivalent à dire que l'opérateur d'injection  $i : X \rightarrow Y$  est un opérateur linéaire continu.

Si  $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$ , pour tout  $x \in X$  alors  $\|i(x)\|_Y \leq c$  si  $\|x\|_X \leq 1$ .

**Définition 1.11.** Si  $X \hookrightarrow Y$  et l'opérateur d'injection  $i : X \rightarrow Y$  est un opérateur compact, alors on dit que  $X$  est injecté de manière compacte dans  $Y$ , et on écrit  $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ . La compacité de l'opérateur  $i : X \rightarrow Y$  est équivalent à dire que tout sous-ensemble borné de  $X$  est un sous-ensemble compact de  $Y$ .

### 1.1.4 Semi-continuité forte et faible

**Définition 1.12.** 1. On dit qu'une fonctionnelle  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point  $x_0$ , si pour chaque suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightarrow x_0$ , on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. On dit que  $f$  est semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point  $x_0$ , si pour toute suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightarrow x_0$ , on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

**Exemple 1.1.** 1. Soit la fonctionnelle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Alors  $f$  est semi-continue inférieurement (*s.c.i.*) à  $x_0 = 0$  mais n'est pas semi-continue supérieurement.

2. Soit la fonctionnelle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Alors  $f$  est semi-continue supérieurement (*s.c.s.*) à  $x_0 = 0$  mais n'est pas semi-continue inférieurement.

**Définition 1.13.** 1. Une fonctionnelle  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite faiblement semi-continue inférieurement (*f.s.c.i.*) au point  $x_0$ , si pour toute suite  $(x_n) \subset \Omega$  telle que  $x_n \rightharpoonup x_0$ , on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. On dit que  $f$  est faiblement semi-continue supérieurement (*f.s.c.s.*) au point  $x_0$ , si pour toute suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightharpoonup x_0$ , on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

**Exemple 1.2.** Soit la fonctionnelle  $J$  définie sur un espace de Hilbert  $H$  comme suit

$$J : u \rightarrow \|u\|^2,$$

alors  $J$  est faiblement semi-continue inférieure (*f.s.c.i.*). En effet, soit  $(u_n)$ , telle que  $u_n \rightharpoonup u$ , on montre que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2.$$

On a

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &= (u_n - u, u_n - u) \\ &= \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|u\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

et comme  $\mathcal{H}' = H$  et  $u_n \rightharpoonup u$ , donc

$$\forall u \in H : (u_n, u) \rightarrow (u, u) = \|u\|^2.$$

Alors

$$\|u_n\|^2 \geq \|u\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

il résulte que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2.$$

**Remarque 1.1.** 1. Il est facile de voir que si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors  $f$  est (s.c.s.) et (s.c.i) et inversement.

2. Si  $f$  est faiblement continue en  $x_0$ , alors  $f$  est (f.s.c.s.) et (f.s.c.i) et inversement.

**Définition 1.14. (La dérivée au sens de Fréchet)** Soit  $u \in U$  et  $F : U \rightarrow Y$ . On dit que  $F$  est différentiable au point  $u$  s'il existe une application linéaire continue  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , telle que si on considère

$$R(h) = F(u + h) - F(u) - A.h, \text{ pour } h \in X, \text{ petit.}$$

Alors

$$\frac{R(h)}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \|h\| \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } \|h\|_X \leq \delta, \text{ alors } \|R(h)\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X.$$

Si une telle application  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  existe, elle est forcément unique. On note par

$$A = dF(u).$$

Elle est appelée différentielle (au sens de Fréchet) de  $F$  en  $u$ , ou encore application linéaire tangente à  $F$  en  $u$ . En l'absence de précision supplémentaire différentiable signifiera dans la suite différentiable au sens de Fréchet.

**Exemples 1.1.** 1. Si  $F(u) = c$ . Alors  $F$  Fréchet différentiable et

$$dF(u) = 0, \forall u.$$

2. Si  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$   $A(u + h) - A(u) = A.h$  et donc  $dA(u) = A, \forall u \in X$ .

3. La fonctionnelle  $F : H \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

$$F(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 = \langle u, u \rangle,$$

est Fréchet différentiable et

$$dF(u)h = \langle u, h \rangle.$$

4. La fonctionnelle  $F : H \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$F(u) = \frac{1}{2} \|u\|,$$

est Fréchet différentiable pour  $u \neq 0$  et

$$dF(u)h = \frac{\langle u, h \rangle}{\|u\|}.$$

On a ensuite toutes les propriétés classiques.

**Proposition 1.3.** [14]

i) Soit  $F$  et  $G$  deux applications de  $U$  vers  $Y$ . Si  $F$  et  $G$  sont différentiables en  $u \in U$ . Alors  $\forall \lambda, \mu$  réels  $\lambda F + \mu G$  est différentiable en  $u$ , et

$$d(\lambda F + \mu G)(u) = \lambda dF(u) + \mu dG(u).$$

ii) Soit  $X, Y$  et  $Z$  trois espaces de Banach,  $U$  un ouvert de  $X$ , et  $V$  un ouvert de  $Y$ . Soit  $F : U \rightarrow Y$  et  $G : V \rightarrow Z$ , tels que  $F(U) \subset V$ . Si  $F$  est différentiable en  $u$  et  $G$  est différentiable en  $v = F(u)$ , alors  $G \circ F$  est différentiable en  $u$  et

$$d(G \circ F)(u) = dG(v) \circ dF(u), \quad v = F(u),$$

c'est-à-dire

$$d(G \circ F)(u)h = dG(v)[dF(u)h].$$

La différentielle de  $G \circ F$  est donc la composition des applications linéaires continues  $dF(u)$  et  $dG(v)$ , pour  $v = F(u)$ .

**Définition 1.15. (Dérivée directionnelle)** Soit  $F : U \rightarrow Y$ ,  $u \in U$ . Soit  $v \in X$ ,  $v \neq 0$ . On appelle dérivée directionnelle en  $u$  de  $F$  dans la direction  $v$ , notée  $\partial_v F(u)$ , la limite lorsqu'elle existe.

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}.$$

La notion de dérivée directionnelle est donc une extension de la notion de dérivée partielle. Si  $F$  est Fréchet différentiable, alors pour tout  $v \in X$  la dérivée directionnelle dans la direction  $v$  est donnée par

$$\partial_v F(u) = dF(u)v.$$

En effet,

$$F(u + tv) = F(u) + dF(u)(tv) + R(tv).$$

Donc

$$\frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = dF(u)(v) + \frac{R(tv)}{t},$$
$$\frac{R(tv)}{t} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0.$$

**Définition 1.16. (Différentiabilité au sens de Gâteaux)** On dit que  $F : U \rightarrow Y$  est Gâteaux différentiable en  $u$  (G-différentiable en  $u$ ), s'il existe une application linéaire continue  $A$  de  $X$  vers  $Y$ , c'est-à-dire  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , telle que pour tout  $v \in X$ , la dérivée directionnelle de  $F$  en  $u$  dans la direction  $v$  existe et est égale à  $A(v)$ , c'est-à-dire

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = A(v), \quad t \rightarrow 0, \quad \forall v \in X.$$

On vérifie alors que, si une telle application  $A$  existe, elle est unique. On note

$$A = d_G F(u).$$

**Proposition 1.4.** [14] Si  $F$  est Fréchet différentiable en  $u$ , elle est Gâteaux différentiable en  $u$  et

$$\partial_G F(u) = dF(u).$$

La réciproque est fautive en général, même en dimension finie.

**Exemple 1.3.** Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right)^2, & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

est G-différentiable à  $(0, 0)$ , mais pas différentiable au sens de Fréchet à  $(0, 0)$ .

**Remarque 1.2.** La G-différentiabilité n'implique pas la continuité de  $F$ .

**Exemple 1.4.** Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y = x^2 \\ 0, & \text{si } y \neq x^2. \end{cases}$$

est G-différentiable à  $(0, 0)$ , mais n'est pas continue à  $(0, 0)$ , (alors que bien entendu la différentiabilité au sens de Fréchet l'implique).

Tandis que, si on sait que  $F$  est  $C^1$  au sens de Gâteaux, alors  $F$  est Fréchet différentiable sur  $U$  et les deux notions coïncident et on a

**Théorème 1.3.** [14] Soit  $F : U \rightarrow Y$  une application G-différentiable ( $U$  ouvert de  $X$ ). On suppose que l'application  $v \mapsto d_G F(v)$  est continue sur  $U$ . Alors  $F$  est Fréchet différentiable sur  $U$  et

$$dF(v) = d_G F(v), \quad \forall v \in U.$$

**Démonstration** - Soit  $r \in (0, 1]$  tel que  $B_r(u) \subset U$ . Puisque  $d_G F : U \rightarrow X'$  est continue à  $u$ , pour chaque  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta \in (0, 1]$  tel que

$$\|d_G F(u + tv) - d_G F(u)\| < \varepsilon \quad \text{pour } \|v\| < \delta, |t| < 1. \quad (1.1)$$

D'autre part, pour chaque  $v \in B_r(0)$  la fonction

$$t \in [0, 1] \mapsto (d_G F(u + tv), v),$$

est la dérivée de la fonction

$$g(t) = F(u + tv) \quad t \in [0, 1].$$

Par conséquent

$$\int_0^1 (d_G F(u + tv), v) dt = g(1) - g(0) = F(u + v) - F(u).$$

Donc

$$F(u + v) - F(u) - (d_G F(u), v) = \int_0^1 (d_G F(u + tv) - d_G F(u), v) dt. \quad (1.2)$$

Soit

$$R(u, v) = \int_0^1 (d_G F(u + tv) - d_G F(u), v) dt.$$

D'après (1.1), pour tout  $v \in B_\delta(0)$ , nous avons que

$$\begin{aligned} \|R(u, v)\| &\leq \int_0^1 \|d_G F(u + tv) - d_G F(u)\| \|v\| dt \\ &\leq \varepsilon \|v\|. \end{aligned}$$

Pour cette raison  $R(u, v) = o(\|v\|)$  quand  $\|v\| \rightarrow 0$ . Ensuite, (1.2) montre que  $d_G F(u)$  est le dérivé de Fréchet de  $F$  à  $u$ . ■

**Remarque 1.3.** En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gâteaux. Si on veut prouver que  $F$  est  $C^1$ , il suffit donc de prouver qu'elle est Gâteaux différentiable, puis de vérifier que la différentiable  $d_G F$  est continue.

## 1.2 Théorie des points critiques

**Proposition 1.5.** [14] Soit  $X$  un espace de Banach, et  $J$  une application de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ , soit  $u \in X$ . On suppose que

$$J(u) = \inf_{v \in X} J(v),$$

c'est-à-dire

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in X.$$

Alors, si  $J$  est Gâteaux-différentiable en  $u$ , on a

$$d_G J(u) = 0.$$

**Démonstration** - Sous l'hypothèse de ce proposition, supposons sans perte de généralité que  $u_0$  est un point minimum (sinon considérons la fonction  $-J$  au lieu de  $J$ ).

Comme  $u_0 \in U$  et  $U$  est ouvert, il existe un nombre réel positif  $r$  tel que la boule ouverte  $B_r(u_0)$  est contenu dans  $U$ .

Maintenant, soit  $h \in X \setminus \{0\}$ . Alors, pour chaque  $t$  tel que

$$|t| \leq \frac{r}{\|h\|}, \quad \text{on a,} \quad J(u_0 + th) \geq J(u_0),$$

et ainsi par le Gâteaux différentiabilité de  $J$  à  $u_0$ , nous avons

$$d_G J(u_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [J(u_0 + th) - J(u_0)] \geq 0.$$

Il s'ensuit également que  $d_G J(u_0)(-h) \geq 0$ , i.e.,  $d_G J(u_0)(h) \leq 0$ , par linéarité de  $d_G J(u_0)$ .

Par conséquent  $d_G J(u_0)(h) = 0$ , pour tout  $h \in X$  en effet. Ainsi  $d_G J(u_0) = 0$ . ■

**Définition 1.17.** Soit  $u_0 \in X$ . On dit que  $u_0$  est un minimum local pour  $J$  si il existe  $\delta > 0$  tel que

$$J(u_0) \leq J(v), \quad \forall v \in B(u_0, \delta), \quad v \neq u_0.$$

On a alors

**Proposition 1.6.** [14] Soit  $u_0 \in X$ , un minimum local de  $J$ . Alors si  $J$  est Gâteaux différentiable en  $u_0$ , alors

$$d_G J(u_0) = 0.$$

**Définition 1.18. (Points critiques)** Soit  $J$  une fonctionnelle différentiable de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ . Un point  $u \in X$  est dit critique pour  $J$  ssi

$$dJ(u) = 0.$$

**Définition 1.19. (Valeurs critiques)** On appelle valeur critique, de la fonctionnelle  $J$ , de classe  $C^1$  définie sur  $X$ , un nombre  $c \in \mathbb{R}$ , tel qu'il existe  $u \in X$ , tel que

$$J(u) = c, \quad dJ(u) = 0.$$

**Théorème 1.4.** [16] Soit  $C$  un ensemble convexe fermé de  $X$ , Banach réflexif.

Soit  $J : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . On suppose

i)  $J$  coercive et  $J \neq +\infty$ , c'est-à-dire

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty.$$

ii)  $J$  (s.c.i) pour la convergence faible. Alors il existe  $u \in C$ , tel que

$$J(u) = \inf_{v \in C} J(v) (< +\infty).$$

Si de plus  $J$  est Gâteaux-différentiable en  $u$ , alors  $d_G J(u) = 0$ .

**Définition 1.20. (Suite minimisante)** Une suite minimisante d'une fonctionnelle  $J : X \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est une suite  $(x_n)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in X} J(x)$$

**Théorème 1.5.** [14] Soit  $X$  un espace de Banach réflexif, et  $J$  une fonctionnelle définie sur  $X$ , telle que

1.  $J$  est (f.s.c.i),
2. la suite minimisante de  $J$  est bornée sur  $X$ ,

alors  $J$  atteint son infimum sur  $X$ .

### 1.3 Espace de Lebesgue $L^p$

Dans la suite,  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  muni de la mesure de Lebesgue  $dx$ .

**Définition 1.21.** Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$ , on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty\}.$$

On note  $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ , et  $\|\cdot\|_{L^p}$  est une norme.

**Définition 1.22.** On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \exists C : |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C : |f(x)| \leq C, \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

**Théorème 1.6. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)**[7] Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $L^1$ . On suppose que

- (a)  $(f_n(x)) \rightarrow f(x)$  p.p. Sur  $\Omega$ .
- (b) Il existe une fonction  $g \in L^1(\Omega)$ , telle que pour chaque  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  p.p. Sur  $\Omega$ . Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

**Théorème 1.7.** [7] L'espace  $L^p$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$ , et son dual est  $L^q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Théorème 1.8. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**[7] Soit  $f$  et  $g \in L^2(\Omega)$ . Alors, nous avons que

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \left( \int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |g|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Théorème 1.9. (Inégalité de Hölder)**[7] Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note  $q$  l'exposant conjugué,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Suppose que  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors

(i)  $fg \in L^1(\Omega)$  et

(ii)  $\int_{\Omega} |fg| \leq \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q.$

**Théorème 1.10. (L'inégalité de Young)**[7] Pour  $a, b \geq 0$  et  $p, q > 1$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on a

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

### 1.3.1 Lemme de compacité

**Lemme 1.1. (C. Corduneanu)**[1] Soit  $D \subset C_l([0, +\infty), \mathbb{R})$  un ensemble borné. Alors  $D$  est relativement compact si les conditions suivantes sont vérifiées :

(a)  $D$  est équicontinu sur tout sous-intervalle compact de  $\mathbb{R}^+$ , i.e.

$$\forall J \subset [0, +\infty) \text{ compact}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in J :$$

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |u(x_1) - u(x_2)| \leq \varepsilon, \forall u \in D,$$

(b)  $D$  est équi-convergent à  $+\infty$  i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T = T(\varepsilon) > 0 \text{ tel que}$$

$$\forall x : x \geq T(\varepsilon) \implies |u(x) - u(+\infty)| \leq \varepsilon, \forall u \in D.$$

# VARIANTES LE LEMME DU COL DE LA MONTAGNE

Dans cette chapitre, nous présenterons deux version de théorème de Col (Lemme du Col), à partir de Lemme du Col de dimension un qui aidera à comprendre la généralisation aux dimensions supérieures. Nous introduirons également une condition de compacité connue sous le nom de condition Palais-Smale, qui, comme nous le verrons, est nécessaire pour le Lemme du Col (de dimension infinie) d'Ambrosetti et de Rabinowitz (voir [14] et [24]).

Mais au début on vas donner le principe variationnel d'Ekeland et quelques ses corollaires, parce que nous apportent la preuve de le Lemme du Col basée sur ce principe.

## 2.1 Principe variationnel d'Ekeland

Soit  $X$  un espace métrique complet et  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle semi-continu inférieur, bornée inférieurement. Si  $(u_n)_n$  est une suite minimisante, alors pour chaque  $\varepsilon > 0$  il existe  $n_0$  tel que pour  $n > n_0$

$$J(u_n) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

On dit que  $u = u_\varepsilon$  est un  $\varepsilon$ - minimiseur de  $J$  si

$$J(u) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Le théorème d'Ekeland considère l'existence des points  $\varepsilon$ - minimiseur.

**Théorème 2.1. (Principe variationnel d'Ekeland, forme forte 1974)**([11], [9])

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonctionnelle semi-continu inférieur, bornée inférieurement, et non identiquement égale à  $+\infty$  ( $J \not\equiv +\infty$ ).

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $u = u_\varepsilon \in X$  qui donne tel que

$$J(u) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Alors, pour tout  $\lambda > 0$  il existe  $v = v_\varepsilon \in X$  tel que

$$(a) \quad J(v) \leq J(u),$$

(b)  $d(u, v) \leq \lambda$ , et

(c)  $J(v) < J(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda}d(w, v)$ , pour tout  $w \in X \setminus \{v\}$ .

Nous présentons un théorème et une corollaire dérivés de principe variationnel d'Ekeland.

**Théorème 2.2. (Principe variationnel d'Ekeland, forme faible 1979)[9]**

Soit  $(X, d)$  est un espace métrique complet et soit  $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonctionnelle qui est semi-continu inférieur, bornée inférieurement. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u_\varepsilon \in X$  qui satisfait

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon,$$

et chaque fois  $w \in X$  avec  $w \neq u_\varepsilon$ , alors

$$J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon d(u_\varepsilon, w).$$

**Démonstration** - Nous montrons que il existe  $u_\varepsilon$  un  $\varepsilon$ - minimiseur. Soit  $\varepsilon > 0$  et on mettet

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{1}{2}, \varepsilon^2\right\},$$

pour que  $0 < \varepsilon < 1$  on a  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$ . Alors par la propriété de l'infimum

$$\exists u_0 \in X \text{ tel que } J(u_0) < \inf_X J + \varepsilon_0^2.$$

Alors  $u_0$  est un  $\varepsilon_0^2$ - minimiseur de  $J$ . Soit

$$\kappa_0 := \frac{1}{\varepsilon_0} > 1,$$

afin que on peut appliquer le théorème 2.1 pour obtenir l'existence de certains  $u_\varepsilon \in X$  tel que

$$J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon_0^2 \kappa_0 d(w, u_\varepsilon), \quad \forall w \neq u_\varepsilon.$$

Puisque  $\kappa_0 := \frac{1}{\varepsilon_0}$ , on a  $J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon_0 d(w, u_\varepsilon)$ ,  $\forall w \neq u_\varepsilon$ ,

et comme,  $\varepsilon_0 < \varepsilon$ , donc on obtient

$$J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon d(w, u_\varepsilon), \quad \forall w \neq u_\varepsilon.$$

Aussi, de théorème 2.1, on a que

$$J(u_\varepsilon) \leq J(u_0) < \inf_X J + \varepsilon_0^2 < \inf_X J + \varepsilon,$$

ce qui implique que  $u_\varepsilon$  est un  $\varepsilon$ - minimiseur de  $J$ . ■

### Corollaire 2.1. ([6], [18])

Soit  $X$  est un espace de Banach  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle (s.c.i.), bornée inférieurement et Gâteaux différentiable. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  et toute  $u_\varepsilon \in X$  tel que

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon,$$

il existe un point  $v$  dans  $X$  satisfaisant

- (1)  $J(v) \leq J(u_\varepsilon)$ ,
- (2)  $\|v - u_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ , et
- (3)  $\|J'(v)\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ .

**Démonstration** - Les relations (1) et (2) sont évidemment les (a) et (b) dans principe variationnel d'Ekeland pour  $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ , tandis que pour (3), de la relation (c) on a, pour tout  $w \in X$  et tout  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{t}[J(v) - J(v + tw)] \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|.$$

Passant à la limite comme  $t$  tend vers 0, nous obtenons cela pour chaque  $w$  dans  $X$

$$-\langle J'(v), w \rangle \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|.$$

Cela vaut aussi pour  $-w$ , alors

$$|\langle J'(v), w \rangle| \leq \sqrt{\varepsilon}\|w\|,$$

et alors

$$\|J'(v)\| \leq \sup_{\|w\|=1} |\langle J'(v), w \rangle| \leq \sqrt{\varepsilon}. \quad \blacksquare$$

**Remarque 2.1.** Les relations (1) et (3) signifie que nous avons obtenu un (presque minimiseur) de  $J$ , qui est aussi un (presque point critique).

## 2.2 Lemme du Col de la Montagne

Nous commençons par énoncement un théorème bien connu, à savoir celui de Rolle. qui le présente un version de Lemme du Col (Mountain Pass Lemma) en dimension finie.

### 2.2.1 Lemme du Col en dimension finie

**Théorème 2.3. (Théorème de Rolle)** Soit  $f \in C^1([x_1, x_2]; \mathbb{R})$  avec  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$  tel que  $x_1 \neq x_2$ . Alors si  $f(x_1) = f(x_2)$ , il existe au moins un élément  $x_3 \in (x_1, x_2)$  tel que

$$f'(x_3) = 0.$$

**Démonstration** - Rappelons qu'en conséquence du théorème de Heine-Borel, l'intervalle fermé  $[x_1, x_2]$  dans  $\mathbb{R}$  est compact, et puisque  $f$  est continue, donc elle atteint à la fois sa maximum et sa minimum par le théorème des valeurs extrêmes.

Maintenant, si  $f$  est constant dans  $[x_1, x_2]$  avec  $f(x_1) = f(x_2)$ , puis bien sûr  $f'(x_3) = 0$  pour tout  $x \in [x_1; x_2]$ .

Ainsi, si  $f$  n'est pas constant dans  $[x_1, x_2]$ , le théorème des valeurs extrêmes et la condition  $f(x_1) = f(x_2)$ , impliquent qu'au moins un des extrêmes de  $f$  se produit dans un point intérieur  $x_3 \in [x_1; x_2]$ , donc  $x_3$  est un point critique de  $f$ . ■

**Théorème 2.4. (Lemme du Col dans  $\mathbb{R}$ )** Soit  $x_1 < x_3 < x_2$  des nombre réels distinct et  $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  si

$$f(x_3) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}. \tag{2.1}$$

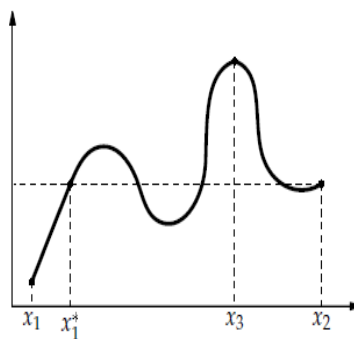
Alors, il existe un point critique  $\hat{x}$  de  $f$  dans  $(x_1, x_2)$  tel que

$$f(\hat{x}) = \max_{[x_1, x_2]} f = \inf_{[a, b] \in \Gamma} \max_{x \in [a, b]} f(x), \tag{2.2}$$

où

$$\Gamma = \{[a, b], \text{ tel que } a < x_1 < x_2 < b\}.$$

FIGURE 2.1 – la position des  $x^*$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ .



**Démonstration** - Si nous supposons que  $f(x_1) \leq f(x_2)$  (ou bien inversement), alors le théorème de la valeur moyenne implique que

$$\exists x^* \in [x_1, x_3] \text{ tel que } f(x^*) = f(x_2). \tag{2.3}$$

Si nous appliquons maintenant le théorème de Rolle et on utilisons le plus petit nombre  $x^*$  qui est satisfait la condition (2.3), nous serions garantis l'existence d'un maximum dans  $[x^*, x_2]$ . Il résulte maintenant de (2.1) que

$$\max_{[x_1, x_2]} f \geq \max_{[x^*, x_2]} f \geq f(x_3) > \max\{f(x_1), f(x_2)\},$$

et puisque  $[x_1, x_2] \in \Gamma$ , nous avons que

$$\max_{[x_1, x_2]} f = \inf_{[a, b] \in \Gamma} \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

■

## 2.2.2 Suit et condition de Palais-Smale

**Définition 2.1.** [18] Soit  $E$  un espace Banach et  $J : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle de classe  $C^1$ . On dit que  $J$  satisfait la condition de Palais-Smale, notée  $(P.S)$ , s'il y a une suite  $(u_n)$  dans  $E$  telle que

$$(J(u_n)) \text{ bornée, et } J'(u_n) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty \quad (2.4)$$

admet une sous-suite convergente.

Toute suite satisfaisante (2.4) est appelée suite de Palais-Smale.

**Définition 2.2.** [18] Soit  $E$  un espace Banach et  $J$  une fonctionnelle de classe  $C^1$ , et  $c \in \mathbb{R}$ . On dit que la fonctionnelle  $J$  satisfait à la condition (locale) de Palais-Smale au niveau  $c$ , notée  $(P.S)_c$ , s'il y a une suite  $(u_n)$  dans  $E$  telle que

$$J(u_n) \rightarrow c, \text{ et } J'(u_n) \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

admet une sous-suite convergente.

**Exemple 2.1.** Dans  $\mathbb{R}$  la fonctionnelle  $J : x \mapsto x^2$ , satisfait la condition de Palais-Smale en 0 tandis que  $J : x \mapsto e^{-x}$ , ne la satisfait pas, car la suite définie par  $u_n = n$  vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} -ne^{-n} = 0$  mais  $(u_n)$  n'admet pas une sous-suite convergente.

**Remarque 2.2.** La condition  $(P.S)_c$  est une condition de compacité sur la fonctionnelle  $J$ , en ce sens que l'ensemble  $K_c$  de points critiques de  $J$  au niveau  $c$ ,

$$K_c = \{u \in E : J(u) = c \text{ et } J'(u) = 0\}$$

est compact.

**Démonstration** - De  $(P.S)_c$ , il s'ensuit que toute séquence  $(u_m)$  dans  $K_c$  a une sous-suite convergente, et par la continuité de  $J$  et  $J'$  (rappel de la définition 2.2 que  $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ ) tout point d'accumulation d'une telle suite se situe également dans  $K_c$ .

Donc  $K_c$  est compact. ■

**Exemples 2.1.** 1. L'identité fonctionnelle sur  $E$  satisfait  $(P.S)$ , où  $K = \Phi$  est l'ensemble de tous les points critiques de  $J$  dans  $E$ ,

2. La fonctionnelle  $J \equiv 0$  qui définie sur  $E = \mathbb{R}$  ne satisfait ni  $(P.S)_0$  ni  $(P.S)_c$ , et l'ensemble  $K$  est l'espace entier,
3. La fonctionnelle  $J(u) = \sin(u)$  qui définie sur  $E = \mathbb{R}$  satisfait  $(P.S)_c$  pour tous  $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  et  $K$  est un ensemble infini et non borné.

**Théorème 2.5.** Soit  $J \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  est une fonctionnelle coercitive, c'est-à-dire,

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty,$$

alors  $J$  satisfait  $(P.S)$ .

**Théorème 2.6. (Lemme du Col dans  $\mathbb{R}^n$ )** Supposons  $J \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  est une fonctionnelle coercitive et possède deux minima relatifs stricts distincts  $x_1$  et  $x_2$ . Alors  $J$  possède un troisième point critique  $x_3$  distinct de  $x_1$  et  $x_2$ , caractérisé par

$$J(x_3) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{x \in \gamma} J(x),$$

où

$$\Gamma = \{\gamma \subset \mathbb{R}^n, \quad \gamma \text{ compact et connecté(raccordé) } x_1, x_2 \in \gamma\}.$$

### 2.2.3 Lemme du Col en dimension infinie

**Lemme 2.1. (Lemme du Col)[14], [24].** Soit  $E$  un espace de Banach réel et  $J \in C^1(E, \mathbb{R})$  satisfait  $(P.S)_c$  la condition de Palais-Smale au niveau  $c$ , avec  $J(0) = 0$ . Supposons que

- (a) Il existe  $\rho > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que  $J(u) \geq \alpha$  pour tout  $u \in E$  avec  $\|u\| = \rho$ ;
- (b) Il existe  $e \in E$ ,  $\|e\|_E > \rho$  tel que  $J(e) < 0$ .

Alors  $J$  admet une valeur critique  $c \geq \alpha$ . De plus,  $c$  peut être caractérisée par

On définit

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0, 1], E) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}. \quad (2.6)$$

Alors

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} J(\gamma(t)) \geq \alpha \quad (2.7)$$

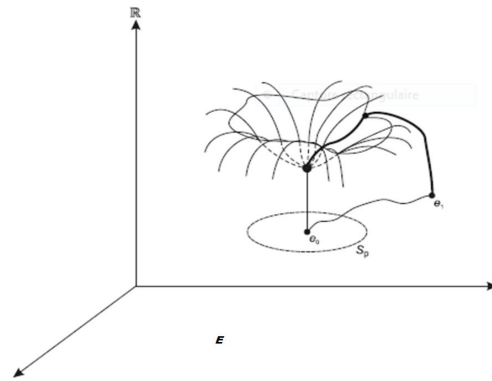
est une valeur critique de  $J(u)$ .

**Remarque 2.3.** Géométriquement, lorsque  $E = \mathbb{R}^2$  les hypothèses (a) et (b) signifient que l'origine se situe dans une vallée entourée d'une montagne

$$\Gamma_\gamma = \{(x, \gamma(x)) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}^2\}.$$

Il doit donc exister un Col de montagne joignant  $(0, 0)$  et  $(1, \gamma(1))$  qui contient une valeur critique (voir figure en-dessous).

FIGURE 2.2 – Col de la montagne entre "villages"  $e_0(0, 0)$  et  $e_1(1, e)$ , qui illustration les conditions géométriques (a) et (b) de Lemme 2.1.



**Remarque 2.4.** Notez que la condition (P.S) est essentielle dans le lemme 2.1 comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 2.2.** La fonctionnelle  $J(x, y) = x^2 + (x + 1)^3 y^2$  satisfait aux hypothèses (a) et (b) du Lemme 2.1 mais ne satisfait pas à la condition (P.S) et son point critique unique est  $(0, 0)$ .

**Démonstration -** Le point  $(0, 0)$  est un minimum local strict et l'unique point critique. Si la condition (P.S) est satisfaite, alors  $(P.S)_c$  avec  $c > 0$  défini par (2.7) est également satisfait. Soit  $(x_n, y_n)$  une suite telles que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n^2 + (x_n + 1)^3 y_n^2) = c > 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (2x_n + 3(x_n + 1)^2 y_n^2) = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2(x_n + 1)^3 y_n = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = (\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$ . En passant à la limite de (2.8) on obtient

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\bar{x}^2 + (\bar{x} + 1)^3 \bar{y}^2) = c > 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (2\bar{x} + 3(\bar{x} + 1)^2 \bar{y}^2) = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2(\bar{x} + 1)^3 \bar{y} = 0. \end{cases}$$

ce qui implique une contradiction. ■

Pour la preuve du Lemme 2.1, nous donnons un nouveau démonstration basée sur principe variationnel d'Ekeland.

**Démonstration -** Clairement,  $\Gamma \neq \emptyset$  puisque  $\gamma(t) = te$  est dans  $\Gamma$ . Alors nous supposons que la condition géométrique

$$c > \inf_{u \in S(\rho, \rho)} J(u) > \max\{\gamma(0), \gamma(1)\}, \quad (2.9)$$

est satisfait pour tout

$$u \in S(o, \rho) = \{u \in E : \|u - 0\| < \rho\}. \quad (2.10)$$

Notez que  $J$  peut être non bornée inférieurement mais nous exigeons seulement qu'il soit bornée inférieurement sur  $S(0; \rho)$  pour certains  $\rho > 0$ .

Si nous considérons  $\Gamma$  de (2.6) comme un espace normé pour la topologie uniforme engendrée par la norme

$$\|\gamma\|_{\Gamma} = \max_{t \in [0;1]} |\gamma(t)|, \quad \text{pour } \gamma \in \Gamma,$$

et définir

$$\phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{comme } \phi(\gamma) = \max_{t \in [0;1]} J(\gamma(t)).$$

Alors,  $\phi$  est semi-continue inférieurement comme une limite supérieure d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement. Il est également bornée inférieurement, depuis

$$c > \inf_{\Gamma} \phi(u) > \max\{J(0), J(e)\},$$

par conséquent, nous pouvons utiliser le principe variationnel d'Ekeland. c'est-à-dire que pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe un chemin  $\gamma_{\varepsilon} \in \Gamma$  tel que

$$\begin{cases} \phi(\gamma_{\varepsilon}) \leq c + \varepsilon, & \text{et,} \\ \phi(\gamma) \geq \phi(\gamma_{\varepsilon}) - \varepsilon \|\gamma - \gamma_{\varepsilon}\|_{\Gamma}, & \text{pour tout } \gamma \in \Gamma. \end{cases} \quad (2.11)$$

Soit

$$M(\varepsilon) := \{t \in [0; 1] : J(\gamma_{\varepsilon}(t)) = \max_{x \in [0;1]} J(\gamma_{\varepsilon}(x))\},$$

Alors, (2.11) implique qu'il existe un  $t_{\varepsilon} \in M(\varepsilon)$  tel que

$$\|J'(\gamma_{\varepsilon}(t_{\varepsilon}))\| \leq \varepsilon.$$

La condition  $(PS)_c$  avec la suite de Palais-Smale  $x_n = \gamma_{\frac{1}{n}}(t_{\frac{1}{n}})$  fait ensuite le travail pour terminer l'épreuve. ■

# MULTIPLICITÉ DE SOLUTIONS POSITIVES POUR UN PROBLÈME AUX LIMITES QUASI-LINÉAIRE DE SECOND ORDRE

Dans ce chapitre, nous discutons l'existence et la multiplicité des solutions positives pour une classe d'équations quasi-linéaires du second ordre. Pour obtenir nos résultats, nous utiliserons le lemme du Col et le principe variationnel d'Ekeland. et nous choisirons comme exemple l'article qui a été publié par les auteurs D. Bouafia, T. Moussaoui et D. O'Regan en 2018 (voir [2]).

## 3.1 Introduction

Notre objectif dans ce chapitre est d'obtenir au moins deux solutions positives au problème suivant

$$\begin{cases} -u'' + u = \lambda h(x)|u|^{\beta-2}u + q(x)f(u), & x \in (0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et sont des paramètres réels avec  $1 < \beta < 2$  et  $\lambda > 0$ .

Au cours de ce chapitre, nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

( $H_0$ )  $h$  et  $q : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  appartenir à  $L^1(0, +\infty) \cap L^\infty(0, +\infty)$ ;

( $H_1$ ) Il existe une fonction continument différentiable et bornée  $p : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  appartenir à  $L^1(0, +\infty) \cap L^\infty(0, +\infty)$  de telle sorte que les fonctions  $\frac{q}{p}$ ,  $\frac{q}{p^2}$ ,  $\frac{q}{p^\beta}$ ,  $\frac{q}{p^{\beta+1}}$ ,  $\frac{h}{p^{\beta-1}}$ , et  $\frac{h}{p^\beta}$  tous appartiennent à  $L^1(0, +\infty)$ ;

( $H_2$ )  $M = \max(\|p\|_{L^2}, \|p'\|_{L^2}) < +\infty$ ,

$$M_{r,g} = \|p\|_{\infty}^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^{+\infty} g(x) \left( \int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right)^{\frac{r}{2}} dx \right]^{\frac{1}{r}} < +\infty,$$

pour tous  $r \in \{\beta, 2, \beta + 1\}$  et toutes  $g \in \{q, h\}$  et

$$M_{2,q} = \|p\|_{\infty}^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^{+\infty} q(x) \left( \int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{A}},$$

où la constante  $A$  satisfait

(H<sub>3</sub>)  $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{|u|} = A \in (0, \bar{\lambda}_{2,q}^2)$  et  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{|u|^\beta} = B \in (\bar{\lambda}_{2,q}^2, +\infty)$ , où  $\bar{\lambda}_{2,q}$  est la première valeur propre du problème (3.2) qui est définie dans le lemme 3.3,

(H<sub>4</sub>) Il existe  $\mu > \beta + 1$  tel que

$$F(s) \leq \frac{1}{\mu} s f(s), \quad \text{pour tout } |s| > 0, \quad \text{où } F(s) = \int_0^s f(t) dt.$$

Nous présentons maintenant l'espace de Hilbert  $H_0^1(0, +\infty)$  qui convient à l'étude de notre problème. Soit

$$H_0^1(0, +\infty) = \left\{ u \text{ mesurable} : u, u' \in L^2(0, +\infty), u(0) = u(+\infty) = 0 \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\| = \left( \int_0^{+\infty} |u'(x)|^2 dx + \int_0^{+\infty} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

et associé au produit scalaire

$$(u, v) = \int_0^{+\infty} u'(x) \cdot v'(x) dx + \int_0^{+\infty} u(x) \cdot v(x) dx.$$

On considère les espaces  $L_g^r(0, +\infty)$  qui sont définis par

$$L_g^r(0, +\infty) = \left\{ u : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \int_0^{+\infty} g(x) |u(x)|^r dx < +\infty \right\},$$

pour tous  $r \in \{\beta, 2, \beta + 1\}$  et toutes  $g \in \{h, q\}$  équipé respectivement par les normes

$$\|u\|_{r,g} = \left( \int_0^{+\infty} g(x) |u(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Soit l'espace  $C_{l,p}[0, +\infty)$  défini par

$$C_{l,p}[0, +\infty) = \left\{ u \in C([0, +\infty), \mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)u(x) \text{ existe} \right\}.$$

La norme correspondante est définie par

$$\|u\|_{\infty,p} = \sup_{x \in [0, +\infty)} p(x) |u(x)|.$$

Nous donnons maintenant quelques lemmes et corollaires nécessaires, qui sont utilisés ci-dessous.

**Lemme 3.1.** [12]  $H_0^1(0, +\infty)$  s'injecte de manière continue et compacte dans  $C_{l,p}[0, +\infty)$ , i.e.,

$$\|u\|_{\infty,p} \leq M\|u\| \quad \forall u \in H_0^1(0, +\infty).$$

**Démonstration** - Etape 1 : On prouve  $H_0^1(0, +\infty) \hookrightarrow C_{l,p}[0, +\infty)$ . En effet, pour toute  $u \in H_0^1(0, +\infty)$ , nous avons

$$\begin{aligned} |p(x)u(x)| &= |p(+\infty)u(+\infty) - p(x)u(x)| = \left| \int_x^{+\infty} (pu)'(s)ds \right| \\ &\leq \left| \int_x^{+\infty} p'(s)u(s)ds \right| + \left| \int_x^{+\infty} p(s)u'(s)ds \right| \\ &\leq \left( \int_0^{+\infty} p^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{+\infty} u^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_0^{+\infty} p^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{+\infty} u'^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} \max(\|p'\|_{L^2}, \|p\|_{L^2}) \|u\|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|u\|_{\infty,p} \leq \sqrt{2}M\|u\|.$$

Etape 2 : On prouve  $H_0^1(0, +\infty) \hookrightarrow C_{l,p}[0, +\infty)$ . Soit  $D \subset H_0^1(0, +\infty)$  un ensemble borné. Alors elle est borné dans  $C_{l,p}[0, +\infty)$  d'après le lemme 3.1. Soit  $R > 0$  tel que pour toute  $u \in D$ ,  $\|u\| \leq R$ . Alors nous appliquerons le Lemme 1.1, on obtient :

(a)  $D$  est équicontinu sur sous-chaque intervalle compact de  $[0, +\infty)$ . Soit  $u \in D$  et  $x_1, x_2 \in J \subset [0, +\infty)$  où  $J$  est un sous-intervalle compact, nous avons

$$|p(x_1)u(x_1) - p(x_2)u(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} (pu)'(s)ds \right| = \left| \int_{x_2}^{x_1} p'(s)u(s) + u'(s)p(s)ds \right|$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|p(x_1)u(x_1) - p(x_2)u(x_2)| &\leq \left( \int_{x_2}^{x_1} p'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{x_2}^{x_1} u^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left( \int_{x_2}^{x_1} p^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{x_2}^{x_1} u'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2} \max \left[ \left( \int_{x_2}^{x_1} p'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, \left( \int_{x_2}^{x_1} p^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \|u\| \\
&\leq \sqrt{2}R \max \left[ \left( \int_{x_2}^{x_1} p'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, \left( \int_{x_2}^{x_1} p^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quand  $|x_1 - x_2| \rightarrow 0$ .

(b)  $D$  est équi-convergent à  $+\infty$ . Pour  $x \in [0, +\infty)$  et  $u \in D$ , en utilisant le fait que  $(pu)(+\infty) = 0$  (On dénote  $u(\infty) = 0$  et  $p$  est bornée) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned}
|(pu)(x) - (pu)(+\infty)| &= \left| \int_x^{+\infty} (pu)'(s) ds \right| = \left| \int_x^{+\infty} p'(s)u(s) + u'(s)p(s) ds \right| \\
&\leq \sqrt{2} \max \left[ \left( \int_x^{+\infty} p'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, \left( \int_x^{+\infty} p^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \|u\| \\
&\leq \sqrt{2}R \max \left[ \left( \int_x^{+\infty} p'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, \left( \int_x^{+\infty} p^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quand  $x \rightarrow +\infty$ . ■

**Lemme 3.2.** [3]  $C_{l,p}[0, +\infty)$  s'injecte de manière continue dans  $L_g^r(0, +\infty)$  pour tous  $r \in \{\beta, 2, \beta + 1\}$  et toutes  $g \in \{h, q\}$ .

**Démonstration** - Pour toute  $u \in C_{l,p}[0, +\infty)$ , pour tous  $r \in \{\beta, 2, \beta + 1\}$  et pour chaque  $g \in$

$\{h, q\}$ , on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{g,r}^r &= \int_0^{+\infty} g(x)|u|^r(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{g(x)}{p^r(x)} p^r(x)|u|^r(x)dx \\ &\leq \|u\|_{\infty,p}^r \int_0^{+\infty} \frac{g(x)}{p^r(x)} dx = \left\| \frac{g}{p^r} \right\|_{L^1} \|u\|_{\infty,p}^r. \end{aligned}$$

Donc,  $\|u\|_{g,r} \leq C_1 \|u\|_{\infty,p}$ , où  $C_1 = \left\| \frac{g}{p^r} \right\|_{L^1}^{\frac{1}{r}}$ . ■

**Corollaire 3.1.** [3]  $H_0^1(0, +\infty)$  s'injecte de manière continue et compacte dans  $L_g^r(0, +\infty)$  avec la constante d'injection  $M_{r,g}$ .

Soit  $\bar{\lambda}_{r,g}$  la première valeur propre du problème

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \lambda g(x)|u(x)|^{r-2}u(x), & x > 0, \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

et notez

$$\bar{\lambda}_{r,g} = \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} \frac{\|u\|}{\|u\|_{r,g}}.$$

**Lemme 3.3.** [3] La première valeur propre  $\bar{\lambda}_{r,g}$  est positive et est atteint pour une fonction positive  $\bar{\psi}_{r,g} \in H_0^1(0, +\infty) \setminus \{0\}$ , i.e.,

$$\bar{\lambda}_{r,g} := \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} \frac{\|u\|}{\|u\|_{r,g}} = \frac{\|\bar{\psi}_{r,g}\|}{\|\bar{\psi}_{r,g}\|_{r,g}}.$$

**Démonstration** - En utilisant la même idée que dans [10], pour  $u \in H_0^1(0, +\infty)$ , Soit

$$N_1(u) = \|u\| \quad \text{et} \quad N_2(u) = \|u\|_{r,g},$$

et définir la fonctionnelle  $P : H_0^1(0, +\infty) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$P(u) = \frac{N_1(u)}{N_2(u)}.$$

Alors,

$$\bar{\lambda}_{r,g} = \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} P(u).$$

Soit  $u \in H_0^1(0, +\infty)$ ; donc pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} |u(x)|^r &= \left| \int_0^x u'(s) ds \right|^r = \left| \int_0^x \sqrt{p(s)} u'(s) \frac{1}{\sqrt{p(s)}} ds \right|^r \\ &\leq \left( \int_0^x p(s) u'^2(s) ds \right)^{\frac{r}{2}} \left( \int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right)^{\frac{r}{2}} \\ &\leq \left[ \sup_{x \geq 0} p(x) \right]^{\frac{r}{2}} \left( \int_0^{+\infty} u'^2(s) ds \right)^{\frac{r}{2}} \left( \int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right)^{\frac{r}{2}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour toute  $g \in \{h, q\}$ , et si  $x > 0$ , on a

$$g(x)|u(x)|^r \leq \left[ \sup_{x \geq 0} p(x) \right]^{\frac{r+1}{2}} g(x) \left( \int_0^x \frac{ds}{p(s)} \right)^{\frac{r}{2}} \left( \int_0^{+\infty} u'^2(s) ds \right)^{\frac{r}{2}},$$

donc

$$\|u\|_{r,g} \leq M_{r,g} \|u\|, \quad (3.3)$$

qui donne

$$\bar{\lambda}_{r,g} = \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} \frac{\|u\|}{\|u\|_{r,g}} \geq \frac{1}{M_{r,g}} > 0.$$

Soit  $(u_n)$  une suite de minimisante pour cette quantité. Nous savons alors que  $(|u_n|)$  est une suite de minimisante pour  $P$ , nous pouvons donc supposer que  $u_n(x) \geq 0$  pour  $x \in [0, +\infty)$ . La fonction  $P$  est homogène de degré zéro, c'est-à-dire  $P(\alpha u) = P(u)$ , pour chaque  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Posons  $\tilde{u}_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{r,g}}$ , pour chaque  $n$ , on peut supposer que  $\|u_n\|_{r,g} = 1$ . Notez que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(u_n) = \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} P(u) = \bar{\lambda}_{r,g}$ , donc la suite  $(P(u_n))$  est bornée. De cela et du fait que  $P(u_n) = \|u_n\|$ , on voit que  $(u_n)$  est borné dans  $H_0^1$ . D'après le lemme 3.1 et de la réflexivité et de la séparabilité de  $H_0^1$ , il existe une sous-suite  $(u_{n_k})$  de  $(u_n)$  de telle sorte que, quand  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{cases} u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u}, & \text{dans } H_0^1, \\ u_{n_k} \rightarrow \bar{u}, & \text{dans } C_{l,p}. \end{cases}$$

Par conséquent  $u_{n_k}(x) \rightarrow \bar{u}(x)$  pour tout  $x \in [0, +\infty)$ . Par le lemme 3.2,  $(u_{n_k})$  converge en norme vers  $\bar{u}$  dans  $L_g^r$ . Donc,  $\|\bar{u}\|_{r,g} = 1$  and  $\bar{u}(x) \geq 0$ , pour  $x \in [0, +\infty)$ . Enfin, par la faiblement semi-continuité inférieure de la norme, on obtient

$$P(\bar{u}) = N_1(\bar{u}) \leq \liminf_k N_1(u_{n_k}) = \liminf_k P(u_{n_k}) = \bar{\lambda}_{r,g}.$$

Donc,  $\bar{u} \in H_0^1 \setminus \{0\}$  and  $P(\bar{u}) = \bar{\lambda}_{r,g}$ . ■

## 3.2 Les résultats principaux d'existence

Nous définissons maintenant la fonction d'Euler-Lagrange associée au problème (3.1). Soit  $J_\lambda : H_0^1(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{\beta} \int_0^{+\infty} h(x)|u|^\beta dx - \int_0^{+\infty} q(x)F(u)dx. \quad (3.4)$$

**Proposition 3.1.** *Supposons que les conditions  $(H_0) - (H_3)$  sont satisfaites. Alors la fonctionnelle  $J_\lambda$  est continuellement différentiable. La dérivée de Fréchet de  $J_\lambda$  admet la forme*

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(u), v \rangle &= \int_0^{+\infty} u'(x)v'(x)dx + \int_0^{+\infty} u(x)v(x)dx - \lambda \int_0^{+\infty} h(x)|u|^{\beta-2}(x)u(x)v(x)dx \\ &\quad - \int_0^{+\infty} q(x)f(u)v(x)dx, \end{aligned} \quad (3.5)$$

pour toute  $v \in H_0^1(0, +\infty)$ .

**Démonstration - Etape 1.**  $J_\lambda$  est Gâteaux-différentiable.

pour toute  $v \in H_0^1(0, +\infty)$ , et pour tout  $t > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} J_\lambda(u + tv) - J_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} |(u + tv)'|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} |u + tv|^2 dx - \frac{\lambda}{\beta} \int_0^{+\infty} h(x)|u + tv|^\beta dx \\ &\quad - \int_0^{+\infty} q(x)F(u + tv)dx - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} |u'|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} |u|^2 dx \\ &\quad + \frac{\lambda}{\beta} \int_0^{+\infty} h(x)|u|^\beta dx + \int_0^{+\infty} q(x)F(u)dx \\ &= \frac{t^2}{2} \int_0^{+\infty} |v'|^2 dx + t \int_0^{+\infty} u'v'dx + \frac{t^2}{2} \int_0^{+\infty} |v|^2 dx + t \int_0^{+\infty} uvdx \\ &\quad - \frac{\lambda}{\beta} \int_0^{+\infty} h(x) [|u + tv|^\beta - |u|^\beta] dx - \int_0^{+\infty} q(x) [F(u + tv) - F(u)] dx \\ &= \frac{t^2}{2} \int_0^{+\infty} |v'|^2 dx + t \int_0^{+\infty} u'v'dx + \frac{t^2}{2} \int_0^{+\infty} |v|^2 dx + t \int_0^{+\infty} uvdx \\ &\quad - t\lambda \int_0^{+\infty} h(x)|u + t\theta v|^{\beta-2}(u + t\theta v)v dx - t \int_0^{+\infty} q(x)f(u + t\theta v)v dx, \end{aligned}$$

où  $0 < \theta < 1$ , et puis

$$\begin{aligned} \frac{J_\lambda(u + tv) - J_\lambda(u)}{t} &= \frac{t}{2} \int_0^{+\infty} |v'|^2 dx + \int_0^{+\infty} u'v' dx + \frac{t}{2} \int_0^{+\infty} |v|^2 dx + \int_0^{+\infty} uv dx \\ &\quad - \lambda \int_0^{+\infty} h(x)|u + t\theta v|^{\beta-2}(u + t\theta v)v dx - \int_0^{+\infty} q(x)f(u + t\theta v)v dx. \end{aligned}$$

Soit  $t \rightarrow 0$  et nous avons

$$\langle J'_\lambda(u), v \rangle = \int_0^{+\infty} u'v' dx + \int_0^{+\infty} uv dx - \lambda \int_0^{+\infty} h(x)|u|^{\beta-2}uv dx - \int_0^{+\infty} q(x)f(u)v dx,$$

pour toute  $v \in H_0^1(0, +\infty)$ .

Etape 2.  $J'_\lambda$  est continue.

Soit  $(u_n) \subset H_0^1(0, +\infty)$  avec  $u_n \rightarrow u$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ , donc il existe  $R > 0$  tel que  $\|u_n\| \leq R$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . D'après  $(H_3)$ , étant donné  $\varepsilon$  est suffisamment petit, il existe  $\delta_2 > \delta_1 > 0$  tels que

$$(A - \varepsilon)|s| < f(s) < (A + \varepsilon)|s|, \quad \text{pour tout } 0 < s < \delta_1, \quad (3.6)$$

et

$$(B - \varepsilon)|s|^\beta < f(s) < (B + \varepsilon)|s|^\beta, \quad \text{pour tout } s > \delta_2, \quad (3.7)$$

donc de (3.6) et (3.7), et puisque  $f(u)$  est continue sur  $[\delta_1, \delta_2]$ , il existe  $D_1 > 0$  tel que

$$-D_1 + (A - \varepsilon)|s| + (B - \varepsilon)|s|^\beta < f(s) < D_1 + (A + \varepsilon)|s| + (B + \varepsilon)|s|^\beta, \quad (3.8)$$

pour tout  $s \in (0, +\infty)$ . Cela donne

$$F(s) \leq D_2 + \frac{A + \varepsilon}{2}s^2 + \frac{B + \varepsilon}{\beta}|s|^{\beta+1}, \quad \text{pour tout } s \in (0, +\infty), \quad (3.9)$$

et

$$F(s) \geq -D_2 + \frac{A - \varepsilon}{2}s^2 + \frac{B - \varepsilon}{\beta}|s|^{\beta+1}, \quad \text{pour tout } s \in (0, +\infty), \quad (3.10)$$

où  $D_2 = D_1(\delta_2 - \delta_1)$ . De plus, d'après Lemme 3.1,  $(H_0) - (H_1)$  et (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} q(x)|f(u_n(x))| &\leq (A + \varepsilon)q(x)|u_n(x)| + (B + \varepsilon)q(x)|u_n(x)|^\beta + D_1q(x) \\ &\leq (A + \varepsilon) \sup_{x \in [0, +\infty)} |(pu_n)(x)| \frac{q(x)}{p(x)} \\ &\quad + (B + \varepsilon) \sup_{x \in [0, +\infty)} |(pu_n)(x)|^\beta \frac{q(x)}{p^\beta(x)} + D_1q(x) \\ &= (A + \varepsilon)\|u_n\|_{\infty, p} \frac{q(x)}{p(x)} + (B + \varepsilon)\|u_n\|_{\infty, p}^\beta \frac{q(x)}{p^\beta(x)} + D_1q(x) \\ &\leq (A + \varepsilon)MR \frac{q(x)}{p(x)} + (B + \varepsilon)(MR)^\beta \frac{q(x)}{p^\beta(x)} + D_1q(x) \in L^1(0, +\infty), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|q(x)|u_n(x)|^{\beta-2}|u_n(x)| &\leq q(x)|u_n(x)|^{\beta-1} \\
&= p^{\beta-1}(x)|u_n(x)|^{\beta-1} \frac{h(x)}{p^{\beta-1}(x)} \\
&\leq \sup_{x \in [0, +\infty)} |(pu_n)(x)|^{\beta-1} \frac{h(x)}{p^{\beta-1}(x)} \\
&= \|u_n\|_{\infty, p}^{\beta-1} \frac{h(x)}{p^{\beta-1}(x)} \\
&\leq (MR)^{\beta-1} \frac{h(x)}{p^{\beta-1}(x)} \in L^1(0, +\infty).
\end{aligned}$$

Ensuite, à partir du théorème de convergence dominé de Lebesgue, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} q(x)f(u_n(x))dx = \int_0^{+\infty} q(x)f(u(x))dx, \quad (3.11)$$

et aussi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h(x)|u_n|^{\beta-2}(x)u_n(x)dx = \int_0^{+\infty} h(x)|u|^{\beta-2}(x)u(x)dx. \quad (3.12)$$

par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), v \rangle &= \int_0^{+\infty} u'_n v' dx + \int_0^{+\infty} u_n v dx - \lambda \int_0^{+\infty} h(x)|u_n|^{\beta-2} u_n v dx \\
&\quad - \int_0^{+\infty} q(x)f(u_n) v dx - \int_0^{+\infty} u' v' dx - \int_0^{+\infty} u v dx \\
&\quad + \lambda \int_0^{+\infty} h(x)|u|^{\beta-2} u v dx + \int_0^{+\infty} q(x)f(u) v dx \\
&= \int_0^{+\infty} (u'_n - u') v' dx + \int_0^{+\infty} (u_n - u) v dx \\
&\quad - \lambda \int_0^{+\infty} h(x) (|u_n|^{\beta-2} u_n - |u|^{\beta-2} u) v dx \\
&\quad - \int_0^{+\infty} q(x) (f(u_n) - f(u)) v dx, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

et d'après (3.11), (3.12) et la continuité de  $f$ , passant à la limite dans  $\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), v \rangle$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ , nous obtenons que  $J'_\lambda(u_n) \rightarrow J'_\lambda(u)$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ . ■

**Définition 3.1.** On dit que  $u \in H_0^1(0, +\infty)$  est une solution faible du problème (3.1) si pour tout  $v \in H_0^1(0, +\infty)$ , on a

$$\langle J'_\lambda(u), v \rangle = \int_0^{+\infty} u'v' dx + \int_0^{+\infty} uv dx - \lambda \int_0^{+\infty} h(x)|u|^{\beta-2}uv dx - \int_0^{+\infty} q(x)f(u)v dx = 0.$$

Dans nos deux prochaines sections, nous prouverons le résultat principal de ce travail.

**Théorème 3.1.** *Supposons que  $(H_0) - (H_4)$  sont satisfaites. Alors Il existe  $\xi > 0$  tel que, pour tout  $0 < \lambda < \xi$ , le problème (3.1) admet au moins deux solutions positives.*

### 3.2.1 Existence d'une première solution

**Lemme 3.4.** *Supposons que les hypothèses  $(H_0) - (H_4)$  sont satisfait. Alors, il existe  $\xi_1 > 0$  tel que, pour  $0 < \lambda \leq \xi_1$ , la fonctionnelle  $J_\lambda$  satisfait les conditions géométriques (a) et (b) dans le lemme 2.1, i.e.,*

- (a) *Il existe  $\rho, \alpha > 0$  tel que  $J_\lambda(u) \geq \alpha$  quand  $\|u\| = \rho$ ,*
- (b) *Il y a un  $e \in H_0^1(0, +\infty)$ ,  $\|e\| > \rho$  tel que  $J_\lambda(e) < 0$ .*

**Démonstration -** (a). D'après  $(H_0) - (H_3)$ , (3.9) et en utilisant Corollaire 3.1, nous avons

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{\beta} \int_0^{+\infty} h(x)|u|^\beta(x) dx - \int_0^{+\infty} q(x)F(u) dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{\beta} \int_0^{+\infty} h(x)|u|^\beta(x) dx - D_2 \int_0^{+\infty} q(x) dx \\ &\quad - \frac{A + \varepsilon}{2} \int_0^{+\infty} q(x)|u|^2 dx - \frac{B + \varepsilon}{\beta + 1} \int_0^{+\infty} q(x)|u|^{\beta+1} dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{\beta} M_{\beta,h}^\beta \|u\|^\beta - \frac{(A + \varepsilon)}{2} M_{2,q}^2 \|u\|^2 \\ &\quad - \frac{(B + \varepsilon)}{\beta + 1} M_{\beta+1,h}^{\beta+1} \|u\|^{\beta+1} - D_2 \|q\|_{L^1}, \end{aligned}$$

et puis,

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{(A + \varepsilon)}{2} M_{2,q}^2\right) \|u\|^2 - \frac{\lambda}{\beta} M_{\beta,h}^\beta \|u\|^\beta \\
&\quad - \frac{(B + \varepsilon)}{\beta + 1} M_{\beta+1,h}^{\beta+1} \|u\|^{\beta+1} - D_2 \|q\|_{L^1} \\
&\geq \|u\|^2 \left[ \frac{1}{2} \left(1 - (A + \varepsilon) M_{2,q}^2\right) - \frac{\lambda}{\beta} M_{\beta,h}^\beta \|u\|^{\beta-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(B + \varepsilon)}{\beta + 1} M_{\beta+1,h}^{\beta+1} \|u\|^\beta \right] - D_2 \|q\|_{L^1} \\
&\geq \|u\|^2 \left[ \frac{1}{2} \left(1 - (A + \varepsilon) M_{2,q}^2\right) - \lambda K_1 \|u\|^{\beta-1} - K_2 \|u\|^\beta \right] \\
&\quad - K_3
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où  $K_1 = \frac{1}{\beta} M_{\beta,h}^\beta$ ,  $K_2 = \frac{(B+\varepsilon)}{\beta+1} M_{\beta+1,h}^{\beta+1}$ , et  $K_3 = D_2 \|q\|_{L^1}$ ; ici  $\varepsilon$  et  $D_2$  sont donnés dans la preuve de la proposition 3.1. Soit

$$g(t) = \lambda K_1 t^{\beta-2} + K_2 t^{\beta-1} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Clairement,

$$g'(t) = \lambda K_1 (\beta - 2) t^{\beta-3} + K_2 (\beta - 1) t^{\beta-2} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

De  $g'(t_0) = 0$ , on a

$$t_0 = \frac{\lambda K_1 (2 - \beta)}{K_2 (\beta - 1)}.$$

Alors

$$g(t_0) = \frac{2\lambda^{\beta-1} K_1^{\beta-1}}{(\beta - 1) K_2^{\beta-2}}.$$

Ainsi, il existe  $0 < \xi_1 < \left[ \frac{(\beta-1)K_2}{4K_1} \left(1 - (A + \varepsilon) M_{2,q}^2\right) \right]^{\frac{1}{\beta-1}}$ , tel que

$$g(t_0) < \frac{1}{2} \left(1 - (A + \varepsilon) M_{2,q}^2\right) \quad \text{pour tout } 0 < \lambda \leq \xi_1.$$

Par conséquent, en prenant  $\rho = t_0$ , et on choisit  $\lambda \in (0, \xi_1)$  tel que

$$m_0 = \rho^2 \left[ \frac{1}{2} \left(1 - (A + \varepsilon) M_{2,q}^2\right) - \lambda K_1 \rho^{\beta-2} - K_2 \rho^{\beta-1} \right] > K_3,$$

d'après (3.14), nous avons que

$$J_\lambda(u) \geq \alpha > 0 \quad \text{quand } \|u\| = \rho, \tag{3.15}$$

où  $\alpha = m_0 - K_3$ . Donc (a) est prouvé.

(b). Pour  $t > 0$  assez grand, puis à partir de (3.10), on a

$$\begin{aligned}
J_\lambda(t\bar{\psi}_{\beta+1,q}) &= \frac{1}{2}t^2\|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|^2 - \frac{\lambda}{\beta}t^\beta \int_0^{+\infty} h(x)|\bar{\psi}_{\beta+1,q}|^\beta dx - \int_0^{+\infty} q(x)F(t\bar{\psi}_{\beta+1,q})dx \\
&\leq \frac{1}{2}t^2\|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|^2 - \frac{\lambda}{\beta}t^\beta \int_0^{+\infty} h(x)|\bar{\psi}_{\beta+1,q}|^\beta dx - \frac{(A-\varepsilon)}{2}t^2 \int_0^{+\infty} q(x)|\bar{\psi}_{\beta+1,q}|^2 dx \\
&\quad - \frac{(B-\varepsilon)}{\beta+1}t^{\beta+1} \int_0^{+\infty} q(x)|\bar{\psi}_{\beta+1,q}|^{\beta+1} dx + D_2 \int_0^{+\infty} q(x)dx \\
&\leq \frac{1}{2}t^2\|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|^2 - \frac{\lambda}{\beta}t^\beta\|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta,h}^\beta - \frac{(A-\varepsilon)}{2}t^2\|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{2,q}^2 \\
&\quad - \frac{(B-\varepsilon)}{\beta+1}t^{\beta+1}\|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta+1,q}^{\beta+1} + D_2\|q\|_{L^1} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|^2 - (A-\varepsilon)\|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{2,q}^2\right)t^2 - \frac{\lambda}{\beta}\|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta,h}^\beta t^\beta \\
&\quad - \frac{(B-\varepsilon)}{\beta+1}\|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta+1,q}^{\beta+1} t^{\beta+1} + K_3.
\end{aligned}$$

Par suite  $J_\lambda(t\bar{\psi}_{\beta+1,q}) \rightarrow -\infty$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ . On choisit  $t_1 > 0$  assez grand et  $e = t_1\bar{\psi}_{\beta+1,q}$ . Par conséquent, nous concluons que

$$J_\lambda(e) < 0 \quad \text{quand} \quad \|e\| > \rho.$$

Donc (b) est prouvé. ■

Dans une version du théorème du Col sans la condition de Palais-Smale [24], il existe une suite  $(u_n) \subset H_0^1(0, +\infty)$  de  $(P.S)_c$  pour  $J_\lambda$  qui satisfait (2.5), i.e.,

$$J_\lambda(u_n) \rightarrow c, \quad \text{et} \quad J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0,$$

où

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(\gamma(t)),$$

avec

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H_0^1(0, +\infty)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\},$$

où  $e$  est donné dans le lemme 3.4.

**Remarque 3.1.** Puisque la suite  $(u_n^+)$  aussi satisfait (2.5) (voir [23]), nous supposons, sans perte de généralité, que  $u_n \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Lemme 3.5.** Supposons que les hypothèses  $(H_0) - (H_4)$  sont vérifiées. Alors, le niveau du Col  $c$  satisfait l'inégalité suivante

$$c < \left( \frac{\bar{\lambda}_{\beta+1,q}^{\beta+1}}{(B-\varepsilon)} \right)^{\frac{2}{\beta-1}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) + K_3;$$

ici  $K_3$  est donné dans la preuve du lemme 3.4.

**Démonstration** - A partir de la preuve du lemme 3.4, on peut considérer  $\gamma(t) = tt_1\bar{\psi}_{\beta+1,q}$ , où  $t_1 > 0$  est suffisamment grand pour que  $e = t_1\bar{\psi}_{\beta+1,q}$ . Ainsi, d'après la définition de  $c$ ,

$$c \leq \max_{t \geq 0} J_\lambda(t\bar{\psi}_{\beta+1,q}),$$

c'est-à-dire,

$$c \leq \max_{t \geq 0} \left\{ \frac{1}{2}t^2 \|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|^2 - \frac{\lambda}{\beta} t^\beta \|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta,h}^\beta - \int_0^{+\infty} q(x) F(t\bar{\psi}_{\beta+1,q}) dx \right\}.$$

De (3.10), on a

$$\begin{aligned} c &\leq \max_{t \geq 0} \left\{ \frac{1}{2}t^2 \|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|^2 - \frac{\lambda}{\beta} t^\beta \|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta,h}^\beta - \frac{(A-\varepsilon)}{2} t^2 \|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{2,q}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{(B-\varepsilon)}{\beta+1} t^{\beta+1} \|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta+1,q}^{\beta+1} + K_3 \right\} \\ &\leq \max_{t \geq 0} \left\{ \frac{1}{2}t^2 \|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|^2 - \frac{(B-\varepsilon)}{\beta+1} t^{\beta+1} \|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta+1,q}^{\beta+1} \right\} + K_3, \end{aligned}$$

et puis

$$\frac{c}{\|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta+1,q}^2} \leq \max_{t \geq 0} \left\{ \frac{\bar{\lambda}_{\beta+1,q}^2}{2} t^2 - \frac{(B-\varepsilon)}{\beta+1} \|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta+1,q}^{\beta-1} t^{\beta+1} \right\} + \frac{K_3}{\|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta+1,q}^2}.$$

Soit

$$Z(t) = \frac{\bar{\lambda}_{\beta+1,q}^2}{2} t^2 - \frac{(B-\varepsilon)}{\beta+1} \|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta+1,q}^{\beta-1} t^{\beta+1}.$$

Clairement,

$$Z'(t) = \bar{\lambda}_{\beta+1,q}^2 t - (B-\varepsilon) \|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta+1,q}^{\beta-1} t^\beta.$$

Puisque la fonction  $Z$  atteint son maximum à

$$t = \left[ \frac{\bar{\lambda}_{\beta+1,q}^2}{(B-\varepsilon) \|\bar{\psi}_{\beta+1,q}\|_{\beta+1,q}^{\beta-1}} \right]^{\frac{1}{\beta-1}},$$

il s'ensuit que

$$c < \left( \frac{\bar{\lambda}_{\beta+1,q}^{\beta+1}}{(B-\varepsilon)} \right)^{\frac{2}{\beta-1}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\beta+1} \right) + K_3,$$

et donc, nous avons que

$$c < \left( \frac{\bar{\lambda}_{\beta+1,q}^{\beta+1}}{(B-\varepsilon)} \right)^{\frac{2}{\beta-1}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) + K_3.$$

■

**Lemme 3.6.** *Il existe  $\xi_2 > 0$  tel que, pour  $0 < \lambda < \xi_2$ , la suite de Palais-Smale  $(u_n)$  associée à la fonctionnelle  $J_\lambda$  satisfait*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2 < 2 \left( \frac{\bar{\lambda}_{\beta+1,q}^{\beta+1}}{(B-\varepsilon)} \right)^{\frac{2}{\beta-1}} + M_{\beta,h}^{\frac{2\beta}{2-\beta}} + \frac{4K_3\mu}{\mu-2}.$$

**Démonstration** - Tout d'abord, notez que  $(u_n)$  est borné dans  $H_0^1(0, +\infty)$ . En effet, de (2.5), on a

$$J_\lambda(u_n) \rightarrow c, \quad \text{et} \quad \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty.$$

On remarque que à partir de (3.5), nous avons que

$$\int_0^{+\infty} q(x) f(u_n) u_n dx = \|u_n\|^2 - \lambda \|u_n\|_{\beta,h}^\beta - \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle.$$

Utilisation du corollaire 3.1 et  $(H_4)$ , il découle de (2.5), on a cette inégalité

$$\begin{aligned} c + \varepsilon > J_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{\beta} \|u_n\|_{\beta,h}^\beta - \int_0^{+\infty} q(x) F(u_n) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{\beta} \|u_n\|_{\beta,h}^\beta - \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} q(x) f(u_n) u_n dx \\ &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - \lambda \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|_{\beta,h}^\beta + \frac{1}{\mu} \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle \\ &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - \lambda M_{\beta,h}^\beta \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^\beta + \frac{1}{\mu} \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle \\ &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - \lambda M_{\beta,h}^\beta \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^\beta \\ &\quad - \frac{1}{\mu} \|J'_\lambda(u_n)\| \|u_n\|. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Puisque  $J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$ , il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  assez grand pour que

$$c + \varepsilon > \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - \lambda M_{\beta,h}^\beta \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^\beta - o_n(1) \|u_n\|, \quad \forall n > N_0. \tag{3.17}$$

Cela implique que  $(u_n) \subset H_0^1(0, +\infty)$  est bornée. Maintenant, nous pouvons écrire (3.17) comme

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 \leq \lambda M_{\beta,h}^\beta \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^\beta + o_n(1) \|u_n\| + c + \varepsilon. \tag{3.18}$$

En utilisant l'inégalité de Young dans (3.18), nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_n\|^2 &\leq \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu}\right) \left[ \frac{2-\beta}{2} M_{\beta,h}^{\frac{2\beta}{2-\beta}} + \frac{\beta}{2} \lambda^{\frac{2}{\beta}} \|u_n\|^2 \right] + o_n(1) \|u_n\| + c + \varepsilon \\ &\leq \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu}\right) \frac{2-\beta}{2} M_{\beta,h}^{\frac{2\beta}{2-\beta}} + \frac{\beta}{2} \lambda^{\frac{2}{\beta}} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_n\|^2 \\ &\quad + o_n(1) \|u_n\| + c + \varepsilon, \end{aligned}$$

et puis, nous avons que

$$\left[ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) - \frac{\beta}{2} \lambda^{\frac{2}{\beta}} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu}\right) \right] \|u_n\|^2 \leq \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu}\right) \frac{2-\beta}{2} M_{\beta,h}^{\frac{2\beta}{2-\beta}} + o_n(1) \|u_n\| + c + \varepsilon.$$

On choisit  $0 < \lambda \leq \xi_2 = \left[ \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)^{\frac{\beta}{2}}}{\beta \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu}\right)} \right]$ , puis en utilisant le lemme 3.5, nous concluons que

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &\leq \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \right]^{-1} \\ &\quad \times \left[ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \left( \frac{\bar{\lambda}_{\beta+1,q}^{\beta+1}}{(B-\varepsilon)^{\frac{2}{\beta-1}}} + K_3 + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu}\right) \frac{2-\beta}{2} M_{\beta,h}^{\frac{2\beta}{2-\beta}} + o_n(1) \|u_n\| + \varepsilon \right) \right]. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2 &\leq \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \right]^{-1} \left[ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \left( \frac{\bar{\lambda}_{\beta+1,q}^{\beta+1}}{(B-\varepsilon)^{\frac{2}{\beta-1}}} + K_3 + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu}\right) \frac{2-\beta}{2} M_{\beta,h}^{\frac{2\beta}{2-\beta}} \right) \right] \\ &< 2 \left( \frac{\bar{\lambda}_{\beta+1,q}^{\beta+1}}{(B-\varepsilon)^{\frac{2}{\beta-1}}} + M_{\beta,h}^{\frac{2\beta}{2-\beta}} + \frac{4K_3\mu}{\mu-2} \right). \end{aligned}$$

■

Puisque  $(u_n)$  satisfaisant (2.5) est bornée dans  $H_0^1(0, +\infty)$  (voir Lemme 3.6), il existe  $u_1 \in H_0^1(0, +\infty)$  de telle sorte que, pour une sous-suite, nous avons que

$$u_n \rightharpoonup u_1 \quad \text{dans } H_0^1(0, +\infty), \quad (3.19)$$

$$u_n \rightarrow u_1 \quad \text{dans } L_g^r(0, +\infty), \quad (3.20)$$

pour tout  $r \in \{\beta, 2, \beta + 1\}$  pour toutes  $g \in \{h, q\}$  et

$$u_n(x) \rightarrow u_1(x) \quad \text{p.p, dans } (0, +\infty). \quad (3.21)$$

Dans le lemme suivant, nous obtenons des résultats de convergences concernant la suite  $(u_n)$  et sa limite faible  $u_1$ .

**Lemme 3.7.** *Les limites suivantes sont satisfaites*

$$(c) \int_0^{+\infty} q(x) |f(u_n) - f(u_1)| |u_n - u_1| dx = o_n(1),$$

$$(d) \int_0^{+\infty} h(x) \left| |u_n|^{\beta-2} u_n - |u_1|^{\beta-2} u_1 \right| |u_n - u_1| dx = o_n(1).$$

**Démonstration** - (c). D'après (3.8) et en utilisant Corollaire 3.1, les lemmes 3.5, et 3.6, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} q(x) |f(u_n) - f(u_1)| |u_n - u_1| dx &\leq \int_0^{+\infty} q(x) |f(u_n)| |u_n - u_1| dx \\ &\quad + \int_0^{+\infty} q(x) |f(u_1)| |u_n - u_1| dx \\ &\leq 2D_1 \int_0^{+\infty} q(x) |u_n - u_1| dx + \\ &\quad (A + \varepsilon) \int_0^{+\infty} q(x) |u_n| |u_n - u_1| dx + (A + \varepsilon) \int_0^{+\infty} q(x) |u_1| |u_n - u_1| dx \\ &\quad + (B + \varepsilon) \int_0^{+\infty} q(x) |u_n|^\beta |u_n - u_1| dx + (B + \varepsilon) \int_0^{+\infty} q(x) |u_1|^\beta |u_n - u_1| dx \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} q(x) |f(u_n) - f(u_1)| |u_n - u_1| dx &\leq 2D_1 \left( \int_0^{+\infty} q(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{+\infty} q(x) |u_n - u_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad (A + \varepsilon) \left( \int_0^{+\infty} q(x) |u_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{+\infty} q(x) |u_n - u_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + (A + \varepsilon) \left( \int_0^{+\infty} q(x) |u_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{+\infty} q(x) |u_n - u_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + (B + \varepsilon) \left( \int_0^{+\infty} q(x) |u_n|^\beta dx \right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left( \int_0^{+\infty} q(x) |u_n - u_1|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &\quad + (B + \varepsilon) \left( \int_0^{+\infty} q(x) |u_1|^\beta dx \right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left( \int_0^{+\infty} q(x) |u_n - u_1|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} q(x)|f(u_n) - f(u_1)||u_n - u_1|dx &\leq 2D_1\|q\|_{L^1}\|u_n - u_1\|_{2,q} + (A + \varepsilon)\|u_n\|_{2,q}\|u_n - u_1\|_{2,q} \\
&\quad + (A + \varepsilon)\|u_1\|_{2,q}\|u_n - u_1\|_{2,q} + (B + \varepsilon)\|u_n\|_{\beta,q}^{\beta-1}\|u_n - u_1\|_{\beta,q} \\
&\quad + (B + \varepsilon)\|u_1\|_{\beta,q}^{\beta-1}\|u_n - u_1\|_{\beta,q} \\
&\leq C_{1,\varepsilon}\|u_n - u_1\|_{2,q} + C_{2,\varepsilon}\|u_n - u_1\|_{\beta,q},
\end{aligned}$$

où

$$C_{1,\varepsilon} = 2(A + \varepsilon)M_{2,q}\overline{C}^{\frac{1}{2}} + 2D_1\|q\|_{L^1}, \quad C_{2,\varepsilon} = 2(B + \varepsilon)(M_{2,h}\overline{C}^{\frac{1}{2}})^{\beta-1} \text{ et}$$

$$\overline{C} = 2\left(\frac{\lambda^{\beta+1}}{B-\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\beta-1}} + M_{\beta,h}^{\frac{2\beta}{2-\beta}} + \frac{4K_3\mu}{\mu-2}.$$

Alors selon (3.20) on a

$$\int_0^{+\infty} \left[ q(x)|f(u_n) - f(u_1)||u_n - u_1| \right] dx = o_n(1).$$

(d). D'après Corollaire 3.1, les lemmes 3.5, et 3.6, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} h(x)\left| |u_n|^{\beta-2}u_n - |u_1|^{\beta-2}u_1 \right| |u_n - u_1| dx &\leq \int_0^{+\infty} h(x)|u_n|^{\beta-1}|u_n - u_1| dx \\
&\quad + \int_0^{+\infty} h(x)|u_1|^{\beta-1}|u_n - u_1| dx \\
&\leq \left( \int_0^{+\infty} h(x)|u_n|^\beta dx \right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left( \int_0^{+\infty} h(x)|u_n - u_1|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&\quad + \left( \int_0^{+\infty} h(x)|u_1|^\beta dx \right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left( \int_0^{+\infty} h(x)|u_n - u_1|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&\leq \|u_n\|_{\beta,h}^{\beta-1}\|u_n - u_1\|_{\beta,h} + \|u_1\|_{\beta,h}^{\beta-1}\|u_n - u_1\|_{\beta,h} \\
&\leq 2C_3\|u_n - u_1\|_{\beta,h},
\end{aligned}$$

où  $C_3 = (M_{\beta,h}\overline{C}^{\frac{1}{2}})^{\beta-1}$ . Alors, selon (3.20), nous avons

$$\int_0^{+\infty} h(x)\left| |u_n|^{\beta-2}u_n - |u_1|^{\beta-2}u_1 \right| |u_n - u_1| dx = o_n(1).$$

**Proposition 3.2.** *Supposons que  $f$  est une fonction satisfaisant  $(H_0) - (H_4)$ . Alors il existe une constante  $\bar{\xi} > 0$  telle que, pour  $0 < \lambda < \bar{\xi}$ , le problème (3.1) a une solution positive  $u_1$  satisfaisant  $J_\lambda(u_1) > 0$ .*

**Démonstration** - Soit  $u_1$  la limite faible de la suite  $(u_n)$  qui satisfait (2.5). Considérez  $\bar{\xi} = \min\{\xi_1, \xi_2\}$ , où  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont donnés dans les lemmes 3.4 et 3.6, respectivement. Nous prouverons que  $u_n \rightarrow u_1$  dans  $H_0^1(0, +\infty)$ . D'après (3.13), nous avons que

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u_1), u_n - u_1 \rangle &= \int_0^{+\infty} (u'_n - u'_1)(u'_n - u'_1) dx + \int_0^{+\infty} (u_n - u_1)(u_n - u_1) dx \\ &\quad - \lambda \int_0^{+\infty} h(x) (|u_n|^{\beta-2} u_n - |u_1|^{\beta-2} u_1) (u_n - u_1) dx \\ &\quad - \int_0^{+\infty} q(x) (f(u_n) - f(u_1)) (u_n - u_1) dx. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|u_n - u_1\|^2 &\leq |\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u_1), u_n - u_1 \rangle| + \lambda \int_0^{+\infty} h(x) \left| |u_n|^{\beta-2} u_n - |u_1|^{\beta-2} u_1 \right| |u_n - u_1| dx \\ &\quad + \int_0^{+\infty} q(x) |f(u_n) - f(u_1)| |u_n - u_1| dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, à partir du lemme 3.7 ci-dessus et en tenant compte du fait que  $J'_\lambda$  est continue (voir Proposition 3.1), nous avons que

$$\|u_n - u_1\|^2 = \int_0^{+\infty} |u'_n - u'_1|^2 dx + \int_0^{+\infty} |u_n - u_1|^2 dx = o_n(1).$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^{+\infty} |u'_n - u'_1|^2 dx + \int_0^{+\infty} |u_n - u_1|^2 dx \right] = 0.$$

c'est-à-dire,  $u_n \rightarrow u_1$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $H_0^1(0, +\infty)$ , i.e.,  $(u_n)$  satisfait la condition de Palais-Smale. Maintenant, en appliquant le théorème du Col, nous obtenons

$$J'_\lambda(u_1) = 0, \text{ et } J_\lambda(u_1) = c > 0.$$

■

### 3.2.2 Existence d'une seconde solution

Nous appliquons maintenant le principe variationnel d'Ekeland pour prouver l'existence d'une solution faible  $u_2$  qui est différente de la solution  $u_1$ .

**Lemme 3.8.** *Supposons que  $(H_0) - (H_4)$  sont satisfait. Alors il existe une constante  $\xi_3 > 0$  telle que, pour  $0 < \lambda < \xi_3$ , la fonctionnelle  $J_\lambda$  satisfait la condition  $(P.S)_d$  avec  $d < 0$ .*

**Démonstration** - Fixe  $d < 0$  et suppose que  $(u_n) \subset H_0^1(0, +\infty)$  satisfait

$$J_\lambda(u_n) \rightarrow d, \text{ et } J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (3.22)$$

On besoin montrer que  $(u_n)$  admet une sous-suite convergeant fortement dans  $H_0^1(0, +\infty)$ . Procédez comme dans (3.18), et nous obtenons

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_n\|^2 \leq \lambda M_{\beta,h}^\beta \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_n\|^\beta + o_n(1) \|u_n\| + d + \varepsilon.$$

Ainsi, pour une sous-suite, nous avons que

$$\left[ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^{2-\beta} - \lambda M_{\beta,h}^\beta \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu}\right) \right] \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^\beta \leq d < 0.$$

Par conséquent,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2 \leq \left( \lambda \frac{M_{\beta,h}^\beta \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)} \right)^{\frac{2}{2-\beta}} < \left( \lambda M_{\beta,h}^\beta \right)^{\frac{2}{2-\beta}}. \quad (3.23)$$

On choisir

$$\xi_3 = M_{\beta,h}^{-\beta} \left[ 2 \left( \frac{\bar{\lambda}^{\beta+1,q}}{(B-\varepsilon)} \right)^{\frac{2}{\beta-1}} + M_{\beta,h}^{\frac{2\beta}{2-\beta}} + \frac{4K_3\mu}{\mu-2} \right]^{\frac{2-\beta}{2}},$$

nous avons ça pour  $\lambda < \xi_3$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2 < 2 \left( \frac{\bar{\lambda}^{\beta+1,q}}{(B-\varepsilon)} \right)^{\frac{2}{\beta-1}} + M_{\beta,h}^{\frac{2\beta}{2-\beta}} + \frac{4K_3\mu}{\mu-2}. \quad (3.24)$$

D'après (3.24) nous avons que  $(u_n)$  est bornée dans  $H_0^1(0, +\infty)$ , et il existe  $u \in H_0^1(0, +\infty)$  tel que  $u_n \rightharpoonup u$  dans  $H_0^1(0, +\infty)$ . Maintenant, nous pouvons répéter les mêmes arguments employés dans les preuves du Lemme 3.6 et de la proposition 3.2 pour conclure que  $u_n \rightarrow u$  dans  $H_0^1(0, +\infty)$ . ■

**Proposition 3.3.** *Supposons que  $f$  est une fonction satisfaisant  $(H_0) - (H_4)$ . Alors, il existe une constante  $\hat{\xi} > 0$  telle que, pour  $0 < \lambda < \hat{\xi}$ , le problème (3.1) a une solution positive  $u_2$  satisfaisant  $J_\lambda(u_2) < 0$ .*

**Démonstration** - On considère l'espace métrique complet

$$\overline{B}_\rho(0) := \{u \in H_0^1(0, +\infty) : \|u\| \leq \rho\},$$

avec une métrique donnée par  $d(u, w) = \|u - w\|$ . La fonctionnelle  $J_\lambda$  est bornée inférieurement sur  $\overline{B}_\rho(0)$ , pour  $\lambda < \xi_1$ , (voir Lemme 3.3). Notez que pour tout,

$$t < \min \left\{ \frac{\delta_1}{\|\overline{\psi}_{\beta,h}\|}, \frac{1}{\|\overline{\psi}_{\beta,h}\|_{\beta,h}} \left( \frac{2\lambda}{\beta\lambda_{\beta,h}^2} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \right\}$$

(où  $t$  au voisinage de 0), puis en utilisant  $(H_3)$  dans (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\overline{\psi}_{\beta,h}) &= \frac{1}{2}t^2\|\overline{\psi}_{\beta,h}\|^2 - \frac{\lambda}{\beta}t^\beta\|\overline{\psi}_{\beta,h}\|_{\beta,h}^\beta - \int_0^{+\infty} q(x)F(t\overline{\psi}_{\beta,h})dx \\ &\leq \frac{1}{2}t^2\|\overline{\psi}_{\beta,h}\|^2 - \frac{\lambda}{\beta}t^\beta\|\overline{\psi}_{\beta,h}\|_{\beta,h}^\beta - \frac{(A-\varepsilon)}{2}t^2\|\overline{\psi}_{\beta,h}\|_{2,q}^2 \\ &= \frac{1}{2}t^2\|\overline{\psi}_{\beta,h}\|^2 \left[ 1 - \frac{2\lambda t^{\beta-2}}{\beta\lambda_{\beta,h}^2} \|\overline{\psi}_{\beta,h}\|_{\beta,h}^{\beta-2} \right] \\ &\quad - \frac{(A-\varepsilon)}{2}t^2\|\overline{\psi}_{\beta,h}\|_{2,q}^2 < 0, \end{aligned} \tag{3.25}$$

par (3.15). Alors, au vu de (3.25), on voit que

$$\inf_{u \in \overline{B}_\rho(0)} J(u) < 0 < \inf_{u \in \partial\overline{B}_\rho(0)} J(u). \tag{3.26}$$

Par conséquent, en appliquant le principe variationnel d'Ekeland dans  $\overline{B}_\rho(0)$ , il existe une suite de minimisation  $(u_n)_{n \geq 1} \subset \overline{B}_\rho(0)$  telle que

$$J_\lambda(u_n) \rightarrow d := \inf \left\{ J_\lambda(u) : u \in \overline{B}_\rho(0) \right\}, \tag{3.27}$$

*i.e.*

$$J(u_n) \leq \inf_{u \in \overline{B}_\rho(0)} J(u) + \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1,$$

et pour chaque  $w \in \overline{B}_\rho(0)$  avec  $w \neq u_n$ ,

$$J_\lambda(w) - J_\lambda(u_n) + \frac{1}{n}\|u_n - w\| > 0. \tag{3.28}$$

Soit  $v \in H_0^1(0, +\infty)$ . On considère la suite  $w_n := u_n + tv \subset \overline{B}_\rho(0)$ ,  $t$  près de 0 (assez petite), et pour tout  $n \geq 1$ . De (3.28), on obtient

$$\frac{1}{t} [J_\lambda(u_n + tv) - J_\lambda(u_n)] > -\frac{1}{n}\|v\|.$$

Donc,  $\langle J'_\lambda(u_n), v \rangle \geq -\frac{1}{n}\|v\|$  et de même,  $\langle J'_\lambda(u_n), (-v) \rangle \geq -\frac{1}{n}\|v\|$ . Par suite

$$|\langle J'_\lambda(u_n), v \rangle| < \frac{1}{n}\|v\|, \quad \text{pour toute } v \in H_0^1(0, +\infty).$$

Par conséquent,

$$\|J'_\lambda(u_n)\| \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (3.29)$$

Fixe  $\widehat{\xi} := \min\{\xi_1, \xi_3\}$  où  $\xi_1$  et  $\xi_3$  sont donnés par les lemmes 3.4 et 3.8, respectivement. Alors d'après (3.27) et (3.29), il s'ensuit que  $(u_n)_{n \geq 1}$  est une suite  $(P.S)_d$  pour la fonctionnelle  $J_\lambda$  pour tout  $0 < \lambda < \widehat{\xi}$ . En utilisant le lemme 3.8 et la proposition 3.2, nous obtenons une sous-suite, toujours notée  $(u_n)_{n \geq 1}$ , qui converge fortement vers une fonction  $u_2 \in H_0^1(0, +\infty)$ . Dans ce cas

$$J'_\lambda(u_2) = 0.$$

Maintenant, nous allons vérifier  $J_\lambda(u_2) < 0$  pour compléter la preuve. Notez que l'utilisation  $(H_4)$  et (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} d + o_n(1) &= J_\lambda(u_n) - \frac{1}{\mu} J'_\lambda(u_n) u_n = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 \\ &\quad - \lambda \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu} \right) \int_0^{+\infty} h(x) \|u_n\|^\beta - \int_0^{+\infty} \left( F(u_n) - \frac{1}{\mu} f(u_n) u_n \right) + o_n(1). \end{aligned}$$

D'après lemme de Fatou, nous concluons que

$$d = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( J_\lambda(u_n) - \frac{1}{\mu} J'_\lambda(u_n) u_n \right) \geq J_\lambda(u_2) - \frac{1}{\mu} J'_\lambda(u_2) u_2.$$

Donc,

$$J_\lambda(u_2) = d < 0. \quad \blacksquare$$

**Remarque 3.2.** Si  $u$  est une solution non triviale au problème (3.1), par la remarque 3.1,  $u \geq 0$ . De plus, comme conséquence de (3.26) et  $J_\lambda(0) = 0$ , nous avons  $u > 0$  dans  $(0, +\infty)$ .

**Preuve du théorème 3.1 :** Nous prenons  $\xi := \min\{\bar{\xi}, \widehat{\xi}\}$ , puis la preuve du Théorème 3.1 découle directement des Propositions 3.2, 3.3, et la remarque 3.2.  $\square$

### 3.3 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer nos résultats.

**Exemple 3.1.** On considère le problème

$$\begin{cases} -u'' + u = \lambda h(x)|u|^{\beta-2}u + q(x)f(u), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

où

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2M_{2,q}^2}|u| + (\bar{\lambda}_{2,q}^2 + 1)|u|^\beta, & \text{si } |u| \leq 1; \\ (\bar{\lambda}_{2,q}^2 + 1)|u|^\beta + \frac{1}{2M_{2,q}^2}, & \text{si } |u| \geq 1, \end{cases}$$

$q(x) = \frac{1}{4D_2}e^{-\frac{3}{2}x}$  et  $h(x) = e^{-\frac{4}{3}x}$ . On choisissez  $p(x) = e^{-\frac{1}{4}x}$  et nous voyons que

$$\frac{q}{p}(x) = \frac{1}{4D_2}e^{-\frac{5}{4}x}, \quad \frac{q}{p^2}(x) = \frac{1}{4D_2}e^{-x}, \quad \frac{h}{p^{\beta-1}}(x) = e^{\frac{1}{4}(\beta-\frac{19}{3})x}, \quad \frac{q}{p^\beta}(x) = \frac{1}{4D_2}e^{\frac{1}{4}(\beta-6)x},$$

$$\frac{h}{p^\beta}(x) = e^{\frac{1}{4}(\beta-\frac{4}{3})x}, \quad \text{et} \quad \frac{q}{p^{\beta+1}}(x) = \frac{1}{4D_2}e^{\frac{1}{4}(\beta-5)x}$$

sont dans  $L^1[0, +\infty)$  pour tout  $\beta \in (1, 2)$ . Notez que  $\bar{\lambda}_{2,q} > \frac{1}{M_{2,q}}$ , et nous obtenons aussi que

$$M_{2,q} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15D_2}}, \quad A := \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{|u|} = \frac{1}{2M_{2,q}^2} \quad \text{et} \quad B := \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{|u|^\beta} = (\bar{\lambda}_{2,q}^2 + 1).$$

Il est facile de voir que les conditions  $(H_0) - (H_4)$  sont satisfait. Ainsi, à partir du Théorème 3.1, (3.30) a au moins deux solutions positives pour chaque  $\lambda \in (0, \xi)$ .

---

# Conclusion

---

Dans ce travail, on a étudié le principe variationnel d'Ekeland et quelques théories et on étudié un problème aux limites d'ordre deux posés sur l'intervalle non borné  $[0, +\infty)$  par des méthodes variationnelles, le lemme du Col ainsi que le principe variationnel d'Ekeland (EVP). Dans le premier chapitre, on a donné quelques outils de base, qui sont nécessaires pour ce travail, comme la théorie des points critiques, la différentiabilité d'un opérateur dans l'espace de Banach et un lemme de compacité (C. Corduneanu).

Dans le deuxième chapitre, notre objectif était de montrer le théorème de Col (le lemme du Col), nous ont présenter deux théorème dérivés de ce Lemme, et aussi nous avons donner le principe variationnel d'Ekeland. On a introduire également une condition de compacité connue sous le nom de condition Palais-Smale.

En fin, on a étudié l'existence et la multiplicité de solutions pour le problèmes aux limites,

$$\begin{cases} -u'' + u = \lambda h(x)|u|^{\beta-2}u + q(x)f(u), & x \in (0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

où  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et sont des paramètres réels avec  $1 < \beta < 2$  et  $\lambda > 0$ .

Notre approche est variationnelle, nous avons utilisé le principe variationnel d'Ekeland et les solutions sont obtenues comme des minimums ou des points critiques d'une certaine fonctionnelle.

Nous prévoyons dans le futur d'essayer d'améliorer certains résultats de ce problème.

---

# Bibliographie

---

- [1] C. CORDUNEANU. *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*. Academic Press, New York. (1973).
- [2] DAHMANE BOUAFIA, TOUFIK MOUSSAOUI, AND DONAL O'REGAN. *Multiplicity of positive solutions for second order quasilinear equations*. *Mathematica Bohemica*. (2019), p20.
- [3] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI AND D. O'REGAN. *Existence of solutions for a second order problem on the half-line via Ekeland's variational principle*, *Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim.* **36** (2016) 131-140.
- [4] D. CAROLINE. *Théorèmes de Point Fixe et Principe Variationnel D'Ekeland*. Mémoire. Université de Montréal (2010).
- [5] J. BAPTISTE AND H. URRUTY. *Bases, Outils et Principes pour L'Analyse Variationnelle*. Springer. (1966).
- [6] J. M. BORWEIN AND Q. J. ZHU. *Techniques of Variational Analysis*. Springer. (2005).
- [7] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris (1983).
- [8] H. K. PATHAK. *An Introduction to Nonlinear Analysis and Fixed Point Theory*. Springer (2018).
- [9] I. EKELAND. *On the variational principle*. *J. Math. Anal. Appl.* **47**(1974), 324-353 .
- [10] M. BADIALE , E. SERRA. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners Existence Results via the Variational Approach*. Springer-Verlag London Limited (2011).
- [11] M. D. R. GROSSINHO AND S. A. TERSIAN. *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Differential Equations*. Springer Science. (2001).
- [12] O. FRITES, T. MOUSSAOUI, D. O'REGAN. *Existence of solutions via variational methods for a problem with nonlinear boundary conditions on the half-line*, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.* **22** (2015), pp. 395-407.
- [13] O. FRITES, T. MOUSSAOUI, AND D. O'REGAN. *On The Structure of The Critical Set of Non-Differentiable Functions with a Weak Compactness Condition*. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.* **22** (2015),395-407

- [14] P. H. RABINOWITZ. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. CBMS regional conference series in mathematics, vol. 65, American mathematical society, providence, RI (1986).
- [15] P. V. SUBRAHMANYAM. *Elementary Fixed Point Theorems*. Springer (2018).
- [16] S. FORMINE ET A. KOLMOGOROV. *Elément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Traduction française, Edition Mir. Moscou (1977).
- [17] V. TRENOGUINE. *Analyse fonctionnelle*. Traduction française, Edition, Mir. Moscou (1985).
- [18] Y. JABRI. *The Mountain Pass Theorem Variants, Generalizations and Some Applications*. Cambridge University Press, New York. (2003).
- [19] A. SZULKIN. *Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. **2** (1986) 77-109.
- [20] N.S. PAPAGEORGIOU, S.K. YIALLOUROU. *Handbook of Applied Analysis*, Springer, New-York. (2009).
- [21] D. O'REGAN, B. YAN AND R. P. AGARWAL. *Nonlinear boundary value problems on semi-infinite intervals using weighted spaces : An upper and lower solution approach*, Positivity. **11** (2007) 171-189.
- [22] S. DJEBALI, T. MOUSSAOUI. *A class of second order BVPs on infinite intervals*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. No. **4** (2006) 1-19.
- [23] C. O. ALVES. *Multiple positive solutions for equations involving critical Sobolev exponent in  $\mathbb{R}^N$* , Electron. J. Differential Equations. **13** (1997) 1-10.
- [24] M. WILLEM. *Minimax Theorems*, Birkhauser, (1986).

## Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème aux limites de second ordre, sur un intervalle non borné  $[0, +\infty)$ , et ainsi que le principe variationnel d'Ekeland et lemme du Col . Notre objectif dans cette étude était d'appliquer le principe de variationnel d'Ekeland et lemme du Col de la montagne pour étudier l'existence et multiplicité de solutions pour un problème aux limites quasi-linéaire de second ordre suivant :

$$\begin{cases} -u'' + u = \lambda h(x)|u|^{\beta-2}u + q(x)f(u), & x \in (0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

Lorsque nous avons utilisé la méthode variationnel, Il s'avère que la solution du problème consiste à définir les points minimum ou critiques d'une fonctionnel d'énergie. Mots clés : méthode variationnelle, point critique, principe variationnel d'Ekeland, théorème du Col de la montagne, la condition de palais-smale, solution positive

## ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة مسألة حدية من الدرجة الثانية على مجال غير محدود  $[0, +\infty)$  و كذلك مبدأ التغيرات لإكلاند و نظرية تمرّ الجبل. و لقد كان هدفنا من هذه الدراسة تطبيق مبدأ التغيرات لإكلاند و نظرية تمرّ الجبل لدراسة وجود و تعدد الحلول لمشكلة الحدود شبه الخطية من الدرجة الثانية بالترتيب التالي

$$\begin{cases} -u'' + u = \lambda h(x)|u|^{\beta-2}u + q(x)f(u), & x \in (0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

حيث إستخدمنا طريقة التغيرات و نظرية تمرّ الجبل، فأتضح أنّ حلول المسألة هو الحد الأدنى لدالة الطاقة.

كلمات مفتاحية : طريقة التغيرات، نظرية النقطة الحرجة، توطئة التمرّ الجبل، مبدأ التغيرات لإكلاند، نظرية بالي - سمال (Palais - Smale) ، الحل الموجب.

# Abstract

In this memory, we have studied a second-order boundary value problem, on an unbounded interval  $[0, +\infty)$ , and as well as Ekeland's variational principle and The mountainpasslemma . Our objective in this study was to apply the variational principle of Ekeland and The mountain-passlemmato study the existence and multiplicity of solutions for a second order quasi-linear boundary problem of the following order :

$$\begin{cases} -u'' + u = \lambda h(x)|u|^{\beta-2}u + q(x)f(u), & x \in (0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

When we used the variational method, it turns out that the solution of the problem is to define the minimum or critical points of an energy functional. Keywords :variational method, critical point, Ekeland's variational principle, mountain passtheorem, palais-smale condition, positive solution .

