UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Géométrie des espaces de Banach et analyse Harmonique

Par

Saida BALBOUL

Sujet

L'idéal des opérateurs m-linéaires (p;q;r)-sommants

Soutenu le 17/06 /2012 devant le jury composé de :

Président :	L. MEZRAG	Professeur	M'sila
Promoteur :	D.ACHOUR	Maître de Conférences A	M'sila
Examinateurs :	D. DRIHEM	Maître de Conférences A	M'sila

Promotion: 2011/2012

بسم الله الرحمن الرحيم

Dédicaces

À mes parents ...

REMERCIEMENTS

Ces recherches ont été réalisées sous l’excellente direction de Monsieur D. ACHOUR, Maître de conférences à l’Université Med Boudiaf de M’sila. Je tiens à vous exprimer toute mes immenses gratitudes pour avoir encadré, orienté et suivi le travail pendant la duré d’élaboration et de la rédaction de ce mémoire, aussi pour m’avoir accordé votre confiance. Je tiens à vous remercier très chaleureusement pour m’avoir donné l’occasion de travailler sur un sujet d’un tel intérêt et pour le temps qu’il a pu me consacrer. Ses compétences scientifiques, ses remarques et sa patience m’ont été d’un grand secours dans la réalisation de ce mémoire. J’espère avoir à nouveau l’occasion de travailler avec lui.

Mes plus vifs remerciements s’adressent à Monsieur, L. MEZRAG Professeur à l’Université de M’sila, pour m’avoir fait l’honneur d’accepter de présider le jury de soutenance de ce mémoire .

J’exprime enfin mes remerciements a Monsieur, D.DRIHEM Maître de conférences à l’Université Med Boudiaf de M’sila , membre du jury de soutenance.

Table des matières

Introduction

La théorie d'opérateurs p-sommant due à Pitesch en 1967, et qui permit peu après Lindenstrauss et Pełczyński de mettre en exergue l'importence du Théorème de Grothendieck, qui, bien que démontré au milieu des années 50 n'avait jusque là pas été bien compris. Au début des années 80, la théorie des idéaux d'opérateurs, comme il a été présenté par Pietsch et principalement dans [Pie80]. Plusieurs de ces idéaux d'opérateurs sont étudiés, parmi lesquelles on trouve l'idéal $\Pi_{p,q,r}$ des opérateurs linéaires (p,q,r)-sommants.

On dit qu'un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ est $(p;q;r)$-sommant s'il existe une constante positive C, telle que pour tout $(x_i)_{1\leq i\leq n} \subset X$ et tout $(y_i^*)_{1\leq i\leq n} \subset Y^*$, on a

$$\left\| \left(\left\langle T(x_i), y_i^* \right\rangle \right)_{1\leq i\leq n} \right\|_p \leq C \left\| (x_i)_{1\leq i\leq n} \right\|_{q.w} \left\| (y_i^*)_{1\leq i\leq n} \right\|_{r.w}$$

avec $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

Si $r = \infty$, on a le concept d'opérateur $(p;q)$-sommant est due à Mitiagin-Pełczyński [MP66].

L'espace $\Pi_{p;q;r}$ des opérateurs $(p;q;r)$-sommant est un quasi-Banach idéal muni de la quasi norme $\pi_{(p;q;r)}(T) = \inf c$. $\Pi_{(p;q;r)}$ possède de bonnes propriétés tel que, le théorème de Domination de Pietsch , le théorème d'inclusion,..ext.

Dans [Pie83] Pietsch a proposé une approche multilinéaire à la théorie des opérateurs absolument sommants et, plus généralement, à la théorie des idéaux d'opérateur. Motivés par l'importence de cette théorie, plusieurs auteurs ont développé et étudié plusieurs concepts relatifs à la sommabilité. Très récemment, D. Achour [Ach11] introduit la notion des opérateurs m-linéaires (p,q,r)-sommants.

Pour cela l'objectif de ce travail est de nous donner une étude approfondie de cette classe d'opérateurs

Ce travail est divisé en trois chapitres.

Dans le Chapitre Préliminaires, nous donnons rapidement les définitions de suites sommables et faiblement sommables. Nous donnons quelques informations sur les notions de type et cotype. Nous terminons ce chapitre par la définition d'un multi-idéal avec des exemples.

Dans le Chapitre 2, après avoir donné la définition et signalé la proprité d'ideal possédée par l'espace des opérateurs m-linéaires $(p; q_1, ...q_m; r)$-sommants, nous prouvons le Théorème de Domination de Pietsch. Il s'ensuit facilement que : Si $(r = \infty)$ ou $\left(r = \infty, \frac{1}{p} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m}\right)$ ou $(r = \infty, q_1 = \cdots = q_m = p)$, l'espace des opérateurs m-linéaires (p, q, r)-sommants est coincide avec l'espace des opérateurs m-linéaires $(p; q_1, ...q_m)$-sommants introduite par Pitesch dans [Pie83]. Finalement, nous obtenir certaines inclusions entre les différentes classes étudiées dans le présent document.

Nous donnons dans le Chapitre 3, quelques résultats, prouvés à l'origine d'une autre façon, mais que l'on obtient facilement à l'aide de propriétés des opérateurs $(p; q; r)$-sommants : le théorème du Théorème de Defant-Voigt [BP07] et le Théorème de Grothenieck [BPS11]..

Chapitre 1

Préliminaires

Nous donnons rapidement les définitions de suites sommables et faiblement sommables. Nous donnons quelques informations sur les notions de type et cotype. Nous terminons ce chapitre par la définition d'un multi-idéal avec des exemples.

1.1 Définitions

Soient n un entier, X un espace de Banach et $1 \leq p,p^* \leq +\infty$ (où p^* est appelé l'indice conjugué de p i.e.,$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).
On désingne par l_p (ou $l_p(\mathbb{K})$) l'espaces des suites scalaires (λ_i) telles que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < +\infty$.
C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|(\lambda_i)\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

L'espace l_∞ est l'espace des suites scalaires (λ_i) bornées, normées par

$$\|(\lambda_i)\|_\infty = \sup_i |\lambda_i| \,.$$

L'espace l_∞ est complet pour cette norme.L'espace c_0 est l'espace des suites scalaires (λ_i) telles que $\lim\limits_{i \longrightarrow +\infty} \lambda_i = 0$.c'est un sous espace fermé de l_∞, donc un espace de Banach.

Définition 1.1.1

Une suites (x_n) (resp. $(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X est absolument p-sommables si la suite scalaire $(\|x_n\|)_n$ (resp.$(\|x_i\|)_{1\leq i\leq n}$) est dans l_p.

On note $\ell_p(X)$ (resp. $\ell_p^n(X)$) l'espace des suites $(x_n)_n$ (resp. $(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X absolument p-sommables, muni de la norme

$$\begin{aligned}\|(x_n)\|_{\ell_p(X)} = \|(x_n)\|_p &= (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad ,1 \leq p < \infty \\ &= \sup_n \|x_n\| \quad ,p = \infty\end{aligned}$$

(resp.

$$\left.\begin{aligned}\left\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\right\|_{\ell_p^n(X)} = \left\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\right\|_p &= (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \quad ,1 \leq p < \infty \\ &= \sup_{1\leq i\leq n} \|x_i\| \quad ,p = \infty\end{aligned}\right).$$

Définition 1.1.2

Une suites (x_n) (resp. $(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X est faiblement p-sommables si la suite scalaire $(x^*(x_n))$ (resp. $(x^*(x_i)_{1\leq i\leq n}$) est dans l_p pour tout $x^* \in X^*$.

On note $\ell_{p.w}(X)$ (resp. $\ell_{p.w}^n(X)$) l'espace des suites (x_i) (resp. $(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X faiblement p-sommables. L'espace $l_p^\omega(X)$ est un espace normé et la norme est donnée par

$$\begin{aligned}\|(x_i)\|_{\ell_{p.w}(X)} = \|(x_i)\|_{p,\omega} &= \sup\left\{(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} : x^* \in B_{X^*}\right\} < \infty \quad ,1 \leq p < \infty \\ &= \sup_n \{\sup\{|x^*(x_n)| : x^* \in B_{X^*}\}\} \quad ,p = \infty\end{aligned}$$

Proposition 1.1.3

(a) *si* $1 \leq p < \infty$ *on a* $\ell_p^n(X) \subseteq \ell_{p.w}^n(X)$ *et de plus*

$$\left\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\right\|_{\ell_{p,w}^n(X)} \leq \left\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\right\|_{\ell_p^n(X)}.$$

(b) si $p = \infty$ on a $\ell_{\infty,w}(X) = \ell_\infty(X)$ et

$$\left\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\right\|_{\ell_{\infty,w}^n(X)} = \left\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\right\|_{\ell_\infty^n(X)}.$$

Cas particuiliare

(a) (voir ([DJT95])) On sait que $\ell_{p,w}(X) = \ell_p(X)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ si et seulement si $\dim X$ est fini.

(c) si $1 \leq p < \infty$ on a $\ell_{p,w}(X) = \mathcal{L}(\ell_{p*}, X)$ isometriqument. ■

(d) si $p = 1$ on a $\ell_{1,w}(X) = \mathcal{L}(c_0, X)$ isometriqument.

Lemme 1.1.4. Soit $1 \leq p < \infty$, alors pour tout $x = (x_i) \in \ell_p$ on a

$$\|x\|_p = \|(x_i)\|_p = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \right| : \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{p*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq 1 \right\}$$

Lemme 1.1.5. Pour $1 < p < \infty$, $\varphi_1, ..., \varphi_n \in X^*$, on a

$$(\sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, x_i \rangle \right| ; \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \leq 1 \right\}.$$

Preuve.

Si $\sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \leq 1$, on a :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, x_i \rangle \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\| \|x_i\| \leq (\sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}.$$

Fixons d'autre part $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$, avec $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^p = 1$ et $(\sum\limits_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \|\varphi_i\|$. Etant donné $\epsilon > 0$, soit $u_1, ..., u_n \in X$, de norme 1, tels que $\varphi_i(u_i) \geq 0$, et $\|\varphi_i\| \leq \varphi_i(u_i) + \epsilon$. Posons $v_i = \lambda_i u_i$. Nous voyons que :

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|\varphi_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(u_i) + \epsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v_i) \right| + \epsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\
&\leq \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) \right| ; \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \leq 1 \right\} + \epsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,
\end{aligned}$$

d'où le résultat, en faisant tendre ϵ vers 0.

Proposition 1.1.6. [Muj08, *lemme 1.1*] *Soit* $1 \leq p < \infty$ *et* $(y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \in \ell_{p,w}^n(Y^*)$

$$\left\|(y_i^*)_{1\leq i\leq n}\right\|_{\ell_{p,w}^n} = \sup_{\varphi\in B_{Y^{**}}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\varphi(y_i^*)|^p\right)^{\frac{1}{P}} = \sup_{y\in B_Y}\left\|(y_i^*(y))_{1\leq i\leq n}\right\|_p \tag{1.1}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\left\|(y_i^*)_{1\leq i\leq n}\right\|_{\ell_{p,w}^n} &= \sup_{\varphi\in B_{Y^{**}}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\varphi(y_i^*)|^p\right)^{\frac{1}{P}}\\
&= \sup_{\varphi\in B_{Y^{**}}}\sup_{\|\alpha_i\|_p\leq 1}\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi(y_i^*)\right|\\
&= \sup_{\|\alpha_i\|_p\leq 1}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i^*\right\|_{Y^*}\\
&= \sup_{\|\alpha_i\|_p\leq 1}\sup_{y\in B_Y}\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle y_i^*,y\rangle\right|\\
&= \sup_{y\in B_Y}\left(\sum_{i=1}^{n}|\langle y_i^*,y\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \sup_{y\in B_Y}\left\|(y_i^*(y))_{1\leq i\leq n}\right\|_p. \blacksquare
\end{aligned}$$

1.2 Type et cotype

Dans ce paragraphe, nous introduirons une classe d'espaces, que nous appellerons espaces de type p et de cotype q, avec quelques propriétés générales, et nous donnerons quelques exemples.

Soit $r_n(t)$ les variables aléatoires de Rademacher. Elles sont définies comme suit : pour chaque n dans N

$$\begin{aligned}
r_n : \quad [0,1] &\longrightarrow \{-1,+1\}\\
t &\longmapsto r_n(t) = \operatorname{sgn}\sin 2^n t\pi.
\end{aligned}$$

ou

$$r_n(t) = \begin{cases} (-1)^k & \frac{k}{2^n} < t < \frac{k+1}{2^n} \\ 0 & t = \frac{k}{2^n}, 1 \end{cases}$$

où $k = 0, 1, ..., 2^n - 1$.

Inégalité de Kahane : Si $0 < p, q < \infty$, alors il existe une constant positive $K_{p,q}$ telle que

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{p,q} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Passons maintenant aux notions de type et ctype.

Définition 1.2.1. Soit X un espace de Banach.

i) On dit que X est de *type* p $(1 \leq p \leq 2)$, s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que :

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour tous $x_1, ..., x_n \in X$, $(r_i)_{1 \leq i \leq \infty}$ étant fonctions de Rademacher. La meilleure constante C s'appelle la constante de type p de X, et se note $T_p(X)$.

ii) On dit que X est *de cotype* q $(2 \leq q \leq +\infty)$ s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que :

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

pour tous $x_1, ..., x_n \in X$. La meilleure constante C s'appelle la constante de cotype q de X, et se note $C_q(X)$.

Si $q = \infty$ on remplace $\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}$ par $max\{\|x_i\|; 1 \leq i \leq n\}$.

Exemple 1.2.2

1- Tout espace est trivialement de type 1, c'est simplement l'inégalité triangulaire, et de cotype ∞, parce que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\, x_i\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \geq max\left\{\|x_i\|\,; 1 \leq i \leq n\right\}$$

2- Tout espace de Hilbert est à la fois de type 2 et de cotype 2. Parce que, si X est isomorphe à un espace de Hilbert H, on a

$$\frac{1}{C}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\, x_i\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3- Si $1 \leq p \leq 2$, l_p est de type p et de cotype 2.

4- Si $2 \leq q \leq \infty$, l_p est de type 2 et de cotype q.

Théorème 1.2.3 [DJT95]

Le dual X^* d'un espace de Banach X de type p $(1 < p \leq 2)$ est de cotype p^*. De plus

$$C_{p^*}(X^*) \leq T_p(X).$$

C'est vrai aussi pour $p = 1$, mais c'est sans intéret. La preuve est basée sur le Lemme 1.1.5.

Preuve.

Soit $\varphi_1, ..., \varphi_n \in X^*$, et soit $x_1, ..., x_n \in X$, tels que $\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \leq 1$. Observons d'abord que, par l'orthogonalité des variables de Radmacher, indépendantes, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^n \langle\varphi_i, x_i\rangle\right| &= \left|\int_0^1 \left\langle \sum_{i=1}^n r_i(t)\,\varphi_i, \sum_{i=1}^n r_i(t)\, x_i\right\rangle dt\right| \\
&\leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\,\varphi_i\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\, x_i\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq T_p(X)\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\,\varphi_i\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq T_p(X)\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)\,\varphi_i\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}};
\end{aligned}$$

et le lemme 1.1.5 implique alors

$$(\sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \leq T_p(X) \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) \varphi_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui achève la preuve.

Remarque 1.2.4

Notons tout de suite que le cotype ne se dualise pas aussi bien : on verra, en effet, que $X = l_1$ est de cotype 2, mais $X = l_\infty$ n'est pas de type 2, et n'a meme aucun type $p > 1$. Pour dualiser le cotype, on a besoin d'une propriété supplémentaire pour X (K-convexe).

1.3 Idéal multilinéaire

Définition 1.3.1. Soient $m \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_m$ et Y des espaces des Banach . Un operateur T de $X_1 \times \ldots \times X_m$ dans Y est dit *multilinéaire* si pour tout $j = 1, \ldots, m$ et pour tout suites finie $\lambda_i\,(i = 1, \ldots, n)$ on a

$$T\left(x^1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^j, \ldots x^m\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T\left(x^1, \ldots, x_i^j, \ldots x^m\right)$$

autrement dit, T est multilinéaire si les opérateurs

$$x^j \in X_j \mapsto T\left(x^1, \ldots, x^j, \ldots x^m\right) \in Y$$

sont linéaires

En particulier ,on dit que T est bilinéaire si $m = 2$, T est trilinéaire si $m = 3$ et forme linéaire si $Y = \mathbb{k}$.

Observons que si T est multilinéaire on a

$$T\left(\lambda_1 x^1, \ldots, \lambda_m x^m\right) = \lambda_1 \cdots \lambda_m T\left(x^1, \ldots, x^m\right)$$

Proposition 1.3.2. *(Multilinéaire borné) Soit T un opérateur multilinéaire de $X_1 \times \ldots \times X_m$ dans Y ,Munissons $X_1 \times \ldots \times X_m$ de la norme*

$$\|x\| := \max_{1\leq j\leq m} \|x^j\|_{X_j}$$

les condition suivantes sont équivalentes ;

(a) T est continu ;

(b) T est continu au point $(0,\ldots,0)$;

(c) $\|T(x^1,\ldots,x^m)\|$ est borné sur le produit des boules-unité $\|x^1\|\leq 1,\ldots\|x^m\|\leq 1$, il existe $M\in\mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall (x^1,\ldots,x^m)\in X_1\times\ldots\times X_m, \|T(x^1,\ldots,x^m)\|\leq M\|x^1\|\cdots\|x^m\|.$$

Dans ce cas , on dit que T est borné et on pose $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|T(x)\|$, ou $\|x\| := \max\limits_{1\leq j\leq m}\|x^j\|_{X_j}$.

Notation On notera $\mathcal{F}(X_1,\ldots,X_m;Y)$ l'ensemble de tous les applications de $\prod\limits_{i=1}^{m} X_j$ dans Y, $L(X_1,\ldots,X_m;Y)$ l'ensemble de tous les applications multilinéaires et on note $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs multilinéaires continus de $\prod\limits_{i=1}^{m} X_j$ dans Y.

Si $X_1=\ldots=X_m=X$ on note

$$L(X_1,\ldots,X_m;Y)=L(^mX;Y), \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y)=\mathcal{L}(^mX;Y).$$

Si $X_1=\ldots=X_m=X$ et $Y=\mathbb{K}$ on note

$$L(^mX;Y)=L(^mX),$$

$$\mathcal{L}(^mX;Y)=\mathcal{L}(^mX).$$

Si $m=1, Y=\mathbb{K}$ alors

$$\begin{aligned} L(X;\mathbb{K}) &= L(X)=X^*(\text{le dual algébrique}),\\ \mathcal{L}(X;\mathbb{K}) &= \mathcal{L}(X)=X^*(\text{le dual topologique}). \end{aligned}$$

Proposition 1.3.3. *Soit Y un espace de Banach , l'espace vectoriel $\mathcal{L}(^m X;Y)$ $(1 \leq j \leq m)$ est un espace de Banach muni de la norme $\|T\|$ telle que*

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\|x^j\|_{X^j} \leq 1} \|T(x^1, \dots, x^m)\| \\
&= \sup_{\|x^j\| \neq 0} \frac{\|T(x^1, \dots, x^m)\|}{\|x^1\| \cdots \|x^m\|} \\
&= \inf\{k : \|T(x^1, \dots, x^m)\| \leq k \|x^1\| \cdots \|x^m\|\}
\end{aligned}$$

Preuve

Il est claire que $\|T\|$ est une norme sur l'espace $\mathcal{L}(^m X;Y)$. Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(^m X;Y)$.

Alors pour tout $(x^1, \dots x^m) \in X^m$ on a

$$\left\|T_k\left(x^1, \dots x^m\right) - T_n\left(x^1, \dots x^m\right)\right\| \leq \|T - T\| \left\|x^1\right\| \cdots \|x^m\| \tag{1.2}$$

et par conséquent $(T_k(x^1, \dots x^m))_{\ k}$ est une suite de Cauchy dans Y,

Aussi Y est complet, la limite suivante est existe

$$\lim_{k\to\infty} T_k\left(x^1, \dots x^m\right) = T\left(x^1, \dots x^m\right) \tag{1.3}$$

En outre , parce-que $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(^m X;Y)$, il existe une constante $C > 0$, telle que $\|T_k\| \leq C$ pour tout k , Alors il résulte également de (1.3) que $\|T\| \leq C$, et donc continu .

Finalement, il résulte $\|T_k - T\| \to 0$ oú $k \to \infty$. ■

Définition 1.3.4. (*opérateur de rang fini*) Un opérateur T multilinéaire continu de $X_1 \times \ldots \times X_m$ dans Y est de rang fini s'il est somme fini d'operateur de la forme

$$T = T_{y \otimes_{j=1}^m x_j^*} = x_1^* \otimes \cdots \otimes x_m^* \otimes y$$

$$
\begin{array}{llll}
T & : X_1 \times \ldots \times X_m & \longrightarrow & Y \\
 & \left(x^1, \ldots, x^m\right) & \longrightarrow & x_1^* \otimes \cdots \otimes x_m^* \otimes y\left(x^1, \ldots, x^m\right) \\
 & & & = x_1^*\left(x^1\right) \cdots x_m^*\left(x^m\right) y
\end{array}
$$

où $x_j^* \in X_j \left(1 \leq j \leq m\right)$ et $y \in Y$.

L'espace des opérateurs multilinéaire de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$.

Définition 1.3.5 [Pie83] (*idéal des opérateurs multilinéaire*). Un idéal des opérateurs multilinéaire (ou multi-idéal) $\mathcal{M}$ est un classe d'opérateur multilinéaire borné telle que pour tout $X_1, \ldots, X_m$et Y des espaces de Banach on a :

(a) L'ensemble $\mathcal{M}\left(X_1 \times \cdots \times X_m; Y\right)$ est un sous espace de $\mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ qui contient $\mathcal{L}_f\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$.

(b) *Propriété d'idéal* **:**si $T \in \mathcal{M}\left(X_1 \times \cdots \times X_m; Y\right), u_j\left(E_j; X_j\right)$ *et* $v \in \left(Y; F\right)$ alors $v \circ T \circ \left(u_1, \ldots, u_m\right) \in \mathcal{M}\left(E_1, \ldots, E_m; F\right)$

$$
\begin{array}{ccccc}
E_1 & \times \cdots \times & E_m & \rightarrow & F \\
{\scriptstyle u_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle u_m}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle v} \\
X_1 & \times \cdots \times & X_m & \rightarrow & Y
\end{array}
$$

De plus , si $\|.\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longmapsto \mathbb{R}^+$ satisfait :

(i) $\left(\mathcal{M}\left(X_1 \times \cdots \times X_m; Y\right), \|.\|_{\mathcal{M}}\right)$ est un Banach

(ii) $\left\|A^m : \mathbb{K}^m \longmapsto \mathbb{K}; A^m\left(x^1, \ldots, x^m\right) = x_1 \cdots x_m\right\|_M = 1$

(iii) $\left\|v \circ T \circ \left(u_1, ..., u_m\right)\right\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \prod\limits_{j=1}^{m} \|u_j\| \, \|T\|_{\mathcal{M}}$.

alors $\left(\mathcal{M}\left(X_1 \times \cdots \times X_m; Y\right), \|.\|_{\mathcal{M}}\right)$ s'appelle Banach multi-idéal.

Exemple 1.3.6

Les opérateurs multilinéaires compacts $\mathcal{K}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$, (i.e., les m-linéaires qui envoient tout ensemble borné sur un ensemble relativement compact) et les opérateurs multilinéaires de rang finis $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_m; Y)$ sont des idéaux multilinéaires.

Chapitre 2

L'idéal des opérateur multilinéaire $(p; q_1, \ldots, q_m; r)$ –sommant

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la classe des opérateurs $(p; q_1, \ldots, q_m; r)$-sommants introduit par Achour en 2011 comme généralisation des opérateurs linéaires $(p; q; r)$-sommants [Pie80].

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1. Soit $0 < p, q_1, \ldots, q_m, r \leq \infty$, tel que $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} + \frac{1}{r}$. Un opérateur m-linéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est absolment $(p; q_1, \ldots, q_m; r)$-sommant (ou $(p; q_1, \ldots, q_m; r)$-sommant), s'il existe une constante positive, tel que pour tout $\left(x_i^j\right)_{1 \leq i \leq n} \subset X^j \, (1 \leq j \leq m)$ et tout $(y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \subset Y^*$, on a

$$\left\| \left(\left\langle T\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_p \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{q_j.w} \left\| (y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{r.w} \tag{2.1}$$

La classe des opérateurs m-linéaires $(p; q_1, \ldots, q_m; r)$-sommants de $X_1 \times \cdots \times X_m$ dans

Y, notée $\mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m;r)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$, et par

$$\pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}\left(T\right)=\inf\left\{C \text{ verifi } (2.1)\right\}$$

Si $q_1=...=q_m=q$, on remplace $as,(p;q_1,...,q_m)$ par $as,(p;q;r)$.

Remarque 2.1.2. Il est claire que la norme $(p;q_1,\ldots,q_m;r)$-sommants domine la norme d'opérateurs m-linéaires :

$$\|T\|\leq\pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}\left(T\right) \tag{2.2}$$

Proposition 2.1.3. *Si* $\frac{1}{p}>\frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_m}+\frac{1}{r}$, $T\in\mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m;r)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$ entraîne $T=0$.

Preuve.

On suppose que $q_1=...=q_m=q$,. Alors

$$\tfrac{1}{p}>\tfrac{1}{q}+\cdots+\tfrac{1}{q}+\tfrac{1}{r}\Rightarrow\tfrac{1}{p}>\tfrac{q+mr}{qr}.$$

Soit $(\alpha_i)_i\in l_{\frac{qr}{q+mr}}-l_p$, $x^1\in X_1,\ldots,x^m\in X_m$ et $y^*\in Y^*$ tel que $\left\langle T\left(x^1,\ldots,x^m\right),y^*\right\rangle\neq 0$.

Comme T est $(p;q,\ldots,q;r)$-sommant,on a

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle T\left(x^1,\ldots,x^m\right),y^*\right\rangle\right|\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left|\left\langle T\left(x^1,\ldots,x^m\right),y^*\right\rangle\right|\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i^{(\frac{qr}{q+mr})(\frac{1}{r}+\frac{m}{q})}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i^{(\frac{qr}{q+mr})\frac{1}{r}}\left\langle T\left(\alpha_i^{(\frac{qr}{q+mr})\frac{1}{q}}x^1,\ldots,\alpha_i^{(\frac{qr}{q+mr})\frac{1}{q}}x^m\right),y^*\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq\pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}\left(T\right)\prod_{j=1}^{m}\left\|\left(\alpha_i^{(\frac{qr}{q+mr})\frac{1}{q}}x^j\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{q.w}\left\|\left(\alpha_i^{(\frac{qr}{q+mr})\frac{1}{r}}y^*\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{r.w}\\
&\overset{\text{Hahn-Banach}}{=}\pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}\left(T\right)\|y^*\|\,\|x^1\|\cdots\|x^m\|\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i^{(\frac{qr}{q+mr})\frac{1}{q}}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i^{(\frac{qr}{q+mr})\frac{1}{r}}\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\\
&=\pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}\left(T\right)\|y^*\|\,\|x^1\|\cdots\|x^m\|\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i^{(\frac{qr}{q+mr})}\right|\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i^{(\frac{qr}{q+mr})}\right|\right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

$$= \pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(T) \|y^*\| \|x^1\| \cdots \|x^m\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \alpha_i^{(\frac{qr}{q+mr})} \right| \right)^{\frac{1}{r}+\frac{m}{q}}$$

ce qui entrain

$$|\langle T(x^1,\ldots,x^m), y^* \rangle| \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(T) \|y^*\| \|x^1\| \cdots \|x^m\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \alpha_i^{(\frac{qr}{q+mr})} \right| \right)^{\frac{1}{r}+\frac{m}{q}}.$$

Quand m tend vers l'infini et comme $(\alpha_i) \in l_{\frac{qr}{q+mr}}$, on trouve

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Contradiction , car $(\alpha_i)_i \notin l_p$ ■

Proposition 2.1.4. $\left(\mathcal{L}_{as.(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(X_1,\ldots,X_m;Y), \pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\right)$ *est un espace de Banach pour* $p \geq 1$.

Preuve.

(a) $\mathcal{L}_{as.(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(X_1,\ldots,X_m;Y)$ est un espace vectoriel normé ?

(i) Soient $T, S \in \mathcal{L}_{as.(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(X_1,\ldots,X_m;Y)$, soit $\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \subset X^j \, (1 \leq j \leq m)$ et $(y_i^*)_{1\leq i\leq n} \subset Y^*$, d'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(\left\langle (T+S)\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right)_{1\leq i\leq n} \right\|_p \\
= & \left\| \left(\left\langle T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right), y_i^* \right\rangle + \left\langle S\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right)_{1\leq i\leq n} \right\|_p \\
\leq & \left\| \left(\left\langle T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right)_{1\leq i\leq n} \right\|_p + \left\| \left(\left\langle S\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right)_{1\leq i\leq n} \right\|_p \\
\leq & \left(\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(T) + \pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(S) \right) \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \right\|_{q_j.w} \left\| (y_i^*)_{1\leq i\leq n} \right\|_{r.w}.
\end{aligned}$$

Donc $T + S \in \mathcal{L}_{as.(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(X_1,\ldots,X_m;Y)$

et

$$\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(T+S) \leq \pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(T) + \pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(S).$$

(ii) Soit $\alpha \in \mathbb{k}, T \in \mathcal{L}_{as.(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(X_1,\ldots,X_m;Y)$

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\left\langle \alpha T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right)_{1\le i\le n}\right\|_p &= \left\|\left(\left\langle T\left(\alpha^{\frac{1}{m}}x_i^1,\ldots,\alpha^{\frac{1}{m}}x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right)_{1\le i\le n}\right\|_p \\
&\le \pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(T\right)\prod_{j=1}^m\left\|\left(\alpha^{\frac{1}{m}}x_i^j\right)_{1\le i\le n}\right\|_{q_j.w}\left\|\left(y_i^*\right)_{1\le i\le n}\right\|_{r.w} \\
&\le \pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(T\right)\prod_{j=1}^m\left|\alpha^{\frac{1}{m}}\right|\left\|\left(x_i^j\right)_{1\le i\le n}\right\|_{q_j.w}\left\|\left(y_i^*\right)_{1\le i\le n}\right\|_{r.w} \\
&\le |\alpha|\,\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(T\right)\prod_{j=1}^m\left\|\left(x_i^j\right)_{1\le i\le n}\right\|_{q_j.w}\left\|\left(y_i^*\right)_{1\le i\le n}\right\|_{r.w}.
\end{aligned}$$

Donc $\alpha T\in\mathcal{L}_{as.(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$ et $\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(\alpha T\right)\le|\alpha|\,\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(T\right).$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(T\right) &= \pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(\frac{1}{\alpha}\left(\alpha T\right)\right) \\
&\le \frac{1}{|\alpha|}\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(\alpha T\right),
\end{aligned}$$

ce qui implique $|\alpha|\,\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(T\right)\le\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(\alpha T\right).$

D'où

$$\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(\alpha T\right)=|\alpha|\,\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(T\right).$$

(iii) D'après la Remarque (2.1.2), $\|T\|\le\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(T\right)=0\Leftrightarrow\|T\|=0\Leftrightarrow T=0.$

(b) $\mathcal{L}_{as.(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$ est un Banach ?

Soit $\left(T_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites de Cauchy dans $\mathcal{L}_{as.(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$, D'après (2.2) on a $\|T_n-T_m\|\le\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(T_n-T_m\right)$,donc $\left(T_n\right)$ est une suites de Cauchy dans $\mathcal{L}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$, alors converge vers une limite $T\in\mathcal{L}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$ $\left(i.e.,\|T_n-T\|\underset{n}{\longrightarrow}0\right).$

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall k,k'\in\mathbb{N},\forall k>k'>n_0:\|T_k-T_{k'}\|\le\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\left(T_n-T_m\right)\le\varepsilon.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ (pour $k\ge n_0$ fixé). On a $\forall k'>n_0$:

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\left\langle\left(T_k-T\right)\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right)_{1\le i\le N}\right\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n\lim\nolimits_{k'}\left|\left\langle\left(T_k-T_{k'}\right)\left(x_i^1,...,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim\nolimits_{k'}\sum_{i=1}^n\left|\left\langle\left(T_k-T_{k'}\right)\left(x_i^1,...,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right|
\end{aligned}$$

$$\leq \lim_{k'} \pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)} (T_k - T_{k'}) \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \right\|_{q_j.w} \left\| (y_i^*)_{1\leq i\leq n} \right\|_{r.w}$$
$$\leq \varepsilon \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \right\|_{q_j.w} \left\| (y_i^*)_{1\leq i\leq n} \right\|_{r.w}$$

D'où $\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)} (T_k - T) \leq \varepsilon$. Ceci montre que $T \in \mathcal{L}_{as.(p;q_1,\ldots,q_m;r)} (X_1, ..., X_m; Y)$ et $\pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(T_k - T) \to 0$. ■

Les deux proposition suivantes monter que l'espace $\left(\mathcal{L}_{as.(p;q_1,\ldots,q_m;r)} (X_1, ..., X_m; Y), \pi_{(p;q_1,\ldots,q_m;r)}\right)$ est un de Banach multi-idéal.

Proposition 2.1.5. *Tout opérateurs m-linéaires de rang fini est $(p; q_1, \ldots, q_m; r)$-sommant.*

Preuve.

Il suffit de montrer la propriété pour les opérateurs de rang un de la forme $T = x_1^* \otimes ... \otimes x_n^* \otimes y : (x^1, ..., x^m) \longmapsto x_1^* (x^1) ... x_m^* (x^m)\, y$ (T comme une somme d'opérateurs de rang un des opérateurs en tant que membre de l'espace vectoriel $\mathcal{L}_{as.(p;q_1,\ldots,q_m;r)}$).

On a

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(\left\langle T\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right)_{1\leq i\leq n} \right\|_p \\
= & \left\| \left(\left\langle x_1^*\left(x_i^1\right) \cdots x_m^*\left(x_i^m\right) y, y_i^* \right\rangle \right)_{1\leq i\leq n} \right\|_p \\
\leq & \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_j^*\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \right) \right\|_{q_j} \cdot \left\| \left(y_i^*(y) \right)_{1\leq i\leq n} \right\|_r \\
\leq & \prod_{j=1}^{m} \left\| x_j^* \right\| \left\| \left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \right\|_{q_{j.w}} \cdot \|y\| \left\| (y_i^*)_{1\leq i\leq n} \right\|_{r.w} \\
\leq & \prod_{j=1}^{m} \left\| x_j^* \right\| \|y\| \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \right\|_{q_{j.w}} \left\| (y_i^*)_{1\leq i\leq n} \right\|_{r.w}
\end{aligned}$$

donc $T \in \mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m;r)}(X_1,...,X_m;Y)$ et

$$\pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}(T) = \prod_{j=1}^{m} \left\| x_j^* \right\| \|y\|$$

car $\|y\| \prod_{j=1}^{m} \left\| x_j^* \right\| = \|T\| \leq \pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}(T)$. La démonstration est achevée ■

Proposition 2.1.6. *(Propriété d'idéal) Si* $T \in \mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m;r)}(X_1,...,X_m;Y)$, $u_j \in \mathcal{L}(E_j;X_j)$ *et* $w \in \mathcal{L}(Y;Z)$. *Alors* $w \circ T \circ (u_1,\ldots,u_m) \in \mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m;r)}(E_1,...,E_m;Z)$ *et*

$$\pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}(w \circ T \circ (u_1,\ldots,u_m)) \leq \|w\| \, \pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}(T) \prod_{j=1}^{m} \|u_j\|.$$

Preuve. Soient $T \in \mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m;r)}(X_1,...,X_m;Y)$, $u \in \mathcal{L}(E_j;X_j)$ et $w \in \mathcal{L}(Y;Z)$ Soit $\left(e_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \subset E_j$ et $(z_i^*)_{1\leq i\leq n} \subset F^*$, on a

$$\begin{aligned}
&(\sum_{i=1}^{n} |\langle w \circ T(u_1(e_i^1),...,u_m(e_i^m)), z_i^* \rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= (\sum_{i=1}^{n} |\langle T(u_1(e_i^1),...,u_m(e_i^m)), w^*(z_i^*) \rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}(T)(T) \prod_{j=1}^{m} (\sup_{\substack{\xi_j^* \in B_{X_j^*} \\ 1\leq j\leq m}} \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle u_j\left(e_i^j\right), \xi_j^* \right\rangle\right|^{q_j})^{\frac{1}{q_j}} \sup_{y\in B_Y} \|\langle w^*(z_i^*), y\rangle\|_r \\
&\leq \pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}(T) \prod_{j=1}^{m} (\sup_{\substack{\xi_j^* \in B_{X_j^*} \\ 1\leq j\leq m}} \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle e_i^j, u_j^*(\xi_j^*) \right\rangle\right|^{p})^{\frac{1}{p}} \sup_{y\in B_Y} \|\langle z_i^*, w(y)\rangle\|_r \\
&\leq \pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}(T) \prod_{j=1}^{m} (\sup_{\xi_j^* \in B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^{n} \left\|u_j^*(\xi_j^*)\right\| \left|\left\langle e_i^j, \tfrac{u_j^*(\xi_j^*)}{\|u_j^*(\xi_j^*)\|} \right\rangle\right|^{q_j}) \sup_{y\in B_Y} \|w(y)\| \left\|(\left\langle z_i^*, \tfrac{w(y)}{\|w(y)\|} \right\rangle)_i\right\|_r \\
&\leq \pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}(T) \|w\| \prod_{j=1}^{m} \left\|u_j^*\right\| \prod_{j=1}^{m} \sup_{\varphi_j \in B_{E_j^*}} (\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle e_i^j, \varphi_j \right\rangle\right|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{\eta\in B_Z} \|\langle z_i^*, \eta\rangle\|_r \\
&= \|w\| \, \pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}(T) \prod_{j=1}^{m} \|u_j\| \prod_{j=1}^{m} \left\|\left(e_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{q_j.w} \left\|(z_i^*)_{1\leq i\leq n}\right\|_{r.w}
\end{aligned}$$

Donc $w \circ T \circ (u_1,...,u_m) \in \mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m;r)}(E_1,...,E_m;Z)$ et

$$\pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}(w \circ T \circ (u_1,...,u_m)) \leq \|w\| \, \pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}(T) \prod_{j=1}^{m} \|u_j\| \qquad ■.$$

Proposition 2.1.7. [Ach11] *(Théorème d"inclusion).*

Soient

$$1 \leq p_1 \leq p_2,$$
$$1 \leq t_j \leq s_j \, (1 \leq j \leq m)$$
$$1 \leq r_1 \leq r_2$$

tels que

$$\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_j} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{s_1} + \cdots + \frac{1}{s_j} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{p_2}.$$

Alors

$$\mathcal{L}_{as.(p_1;t_1,...,t_m;r_1)}\left(X_1,...,X_m;Y\right) \subset \mathcal{L}_{as.(p_2;s_1,...,s_m;r_2)}\left(X_1,...,X_m;Y\right).$$

Preuve.

Soient $p_\circ, r$ et p, tels que

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{p_\circ} & = & \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \\ \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} & = & \left(\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_m}\right) - \left(\frac{1}{s_1} + \cdots + \frac{1}{s_m}\right) \\ \frac{1}{r} & = & \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \\ \frac{1}{p} & = & \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} + \frac{1}{r}. \end{array}$$

Alors $p_\circ \leq p \left(\frac{1}{p_\circ} \geq \frac{1}{p}\right)$.

Soit $T \in \mathcal{L}_{as.(p_1;t_1,...,t_m;r_1)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$, pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, $\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \subset X^j \ (1 \leq j \leq m)$ et $(y_i^*)_{1\leq i\leq n} \subset Y^*$, l'inégalité de Hölder donne

$$
\begin{aligned}
& \left\| \left(\lambda_i \left\langle T\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{p_2} \\
= & \left(\sum_{i=1}^n \left| \left\langle T\left(\lambda_i^{\frac{p}{q_1}} x_i^1, \ldots, \lambda_i^{\frac{p}{q_m}} x_i^m\right), \lambda_i^{\frac{p}{r}} y_i^* \right\rangle \right|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
\leq & \left(\sum_{i=1}^n \left| \left\langle T\left(\lambda_i^{\frac{p}{q_1}} x_i^1, \ldots, \lambda_i^{\frac{p}{q_m}} x_i^m\right), \lambda_i^{\frac{p}{r}} y_i^* \right\rangle \right|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
\leq & \ \pi_{(p_1; t_1, \ldots, t_m; r_1)}(T) \prod_{j=1}^m \left\| \left(\lambda_i^{\frac{p}{q_j}} x_i^j \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{t_j.w} \left\| \left(\lambda_i^{\frac{p}{r}} y_i^* \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{r_1.w} \\
\leq & \ \pi_{(p_1; t_1, \ldots, t_m; r_1)}(T) \prod_{j=1}^m \left\| \left(x_i^j \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{s_j.w} \left\| \left(\lambda_i^{\frac{p}{q_j}} \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{q_j} \\
& \times \left\| \left(y_i^* \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{r_2.w} \left\| \left(\lambda_i^{\frac{p}{r}} \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{r} \\
\leq & \ \pi_{(p_1; t_1, \ldots, t_m; r_1)}(T) \prod_{j=1}^m \left\| \left(x_i^j \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{s_j.w} \left\| \left(y_i^* \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{r_2.w} \left\| \left(\lambda_i \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{p} \\
\leq & \ \pi_{(p_1; t_1, \ldots, t_m; r_1)}(T) \prod_{j=1}^m \left\| \left(x_i^j \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{s_j.w} \left\| \left(y_i^* \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{r_2.w} \left\| \left(\lambda_i \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{p_0}.
\end{aligned}
$$

Comme $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont arbitraires, on obtient

$$
\left\| \left(\left\langle T\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{p_2} \leq \pi_{(p_1; t_1, \ldots, t_m; r_1)}(T) \prod_{j=1}^m \left\| \left(x_i^j \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{s_j.w} \left\| \left(y_i^* \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{r_2.w}.
$$

Donc $T \in \mathcal{L}_{as.(p_2; s_1, \ldots, s_m; r_2)}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ et

$$
\pi_{(p_2; s_1, \ldots, s_m; r_2)}(T) \leq \pi_{(p_1; t_1, \ldots, t_m; r_1)}(T).
$$

2.2 Théorème de Domination de Pitesch

Le théorème de domination de Pietsch joue un rôle central dans la théorie des opérateurs linéaires absolument sommants (pour plus de détails voir [Pie80, DJT95, DF92]).

La dernière décennie a connu la naissance de différents types du théorème de domination aux cas non linéaire (voir par exemple [BPS10, PS..,PS11]).

Dans [PSS11] Pellegrino, Santos et Seoane-Sepúlveda, ont introduit le Théorème de Domination général de Pietsch.

Soit $X_1, \cdots, X_m, Y$ et $E_1, \cdots, E_k$ ensemble arbitraires non-vide , $\mathcal{H}$ ensemble des opérateurs de $X_1 \times \cdots \times X_m$ dans Y.

Soit $K_1, .., K_t$ espaces topologie compact , $G_1, \cdots, G_t$ sont des espaces de Banach et on suppose que les opérateurs suivantes

$$\begin{cases} R_j : K_j \times E_1 \times \cdots \times E_k \times G_j \to [0, +\infty) \, , j = 1, \cdots, t \\ S : \mathcal{H} \times E_1 \times \cdots \times E_k \times G_1 \times \cdots \times G_t \to [0, +\infty) \end{cases}$$

vérifié :

(1) pour tout $x^l \in E_l$ et $b \in G_j$, telle que $(j, l) \in \{1, \cdots, t\} \times \{1, \cdots, k\}$ l'opérateur $(R_j)_{x^1, \cdots, x^k, b} : K_j \to [0, +\infty)$ defini par $(R_j)_{x^1, \cdots, x^k, b}(\varphi_j) = R_j(\varphi_j, x^1, \cdots, x^k, b)$ est continu.

(2) les inégalité suivantes :

$$\begin{cases} R_j(\varphi_j, x^1, \cdots, x^k, \eta_j b^j) \leq \eta_j R_j(\varphi_j, x^1, \cdots, x^k, b^j) \\ S(f, x^1, \cdots, x^k, \alpha_1 b^1, \cdots, \alpha_t b^t) \geq \alpha_1 \cdots \alpha_t S(f, x^1, \cdots, x^k, b^1, \cdots, b^t) \end{cases}$$

pour tout $\varphi_j \in K_j, x^l \in E_l$ (telle que $l \in \{1, \cdots, k\}), 0 \leq \eta_j, \alpha_j \leq 1, b^j \in G_j$ avec $j = 1, \cdots, t$ et $f \in \mathcal{H}$.

Définition 2.3.1. Si $0 < p_1, \cdots, p_t, q < \infty$, telle que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_t}$, un opérateur $f : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ dans H est $R_1, \cdots, R_t$-S-abstract $(p_1, \cdots, p_t)$-sommant, s'il existe une constante positive C, telle que pour tout $(x_i^s)_{1 \leq i \leq n} \subset E_s \, (1 \leq s \leq k)$ et tout $\left(b_i^j\right)_{1 \leq i \leq n} \subset (1 \leq j \leq t)$ on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} S(f, x_i^1, \cdots, x_i^k, b_i^1, \cdots, b_i^t)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^{t} \sup_{\varphi \in K_j} \left(\sum_{i=1}^{n} R_j(\varphi_j, x_i^1, \cdots, x_i^k, b_i^j)^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}}$$

Théorème 2.3.2.[PSS11] *Un opérateur $f \in H$ est $R_1, \cdots, R_t$-S-abstract $(p_1, \cdots, p_t)$-sommant ,si et seulement s'il existe un constant positive c et une probabilité de Radon*

μ_j *sur* K_j *on a*

$$S(f,x^1,\cdots,x^k,b^1,\cdots,b^t) \leq C\prod_{j=1}^{t}\left(\int_{K_j} R_j(\varphi_j,x^1,\cdots,x^k,b^j)^{p_j}d\mu_j\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

telle que, pour tout $x^l \in E_l$, $l \in \{1,\cdots,k\}$ *et* $b^j \in G_j$ ($j = 1,\cdots,t$) .

Définition 2.3.3. Soit $0 < p, q_1, \ldots, q_m, r \leq \infty$, telle que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} + \frac{1}{r}$. Un opérateur m-linéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est $(q_1, \ldots, q_m; r)$-dominé si on a l'identification isométrique

$$\mathcal{L}_{d.(q_1,\ldots,q_m;r)}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}_{as.(p;q_1,\ldots,q_m;r)}(X_1, ..., X_m; Y)$$

Pour la démonstration de ce théorème, nous avons appliqué le Théorème de Domination général de Pietsch.

Théorème 2.3.4. [Ach11] *(Théorème de domination de Pietsch)*
Soit $0 < p, q_1, \ldots, q_m, r \leq \infty$, *telle que* $\frac{1}{p} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} + \frac{1}{r}$. *Un opérateur m-linéaire* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ *est* $(q_1, \ldots, q_m; r)$*-dominé,si et seulement s'il existe une constant positive* C *et des probabilité de Radon* μ_j *sur* $B_{X_j^*}$ $(1 \leq j \leq m)$ *et* μ_{m+1} *sur* $B_{Y^{**}}$*,telle que pour tout* $b^j \in X_j$ *et* $y^* \in Y^*$ *on a*

$$\begin{aligned} & \left|\left\langle T\left(b^1, \ldots, b^m\right), y^*\right\rangle\right| \\ \leq \; & C\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle b^j, \varphi_j\right\rangle\right|^{q_j} d\mu_j\right)^{\frac{1}{q_j}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} \left|\left\langle\, y^*, \varphi_{m+1}\right\rangle\right|^{r} d\mu_{m+1}\right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Preuve.

$\Leftarrow$) Résulte immédiatement de l'inégalité de Hölder.

$\Rightarrow$) En choisissant les paramètres

$$
\begin{cases}
t = m+1 \\
G_j = X_j, j = 1, \cdots, m \text{ et } G_{m+1} = Y^* \\
E_i = \Bbbk, i = 1, \cdots, k \\
K_j = B_{X_j^*}, j = 1, \cdots, m \text{ et } K_{m+1} = B_{Y^{**}} \\
\mathcal{H} = \mathcal{L}\left(X_1, \cdots, X_m; Y\right) \\
p_t = q_t, t = 1, \cdots, m \text{ et } p_{m+1} = r \\
S(T, x^1, \cdots, x^m, b^1, \cdots, b^m, y^*) = \left|\left\langle T\left(b^1, \cdots, b^m\right), y^*\right\rangle\right| \\
R_j(\varphi_j, x^1, \cdots, x^m, b^j) = \left|\left\langle b^j, \varphi_j\right\rangle\right|, j = 1, \cdots, m \\
R_{m+1}(\varphi_{m+1}, x^1, \cdots, x^m, y^*) = \left|\left\langle \varphi_{m+1}, y^*\right\rangle\right|.
\end{cases}
$$

On peut facilement conclure que $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est $(q_1, \ldots, q_m; r)$ $-$dominé ,si et seulement si T est $(R_1, \cdots, R_{m+1})$-S-abstract $(q_1, \cdots, q_t)$-sommant. D'après le Théorème 3.2, T est $(R_1, \cdots, R_{m+1})$-S-abstract $(q_1, \cdots, q_t)$-sommant, si et seulement s'il existe une constant positive C et des mesures de probabilites μ_j sur K_j $(1 \leq j \leq m+1)$,telle que

$$
\begin{aligned}
& S(T, x^1, \cdots, x^m, b^1, \cdots, b^m, y^*) \\
\leq \; & C \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{K_j} R_j(\varphi_j, x^1, \cdots, x^m, b^j)^{q_j} d\mu_j \right)^{\frac{1}{q_j}} \\
& \cdot \times \left(\int_{K_{m+1}} R_{m+1}(\varphi_{m+1}, x^1, \cdots, x^m, y^*)^r d\mu_{m+1} \right)^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire,

$$
\begin{aligned}
& \left|\left\langle T\left(b^1, \ldots, b^m\right), y^*\right\rangle\right| \\
\leq \; & C \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{B_{X_j^*}} \left|\left\langle b^j, \varphi_j\right\rangle\right|^{q_j} d\mu_j \right)^{\frac{1}{q_j}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} \left|\left\langle \; y^*, \varphi_{m+1}\right\rangle\right|^r d\mu_{m+1} \right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}
$$

Ainsi on obtient 2.3. ■

Corrolaire 2.2.5. Si $r_1 \leq r_2$ et $q_j \leq s_j \, (1 \leq j \leq m)$, on a

$$\mathcal{L}_{d.(q_1,...,q_m;r_1)} \left(X_1, ..., X_m; Y\right) \subset \mathcal{L}_{d.(s_1,...,s_m;r_2)} \left(X_1, ..., X_m; Y\right).$$

2.3 Relations entre différentes classes de sommabilités

Nous allons obtenir certaines inclusions entre les différentes classes étudiées dans le présent document.

On présente maintenant la relation entre la classe des opérateurs $(p; q_1, \ldots, q_m; r)$-sommant et la classe des opérateurs $(p; q_1, \ldots, q_m)$-sommants inroduit par Pitesch [Pie83]. Avant ceci, on donne la définition des opérateurs $(p; q_1, \ldots, q_m)$-sommants.

Définition 2.3.1

Soient $0 < p, q_1, \ldots, q_m \leq \infty$, avec $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m}$. Un opérateur m-linéaire $T \in \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ est absolment $(p; q_1, \ldots, q_m)$-sommant s'il existe une constante positive C telle que, pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$, $(1 \leq j \leq m)$, on a

$$\left\| \left(T\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right)\right)_{1\leq i\leq n} \right\|_p \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \right\|_{q_j.w} \tag{2.4}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $i = 1, ..., n$.

La classe des opérateurs m-linéaires $(p; q_1, \ldots, q_m)$-sommant de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, notée $\mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m)} \left(X_1, ..., X_m; Y\right)$, et on note

$$\|T\|_{as,(p;q_1,...,q_m)} = \inf \left\{C \text{ vérifiant l'inégalité } (2.4)\right\}.$$

Si $q_1 = ... = q_m = q$, on remplace $d, (p; q_1, ..., q_m)$ par $d, (p, q)$. Si $p = q$ on remplace $d, (p, q)$ par d, p.

Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. On dit que T est p-dominé s'il est absolement $(\frac{p}{m}; p)$-sommant. On note $\mathcal{L}_{d.p}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace des opérateurs m-linéaires p-dominé.

Cas particulier. Si $\frac{1}{p} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m}$, on dit que l'opérateur T est $(q_1, \ldots, q_m)$-*dominé* (voir [Gei84],[Mat93]), on note $\mathcal{L}_{d.(q_1,...,q_m)}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace des opérateurs m-linéaire $(q_1, \ldots, q_m)$-dominé.

Proposition 2.3.2. *Pour tout $X_1, ..., X_m$ et Y des espaces de Banach et $r > 0$, on a*

$$\mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m)}(X_1, ..., X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m;r)}(X_1, ..., X_m; Y) \tag{2.5}$$

Preuve.

Soit $T \in \mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m)}(X_1, ..., X_m; Y)$,pour tout $(x_i^j)_{1\leq i\leq n} \subset X^j \, (1 \leq j \leq m)$ et tout $(y_i^*)_{1\leq i\leq n} \subset Y^*$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|(\langle T(x_i^1, \ldots, x_i^m), y_i^*\rangle)_{1\leq i\leq n}\right\|_p &\leq \left\|(T(x_i^1, \ldots, x_i^m))_{1\leq i\leq n}\right\|_p \left\|(y_i^*)_{1\leq i\leq n}\right\|_\infty \\
&\leq \|T\|_{as,(p;q_1,...,q_m)} \prod_{j=1}^m \left\|\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{q_j.w} \left\|(y_i^*)_{1\leq i\leq n}\right\|_{w,\infty} \\
&\leq \|T\|_{as,(p;q_1,...,q_m)} C \prod_{j=1}^m \left\|\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{q_j.w} \left\|(y_i^*)_{1\leq i\leq n}\right\|_{w,r}
\end{aligned}$$

Ce qu'implique $T \in \mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m;r)}(X_1, ..., X_m; Y)$ pour tout r positive ■

Corollaire 2.3.3

Si $(r = \infty)$ ou $\left(r = \infty, \frac{1}{p} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m}\right)$ ou $(r = \infty, q_1 = \cdots = q_m = p)$ dans (2.1) on trouve la classe des opérateurs m-linéaires $(p; q_1, \ldots, q_m)$-sommants, i.e.,

$$\mathcal{L}_{as,(p;q_1,...,q_m;\infty)}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}_{as,(p;q_1,...,q_m)}(X_1, ..., X_m; Y) \tag{2.6}$$

Preuve.

D'après 2.5, on a

$$\mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)\subset\mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m;\infty)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$$

Il suffit de montrer la deuxième inclusion, on considère $T\in\mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m;\infty)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$, alors

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right)\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_p \\
=\ &\left(\sum_{i=1}^{n}\sup_{y_i^*\in B_{Y^*}}\left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
=\ &\sup_{y_i^*\in B_{Y^*}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right|^p\right) \\
\leq\ &\pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}(T)\prod_{j=1}^{m}\left\|\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{q_j.w}.
\end{aligned}$$

Pour tout $\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\subset X^j\left(1\leq j\leq m\right)$ et tout $\left(y_i^*\right)_{1\leq i\leq n}\subset Y^*$. D'où $T\in\mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$.

Proposition 2.3.4

(1) Les opérateurs m-linéaires $\tau\left(p;q\right)$-sommant sont $(p;q_1,\ldots,q_m;r)$-sommant.

Un opérateur $m-$linéaire est $\tau\left(p;q\right)$-sommant (voir [Muj08]) telle que $1\leq q\leq p$, s'il existe une constant positive $C\geq 0$, et pour tout $\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\subset X^j\left(1\leq j\leq m\right)$ et tout $\left(y_i^*\right)_{1\leq i\leq n}\subset Y^*$, on a

$$\left\|\left(\left\langle T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_p\leq C\left(\sup_{\substack{x^{j*}\in B_{X_j^*},\\ y\in B_Y}}\sum_{i=1}^{n}\left|x^{1*}\left(x_i^1\right)\cdots x^{m*}\left(x_i^m\right)y_i^*\left(y\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.7)$$

la classe des opérateurs multilinéaire $\tau\left(p;q\right)$-sommant de $X_1\times\ldots\times X_m$ dans Y noté $\mathcal{L}_{\tau(p;q)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|T\|_{\tau(p;q)}=\inf\left\{C\text{ verifi }(2.7)\right\}$$

Si $p=q$ on note $\tau(p;q)$ par $\tau(p)$.

Maintant, soit $T\in\mathcal{L}_{\tau(p;q)}(X_1,...,X_m;Y)$ .si $\frac{1}{q}\leq\frac{1}{q_1}+\cdots+\frac{1}{q_m}+\frac{1}{r}$ on a

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\left\langle T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_p \\
\leq\ &\|T\|_{\tau(p;q)}\left(\sup_{x^{j*}\in B_{X_j^*},y\in B_Y}\sum_{i=1}^n\left|x^{1*}\left(x_i^1\right)\cdots x^{m*}\left(x_i^m\right)y_i^*\left(y\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ &\|T\|_{\tau(p;q)}\sup_{x^{j*}\in B_{X_j^*}}\prod_{j=1}^m\left(\sum_{i=1}^n\left|\left\langle x^{j*},x_i^j\right\rangle\right|^{q_j}\right)^{\frac{1}{q_j}}\sup_{y\in B_Y}\|y_i^*\left(y\right)\|_r \\
\leq\ &\|T\|_{\tau(p;q)}\prod_{j=1}^m\left\|\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{q_j.w}\|y_i^*\|_{r.w} \qquad \text{(d'après (1.1))}
\end{aligned}$$

donc $T\in\mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m;r)}(X_1,...,X_m;Y)$ et $\pi_{(p;q_1,...,q_m;r)}(T)\leq\|T\|_{\tau(p;q)}$.

(2) Les opérateurs m-linéaires *nuclear* sont $(p;q_1,\ldots,q_m;r)$-sommant.

Un opérateur m-linéaire T est *nuclear* (voir [Mat93]), s'il existe des suites $\left(\alpha_i^j\right)_{1\leq i\leq\infty}\subset X_j^*$,et $(y_i)_{1\leq i\leq\infty}\subset Y$ telle que pour tout $x^j\in X_j$ on a

$$T\left(x^1,\ldots,x^m\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^1\left(x^1\right)\cdots\alpha_i^m\left(x^m\right)y_i,$$

on utilise (l'exemple 4.2 dans [Muj08]) Si T est *nuclear*, Alors T est $\tau(p)$ −sommant et d'après la Proposition précédant (1), on obtient $T\in\mathcal{L}_{as.(p;q_1,...,q_m;r)}(X_1,...,X_m;Y)$.

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, nous donnons quelques résultats, prouvés à l'origine d'une autre façon, mais que l'on obtient facilement à l'aide de propriétés des opérateurs $(p;q;r)$-sommants : le théorème du Théorème de Defant-Voigt [BP07] et le Théorème de Grothenieck [BPS11].

3.1 Théorème de Defant-Voigt

Théorème de Defant-Voigt [AM89] : Tout forme m-linéaire est une forme m-linéaire $(1;1)$-sommant, i.e.,

$$\mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K}\right) = \mathcal{L}_{as(1;1)}\left(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K}\right). \tag{3.1}$$

Nous allons voir une autre version du théorème de Defant-Voigt, pour les opérateurs $(p;q_1, \ldots, q_m;r)$-sommant.

Théorème 3.1.1 [BP07, Theorem 3.1] ; *Soit $A \in \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$. S'il existe $(1 \leq k \leq m)$ et $C > 0$ telle que l'opérateur s-linéaire $(s = m - k)$*

$$A_{x_1 \ldots x_k}\left(x_{k+1}, \ldots, x_m\right) := A\left(x_1, \ldots, x_m\right)$$

est $(p;q_1, \ldots, q_s;r)$-sommant pour chaque $x_1 \in X_1, \ldots, x_k \in X_k$ et

$$\pi_{(p;q_1,\dots,q_s;r)}\left(A_{x_1\dots x_k}\right) \leq C\left\|A\right\|\left\|x_1\right\|\cdots\left\|x_k\right\|.$$

Alors A est $(p;\underbrace{1,\dots,1}_{k\text{ fois}},q_1,\dots,q_s;r)$-sommant et

$$\pi_{(p;1,\dots,1,q_1,\dots,q_s;r)}\left(A\right) \leq C\left\|A\right\|.$$

Corollaire 3.1.2. Si

$$\mathcal{L}\left(X_1,\dots,X_s;Y\right) = \mathcal{L}_{as(p;q_1,\dots,q_s;r)}\left(X_1,\dots,X_m;Y\right).$$

Alors

$$\mathcal{L}\left(X_1,\dots,X_m;Y\right) = \mathcal{L}_{as(p;q_1,\dots,q_m,1,\dots,1;r)}\left(X_1,\dots,X_m;Y\right)$$

pour tout $X_{s+1},\dots,X_m$ des espaces de Banach .
En particulier

$$\mathcal{L}\left(X_1,\dots,X_m;\mathbb{K}\right) = \mathcal{L}_{as(p;p,1,\dots,1;r)}\left(X_1,\dots,X_m;\mathbb{K}\right) \tag{3.2}$$

pour tout $p \geq 1$ et $X_1,\dots,X_m$ des espace de Banach et pour $r > 0$.

Preuve.
L'opérateur

$$id : \mathcal{L}_{as(p;q_1,\dots,q_s;r)}\left(X_1,\dots,X_s;Y\right) \longrightarrow \mathcal{L}\left(X_1,\dots,X_s;Y\right)$$

est continue, le théorème des applications ouverts affirme qu'il existe une constant positive C telle que

$$\pi_{(p;q_1,\dots,q_s;r)}\left(T\right) \leq C\left\|T\right\|$$

et d'après le théorème précédant, on obtient

$$\mathcal{L}\left(X_1,\dots,X_m;Y\right) = \mathcal{L}_{as(p;q_1,\dots,q_s,1,\dots,1;r)}\left(X_1,\dots,X_m;Y\right).$$

En choisissant $r = \infty$ dans (3.2) et en utilisant (2.6) nous avons :

Corollaire 3.1.3. Si $X_1, \ldots, X_m$ des espace de Banach et pour $r > 0$ on a

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as(p;p,1,\ldots,1)}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K})$$

pour tout $p \geq 1$.

Pour$p = 1$ on retrouve le théorème de l'Defant-Voigt. Comme une conséquence de (2.5) et le Théorème de Defant-Voigt, nous avons

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as(1;1;r)}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K})$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K}) &= \mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_m,1,\ldots,1;\infty)}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K}) && (r = \infty,\ 3.2) \\
&= \mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_m,1,\ldots,1)}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K}) && (\text{d'après } 2.6) \\
&= \mathcal{L}_{as(p;q,1,\ldots,1)}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K}) && (q_1 = \cdots = q_m = q) \\
&= \mathcal{L}_{as(p;p,1,\ldots,1)}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K}) && (q = p) \\
&= \mathcal{L}_{as(1;1,1,\ldots,1)}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K}) && (p = 1) \\
&\subset \mathcal{L}_{as(1;1;r)}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K}) && (\text{d'après } 2.5) \\
&\subset \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K})
\end{aligned}$$

3.2 Théorème de Grothendieck

Ce théorème est en fait la reformulation, par Lindenstrauss et Pleczynski, en termes d'opérateurs p-sommants, de l'inégalité de Grothendieck.

Théorème de Grothendieck : Tout opérateur linéaire continu de ℓ_1 dans $\ell_2$est absolument $(1,1)$-sommants., i.e.,

$$\mathcal{L}_{as(1;1)}(\ell_1; \ell_2) = \mathcal{L}(\ell_1; \ell_2)$$

Extension de Bernardino [Ber11] :

$$\mathcal{L}_{as\left(\frac{2}{n+1};1,\ldots,1\right)}\left(\ell_1,\ldots,\ell_1;\ell_2\right)=\mathcal{L}\left(\ell_1,\ldots,\ell_1;\ell_2\right), \tag{3.3}$$

On peut donner la version multilinéair du théorème de Grothendieck aux opérateurs $(p;q_1,\ldots,q_m;r)$-sommant [BPS11]. Pour la preuve, nous aurons besoin le lemme suivant :

Lemme 3.2.1 [BPS11]. Si Y est un espace de Banach de type p^* et

$$\tfrac{1}{s}=\tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{q}$$

alors

$$\mathcal{L}_{as(q;q_1,\ldots,q_m)}\left(X_1,\ldots,X_m;Y\right)\subset\mathcal{L}_{as(s;q_1,\ldots,q_m;1)}\left(X_1,\ldots,X_m;Y\right).$$

Preuve. Soient $T\in\mathcal{L}_{as(q;q_1,\ldots,q_m)}\left(X_1,\ldots,X_m;Y\right),\left(y_i^*\right)_{1\leq i\leq n}\in\ell_{1.w}^n\left(Y^*\right)$ et $\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\in\ell_{q_j.w}^n\left(X_j\right)$. Comme Y^* est de cotype p (D'après le Théorème 1.2.3), on a

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^n\left|\left\langle T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right|^s\right)^{\frac{1}{s}}\\
\leq\;&\left(\sum_{i=1}^n\left(\left\|T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right)\right\|\left\|y_i^*\right\|\right)^s\right)^{\frac{1}{s}}\\
\leq\;&\left(\sum_{i=1}^\infty\left\|y_i^*\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^\infty\left\|T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
\leq\;&C_p\left(Y^*\right)\|T\|_{as,(q;q_1,\ldots,q_m)}\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i\left(t\right)y_i^*\right\|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^m\left\|\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{q_j.w}\\
\leq\;&C_p\left(Y^*\right)K_{1.2}\|T\|_{as,(q;q_1,\ldots,q_m)}\left(\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^n r_i\left(t\right)y_i^*\right\|^1dt\right)\prod_{j=1}^m\left\|\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{q_j.w}\\
\leq\;&C_p\left(\,Y^*\right)K_{1.2}\|T\|_{as,(q;q_1,\ldots,q_m)}\max\left\|\sum_{i=1}^n r_i\left(t\right)y_i^*\right\|\\
\leq\;&C_p\left(Y^*\right)K_{1.2}\|T\|_{as,(q;q_1,\ldots,q_m)}\left\|\left(y_i^*\right)\right\|_{1.w}\prod_{j=1}^m\left\|\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{q_j.w}\leq\infty
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration ■

Proposition 3.2.2. *Si m est entier positive et*

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$

alors

$$\mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_m)}(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K}) \subset \mathcal{L}_{as(t;q_1,\ldots,q_m;r)}(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K})$$

pour $X_1,\ldots,X_m$ des espaces de Banach et $r > 0$.

Preuve.

Soient $T \in \mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_m)}(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right|^t\right)^{\frac{1}{t}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left\|T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right)\right\| \left\|y_i^*\right\|\right)^t\right)^{\frac{1}{t}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left\|y_i^*\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left\|T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|T\|_{as,(p;q_1,\ldots,q_m)} \left\|\left(y_i^*\right)\right\|_r \prod_{j=1}^{m} \left\|\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{q_j.w} \\
&\leq \|T\|_{as,(p;q_1,\ldots,q_m)} \left\|\left(y_i^*\right)\right\|_{r.w} \prod_{j=1}^{m} \left\|\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{q_j.w}
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration ■

Corollaire 3.2.3. Pour $r = 1$ on a

$$\mathcal{L}_{as(1;1)}(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K}) \subset \mathcal{L}_{as\left(\frac{1}{2};1;1\right)}(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K})$$

et, par conséquent, à partir (**3.1**)

$$\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K}) = \mathcal{L}_{as\left(\frac{1}{2};1;1\right)}(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K})$$

Proposition 3.2.4. Pour $r > 0$ on a

$$\mathcal{L}(\ell_1,\ldots,\ell_1;\ell_2) = \mathcal{L}_{as\left(\frac{2}{n+1};1,\ldots,1;r\right)}(\ell_1,\ldots,\ell_1;\ell_2)$$

Preuve. Par (3.3) et (2.5) $\blacksquare$

Pour $r = 1$, le théorème qui suite est le principal résultat

Théorème 3.2.5. [BPS11] *(Théorème de Grothenieck) Si* $T \in \mathcal{L}(\ell_1, \ldots, \ell_1; \ell_2)$, *alors* T *est* $\left(\frac{2}{m+2}; 1, \ldots, 1; 1\right)$*-sommant.*

Preuve.

D'après (3.3), on a $T \in \mathcal{L}_{as\left(\frac{2}{n+1};1,\ldots,1\right)}(\ell_1, \ldots, \ell_1; \ell_2)$.

Comme ℓ_2 est de type 2 et

$$\frac{1}{2/n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2/n+1}$$

Par le lemme précédent

$$\mathcal{L}_{as\left(\frac{2}{n+1};1,\ldots,1\right)}(\ell_1, \ldots, \ell_1; \ell_2) \subset \mathcal{L}_{as\left(\frac{2}{n+2};1,\ldots,1;1\right)}(\ell_1, \ldots, \ell_1; \ell_2)$$

ce qui termine la preuve $\blacksquare$

Bibliographie

[Ach11] D.Achour *Multilinear extensions of absolutely -somming operators,*Rend Cire. Mat. palermo. Doi :10.1007/s12215-011-0054-2 (2011).

[AM89] R.Alencar,M.C.Matos, *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces*, Publ. Dep. An. Mat.Univ. Complutense de Madrid 12 (1989).

[Ber11] A.T.Bernardino,*On cotype and a Grothenieck-type theorem for absolutely summing multilinear operators ,*Quaest .Math.(in press).

[BP09] G.Botelho and D.Pellegrino, *When every multilinear mapping is multiple summing .Math, Nachr .282.1414-1422(2009).*

[BP07] G.Botelho and D.Pellegrino,*Coincidence situations for absolutely summing non-linear mappinges,*Port.Math .64(2007), $175 - 191$.

[BPR07] G.Botelho and D.M.Pellegrino and P.Rueda, *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publ. RIMS, Kyoto Univ.43, 1139–1155(2007).

[BPR10] G.Botelho and D.M.Pellegrino and P.Rueda, *A unified Pietsch Domination theorem* ,.J. Math. Anal. Appl. .356, 962–276(2010).

[BPS11] G.Botelho,D.M.Pellegrino and J.B. Seoane-Sepulveda,*Multiple* $(p; q; r)$ *−summing polynomials and multilinear operators* , 1109.(2011)

[CP07] E.Caliskan D.Pellegrino, *On the multilinear generalization of the concept of absolutely summing operators .Rocky Mt.J.Math.37(4)1137-1152(2007).*

[DJT95] J.Diestel,H.Jarchow,A.Tonge, *Absolutely summing operators.* Cambridge University Press, 1995.

[Gei84] S. Geiss, *Ideale multilinearer Abbildungen.* Diplomarbeit, 1984.

[Mat93] M.C.Matos, *On multilinear mappings of nuclear type.*, Rev. Mat. Comput. 6(1993), 61-81.

[Mat03] M.C.Matos, *Fully absolutely summing and Hilbert–Schmidt multilinear mappings*, Collect. Math. 54, 2 (2003), 111–136.

[MP66] B.Mitiage , A.Peczynski , *Nuclear aperators and approximative dimensions* . In Procedings Internationnal Congress of Mathematices , Moscow (1966)

[Muj08] X.Mujica , $\tau\,(p;q)$*summing mapping and the domination theorm .Port. Math . 65(2),211-226(2008)*

[PS(1)11] D.M.Pellegrino and J.Santos , *On summability of nonlinear mapping : anew approach .Math Z.2011, to appear doi :10.1007\00209-010-0792-4.*

[PS11(2)] D.M.Pellegrino , J.Santos, *A general Pietsch domination theorem .J. Math. Anal. Appl. 375, 371-374 (2011).*

[PSS11] D.M.Pellegrino , J.B. Seoane-Sepulveda and J.Santos , *Some techniques on nonlinear analysis and applications .* arXiv :1006.0536.

[PV03] D.Perez-Garcia,I.Villanueva,*Multiple summing operators on Banach spaces.* J.Math. Anal. Appl. 285 (2003), 86-96.

[Pie67] A.Pietsch. *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten ,* Räumen.Studia. Math. 27, 333–353(1967)

[Pie80] A.Pietsch, *Operator Ideals.* Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, 1978 ; NorthHolland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.

[Pie83] A.Pietsch. *Ideals of multilinear functionals* (designs of a theory), Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics, 185-199.1983.