

THÈSE

*Présentée pour l'obtention du diplôme
de Doctorat en sciences*

Spécialité

Mathématiques

Option Analyse fonctionnelle

Thème

Etude sur certains espaces fonctionnels

Présentée par

MOHAMED SAADI

Soutenue le : 12/ 02 /2019 devant le jury composé de

Douadi Drihem	Prof.	Univ. M'Sila	Président
Madani Moussai	Prof.	Univ. M'Sila	Directeur de thèse
Dahmane Achour	Prof.	Univ. M'Sila	Examineur
Taieb Hamaizia	MCA.	Univ. Oum Elbouaghi	Examineur
Ahcene Merad	MCA.	Univ. Oum Elbouaghi	Examineur
Abdelbaki Merouani	Prof.	Univ. Sétif 1	Examineur

Année Universitaire : 2018/ 2019

Remerciements

Je tiens à présenter mes profonds remerciements à mon directeur de thèse le professeur Madani Moussai, pour son soutien indéfectible durant la préparation de la thèse.

J'adresse mes plus vifs remerciements aux membres de jury "Messieurs les professeurs : Dahmane Achour, Douadi Drihem, Taieb Hamaizia, Ahcene Merad et Abdelbaki Merouani", qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Mes remerciements vont également à tous ceux qui m'ont aidé.

Table des matières

Introduction	5
Notations	7
1 Préliminaires	10
1.1 Inégalités classiques	10
1.2 La décomposition de Littlewood-Paley	11
1.3 Inégalités maximales	12
1.4 Cubes dyadiques	13
1.5 Les espaces $A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$	14
1.5.1 Définitions et quelques propriétés	14
1.5.2 Inclusions	16
I L'opérateur de composition	18
2 La composition dans l'intersection avec $A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$	19
2.1 Enoncé des résultats	19
2.1.1 Résultats déjà obtenus	19
2.1.2 Résultats récents	20
2.2 La para-linéarisation	21

2.3	Estimations de base	24
2.4	Preuve du Théorème 2.4	32
2.5	Quelques cas particuliers	33
2.6	Le cas limite $s = 1$	35
2.7	Le cas de l'opérateur para-produit	36
3	Un calcul fonctionnel en dimension une	39
3.1	Les espaces de type de Besov homogènes	39
3.2	Caractérisation par les différences	41
3.3	Primitives des fonctions à p-variations bornées	42
3.4	Le théorème de composition	43
II	Sur les opérateurs pseudo-différentiels	49
4	Les opérateurs pseudo-différentiels sur $A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$	50
4.1	Généralités	50
4.1.1	Réduction aux symboles élémentaires	51
4.2	Résultats principaux	53
4.2.1	Des lemmes de presque-orthogonalité	55
4.2.2	Preuve du Théorème 4.12 et 4.14	60
4.2.3	Preuve du Théorème 4.13 et 4.15	65
	Annexe	68
	Questions ouvertes	74
	Bibliographie	75

Introduction

Il s'agit d'une étude dans la théorie de Sobolev, elle concerne principalement les espaces de type de Besov et de type de Lizorkin-Triebel qui généralisent les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel habituels.

Ce travail est consacré à l'étude de deux types d'opérateurs définis sur les espaces de type de Besov et de type de Lizorkin-Triebel, le premier est l'opérateur non linéaire de composition $T_f(g) := f \circ g$ avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le deuxième est l'opérateur pseudo-différentiel (linéaire) : $Ag(x) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \widehat{g}(\xi) d\xi$, (noté plutard $A := \sigma(x, D)$) pour certaines conditions vérifiées par le symbole $\sigma(x, \xi)$.

Pour l'opérateur de composition, nous disposons d'une riche littérature pour les cas des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel au moins en dimension $n = 1$ en comparant avec les cas des espaces de type Besov et de type Lizorkin-Triebel, nous citons par exemple les travaux de Bourdaud [4], Bourdaud, Moussai et Sickel [8, 9], Runst et Sickel [26].

Pour les cas des opérateurs pseudo-différentiels, là aussi on a une très riche littérature, en particulier les travaux de Mitivier [17], Moussai [19] et Yabuta [31].

Revenons à notre manuscrit. Il se compose de quatre chapitres et une annexe que nous allons les retracer comme suit :

Le premier chapitre est consacré au rappel de quelques préliminaires, tels que des

inégalités classiques, la décomposition de Littlewood-Paley, la fonction maximale, les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel Notons que nous allons donner uniquement des propriétés, des lemmes, et des propositions utiles pour nos résultats.

Dans le deuxième chapitre, nous allons étudier l'opérateur de composition T_f sur l'intersection de quelques espaces fonctionnels. Ce phénomène a été étudié par plusieurs auteurs comme par exemple en [21] et [35, Théorème 5.2], les auteurs de ce dernier ont prouvé que l'opérateur T_f est borné de $C(\mathbb{R}^n) \cap A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans lui même pour certaines conditions vérifiées par les paramètres s, p, q, τ et la fonction f . Notons que dans notre preuve nous allons utiliser la para-linéarisation et une estimation, connue dans le cas générale par "un lemme de presque-orthogonalité". La méthode de para-linéarisation a été introduite par Y. Meyer [18] où il l'a utilisé pour linéariser des problèmes en EDP non linéaires, voir aussi [17] et [1, Lemme 2.62].

Le troisième chapitre est encore consacré à l'étude de l'opérateur de composition T_f sur les espaces $B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})$. Nous allons montrer que T_f est borné de $BV_{sp-1}^1 \cap B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})$ dans $B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})$ en utilisant des caractérisations de l'espace $B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})$ par les différences.

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons à l'étude des opérateurs pseudo-différentiels dont le but d'établir la continuité des opérateurs appartenant à la classe $OP_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \rho, N)$ sur $A_{p,q}^{s+\mu,\tau}(\mathbb{R}^n)$ " $A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de type de Besov ou l'espace de type de Lizorkin-Triebel", où ω est un module de continuité et $\Omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction vérifiant les conditions suivantes :

$$\sum_{k \geq 0} \left\{ \omega(2^{-k}) \Omega(2^k) \right\}^q < \infty,$$

$$(\forall \nu > 0, \exists c_\nu > 0), t > 1 \Rightarrow \int_1^t \frac{\Omega(u)}{u^{\nu+1}} du \leq c_\nu \frac{\Omega(t)}{t^\nu}.$$

Nous allons alors dans ce chapitre, généraliser un résultat de continuité dû à Moussai [20] en affaiblissant les hypothèses.

Pour la commodité du lecteur, nous allons dans un dernier chapitre écrit sous forme d'une annexe, prouver quelques théorèmes et corollaires du chapitre 2.

Notation

- Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $a_+ := \max(a, 0)$.
- $C(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$.
- $\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$ est le support de la fonction f .
- Pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ on note

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad \text{et} \quad D^\alpha f = f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

- $C^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) : D^\alpha f \in C(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$.
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{supp } f \text{ est compact}\}$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ son dual.
- On définit le produit de convolution de deux fonctions par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$.
- Pour $0 < p \leq \infty$ on définit les espaces de Lebesgue $L_p(\mathbb{R}^n)$ par les f mesurables telles que $\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ si $0 < p < \infty$ et $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess}|f(x)| < \infty$.
- Pour $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, on définit la transformée de Fourier de f par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \text{ et la transformée de Fourier inverse de } f \text{ par}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) := \check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} f(\xi) d\xi, \text{ elles sont étendus à } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ de la manière}$$

usuelle.

- $\ell_q(\mathbb{Z}) := \left\{ (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} : \|a_i\|_{\ell_q(\mathbb{Z})} := \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i|^q \right)^{1/q} < \infty \right\}$ si $0 < q < \infty$.
- $\ell_\infty(\mathbb{Z}) := \left\{ (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} : \|a_i\|_{\ell_\infty(\mathbb{Z})} := \sup_{i \in \mathbb{Z}} |a_i| < \infty \right\}$.
- $C, c_1, c_2, \dots$ désignent des constantes positives, leurs valeurs peuvent varier d'une ligne à une autre.
- Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note p' le nombre réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (p' est l'exposant conjugué

de p).

- Pour un espace E des fonctions définies de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, on définit E^{loc} par

$$E^{loc} := \{f : f\varphi \in E, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}.$$

- $P_{k,\nu} := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \nu_j 2^{-k} \leq x_j < (\nu_j + 1) 2^{-k}, j = 1, \dots, n, \nu \in \mathbb{Z}^n, k \in \mathbb{Z}\right\}$ désigne le cube dyadique de longueur de côté 2^{-k} et de coin $2^{-k}\nu$.
- $B(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$.
- $W_\infty^1(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions bornées et Lipchitziennes définies sur $\mathbb{R}^n$.
- Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $|\Omega|$ est la mesure de Lebesgue de Ω .
- $A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de type de Besov $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ ou l'espace de type de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.
- Pour une fonction arbitraire f définie sur $\mathbb{R}^n$, on note les opérateurs de différence par

$$\Delta_h^1 f(x) := \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \quad \text{et} \quad \Delta_h^{M+1} f := \Delta_h(\Delta_h^M f) \quad M \in \mathbb{N}, x, h \in \mathbb{R}^n.$$

Préliminaires

Ce chapitre contient des rappels nécessaires pour la suite, tel que des inégalités classiques, la décomposition de Littlewood-Paley, la fonction maximale... Pour les détails nous référons par exemple aux [16, 26, 29, 30] pour les cas des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel, et aux [12, 14, 32, 33, 34, 35] pour les cas des espaces de type de Besov et de type de Lizorkin-Triebel.

1.1 Inégalités classiques

Proposition 1.1 (*Inégalité de Bernstein*) Soient $0 < p \leq q \leq \infty$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \mathcal{F}(f) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq M\}$, on a

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq cM^{|\alpha|+n/p-n/q}\|f\|_p.$$

Proposition 1.2 Soient $0 < a < 1, 0 < q \leq \infty$ et $J \in \mathbb{Z}$. Alors, pour toute suite $\{\varepsilon_j\}_{j \geq J_+}$ à termes positifs vérifiant $\left(\sum_{j \geq J_+} \varepsilon_j^q\right)^{1/q} < \infty$, on a

$$\left(\sum_{k \geq J_+} \left(\sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j} \varepsilon_j\right)^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{k \geq J_+} \left(\sum_{j=k}^{\infty} a^{j-k} \varepsilon_j\right)^q\right)^{1/q} \leq c \left(\sum_{j \geq J_+} \varepsilon_j^q\right)^{1/q}.$$

En plus de ces deux assertions, nous utiliserons les inégalités de Hölder, Minkowski et Young.

1.2 La décomposition de Littlewood-Paley

Nous allons rappeler la construction de la décomposition de Littlewood-Paley d'une fonction appartenant à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Soit ρ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\rho(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$, $0 \leq \rho(\xi) \leq 1$ si $1 \leq |\xi| \leq 3/2$ et $\rho(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq 3/2$. On pose $\gamma(\xi) := \rho(\xi) - \rho(2\xi)$, alors γ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, portée par la couronne compact $1/2 \leq |\xi| \leq 3/2$ et on a

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

et

$$\rho(\xi) + \sum_{j \geq 1} \gamma(2^{-j}\xi) = 1 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n).$$

On définit les opérateurs pseudo-différentiels S_j et Q_k par :

$$S_j f := \rho(2^{-j}D)f, j = 0, 1, \dots \quad \text{et} \quad Q_k f := \gamma(2^{-k}D)f, k = 1, 2, \dots$$

On note aussi $Q_0 := S_0$. On peut montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}_0$, il existe une constante $c > 0$ et un entier $M \in \mathbb{N}_0$, tels que

$$\|Q_j f\|_p \leq c 2^{-jN} \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^M |f^{(\alpha)}(x)|,$$

pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et tout $j \in \mathbb{N}_0$. Donc on a la proposition suivante :

Proposition 1.3 *Pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) nous avons*

$$f = S_j f + \sum_{k \geq j+1} Q_k f \quad (\forall j \in \mathbb{N}_0), \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ (resp. } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)). \quad (1.1)$$

La formule (1.1) est appelée la série de Littlewood-Paley correspondante à la fonction f .

Prenons $j = 0$, nous avons $f = \sum_{k \geq 0} Q_k f$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$).

Remarque 1.4 *Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}_0$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$\text{supp } \widehat{Q_k f} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\} \quad \text{et} \quad \text{supp } \widehat{S_j f} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2^{j+1}\}.$$

1.3 Inégalités maximales

La fonction maximale est un outil important pour caractériser certains espaces fonctionnels. Nous allons rappeler quelques propriétés de cette fonction, et nous référons aux [15, 25, 27].

Définition 1.5 *Pour toute fonction f localement intégrable, on définit la fonction maximale par*

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.6 *Soit $1 < p \leq \infty$. Il existe une constante $c = c(n, p) > 0$ telle que pour tout cube $Q \subset \mathbb{R}^n$ et toute fonction g localement intégrable, on ait*

$$\|Mg\|_{L_p(Q)} \leq c\|g\|_{L_p(Q)}.$$

Preuve. Voir [25, Théorème 9]. ■

Proposition 1.7 *Il existe une constante $c > 0$, telle que pour toute $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on ait*

$$Q_k g(x) \leq cMg(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{N}_0).$$

Preuve. On écrit $Q_k g(x) = I_1(x) + I_2(x)$, où

$$I_1(x) := 2^{kn} \int_{|x-y| \leq 2^{-k}} \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^k(x-y)) g(y) dy$$

et

$$I_2(x) := 2^{kn} \int_{|x-y| \geq 2^{-k}} \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^k(x-y)) g(y) dy.$$

Il est clair qu'on a

$$|I_1(x)| \leq \|\mathcal{F}^{-1} \gamma\|_{\infty} Mg(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Pour l'estimation de $|I_2(x)|$, nous avons

$$\begin{aligned}
|I_2(x)| &\leq 2^{kn} \sum_{\ell \geq 0} \int_{2^{-k+\ell} \leq |x-y| \leq 2^{-k+\ell+1}} \left| \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^k(x-y)) g(y) \right| dy \\
&\leq c_1 2^{kn} \sum_{\ell \geq 0} \int_{2^{-k+\ell} \leq |x-y| \leq 2^{-k+\ell+1}} \left(1 + 2^k |x-y|\right)^{-(n+1)} |g(y)| dy \\
&\leq c_2 \sum_{\ell \geq 0} \frac{2^{\ell n}}{(1 + 2^\ell)^{n+1}} 2^{(k-\ell-1)n} \int_{|x-y| \leq 2^{-k+\ell+1}} |g(y)| dy \\
&\leq c_3 M g(x) \sum_{\ell \geq 0} 2^{-\ell} \leq c_4 M g(x),
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

1.4 Cubes dyadiques

Soient $\nu := (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $k \in \mathbb{Z}$, le cube dyadique de longueur de côté 2^{-k} est la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$P_{k,\nu} := \{x \in \mathbb{R}^n : \nu_j \leq 2^k x_j < \nu_j + 1, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Proposition 1.8 Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{R}^n = \bigcup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} P_{k,\nu}$.

Preuve. Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$2^k [x_j] \leq 2^k x_j < 2^k ([x_j] + 1), (j = 1, \dots, n). \quad (1.2)$$

Pour k fixé, $[x_j]$ est le seul entier vérifiant (1.2), autrement dit chaque point $x \in \mathbb{R}^n$ est contenu dans un est un seul cube dyadique de longueur de côté 2^{-k} . ■

Proposition 1.9 Soit $0 < p \leq \infty$. Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\sup_{x \in P_{k,\nu}} |\psi(x)| \leq c 2^{kn/p} \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \|\psi\|_{L_p(P_{k,\mu})},$$

pour toute $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\text{supp } \widehat{\psi} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2^{k+1}\}$, tous $k \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{Z}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Preuve. D'après [16, p. 782, (2.11)] on a

$$\sup_{x \in P_{k,\nu}} |\psi(x)| \leq c 2^{kn/p} \left(\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} (1 + |\mu|)^{-n-1} \int_{P_{k,\nu+\mu}} |\psi(y)|^p dy \right)^{1/p},$$

donc le fait que $\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} (1 + |\mu|)^{-n-1} < \infty$ donne l'estimation voulue. ■

1.5 Les espaces $A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$

On commence par les définitions et quelques propriétés des espaces de Besov, de Lizorkin-Triebel, de type de Besov et de type de Lizorkin-Triebel.

1.5.1 Définitions et quelques propriétés

Définition 1.10 Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$. L'espace de Besov noté $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, telles que $\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} < \infty$ où

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sj} \|Q_j f\|_p^q \right)^{1/q},$$

avec les modifications usuelles si $p = \infty$ ou $q = \infty$.

Définition 1.11 Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. L'espace de Lizorkin-Triebel noté $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, telles que $\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} < \infty$ où

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left(\sum_{j \geq 0} (2^{sj} |Q_j f(\cdot)|)^q \right)^{1/q} \right\|_p,$$

avec la modification usuelle si $q = \infty$.

Définition 1.12 Soient $0 < p, q \leq \infty$ et $s, \tau \in \mathbb{R}$. L'espace de type de Besov noté $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, telles que $\|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} < \infty$ où

$$\|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sjq} \left\{ \int_{P_{k,\nu}} |Q_j f(x)|^p dx \right\}^{q/p} \right)^{1/q},$$

avec la modification usuelle pour $p = \infty$ ($q = \infty$).

Définition 1.13 Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$ et $\tau \geq 0$. L'espace de type de Lizorkin- Triebel noté $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} < \infty$ où

$$\|f\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sqj} |Q_j f(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})},$$

avec la modification usuelle si $q = \infty$.

Remarque 1.14 Les espaces $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n), F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ sont des quasi-Banach pour $0 < p < 1$ ou $0 < q < 1$ et de Banach pour $p, q \geq 1$.

Remarque 1.15 Les espaces $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ et $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ sont indépendants du choix de la fonction ρ , si on choisit une autre fonction avec les mêmes propriétés que ρ on obtient des quasi-normes équivalentes à celles qui sont définies par ρ .

Exemple Soit $r > 0$. Soit ρ_r une fonction telle que $\rho_r(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 3r/2$ et $\rho_r(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq r$. On pose $\gamma_r(\xi) := \rho_r(\xi) - \rho_r(2\xi)$ qui est porté par l'ensemble $r/2 \leq |\xi| \leq 3r/2$.

Soient $S_{r,k} := \rho_r(2^{-k}D)$ ($k = 0, 1, \dots$), $Q_{r,j} := \gamma_r(2^{-j}D)$ ($j = 1, 2, \dots$) et $Q_{r,0} := S_{r,0}$.

Alors pour toute $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (rep. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) nous avons

$$g = \sum_{j \geq 0} Q_{r,j} g \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ (resp. } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)).$$

De plus si nous remplaçons Q_j par $Q_{r,j}$ ($j=0, 1, \dots$) dans les définitions de $\|\cdot\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$,

$\|\cdot\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$, $\|\cdot\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$ et $\|\cdot\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$ nous obtenons des quasi-normes équivalentes dans

$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ et $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ respectivement.

Proposition 1.16 Soient $0 < p, q \leq \infty$ et $\tau, s \in \mathbb{R}$ ($0 < p < \infty$ pour le cas de Lizorkin-Triebel).

- (i) Si $\tau < 0$ alors $A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.
- (ii) $A_{p,q}^{s,0}(\mathbb{R}^n) = A_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.
- (iii) Si $(\tau > 1/p \text{ et } 0 < q < \infty)$ ou $(\tau = 1/p \text{ et } q = \infty)$ alors

$$A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) = B_{\infty,\infty}^{s+n\tau-(n/p)}(\mathbb{R}^n). \quad (1.3)$$

Preuve. Voir [35, p. 22, p. 39] et [34, théorème 2, p. 560]. ■

Nous rappelons que $B_{\infty,\infty}^{s+n\tau-(n/p)}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hölder.

1.5.2 Inclusions

Définition 1.17 Soient $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces quasi-Banach. On dit que X s'injecte dans Y et on écrit $X \hookrightarrow Y$, si $X \subseteq Y$ et $\|f\|_Y \leq c\|f\|_X, \forall f \in X$.

Exemple Si $0 < p \leq q \leq \infty$ alors $\ell_p(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \ell_q(\mathbb{Z})$.

Rappelons la définition de l'espace de type de Lebesgue :

Définition 1.18 Soient $0 < p \leq \infty$ et $0 \leq \tau < \infty$, l'espace $L_p^\tau(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions mesurables f telles que

$$\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)} := \sup_{k \in \{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \|f\|_{L_p(P_{k,\nu})} < \infty.$$

Remarque 1.19 Si on considère l'ensemble T des fonctions f telles que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \|f\|_{L_p(P_{k,\nu})} < \infty, \text{ alors } T = \{0\}.$$

Proposition 1.20 Soient $s \in \mathbb{R}, 0 \leq \tau < \infty$ et $0 < p, q \leq \infty$, avec $p < \infty$ dans le cas de Lizorkin-Triebel.

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $0 < q_1, q_2 \leq \infty$. Alors

$$\begin{aligned} A_{p,q_1}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) &\hookrightarrow A_{p,q_2}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) \quad \text{si } q_1 \leq q_2, \\ A_{p,q_1}^{s+\varepsilon,\tau}(\mathbb{R}^n) &\hookrightarrow A_{p,q_2}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n), \\ B_{p,\min(p,q)}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) &\hookrightarrow F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,\max(p,q)}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

2. Soient $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$ et $-\infty < s_1 < s_0 < \infty$. Alors

$$B_{p_0,q}^{s_0,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p_1,q}^{s_1,\tau}(\mathbb{R}^n) \quad \text{si } s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}.$$

3. Soient $0 < p_0 < p_1 < \infty, 0 < q, r \leq \infty$ et $-\infty < s_1 < s_0 < \infty$. Alors

$$F_{p_0,r}^{s_0,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p_1,q}^{s_1,\tau}(\mathbb{R}^n) \text{ si } s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}.$$

4. Si $1 \leq p \leq \infty$ alors $B_{p,1}^{0,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p,1}^{0,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p^\tau(\mathbb{R}^n)$.

5. Soient $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$ ($p_2 < \infty$ pour le cas de Lizorkin-Triebel). Alors

$$A_{p_2,q}^{s,\tau+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow A_{p_1,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [11, 35] ■

Première partie

L'opérateur de composition

La composition dans l'intersection

avec $A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$

On s'intéresse ici à l'étude de l'opérateur de composition $T_f : g \mapsto f \circ g$, pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée, sur l'espace d'intersection avec $A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$. Dans toute la suite de ce chapitre, nous fixons une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, telle que $\varphi(x) := 1$ sur $[-1, 1]$ et $\varphi(x) := 0$ en dehors de $[-2, 2]$, on pose $\varphi_t(x) := \varphi(x/t)$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Si $g \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $t \geq \|g\|_\infty$ alors

$$f \circ g = f\varphi_t \circ g$$

cette formule va nous aider à simplifier les calculs. Il est aussi important de rappeler qu'on peut majorer $|f \circ g(x)|$ par $\|f'\|_\infty |g(x)|, \forall x \in \mathbb{R}^n$, dès que $f' \in L_\infty(\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$, voir les détails un peu plus loin.

2.1 Enoncé des résultats

2.1.1 Résultats déjà obtenus

Nous rappelons les résultats de Moussai [21] concernant les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel :

Théorème 2.1 Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ et $0 < s \neq 1$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty, q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$.

- (i) Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n) \cap B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.2 Soient $1 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ et $0 < s \neq 1$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty, q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$.

- (i) Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap F_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n) \cap F_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p, q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Dans notre article [24], nous avons étendu le Théorème 2.1 aux espaces $B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.3 ([24]) Soient $0 < p, q \leq \infty, (n/p - n)_+ < s \neq 1$ et $0 \leq \tau \leq 1/p$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty, q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$.

- (i) Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n) \cap B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$.

2.1.2 Résultats récents

Nous allons étendre le Théorème 2.2 aux espaces $F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ sous certaines conditions en démontrant le théorème suivant :

Théorème 2.4 Soient $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, (n/\min(p, q) - n)_+ < s \neq 1$ et $0 \leq \tau \leq 1/p$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty, q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$.

- (i) Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n) \cap F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$.

Les Théorèmes 2.3 et 2.4 sont pour $0 \leq \tau \leq 1/p$, cependant le cas $\tau > 1/p$ sera couvert par les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.5 Soient $0 < p, q \leq \infty, \tau > 1/p$. Soit $s \in \mathbb{R}$ tel que $0 < s + n\tau - n/p \neq 1$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty, \infty}^{s+n\tau-n/p}(\mathbb{R})_{loc}$.

- (i) Si $s + n\tau - n/p < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Si $s + n\tau - n/p > 1$, alors T_f est borné de $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans lui même.

Preuve. Il suffit d'appliquer (1.3) et [21, Proposition 3.1]. ■

Théorème 2.6 Soient $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, \tau > 1/p$. Soit $s \in \mathbb{R}$ tel que $0 < s + n\tau - n/p \neq 1$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty,\infty}^{s+n\tau-n/p}(\mathbb{R})_{loc}$.

(i) Si $s + n\tau - n/p < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Si $s + n\tau - n/p > 1$, alors T_f est borné de $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans lui même.

Preuve. La même preuve du Théorème 2.5. ■

2.2 La para-linéarisation

L'opérateur T_f est non linéaire sauf si f est linéaire, la méthode de para-linéarisation nous permet d'écrire un opérateur non linéaire sous forme de somme d'une séries d'opérateurs linéaires. Dans l'introduction nous avons expliqué que cette méthode est dû à Y. Meyer [18], voir aussi [17, p. 105] et [1, Lemme 2.62].

Proposition 2.7 Soit $s > 0$. Pour toute $g \in B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f' \in L_{\infty}^{loc}(\mathbb{R})$ on a

$$f \circ g = f \circ S_0 g + \sum_{j \geq 0} \left(f \circ S_{j+1} g - f \circ S_j g \right). \quad (2.1)$$

Preuve. L'injection $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ assure que $g \in L_{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Soit $t > \max(1, \|g\|_{\infty})$, donc $\|f \circ g\|_{\infty} = \|f \varphi_t \circ g\|_{\infty}$ pour $t > \|g\|_{\infty}$. Comme $f(0) = 0$ on peut écrire

$$\|f \circ g\|_{\infty} = \|f \varphi_t \circ g - f \varphi_t(0)\|_{\infty},$$

donc

$$\|f \circ g\|_{\infty} \leq \|(f \varphi_t)'\|_{\infty} \|g\|_{\infty},$$

d'où l'appartenance de $f \circ g$ à $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Maintenant, on montre que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f \circ S_j g = f \circ g \quad \text{dans } L_\infty(\mathbb{R}^n).$$

On a $g = S_j g + \sum_{k=j+1}^{\infty} Q_k g$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$|g(x) - S_j g(x)| = \left| \sum_{k=j+1}^{\infty} Q_k g(x) \right| \leq \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{-sk} \|2^{sk} Q_k g\|_\infty.$$

Par l'inégalité de Hölder(pour $0 < q < 1$ on utilise l'injection $\ell_q \hookrightarrow \ell_1$), on obtient

$$|g(x) - S_j g(x)| \leq c 2^{-sj} \|g\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)},$$

donc

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S_j g = g.$$

Il existe une constante c telle que $\|S_j g\|_\infty \leq c \|g\|_\infty$, pour $t \geq \max(1, \|g\|_\infty, c_1 \|g\|_\infty)$ on a

$$\begin{aligned} |f \circ g(x) - f \circ S_j g(x)| &= |f \varphi_t \circ g(x) - f \varphi_t \circ S_j g(x)| \\ &\leq \|(f \varphi_t)'\|_\infty |g(x) - S_j g(x)|. \end{aligned}$$

Prenons la limite des deux membres, nous obtenons $\lim_{j \rightarrow \infty} f \circ S_j g = f \circ g$.

On a

$$f \circ S_0 g + (f \circ S_1 g - f \circ S_0 g) + (f \circ S_2 g - f \circ S_1 g) + \dots (f \circ S_{j+1} g - f \circ S_j g) + \dots = f \circ g,$$

donc (2.1) est vérifiée. ■

Pour plus de simplification nous définissons les opérateurs R_j par

$$\begin{aligned} R_0(f, g) &:= \int_0^1 f \circ (z S_0 g) dz, \\ R_j(f, g) &:= \int_0^1 f \circ (S_{j-1} g + z Q_j g) dz \quad (j \geq 1). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Proposition 2.8 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$. Alors pour toute $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, la série $\sum_{j \geq 0} R_j(f', g)(x) Q_j g(x)$ converge, et on a

$$f \circ g = \sum_{j \geq 0} R_j(f', g) Q_j g.$$

Preuve. Effectuons le changement de variable $y = z S_0 g(x)$, nous obtenons

$$R_0(f', g)(x) S_0 g(x) = \int_0^{S_0 g(x)} f'(y) dy,$$

donc

$$R_0(f', g)(x) S_0 g(x) = f \circ S_0 g(x).$$

De même, le changement de variable $y = S_{j-1} g(x) + z Q_j g(x)$ nous donne

$$R_j(f', g)(x) Q_j g(x) = \int_{S_{j-1} g(x)}^{S_{j-1} g(x) + Q_j g(x)} f'(y) dy,$$

d'où

$$R_j(f', g)(x) Q_j g(x) = f \circ (S_{j-1} g(x) + Q_j g(x)) - f \circ S_{j-1} g(x).$$

On a

$$S_{j-1} g(x) + Q_j g(x) = S_j g(x),$$

donc

$$R_j(f', g) Q_j g(x) = f \circ S_j g(x) - f \circ S_{j-1} g(x) \quad (\forall j \geq 1),$$

finalement, la formule (2.1) donne

$$f \circ g = \sum_{j=0}^{\infty} R_j(f', g) Q_j g,$$

ce qui termine la démonstration. ■

La preuve des résultats principaux de ce chapitre se base sur le fait que T_f est borné sur l'espace $B_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n)$. Dans la proposition suivante nous rappelons une propriété de composition dans $B_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.9 Soient $0 < s \neq 1$ et $0 < q \leq \infty$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable appartenant à $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R})_{loc}$.

(i) Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans lui même.

De plus, il existe une fonction continue croissante $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui dépend seulement de n, q et s , telle que, pour toute fonction f , et toute g dans les différents espaces dans (i), (ii), on a

$$\|T_f(g)\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R})} \phi(\|g\|_{W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n)}) \quad \text{si } 0 < s < 1,$$

et

$$\|T_f(g)\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R})} \phi(\|g\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)}) \quad \text{si } s > 1,$$

avec $t \geq \max(1, \|g\|_{\infty})$.

Preuve. Voir [6, 21, 24]. ■

Comme conséquence de la Proposition 2.9 nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.10 Soient $0 < s \neq 1, 0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable appartenant à $B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$ et g une fonction telle que $g \in W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n)$ pour $s < 1$ ($g \in B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$ si $s > 1$). Alors la suite $(R_j(f', g))_{j \geq 0}$ est uniformément bornée dans $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$. De plus, il existe une fonction continue croissante $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui dépend seulement de n, q et s , telle que

$$\|(R_j(f', g))\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_1 \|f'\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R})} \phi(c_2 \|g\|_{W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n)}) \quad \text{si } 0 < s < 1, \quad (2.3)$$

et

$$\|(R_j(f', g))\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_1 \|f\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R})} \phi(c_2 \|g\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)}) \quad \text{si } s > 1, \quad (2.4)$$

avec $t \geq \max(1, \|g\|_{\infty})$.

Preuve. Voir [24]. ■

Les estimations (2.3)–(2.4) jouent un rôle important dans ce chapitre.

2.3 Estimations de base

On commence par une estimation de type de Nikol'skij.

Proposition 2.11 Soient $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, s > (n/\min(p, q) - n)_+$ et $\tau \geq 0$. Soit $b > 0$. Soit $(u_j)_{j \geq 0}$ une suite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

- $\widehat{u}_j$ est portée par la boule $|\xi| \leq b2^j$,
- $A := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} |2^{sj} u_j(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} < \infty$.

Alors la série $\sum_{j \geq 0} u_j$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vers une limite notée u qui vérifie $\|u\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq cA$, où la constante c ne dépend que de n, s, τ, p, q et b .

Preuve. Voir [35, p. 151]. ■

Comme nous l'avons dit auparavant, la preuve du Théorème 2.4 est basée sur une estimation, connue dans le cas général par "lemme de presque-orthogonalité".

Proposition 2.12 Soient $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, s > (n/\min(p, q) - n)_+$ et $0 \leq \tau \leq 1/p$. Soient $b > 0, (m_j)_{j \geq 0}$ une suite de fonctions appartenant à $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $(f_j)_{j \geq 0}$ une suite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

- $\widehat{f}_j$ est portée par la boule $|\xi| \leq b2^j$,
- $A := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} (2^{sj} |f_j(\cdot)|)^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} < \infty$.

Alors, on a

$$\left\| \sum_{j \geq 0} m_j f_j \right\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq cA \sup_{j \geq 0} \|m_j\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)},$$

où la constante c ne dépend que de n, p, q, s, τ et b .

Preuve. D'après la Proposition 1.3 pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, nous pouvons écrire

$$m_j = S_j m_j + \sum_{\ell \geq j+1} Q_\ell m_j \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

ce qui permettra d'obtenir la décomposition suivante $\sum_{j \geq 0} m_j f_j = g_1 + g_2$, où

$$g_1 := \sum_{j \geq 0} f_j S_j m_j \quad \text{et} \quad g_2 := \sum_{\ell \geq 1} \sum_{j=0}^{\ell-1} f_j Q_\ell m_j.$$

Estimation de g_1 . La fonction $\widehat{f_j S_j m_j}$ est portée par la boule $|\xi| \leq (b + 3/2)2^j$, donc

par la Proposition 2.11, nous avons

$$\|g_1\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} (2^{sj} |f_j S_j m_j(\cdot)|)^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}.$$

Par l'inégalité de Young $\|S_j m_j\|_\infty \leq c \|m_j\|_\infty$ ($\forall j \geq 0$), et l'injection $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R}^n)$

car ($s > 0$), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} &\leq c \sup_{j \geq 0} \|S_j m_j\|_\infty \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} (2^{sj} |f_j(\cdot)|)^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \\ &\leq c \sup_{j \geq 0} \|m_j\|_\infty \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} (2^{sj} |f_j(\cdot)|)^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \\ &\leq cA \sup_{j \geq 0} \|m_j\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Estimation de g_2 . Le support de la fonction $\mathcal{F}(\sum_{j=0}^{\ell-1} f_j Q_\ell m_j)$ est contenu dans la boule

$|\xi| \leq (b/2 + 3/2)2^\ell$ avec $\ell \geq 1$. Donc la Proposition 2.11 permet d'obtenir

$$\|g_2\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{\ell \geq 1+k_+} \left(\sum_{j=0}^{\ell-1} 2^{s\ell q} |f_j Q_\ell m_j(\cdot)| \right)^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}. \quad (2.5)$$

Nous allons maintenant estimer $\|g_2\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$ en plusieurs étapes selon les valeurs de p et q .

Le cas $p \geq 1$ et $q \geq 1$. On commence par appliquer l'inégalité de Minkowski dans la partie droite de (2.5). Il vient alors

$$\begin{aligned} \|g_2\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} &\leq c_1 \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{\ell \geq j+1} |2^{s\ell} f_j Q_\ell m_j(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \\ &\leq c_1 \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{\ell \geq j+1} \|2^{s\ell} Q_\ell m_j\|_\infty^q \right)^{1/q} |f_j(\cdot)| \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}. \end{aligned}$$

Nous écrivons la somme $\sum_{j \geq 0}$ comme étant la somme de deux termes $\left(\sum_{j \leq k_+} + \sum_{j \geq k_++1} \right)$ et nous utilisons le fait que la suite $(m_j)_j$ est borné de dans $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$, nous obtenons

l'estimation suivante :

$$\|g_2\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sup_{j \geq 0} \|m_j\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)} (A_1 + A_2) \quad (2.6)$$

où

$$A_1 := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \sum_{j \geq 1+k_+} |f_j(\cdot)| \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \quad \text{et} \quad A_2 := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \sum_{j=0}^{k_+} |f_j(\cdot)| \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}.$$

Par l'inégalité de Hölder nous avons

$$\begin{aligned} A_1 &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \sum_{j \geq k_+} 2^{-sj} |2^{sj} f_j(\cdot)| \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{-sjq'} \right)^{1/q'} \left(\sum_{j \geq k_+} |2^{sj} f_j(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \\ &\leq cA. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Passons à l'estimation du terme A_2 . Par l'inégalité élémentaire suivante :

$$\left(\int_{P_{k,\nu}} \left(\sum_{j \leq k_+} |f_j(x)| \right)^p dx \right)^{1/p} \leq 2^{-kn/p} \sum_{j \leq k_+} \|f_j\|_{\infty},$$

nous obtenons

$$A_2 \leq \sup_{k \geq 1} 2^{kn(\tau-1/p)} \sum_{j=0}^{k_+} \|f_j\|_{\infty}. \quad (2.8)$$

Maintenant, nous allons estimer $\|f_j\|_{\infty}$. On pose $\phi_j := 2^{jn} \phi(2^j(\cdot))$ et $r^{-1} := \max(2, b/2)$.

Alors $f_j = f_j * \phi_j$ et nous avons

$$\begin{aligned} |f_j(x)| &= r^n \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x - ry) f_j(ry) dy \right| \\ &\leq r^n \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \int_{P_{j,\mu}} |\phi_j(x - ry) f_j(ry)| dy \\ &\leq r^n \left(\sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{z \in P_{j,\nu}} |f_j(rz)| \right) \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \int_{P_{j,\mu}} |\phi_j(x - ry)| dy. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Par définition de r ($0 < r \leq 1/2$), il est clair que :

$$y \in P_{j,\mu} \Rightarrow ry \in P_{j,\langle r\mu \rangle}, \quad (2.10)$$

où $\langle r\mu \rangle := ([r\mu_1], \dots, [r\mu_n]) \in \mathbb{Z}^n$. En effectuant le changement de variable $w := ry$ dans la dernière intégrale de (2.9), nous obtenons

$$\sum_{\langle r\mu \rangle \in \mathbb{Z}^n} \int_{P_{j, \langle r\mu \rangle}} |\phi_j(x - w)| dw = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_j(x - w)| dw = \|\phi\|_1.$$

Nous avons alors

$$|f_j(x)| \leq \|\phi\|_1 \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{z \in P_{j, \nu}} |f_j(rz)| \quad (\forall j \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n). \quad (2.11)$$

Nous allons utiliser la Proposition 1.9 (avec $\psi := f_j(r(\cdot))$), puisque $\widehat{f_j}(r^{-1}(\cdot))$ est portée par la boule $|\xi| \leq rb2^j \leq 2^{j+1}$, il vient

$$\sup_{z \in P_{j, \nu}} |f_j(rz)| \leq 2^{jn/p} \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \|f_j(r(\cdot))\|_{L_p(P_{j, \mu})}.$$

En tenant compte de la formule (2.10) nous avons

$$\begin{aligned} \|f_j(r(\cdot))\|_{L_p(P_{j, \nu})} &= \|f_j\|_{L_p(P_{j, \langle r\nu \rangle})} \\ &\leq \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \|f_j\|_{L_p(P_{k, \mu})}. \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\sup_{z \in P_{j, \nu}} |f_j(rz)| \leq c2^{jn/p} \sup_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \|f_j\|_{L_p(P_{j, \mu})}. \quad (2.12)$$

Dans un autre sens, en utilisant la définition de A , un calcul simple donne

$$\|f_j\|_{L_p(P_{j, \nu})} \leq c2^{-j(n\tau+s)} A \quad (\forall j \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{Z}^n). \quad (2.13)$$

Revenons à l'estimation de A_2 . Il suffit maintenant de combiner (2.12), (2.13) et (2.11) pour obtenir

$$|f_j(x)| \leq c2^{j(n/p - n\tau - s)} A \quad (\forall j \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Comme $0 \leq \tau \leq 1/p$ et $s > 0$, de l'inégalité (2.8) nous avons

$$\begin{aligned} A_2 &\leq c_1 A \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kn(\tau-1/p)} \sum_{j=0}^{k_+} 2^{-jn(\tau-1/p)} 2^{-sj} \\ &\leq c_1 A \left(1 + \sup_{k \geq 1} 2^{kn(\tau-1/p)} \sum_{j=0}^k 2^{-jn(\tau-1/p)} 2^{-sj} \right) \leq c_2 A. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Finalement, en remplaçant (2.7) et (2.14) dans (2.6) nous obtenons l'estimation voulue, i.e.

$$\|g_2\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq cA \sup_{j \geq 0} \|m_j\|_{B_{\infty,q}^{s,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Le cas ($p < 1$) ou ($q < 1$). Nous allons utiliser l'inégalité élémentaire suivante

$$\left\| \left(\sum_{\ell \geq 0} \left| \sum_{j \geq 0} h_{j,\ell} \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^d \leq \sum_{j \geq 0} \left\| \left(\sum_{\ell \geq 0} |h_{j,\ell}|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^d \quad d := \min(p, q), \quad (2.15)$$

pour toute suite de fonctions $(h_{j,\ell})_{j,\ell \in \mathbb{N}_0}$ intégrables sur $P_{k,\nu}$ (voir l'annexe).

Nous partons de (2.5) et nous appliquons (2.15), on a

$$\|g_2\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}^d \leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{nd\tau k} \sum_{j \geq 0} \left\| \left(\sum_{\ell \geq j+1} \left| 2^{s\ell q} f_j Q_\ell m_j(\cdot) \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^d. \quad (2.16)$$

Delà nous distinguons deux cas $d = q$ et $d = p$.

Le cas $d = q$ (i.e. $q < 1 \leq p$ ou $q \leq p < 1$). L'inégalité (2.16) devient

$$\begin{aligned} \|g_2\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} &\leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq 0} \left\| \left(\sum_{\ell \geq j+1} \left| 2^{s\ell q} f_j Q_\ell m_j(\cdot) \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q} \\ &\leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq 0} \left\| \left(\sum_{\ell \geq j+1} \|2^{s\ell q} Q_\ell m_j\|_\infty^q \right)^{1/q} |f_j(\cdot)| \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \|g_2\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} &\leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq 0} \|m_j\|_{B_{\infty,q}^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q} \\ &\leq c \sup_{j \geq 0} \|m_j\|_{B_{\infty,q}^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq 0} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Nous décomposons à nouveau la somme à droite, ce qui donne

$$\|g_2\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sup_{j \geq 0} \|m_j\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)} (A_3 + A_4), \quad (2.17)$$

où

$$A_3 := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q} \quad \text{et} \quad A_4 := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j=0}^{k_+} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q}.$$

Soit $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$. Par l'inégalité de Hölder nous avons

$$\left(\sum_{j \geq k_+} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{-sjr} \right)^{1/r} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sjp} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^p \right)^{1/p}. \quad (2.18)$$

Nous allons majorer $\left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sjp} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^p \right)^{1/p}$. En utilisant l'injection $\ell_q(\mathbb{N}_0) \hookrightarrow \ell_p(\mathbb{N}_0)$,

on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sjp} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^p \right)^{1/p} &= \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} |2^{sj} f_j(\cdot)|^p \right)^{1/p} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \\ &\leq \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} |2^{sj} f_j(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}. \end{aligned}$$

Cette dernière estimation et l'inégalité (2.18) impliquent

$$A_3 \leq cA. \quad (2.19)$$

Pour A_4 , en utilisant les mêmes calculs comme dans l'estimation de A_2 , nous arrivons à

$$\begin{aligned} A_4 &\leq cA \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kn(\tau-1/p)} \sum_{j=0}^{k_+} 2^{-jqn(\tau-1/p)} 2^{-sqj} \\ &\leq cA \left(1 + \sup_{k \geq 1} 2^{kn(\tau-1/p)} \sum_{j=0}^k 2^{-jqn(\tau-1/p)} 2^{-sqj} \right) \leq cA. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Enfin, Les estimations (2.17), (2.19) et (2.20) nous donnent

$$\|g_2\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq cA \sup_{j \geq 0} \|m_j\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Le cas $d = p$ (i.e. $p < 1 \leq q$ ou $p \leq q < 1$). De l'inégalité (2.16) nous avons

$$\|g_2\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq 0} \left\| \left(\sum_{\ell \geq j+1} \left| 2^{smq} f_j Q_\ell m_j(\cdot) \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^p \right)^{1/p}.$$

Comme dans le cas précédent, nous arrivons à la decomposition suivante

$$\|g_2\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c(A_5 + A_6),$$

où

$$A_5 := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq 1+k_+} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad A_6 := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j=0}^{k_+} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^p \right)^{1/p}.$$

Les estimations de A_5 et A_6 sont similaires à celles de A_1 et A_2 , respectivement, avec quelques modifications techniques. En effet, par l'inégalité de Hölder (ici $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$), nous avons

$$\begin{aligned} A_5 &= \left(\sum_{j \geq 1+k_+} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^p \right)^{1/p} = \left\| \left(\sum_{j \geq 1+k_+} 2^{-sjp} |2^{sj} f_j(\cdot)|^p \right)^{1/p} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \\ &\leq \left(\sum_{j \geq 1+k_+} 2^{-sjr} \right)^{1/r} \left\| \left(\sum_{j \geq 1+k_+} |2^{sj} f_j(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

donc $A_5 \leq cA$. Pour A_6 , comme dans (2.14) nous obtenons

$$A_6 \leq c_1 A \left(1 + \sup_{k \geq 1} 2^{kn(\tau p - 1)} \sum_{j=0}^k 2^{-jn(\tau p - 1)} 2^{-sjp} \right)^{1/p} \leq c_2 A.$$

Ce qui termine la démonstration de la Proposition 2.12. ■

Pour l'espace $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ nous avons aussi un lemme de presque-orthogonalité prouvé dans [24], nous lui rappelons dans la proposition suivante :

Proposition 2.13 *Soient $0 < p, q \leq \infty$, $s > (n/p - n)_+$ et $0 \leq \tau \leq 1/p$. Soient $b > 0$, $(m_j)_{j \geq 0}$ une suite de fonctions appartenant à $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $(f_j)_{j \geq 0}$ une suite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que*

- $\widehat{f_j}$ est portée par la boule $|\xi| \leq b2^j$,

$$\bullet A := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} (2^{sj} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})})^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Alors, on a

$$\left\| \sum_{j \geq 0} m_j f_j \right\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq cA \sup_{j \geq 0} \|m_j\|_{B_{\infty,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)},$$

où la constante c ne dépend que de n, p, q, s, τ et b .

2.4 Preuve du Théorème 2.4

Soit g une fonction telle que $g \in W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$, $s < 1$ (pour $s > 1$ la fonction g est prise dans l'espace $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$). Nous allons utiliser les notations de la Proposition 2.8, rappelons que

$$f \circ g = \sum_{j \geq 0} R_j(f', g) Q_j g. \quad (2.21)$$

Les opérateurs S_j et Q_j sont uniformément bornés dans $L_{\infty}(\mathbb{R}^n)$, donc il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$\|S_0 g\|_{\infty} \leq c_1 \|g\|_{\infty} \text{ et } \|S_{j-1} g + z Q_j g\|_{\infty} \leq c_2 \|g\|_{\infty} \quad (\forall z \in [0, 1], j = 1, 2, \dots).$$

Pour $t > \max(1, c_1 \|g\|_{\infty}, c_2 \|g\|_{\infty})$, on a

$$R_j(f', g) = R_j(\varphi_t f', g),$$

donc par la formule (2.21) nous obtenons

$$f \circ g = \sum_{j \geq 0} R_j(\varphi_t f', g) Q_j g. \quad (2.22)$$

Par la Proposition 2.12 et la formule (2.22) nous avons

$$\|T_f(g)\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{j \geq 0} \|R_j(\varphi_t f', g)\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R})} \|g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

Donc, par la Proposition 2.10 nous obtenons les estimations suivantes

$$\|T_f(g)\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f' \varphi_t\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R})} \phi(c \|g\|_{W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n)}) \|g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \quad (s < 1),$$

et

$$\|T_f(g)\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f' \varphi_t\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R})} \phi(c \|g\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)}) \|g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \quad (s > 1),$$

avec $t \geq \max(1, \|g\|_{\infty})$. On termine la preuve par l'inégalité

$$\|f' \varphi_t\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|f \varphi_t\|_{B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})}$$

pour tout $t > 0$, ce qui nous donne

$$\|T_f(g)\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f \varphi_t\|_{B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})} \phi(c \|g\|_{W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n)}) \|g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \quad (s < 1),$$

et

$$\|T_f(g)\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f \varphi_t\|_{B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})} \phi(c \|g\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)}) \|g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \quad (s > 1).$$

2.5 Quelques cas particuliers

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques corollaires qui résultent du Théorèmes 2.3 et 2.4, leurs preuves sont dans l'annexe.

Corollaire 2.14 *Soient s, p, q et τ comme dans le Théorème 2.3 avec s non entier. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f^{(j)} \in L_{\infty}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ($j = 1, 2, \dots, [s] + 2$).*

- *Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.*
- *Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.*

Corollaire 2.15 *Soient s, p, q et τ comme dans le Corollaire 2.14 avec $s - [s] > 1/p$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{p,q}^{s+2}(\mathbb{R})_{loc}$.*

- *Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.*
- *Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.*

Corollaire 2.16 Soient s, p, q et τ comme dans le Théorème 2.4 avec s non entier. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f^{(j)} \in L_{\infty}^{loc}(\mathbb{R}^n)$, ($j = 1, 2, \dots, [s] + 2$).

- Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.
- Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 2.17 Soient s, p, q et τ comme dans le Corollaire 2.16 avec $s - [s] > 1/p$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in F_{p,q}^{s+2}(\mathbb{R})_{loc}$.

- Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.
- Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 2.18 Soient $0 < p_0 \leq p < \infty, 0 < q_0, q \leq \infty, (n/\min(p, q) - n)_+ < s \neq 1, s_0 > s, 0 \leq \tau \leq 1/p$ et $s_0 - n/p_0 = s - n/p$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$.

- Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap F_{p_0,q_0}^{s_0,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.
- Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap F_{p_0,q_0}^{s_0,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 2.19 Soient $0 < p \leq p_0 < \infty, 0 < q_0 \leq q \leq \infty, 0 \leq \tau_0 \leq \tau \leq 1/p, \tau_0 - 1/p_0 = \tau - 1/p$ et $(n/\min(p, q) - n)_+ < s \neq 1$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$.

- Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap F_{p_0,q_0}^{s_0,\tau_0}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.
- Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty,q_0}^s(\mathbb{R}^n) \cap F_{p_0,q_0}^{s_0,\tau_0}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 2.20 Soient $0 < p_0 \leq p \leq \infty, 0 < q_0 \leq q \leq \infty, (n/p - n)_+ < s \neq 1, s_0 > s, 0 \leq \tau \leq 1/p$ et $s_0 - n/p_0 = s - n/p$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$.

- Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{p_0,q_0}^{s_0,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.
- Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty,q_0}^s(\mathbb{R}^n) \cap B_{p_0,q_0}^{s_0,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 2.21 Soient $0 < p \leq p_0 \leq \infty, 0 < q_0 \leq q \leq \infty, 0 \leq \tau_0 \leq \tau \leq 1/p, (n/p - n)_+ < s \neq 1$ et $\tau_0 - 1/p_0 = \tau - 1/p$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$.

- Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{p_0,q_0}^{s_0,\tau_0}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.
- Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty,q_0}^s(\mathbb{R}^n) \cap B_{p_0,q_0}^{s_0,\tau_0}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

2.6 Le cas limite $s = 1$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas $s = 1$. On désigne par $\dot{W}_\infty^m(\mathbb{R}^n)$ ($m = 1, 2, \dots$) l'espace de Sobolev homogène des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $f^{(\alpha)} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tout $|\alpha| = m$ munit de la semi-norme $\|f\|_{\dot{W}_\infty^m} = \sum_{|\alpha|=m} \|f^{(\alpha)}\|_\infty$.

Proposition 2.22 *Soit $0 < q \leq \infty$. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction appartenant à $(\dot{W}_\infty^1(\mathbb{R}) \cap B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}))_{loc}$, alors T_f est borné de $\dot{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)$. De plus, il existe une constante $c = c(n, q) > 0$ telle qu'on ait*

$$\|T_f(g)\|_{B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\varphi_t\|_{\dot{W}_\infty^1(\mathbb{R}) \cap B_{\infty,q}^1(\mathbb{R})} (1 + \|g\|_{\dot{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)})$$

pour toutes les fonctions f et toutes les fonctions $g \in \dot{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)$ avec $t \geq \max(1, \|g\|_\infty)$.

Preuve. Voir [6, 24]. ■

Proposition 2.23 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in B_{\infty,q}^1(\mathbb{R})_{loc}$. Soient $1 \leq q \leq \infty$ et $\varepsilon > 0$, si $u \in B_{\infty,q}^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ alors $f \circ u \in B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)$. De plus, il existe une constante $c = c(n, q) > 0$ telle que*

$$\|f \circ u\|_{B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^1(\mathbb{R})} \left(1 + \|u\|_{B_{\infty,q}^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{B_{\infty,q}^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)}^{1/(1+\varepsilon)}\right),$$

avec $t \geq \max(1, \|u\|_\infty)$.

Preuve. Voir [21]. ■

En utilisant les Propositions 2.22-2.23 nous trouvons les assertions suivantes, leurs preuves sont similaires à celles des Théorèmes 2.3–2.4 (voir l'annexe).

Théorème 2.24 *Soient $0 < q, p \leq \infty$, $(n/p - n)_+ < s = 1$ et $0 \leq \tau \leq 1/p$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in (\dot{W}_\infty^2(\mathbb{R}) \cap B_{\infty,q}^2(\mathbb{R}))_{loc}$, alors T_f est borné de $\dot{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)$.*

Théorème 2.25 Soient $0 < q \leq \infty, 0 < p < \infty, (n/\min(p, q) - n)_+ < s = 1$ et $0 \leq \tau \leq 1/p$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in (\dot{W}_\infty^2(\mathbb{R}) \cap B_{\infty, q}^2(\mathbb{R}))_{loc}$, alors T_f est borné de $\dot{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{\infty, q}^1(\mathbb{R}^n) \cap F_{p, q}^{1, \tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p, q}^{1, \tau}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.26 Soient $0 < p, q \leq \infty, (n/p - n)_+ < s = 1, \varepsilon > 0$ et $0 \leq \tau \leq 1/p$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty, q}^2(\mathbb{R})_{loc}$, alors T_f est borné de $B_{\infty, q}^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \cap B_{p, q}^{1, \tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p, q}^{1, \tau}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.27 Soient $0 < q \leq \infty, 0 < p < \infty, (n/\min(p, q) - n)_+ < s = 1, \varepsilon > 0$ et $0 \leq \tau \leq 1/p$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty, q}^2(\mathbb{R})_{loc}$, alors T_f est borné de $B_{\infty, q}^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \cap F_{p, q}^{1, \tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p, q}^{1, \tau}(\mathbb{R}^n)$.

2.7 Le cas de l'opérateur para-produit

Définition 2.28 Pour toutes $g, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nous définissons le para-produit par

$$\pi(g, u) := \sum_{j \geq 2} (S_{j-2}g)(Q_j u). \quad (2.23)$$

Proposition 2.29 (i) Si $0 < p, q \leq \infty, s > (n/p - n)_+$ et $0 \leq \tau \leq 1/p$, alors l'application $(g, u) \rightarrow \pi(g, u)$ est bilinéaire continue de $L_\infty(\mathbb{R}^n) \times B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Si $0 < q \leq \infty, 0 < p < \infty, s > (n/\min(p, q) - n)_+$ et $0 \leq \tau \leq 1/p$, alors l'application $(g, u) \rightarrow \pi(g, u)$ est bilinéaire continue de $L_\infty(\mathbb{R}^n) \times F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Il est clair que $\pi(., .)$ est bilinéaire. On fixe $g_0 \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, alors les Propositions 2.13 et 2.12 assurent que l'opérateur $u \mapsto \pi(g_0, u)$ est continu de $B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ et de $F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$. De même, pour u_0 fixé dans $B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$, l'opérateur $g \mapsto \pi(g, u_0)$ est continu de $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ et pour u_0 fixé dans $F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$, l'opérateur $u \mapsto \pi(g, u_0)$ est continu de $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$. Comme $L_\infty(\mathbb{R}^n), B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ et $F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces de Fréchet, la preuve se termine par [28, Corollaire, p. 354]. ■

Proposition 2.30 Si $s > 0$, $g \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $u \in B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$, alors la série (2.23) converge géométriquement.

Preuve. Ceci résulte de l'inégalité $\|(S_{j-2}u)(Q_jg)\|_\infty \leq c2^{-js}\|g\|_\infty\|u\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)}, \forall j \in \mathbb{Z}$. ■

Définition 2.31 On définit l'opérateur de composition modulo le para-produit par la formule :

$$\widetilde{T}_f(u) := T_f(u) - \pi(T_{f'}u, u).$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons étudier l'opérateur $\widetilde{T}_f$ dans l'intersection avec $A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.32 Soient $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, (n/\min(p,q) - n)_+ < s \neq 1$ et $0 \leq \tau \leq 1/p$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$.

- (i) Si $s < 1$, alors $\widetilde{T}_f$ est borné de $W_\infty^1(\mathbb{R}^n) \cap F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) Si $s > 1$, alors $\widetilde{T}_f$ est borné de $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. D'après la formule (2.1) et les notations (2.2), on a

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_f(u) - f(S_0u) &= \sum_{j \geq 0} f(S_{j+1}u) - f(S_ju) - \sum_{j \geq 2} S_{j-2}(f'(u))(Q_ju) \\ &= R_1(f', u)Q_1u + \sum_{j \geq 2} (R_j(f', u) - S_{j-2}f'(u))(Q_ju) \\ &= \sum_{j \geq 1} \widetilde{R}_j(f', u)Q_ju, \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{R}_1 := R_1$$

et

$$\widetilde{R}_j(f, u) := R_j(f, u) - S_{j-2}(T_f u).$$

Il n'est pas difficile de prouver que les opérateurs $\widetilde{R}_j(f', u)$ sont uniformément bornés dans $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$, en effet

$$\|\widetilde{R}_j(f', u)\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c(\|R_j(f', u)\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)} + \|S_{j-2}(T_{f'}u)\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)}),$$

donc par la Proposition 2.9 et le fait que les opérateurs $R_j(f', u)$ et S_j sont uniformément bornés dans $B_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n)$ nous arrivons à la conclusion voulue.

Finalement, on a

$$\widetilde{T}_f(u) = f(S_0 u) + \sum_{j \geq 1} \widetilde{R}_j(f', u) Q_j u,$$

donc

$$\left\| \widetilde{T}_f(u) \right\|_{F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left(\left\| f(S_0 u) \right\|_{F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)} + \left\| \sum_{j \geq 1} \widetilde{R}_j(f', u) Q_j u \right\|_{F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)} \right),$$

on termine la preuve par la Proposition 2.12. ■

Théorème 2.33 Soient $0 < p, q \leq \infty$, $(n/p - n)_+ < s \neq 1$ et $0 \leq \tau \leq 1/p$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f(0) = 0$ et $f \in B_{\infty, q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$.

- (i) Si $s < 1$, alors $\widetilde{T}_f$ est borné de $W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) Si $s > 1$, alors $\widetilde{T}_f$ est borné de $B_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n) \cap B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Il suffit de raisonner comme dans la preuve du Théorème 2.32 en remplaçant la Proposition 2.12 par 2.13. ■

Un calcul fonctionnel en dimension une

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'opérateur de composition T_f sur les espaces $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R})$. Il concerne uniquement le cas $p = q$.

3.1 Les espaces de type de Besov homogènes

$\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble de tous les polynômes de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\langle f, u \rangle = 0$ pour tout $f \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Le dual de $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ est appelé l'espace des distributions modulo les polynômes noté $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Définition 3.1 Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ et $s, \tau \in \mathbb{R}$. L'espace de type de Besov homogène $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions modulo les polynômes f telle que $\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} < \infty$, où

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left\{ \int_{P_{k,\nu}} (2^{sj} |Q_j f(x)|)^p dx \right\}^{q/p} \right)^{1/q},$$

avec la modification usuelle pour $p = \infty$ (ou $q = \infty$).

Remarque 3.2 i) $\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} = 0$ ssi $f \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$. L'espace quotient $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach, il sera noté $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ et ses éléments $[f]_\infty = f + \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ où $f \in \dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ seront notés f .

ii) $\dot{B}_{p,q}^{s,0}(\mathbb{R}^n) = \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, où $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Besov homogène.

iii) Si $\tau < 0$ alors $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3.3 Soient $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ et $\tau \geq 0$. Alors il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$c_1 \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{(n/p)-s+n\tau} \|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)},$$

pour toute $f \in \dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ et tout $\lambda > 0$.

Preuve. Voir [2]. ■

Proposition 3.4 Soient $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ et $\tau \geq 0$. Un élément f de $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ appartient à $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\partial_\ell f$ appartient à $\dot{B}_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n)$ ($\ell = 1, 2, \dots, n$), de plus $\sum_{\ell=1}^n \|\partial_\ell f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n)}$ est une norme équivalente dans $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. La preuve est identique à celle des espaces de Besov homogènes, voir [5]. ■

Pour le lien avec $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ nous avons la relation suivante :

Proposition 3.5 Soient $1 \leq p, q \leq \infty$, $s > 0$ et $0 \leq \tau < \infty$. Alors

$$B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_p^\tau(\mathbb{R}^n) : [f]_\infty \in \dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

De plus, $\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)} + \|[f]_\infty\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$ est une norme équivalente dans $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Etape 1. Soit $f \in L_p^\tau(\mathbb{R}^n)$ et $[f]_\infty \in \dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$. Par définition, on a

$$\|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq \|[f]_\infty\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)} + \|[f]_\infty\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

Etape 2. Nous allons utiliser l'injection suivante :

$$B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p^\tau(\mathbb{R}^n), \quad (3.1)$$

(voir la Proposition 1.20).

Soit $f \in B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$, par (3.1) nous avons $\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$. D'autre part, il est facile de prouver que

$$\|Q_j f\|_{L_p(P_{k,\nu})} \leq \|\mathcal{F}^{-1}\gamma\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_p(P_{k,\nu})},$$

donc

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} &\leq \sup_{k>0} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k} (2^{sj} \|Q_j f\|_{L_p(P_{k,\nu})})^q \right)^{1/q} \\ &\quad + c_1 \sup_{k \leq 0} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \|f\|_{L_p(P_{k,\nu})} \left(\sum_{j=k}^0 2^{sjq} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

L'hypothèse sur s donne $\sum_{j=k}^0 2^{sjq} < \infty$, donc on obtient la borne $\|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} + c_2 \|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)}$.

Ce qui termine la démonstration. ■

3.2 Caractérisation par les différences

Pour toute fonction $f \in L_u^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ($0 < u \leq \infty$), on introduit la notation suivante :

$$b_{u,t}^m(f, x) := \left(\frac{1}{t^n} \int_{B(x,t)} |\Delta_h^m f(x)|^u dh \right)^{1/u} \quad m \in \mathbb{N}_0, t \in]0, \infty[\text{ et } x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 3.6 Soient $0 < u \leq \infty, 0 < p < \infty, 0 \leq \tau \leq 1/p, r > 0$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que

$$0 < r < p \quad \text{et} \quad s > n \max(1/r - 1, 1/r - 1/u).$$

Alors pour les fonctions appartenant à $L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $f \in B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$
- ii) $f \in L_u^{loc}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\begin{aligned} \|f\|'_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} &:= \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \left(\int_{P_{k,\nu}} \left(\int_{B(x,1)} |f(y)|^u dy \right)^{p/u} dx \right)^{1/p} \\ &\quad + \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \left(\int_0^1 \left(t^{-sp} \int_{P_{k,\nu}} (b_{u,t}^m(f, x))^p dx \right) \frac{dt}{t} \right)^{1/p} < \infty. \end{aligned}$$

Les quasi-normes $\|f\|'_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$ et $\|f\|_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$ sont équivalentes.

Preuve. Voir [35, Corollaire 4.11, Remarque 4.13], où nous avons adapté quelques paramètres à notre situation. ■

Proposition 3.7 Soient $0 < s, p < \infty, 0 < q \leq \infty$ et $0 \leq \tau \leq 1/p$. Soient $M, N \in \mathbb{N}_0$ telles que $N \geq [s + n\tau], M \leq N$ et $s < M$. Alors pour toute fonction $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ l'expression

$$\|f\|''_{\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \left(\int_0^{2^{1-k}} t^{-sq} \left(\int_{P_{k,\nu}} \left(t^{-n} \int_{t/2 \leq |h| < t} \Delta_h^M f(x) dh \right)^p dx \right)^{q/p} \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

définit une quasi-norme dans $\dot{B}_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [35, Théorème 8.4]. ■

3.3 Primitives des fonctions à p-variations bornées

Soit $1 \leq p < \infty$. Pour une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on note $\|g\|_{BV_p}$ la borne supérieure des nombres $\left(\sum_{k=1}^N |g(b_k) - g(a_k)|^p \right)^{1/p}$ prise sur toute famille finie d'intervalles $]a_k, b_k[, k = 1, \dots, N$ disjoints. La fonction g est dite à p-variation bornées si $\|g\|_{BV_p} < \infty$. On note $BV_p(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions à p-variations bornées.

Définition 3.8 Soit $1 \leq p < \infty$. On dit que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $BV_p^1(\mathbb{R})$ si f est Lipchitzienne et $f' \in BV_p(\mathbb{R})$.

Remarque 3.9 Munit de la norme $\|f\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} := |f(0)| + \|f'\|_{BV_p(\mathbb{R})}$, l'espace $BV_p^1(\mathbb{R})$ est un espace de Banach (voir [7]).

3.4 Le théorème de composition

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 3.10 *Soient $1 < p < \infty, 0 \leq \tau < 1/p$ et $1 + 1/p < s < 2$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f' \in B_{p,p}^{s-1,\tau}(\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$. Alors, l'opérateur de composition T_f envoie l'espace $BV_{sp-1}^1 \cap B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})$ dans $B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})$. De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\|f \circ g\|_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})} \leq c \left(\|f'\|_{\infty} + \|f'\|_{B_{p,p}^{s-1,\tau}(\mathbb{R})} \right) \left(\|g\|_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})} + \|g\|_{BV_{sp-1}^1}^{s-1/p} \right),$$

pour toute $g \in BV_{sp-1}^1 \cap B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})$.

Preuve. Première étape. On suppose que g est analytique et que $f \in C^1(\mathbb{R})$. Nous allons utiliser la norme définie dans la Proposition 3.6 (avec $u = \infty$) et la Proposition 3.4, donc il suffit d'estimer les termes

$$A_1 := \sup_{\nu \in \mathbb{Z}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\tau k} \left(\int_{P_{k,\nu}} \left(\sup_{y \in B(x,1)} |f \circ g(y)| \right)^p dx \right)^{1/p}$$

et

$$A_2 := \sup_{\nu \in \mathbb{Z}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\tau k} \left(\int_0^1 \left(\int_{P_{k,\nu}} t^{(1-s)p} (b_{\infty,t}^1((f \circ g)', x))^p dx \right) \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

Estimation de A_1 . Le fait que $f(0) = 0$ implique $|f \circ g(y)| \leq \|f'\|_{\infty} |g(y)|$ donc

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \|f'\|_{\infty} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\tau k} \left(\int_{P_{k,\nu}} \left(\sup_{y \in B(x,1)} |g(y)| \right)^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \|f'\|_{\infty} \|g\|_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Estimation de A_2 . Rappelons que

$$b_{\infty,t}^1(f, x) := \sup_{h \in B(x,t)} |\Delta_h f(x)|,$$

où nous allons utiliser Δ_{-h} au lieu de Δ_h pour des raisons techniques.

Comme

$$|\Delta_{-h}(f \circ g)'(x)| \leq \|f'\|_{\infty} |\Delta_{-h} g'(x)| + |g'(x)| |\Delta_{-h}(f' \circ g)(x)|,$$

nous obtenons

$$A_2 \leq \|f'\|_\infty \|g'\|_{B_{p,p}^{s-1,\tau}(\mathbb{R}^n)} + U, \quad (3.3)$$

où

$$U := \sup_{\nu \in \mathbb{Z}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\tau k} \left(\int_0^1 t^{-(s-1)p} \left(\int_{P_{k,\nu}} \left(\sup_{h \in B(x,t)} |g'(x)| |\Delta_{-h}(f' \circ g)(x)| dx \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

Donc le problème revient à estimer U . Pour des raisons techniques on écrit

$$U := \sup_{\nu \in \mathbb{Z}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\tau(k+k')} \left(\int_0^1 t^{-(s-1)p} \int_{P_{k+k',\nu}} \left(\sup_{h \in B(x,t)} |g'(x)| |\Delta_{-h}(f' \circ g)(x)| dx \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p},$$

où k' est à choisir après. La fonction g étant analytique, donc l'ensemble $\{x \in P_{k+k',\nu} : g'(x) = 0\}$ est discrète et son complémentaire dans $P_{k+k',\nu}$ est la réunion des intervalles I_ℓ disjoints. On pose $I_\ell :=]b_\ell, c_\ell[$ et on note

$$I'_{\ell,t} := \left\{ x \in P_{k+k',\nu} : |c_\ell - x| \geq 2t \quad \text{et} \quad |b_\ell - x| \geq 2t \right\},$$

$$I''_{\ell,t} := I_\ell \setminus I'_{\ell,t} \quad \text{et} \quad a_\ell := \sup_{x \in I_\ell} |g'(x)|.$$

Il est possible que $I'_{\ell,t} = \emptyset$, dans ce cas là on aura $I_\ell = I''_{\ell,t}$, pour tout $t > 0$. On note aussi que sur I_ℓ , la fonction g est surjective, on pose $g_{|I_\ell}^{-1}$ sa réciproque. Donc nous avons

$$U \leq U_1 + U_2, \quad (3.4)$$

où

$$U_1 := \sup_{\nu \in \mathbb{Z}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\tau(k+k')} \left(\int_0^1 t^{-(s-1)p} \sum_{\ell} \int_{I'_{\ell,t}} \left(\sup_{h \in B(x,t)} |g'(x)| |\Delta_{-h}(f' \circ g)(x)| \right)^p dx \frac{dt}{t} \right)^{1/p}$$

et

$$U_2 := \sup_{\nu \in \mathbb{Z}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\tau(k+k')} \left(\int_0^1 t^{-(s-1)p} \sum_{\ell} \int_{I''_{\ell,t}} \left(\sup_{h \in B(x,t)} |g'(x)| |\Delta_{-h}(f' \circ g)(x)| \right)^p dx \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

Estimation de U_1 . Si $I'_{\ell,t}$ est non vide alors

$$|g(g_{|I_\ell}^{-1}(y) + h) - y| \leq a_\ell t. \quad \forall y \in g(I'_{\ell,t}).$$

En effectuant le changement de variable $y = g_{|I}(x)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{g(I'_{\ell,t})} \left(\sup_{h \in B(x,t)} |g'(x)| |\Delta_{-h}(f' \circ g)(x)| \right)^p dx \leq \\ & a_\ell^{p-1} \int_{g(I'_{\ell,t})} \left(\sup_{h \in B(g_{|I_\ell}^{-1}(y), t)} |f'(g(g_{|I_\ell}^{-1}(y) + h)) - f'(g(g_{|I_\ell}^{-1}(y)))| \right)^p dy \leq \\ & a_\ell^{p-1} \int_{g(I'_{\ell,t})} \left(\sup_{h \in B(y, a_\ell t)} |\Delta_{-h} f'(y)| \right)^p dy. \end{aligned}$$

D'autre côté, nous avons $g(I'_{\ell,t}) \subset [\alpha, \beta]$ où nous allons choisir α et β tels que pour certains

$m, k, \nu \in \mathbb{Z}$ on a

$$\alpha \geq 2^{-k-m}\nu \quad \text{et} \quad \beta \leq 2^{-k-m}(\nu + 1),$$

i.e. pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé on prend m et ν tels que

$$\begin{cases} 2^{-m} \geq 2^k(\beta - \alpha) \\ 2^{k+m}\beta - 1 < \nu \leq \alpha 2^{k+m}. \end{cases}$$

Par conséquent, on a $g(I'_{\ell,t}) \subset P_{k+m,\nu}$, où k, m et ν dépendent de $I'_{\ell,t}$. Ce qui implique

$$U_1 \leq \sup_{\nu \in \mathbb{Z}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(k+k')\tau} \left(\int_0^1 t^{-(s-1)p} \sum_{\ell} a_\ell^{p-1} \int_{P_{k+m,\nu}} \left(\sup_{h \in B(y, a_\ell t)} |\Delta_{-h} f'(y)| \right)^p dy \right) \frac{dt}{t} \right)^{1/p},$$

par le changement de variable $z = a_\ell t$, il vient

$$U_1 \leq \sup_{\nu \in \mathbb{Z}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(k+k')\tau} \left(\int_0^1 z^{-(s-1)p} \sum_{\ell} a_\ell^{sp-1} \int_{P_{k+m,\nu}} \left(\sup_{h \in B(y,z)} |\Delta_{-h} f'(y)| \right)^p dy \right) \frac{dz}{z} \right)^{1/p}.$$

Par le choix $k' = m$ et le fait que $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \dots = \sup_{k+m \in \mathbb{Z}} \dots$, la Proposition 3.6 donne

l'estimation

$$U_1 \leq \left(\sum_{\ell} a_\ell^{sp-1} \right)^{1/p} \|f'\|_{B_{p,p}^{s-1,\tau}(\mathbb{R})}.$$

Maintenant, nous avons

$$\left(\sum_{\ell} a_{\ell}^{sp-1} \right)^{1/p} \leq c \|g\|_{BV_{sp-1}^{1, \tau}}^{s-1/p}, \quad (3.5)$$

pour (3.5) voir [9, (13)]. Ceci donne l'estimation de U_1 , i.e.

$$U_1 \leq c \|g\|_{BV_{sp-1}^{1, \tau}}^{s-1/p} \|f'\|_{B_{p,p}^{s-1, \tau}(\mathbb{R})}. \quad (3.6)$$

Estimation de U_2 . Pour $x \in I''_{\ell, t}$ on pose $\eta_{\ell}(x)$ la distance de x jusqu'à l'extrémité la plus proche de l'intervalle I_{ℓ} , d'où par définition $|\eta_{\ell}(x)| \leq 2t$ et $g'(x + \eta_{\ell}(x)) = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned} |g'(x)| &\leq |g'(x) - g'(x + \eta_{\ell}(x))| \\ &\leq \sup_{|h| \leq 2t} |g'(x) - g'(x + h)|, \quad \forall x \in I''_{\ell, t}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} U_2 &\leq \|f'\|_{\infty} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\tau(k+k')} \left(\int_0^1 t^{-(s-1)p} \sum_{\ell} \int_{I''_{\ell, t}} \left(\sup_{h \in B(x, t)} |\Delta_{-h} g'(x)| \right)^p dx \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ &\leq \|f'\|_{\infty} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\tau(k+k')} \left(\int_0^{2^{1-k}} t^{-(s-1)p} \int_{P_{k+k', \nu}} \left(\sup_{h \in B(x, t)} |\Delta_{-h} g'(x)| \right)^p dx \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ &\leq \|f'\|_{\infty} \|g'\|_{B_{p,p}^{s-1, \tau}(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

d'où

$$U_2 \leq c \|f'\|_{B_{p,p}^{s-1, \tau}(\mathbb{R})} \|g\|_{B_{p,p}^{s, \tau}(\mathbb{R})}. \quad (3.7)$$

En insérant (3.6) et (3.7) dans (3.4) nous obtenons

$$U \leq c \|f'\|_{B_{p,p}^{s-1, \tau}(\mathbb{R})} (\|g\|_{BV_{sp-1}^{1, \tau}}^{s-1/p} + \|g\|_{B_{p,p}^{s, \tau}(\mathbb{R})}). \quad (3.8)$$

Finalement, on a

$$\|f \circ g\|_{B_{p,p}^{s, \tau}(\mathbb{R})} \leq A_1 + A_2, \quad (3.9)$$

donc les estimations (3.9), (3.2), (3.3) et (3.8) donnent le résultat voulu i.e.

$$\|f \circ g\|_{B_{p,p}^{s, \tau}(\mathbb{R})} \leq c \left(\|f'\|_{\infty} + \|f'\|_{B_{p,p}^{s-1, \tau}(\mathbb{R})} \right) \left(\|g\|_{B_{p,p}^{s, \tau}(\mathbb{R})} + \|g\|_{BV_{sp-1}^{1, \tau}}^{s-1/p} \right).$$

Deuxième étape. Soit g un élément quelconque de $B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})$ et $f' \in B_{p,p}^{s-1,\tau}(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Alors les fonctions

$$f_j := S_j f - S_j f(0)\rho \quad \text{et} \quad g_j := S_j g.$$

sont analytiques. Pour tout $j \geq 0$ nous avons $\|Q_\ell S_j g\|_{L_p(P_{k,\nu})} = \|\phi_j * Q_\ell g\|_{L_p(P_{k,\nu})}$, où $\phi_j := 2^j \mathcal{F}^{-1}(\rho(2^j \cdot))$, donc

$$\begin{aligned} \|Q_\ell S_j g\|_{L_p(P_{k,\nu})} &= \left(\int_{P_{k,\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(y) Q_\ell g(x-y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_j(y)| \left(\int_{P_{k,\nu}} |Q_\ell g(x-y)|^p dx \right)^{1/p} dy. \end{aligned}$$

Si $x \in P_{k,\nu}$ alors $x - y \in P_{k, [\nu-2^k y]}$, donc

$$\|Q_\ell S_j g\|_{L_p(P_{k,\nu})} \leq \|\rho\|_1 \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\mu \in \mathbb{Z}} \|Q_\ell g\|_{P_{k,\mu}},$$

d'où

$$\|g_j\|_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})} \leq c \|g\|_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})}.$$

De même, nous avons

$$\|g_j\|_{BV_{sp-1}^1(\mathbb{R})} \leq c \|g\|_{BV_{sp-1}^1(\mathbb{R})} \quad (3.10)$$

et

$$\|f'_j\|_{B_{p,p}^{s-1,\tau}(\mathbb{R})} \leq c (\|f'\|_{B_{p,p}^{s-1,\tau}(\mathbb{R})} + |S_j f(0)|). \quad (3.11)$$

Par l'étape précédente et les estimations (3.10)-(3.11)

$$\begin{aligned} \|f_j \circ g_j\|_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})} &\leq c \left(\|f'_j\|_\infty + \|f'_j\|_{B_{p,p}^{s-1,\tau}(\mathbb{R})} \right) \left(\|g_j\|_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})} + \|g_j\|_{BV_{sp-1}^{1,p}}^{s-1/p} \right) \\ &\leq c \left(\|f'\|_\infty + \|f'\|_{B_{p,p}^{s-1,\tau}(\mathbb{R})} + |S_j f(0)| \right) \left(\|g\|_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})} + \|g\|_{BV_{sp-1}^1}^{s-1/p} \right) \quad (3.12) \end{aligned}$$

D'autre part, $f_j \circ g_j$ tend vers $f \circ g$ dans $L_p(\mathbb{R})$ et $S_j f(0)$ tend vers $f(0) = 0$ quand j tend vers ∞ (voir [9, p. 1524]), donc par la propriété de Fatou de $B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})$ et (3.12) nous avons

$f \circ g \in B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \|f \circ g\|_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})} &\leq \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \|f_j \circ g_j\|_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})} \\ &\leq c \left(\|f'\|_{\infty} + \|f'\|_{B_{p,p}^{s-1,\tau}(\mathbb{R})} \right) \left(\|g\|_{B_{p,p}^{s,\tau}(\mathbb{R})} + \|g\|_{BV_{s-1}^1}^{s-1/p} \right). \end{aligned}$$

La preuve du Théorème 3.10 est terminée. ■

Deuxième partie

Sur les opérateurs pseudo-différentiels

Les opérateurs pseudo-différentiels

sur $A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$

Nous nous intéressons à l'étude des opérateurs pseudo-différentiels (O. P. D.) sur $A_{p,q}^{s+\mu,\tau}(\mathbb{R}^n)$. On commence par citer certaines références [13, 22, 23, 31].

4.1 Généralités

Nous allons donner quelques généralités sur les O.P.D.

Définition 4.1 *Une O.P.D. est une application linéaire, notée $\sigma(., D)$, définie par*

$$\sigma(x, D)f := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \widehat{f}(\xi) d\xi, \quad (\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathbb{R}^n),$$

où $\sigma(x, \xi)$ est une fonction définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ (le symbole de $\sigma(x, D)$).

Définition 4.2 *On appelle module de continuité toute fonction $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, croissante et concave, vérifiant $\omega(0) = 0$.*

Exemple 1 *Les fonctions*

- $\omega_1(t) = t^\delta$ ($0 < \delta \leq 1$),
- $\omega_2(h) = (\log \frac{1}{h})^{-\delta}$ ($0 < \delta, 0 < h \leq 1/2$),

sont des modules de continuité.

Définition 4.3 *Soient ω un module de continuité et $\Omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction vérifiant*

$$\forall c > 1, \exists A_c > 0, (t/c \leq u \leq ct \Rightarrow \Omega(u) \leq A_c \Omega(t)). \quad (4.1)$$

Soient $\delta \geq 0, \varrho \geq 0, \mu \geq 0, N \in \mathbb{N}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n$ tel que $|\beta| \leq N$. La classe $\Sigma_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$ des symboles de degré μ et de type $(1, \delta)$ est l'ensemble des fonctions $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telles qu'ils existent deux constantes positives c_1, c_2 qui dépendent seulement de α et β de sorte qu'on ait

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi)| \leq c_1(1 + |\xi|)^{\mu - |\alpha| + \delta|\beta|} \quad (4.2)$$

et

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x + h, \xi) - \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^{\mu - |\alpha| + \delta|\beta|} \omega(|h| |\xi|^\delta) \Omega(|\xi|^\varrho). \quad (4.3)$$

L'ensemble des O.P.D. associé à la classe $\Sigma_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$ sera noté $OP_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$.

4.1.1 Réduction aux symboles élémentaires

Dans ce paragraphe, on suppose que ω est un module de continuité et Ω une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant (4.1).

Définition 4.4 Soient $a > 0$ et ω un module de continuité. L'espace $C^{a,\omega}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|f\|_{C^{a,\omega}(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\beta| \leq [a]} \|f\|_\infty + \sum_{|\beta| = [a]} \sup_{h \neq 0} \frac{|f^{(\beta)}(\cdot + h) - f^{(\beta)}(\cdot)|}{\omega(|h|)} < \infty.$$

Remarque 4.5 Si $\omega(t) = t^{a-[a]}$ alors $C^{a,\omega}(\mathbb{R}^n) = C^a(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 4.6 Soient $0 \leq \delta \leq 1, \varrho \geq 1$ et $N \in \mathbb{N}_0$. Si $(\chi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ est une suite vérifiant

$$(\chi_j^{(\beta)})_j \subset L_\infty \quad \text{et} \quad |\chi_j^{(\beta)}(x + h) - \chi_j^{(\beta)}(x)| \leq c\omega(|h|)\Omega(2^{ej}) \quad (|\beta| \leq N), \quad (4.4)$$

alors

$$\|Q_m \chi_j(2^{\delta j} \cdot)\|_\infty \leq c(\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \|\chi_\ell\|_{C^{N,\omega}(\mathbb{R}^n)}) 2^{(j\delta - m)N} \omega(2^{j\delta - m}) \Omega(2^{ej}).$$

Preuve. Voir [20]. ■

Définition 4.7 Un symbole $\sigma(x, \xi) \in \Sigma_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$ est élémentaire s'il existe une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ portée par la couronne $1/2 \leq |\xi| \leq 2$ et une suite $(\chi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C^{a,\omega}(\mathbb{R}^n)$ telles que :

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{j \geq 0} 2^{j\mu} \chi_j(2^{\delta j} x) \theta(2^{-j} \xi).$$

Remarque 4.8 La méthode introduite par Coifman et Meyer [10] permet d'écrire un symbole de $\Sigma_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$ sous forme élémentaire.

Lemme 4.9 Il existe une fonction $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ portée par la couronne $1/2 \leq |\xi| \leq 2$ telle que :

$$\sum_{j \geq 0} \left[\theta(2^{-j}x) \right]^2 = 1.$$

Preuve. On construit la fonction θ comme dans [3, Lemme 6.1.7]. ■

Soit θ une fonction comme dans le Lemme 4.9, on pose

$$\sigma_j(x, \xi) := 2^{-j\mu} \theta(\xi) \lambda(2^{-\delta j}, 2^j \xi),$$

donc

$$\sigma_j(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iu \cdot \xi} (1 + |u|)^{-L/2} \chi_{j,u}(x) du \quad (4.5)$$

où

$$\chi_{j,u}(x) := \int_{1/2 \leq |\xi| \leq 2} e^{-iu \cdot \xi} (1 - \Delta_\xi)^{L/2} \sigma(x, \xi) d\xi, \quad (4.6)$$

L est un entier supérieur ou égale à $n + 1$.

Maintenant, on pose

$$\lambda(x, \xi) := \sum_{j \geq 0} 2^{j\mu} \theta(2^{-j} \xi) \sigma_j(2^{\delta j} x, 2^{-j} \xi),$$

donc les formules (4.5) et (4.6) donnent

$$\lambda(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |u|^2)^{-(n+1)/2} \lambda_u(x, \xi) du, \quad (4.7)$$

où

$$\lambda_u(x, \xi) := \sum_{j \geq 0} 2^{j\mu} \theta_u(2^{-j} \xi) \chi_{j,u}(2^{\delta j} x) \quad (4.8)$$

et

$$\theta_u(\xi) = (2\pi)^{-n} (1 + |u|^2)^{(n+1-L)/2} e^{iu \cdot \xi} \theta(\xi).$$

On montre que $\sup_{u \in \mathbb{R}^n} \|\theta_u^{(\alpha)}\|_\infty \leq c$ pour tout $|\alpha| \leq L - n - 1$.

Lemme 4.10 *La suite $(\chi_{j,u})$ vérifie la propriété*

$$|\chi_{j,u}^{(\beta)}| \leq c_L \quad \text{et} \quad |\chi_{j,u}^{(\beta)}(x+h) - \chi_{j,u}^{(\beta)}| \leq c'_L \omega(|h|) \Omega(2^{j\varrho}) \quad |\beta| \leq N,$$

où c_L, c'_L sont des constantes indépendantes de u et j .

Preuve. Voir [20, p. 256]. ■

De (4.8), le Lemme 4.10 et la définition de θ_u nous avons

Proposition 4.11 *Les symboles λ_u sont élémentaires au sens de la définition 4.7.*

4.2 Résultats principaux

Nous allons prouver la continuité des O.P.D. appartenant à $OP_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$ sur les espaces de type de Besov et de type Lizorkin-Triebel, on suppose que le module de continuité ω et la fonction Ω (donnée selon la définition 4.3) vérifient les deux conditions suivantes :

$$\left(\sum_{k \geq 0} \left\{ \omega(2^{-k}) \Omega(2^k) \right\}^q \right)^{1/q} < \infty \quad (0 < q \leq \infty), \quad (4.9)$$

$$(\forall \nu > 0, \exists c_\nu > 0), \quad t > 1 \Rightarrow \int_1^t \frac{\Omega(u)}{u^{\nu+1}} du \leq c_\nu \frac{\Omega(t)}{t^\nu}. \quad (4.10)$$

Notons que ce type de conditions ont été utilisées par Moussai [20] dans les deux cas suivants :

- Les espaces de potentiel de Bessel $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$), avec les conditions suivantes

$$\sum_{k \geq 0} \left\{ \omega(2^{-k}) \Omega(2^k) \right\}^2 < \infty,$$

$$(\forall \nu > 0, \exists c_\nu > 0), \quad t > 1 \Rightarrow \int_1^t \frac{\Omega^2(u)}{u^{\nu+1}} du \leq c_\nu \frac{\Omega^2(t)}{t^\nu}.$$

- Les espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, ($1 \leq p, q \leq \infty$) avec les conditions

$$\left(\sum_{k \geq 0} \left\{ \omega(2^{-k}) \Omega(2^k) \right\}^q \right)^{1/q} < \infty \quad (1 \leq q \leq \infty),$$

$$(\forall \nu > 0, \exists c_\nu > 0), t > 1 \Rightarrow \int_1^t \frac{\Omega^{q'}(u)}{u^{\nu+1}} du \leq c_\nu \frac{\Omega^{q'}(t)}{t^\nu}.$$

Revenons aux résultats principaux :

Théorème 4.12 Soient $0 \leq \delta \leq 1 - \varrho < 1$, $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $\mu \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 \leq \tau \leq 1/p$ et $N \in \mathbb{N}$. Supposons que les conditions (4.1), (4.9) et (4.10) sont vérifiées. Si $s > \delta N$, alors tout O.P.D. $op_\sigma \in OP_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$ est borné de $B_{p,q}^{s+\mu,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 4.13 Soient $0 \leq \delta \leq 1 - \varrho < 1$, $(n/\min(p, q) - n)_+ < s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $\mu \geq 0$, $1 \leq p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 \leq \tau \leq 1/p$ et $N \in \mathbb{N}$. Supposons que les conditions (4.1), (4.9) et (4.10) sont vérifiées. Si $s > \delta N$, alors tout O.P.D. $op_\sigma \in OP_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$ est borné de $F_{p,q}^{s+\mu,\tau}(\mathbb{R}^n)$ dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

La condition (4.9) est optimale dans le sens suivant :

Théorème 4.14 Soient $0 \leq \delta < 1$, $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $\mu \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 \leq \tau \leq 1/p$ et $N \in \mathbb{N}$ telle que $s > \delta N$. Supposons que

$$\left(\sum_{k \geq 0} \left\{ \omega(2^{-k}) \Omega(2^k) \right\}^q \right)^{1/q} = \infty.$$

Alors, il existe un O.P.D. $op_\kappa \in OP_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$ et une fonction $g \in B_{p,q}^{s+\mu,\tau}(\mathbb{R}^n)$ tel que $op_\kappa g \notin B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 4.15 Soient $0 \leq \delta < 1$, $(n - n/\min(p, q))_+ < s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $\mu \geq 0$, $0 < q \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \tau \leq 1/p$ et $N \in \mathbb{N}$ telle que $s > \delta N$. Supposons que

$$\left(\sum_{k \geq 0} \left\{ \omega(2^{-k}) \Omega(2^k) \right\}^q \right)^{1/q} = \infty.$$

Alors, il existe un O.P.D. $op_\kappa \in OP_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$ et une fonction $g \in F_{p,q}^{s+\mu,\tau}(\mathbb{R}^n)$ tel que $op_\kappa g \notin F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

4.2.1 Des lemmes de presque-orthogonalité

Proposition 4.16 Soient $p, q \in]0, \infty]$, $s > (n/p - n)_+$ et $\tau \geq 0$. Soit $b > 0$. Soit $(u_j)_{j \geq 0}$ une suite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que

- $\widehat{u_j}$ est portée par la boule $|\xi| \leq b2^j$,
- $I := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} (2^{sj} \|u_j\|_{L_p(P_{k,\nu})})^q \right)^{1/q} < \infty$.

Alors la série $\sum_{j \geq 0} u_j$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vers une limite u qui vérifie $\|u\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq cI$, la constante c ne dépend que de n, s, τ, p, q et b .

Preuve. Voir [24]. ■

Proposition 4.17 Soient $\eta > 0, 0 \leq \delta \leq 1 - \varrho \leq 1, N \in \mathbb{N}_0, 1 \leq p \leq \infty, 0 < q \leq \infty, 0 \leq \tau \leq 1/p$ et $s > \delta N$. Supposons que (4.1), (4.9) et (4.10) sont vérifiées. Alors, pour toute suite $(\chi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ satisfaisant (4.4) et toute suite $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ telle que $\text{supp } \widehat{f_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \eta 2^j\}$, on a

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \chi_j(2^{\delta j} \cdot) f_j \right\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sjq} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q}.$$

Preuve. Comme $\chi_j = S_j \chi_j + \sum_{m \geq j+1} Q_m \chi_j$ on peut écrire

$$\sum_{j \geq 0} \chi_j(2^{\delta j} \cdot) f_j = u_1 + u_2, \quad (4.11)$$

où

$$u_1 := \sum_{j \geq 0} f_j S_j \chi_j(2^{\delta j} \cdot) \quad \text{et} \quad u_2 := \sum_{k \geq 1} \sum_{j=0}^{m-1} f_j Q_m \chi_j(2^{\delta j} \cdot). \quad (4.12)$$

Etape 1 : Estimation de u_1 . La fonction $\widehat{f_j S_j \chi_j}$ est portée par la boule $|\xi| \leq (\eta + 3/2)2^j$,

donc par la Proposition 4.16, on a

$$\|u_1\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sjq} \|f_j S_j \chi_j(2^{\delta j} \cdot)\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que $\|S_j \chi_j\|_\infty \leq c \|\chi_j\|_\infty$ ($\forall j \geq 0$), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} &\leq c_1 \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sjq} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \|S_j \chi_j\|_\infty^q \right)^{1/q} \\ &\leq c_2 \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sjq} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \|\chi_j\|_\infty^q \right)^{1/q} \\ &\leq c_2 \sup_{j \geq 0} \|\chi_j\|_\infty \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sjq} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Etape 2 : Estimation de u_2 . Grâce à l'injection $B_{p,q}^{s+N(1-\delta),\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ il suffit d'estimer $\|u_2\|_{B_{p,q}^{s+N(1-\delta),\tau}(\mathbb{R}^n)}$.

La fonction $\mathcal{F}(\sum_{j=0}^{m-1} f_j Q_m \chi_j)$ est portée par la boule $|\xi| \leq (b/2 + 3/2)2^m$ avec $m \geq 1$. La Proposition 4.16 nous permet d'obtenir

$$\|g_2\|_{B_{p,q}^{s+N(1-\delta),\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{m > k_+} 2^{(s+N(1-\delta))mq} \left\| \sum_{j=0}^{m-1} f_j Q_m \chi_j(2^{\delta j} \cdot) \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q}, \quad (4.13)$$

par les inégalités de Minkowski et de Hölder nous obtenons

$$\|g_2\|_{B_{p,q}^{s+N(1-\delta),\tau}(\mathbb{R}^n)}^q \leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{nq\tau k} \sum_{m > k_+} 2^{(s+N(1-\delta))mq} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|Q_m \chi_j(2^{\delta j} \cdot)\|_\infty \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^q.$$

D'après le Lemme 4.6, on peut majorer le terme $\|g_2\|_{B_{p,q}^{s+N(1-\delta),\tau}(\mathbb{R}^n)}^q$ par

$$c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{nq\tau k} \sum_{m \geq 1} 2^{(s+N(1-\delta))mq} \left(\sum_{j=0}^{m-1} 2^{(j\delta-m)N} \omega(2^{j\delta-m}) \Omega(2^{ej}) \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})} \right)^q,$$

par l'inégalité de Hölder dans $\ell_1(\{1, \dots, m-1\})$ nous obtenons

$$\|g_2\|_{B_{p,q}^{s+N(1-\delta),\tau}(\mathbb{R}^n)}^q \leq cA \times B, \quad (4.14)$$

où

$$A := \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{nq\tau k} \left\| \{2^{sj} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}\}_j \right\|_{\ell_\infty(\mathbb{N}_0)}^q.$$

et

$$B := \sum_{m \geq 1} 2^{(s+N(1-\delta))mq} \left(\sum_{j=0}^{m-1} 2^{(j\delta-m)N-sj} \omega(2^{j\delta-m}) \Omega(2^{\varrho j}) \right)^q. \quad (4.15)$$

Par l'injection $\ell_q(\mathbb{N}_0) \hookrightarrow \ell_\infty(\mathbb{N}_0)$ et des techniques similaires à celles utilisées dans la preuve de la Proposition 2.12 (estimation de g_2) nous avons

$$\begin{aligned} A &\leq \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{nq\tau k} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|2^{sj} f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right) \\ &\leq c \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{nq\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sjq} \|f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Maintenant, nous allons estimer le terme B. Pour tout $0 \leq j \leq m-1$, nous avons $2^{j\delta-m} \leq 2^{m(\delta-1)}$. Donc la monotonie de ω implique

$$\omega(2^{j\delta-m}) \leq \omega(2^{(\delta-1)m}) \quad (\forall 0 \leq j \leq m-1),$$

d'où

$$B \leq \sum_{m \geq 1} 2^{(s-N\delta)mq} \omega^q(2^{(\delta-1)m}) T^q,$$

où

$$T := \sum_{j=0}^{m-1} 2^{j(\delta N-s)} \Omega(2^{\varrho j}).$$

Pour l'estimation de T , on pose $u = 2^{\varrho j}$, si $0 \leq j \leq m$ alors $1 \leq u \leq 2^{m\varrho}$, donc les conditions (4.1) et (4.10) nous donnent

$$T \leq \int_1^{2^{m\varrho}} \frac{\Omega(u)}{u^{(s-\delta N)/\varrho}} du \leq 2^{(\delta N-s)m} \Omega(2^{m\varrho}),$$

donc

$$B \leq \sum_{m \geq 1} \omega^q(2^{(\delta-1)m}) \Omega^q(2^{m\varrho}).$$

L'hypothèse $\delta \leq 1 - \varrho < 1$ et la condition (4.9) assurent que

$$B \leq \sum_{m \geq 1} \omega^q(2^{-\varrho m}) \Omega^q(2^{m\varrho}) < \infty. \quad (4.17)$$

On termine la preuve de la Proposition 4.17 en insérant (4.17) et (4.16) dans (4.14). ■

Remarque 4.18 La Proposition 4.17 est vérifiée si $s > (n/p - n)_+$ et $0 < q \leq p < 1$.

Preuve. Comme dans la preuve de la Proposition 4.17, nous allons estimer u_1 et u_2 (voir (4.11)). L'estimation de u_1 ne change pas. Pour u_2 , l'inégalité (4.13) et le Lemme 4.6 impliquent que le terme $\|u_2\|_{B_{p,q}^{s+N(1-\delta),\tau}(\mathbb{R}^n)}$ est majoré par quantité suivante :

$$c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{m \geq 1+k_+} 2^{(s+N(1-\delta))mq} \left\| \sum_{j=0}^{m-1} 2^{(j\delta-m)N-sj} \omega(2^{j\delta-m}) \Omega(2^{\rho j}) 2^{sj} f_j \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q}. \quad (4.18)$$

Par l'inégalité de Hölder et l'estimation (4.18) nous obtenons

$$\|u_2\|_{B_{p,q}^{s+N(1-\delta),\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c B^{1/q} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \sup_{j \geq 0} |2^{sj} f_j| \right\|_{L_p(P_{k,\nu})},$$

B étant donné par (4.15). Comme nous avons

$$\left\| \sup_{j \geq 0} |2^{sj} f_j| \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \leq \left\| \left(\sum_{j \geq 0} |2^{sj} f_j(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \leq \left(\sum_{j \geq 0} \|2^{sj} f_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q},$$

la preuve est terminée. ■

Proposition 4.19 Soient $\eta > 0, 0 \leq \delta \leq 1 - \varrho \leq 1, N \in \mathbb{N}_0, 0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, 0 \leq \tau \leq 1/p$ et $s > \max(\delta N, (n - n/\min(p, q))_+)$. Supposons que (4.1), (4.9) et (4.10) sont vérifiées. Alors, pour toute suite $(\chi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ vérifiant (4.4) et toute suite $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ telle que $\text{supp } \widehat{f_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \eta 2^j\}$, on a

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \chi_j(2^{\delta j} \cdot) f_j \right\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} |2^{sj} f_j(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}.$$

Preuve. Rappelons qu'on a la décomposition

$$\sum_{j \geq 0} \chi_j(2^{\delta j} \cdot) f_j = u_1 + u_2, \quad (\text{voir (4.11) et (4.12)}).$$

Etape 1 : Estimation de u_1 . En utilisant la Proposition 2.11, on a

$$\|u_1\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} |2^{sj} f_j S_j \chi_j(2^{\delta j} \cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}.$$

Comme $\|S_j \chi_j\|_\infty \leq c \|\chi_j\|_\infty$ ($\forall j \geq 0$), alors

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} &\leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} |2^{sj} f_j(\cdot)|^q \|S_j \chi_j\|_\infty^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \\ &\leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} |2^{sj} f_j(\cdot)|^q \|\chi_j\|_\infty^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \\ &\leq c \sup_{j \geq 0} \|\chi_j\|_\infty \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} |2^{sj} f_j(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}. \end{aligned}$$

Etape 2 : Estimation de u_2 . Comme dans la Proposition 4.17, nous utiliserons l'injection

$F_{p,q}^{s+N(1-\delta),\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$. La Proposition 2.11 nous donne

$$\|u_2\|_{F_{p,q}^{s+N(1-\delta),\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{m > k_+} 2^{(s+N(1-\delta))mq} \left| \sum_{j=0}^{m-1} f_j Q_m \chi_j(2^{\delta j} \cdot) \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}.$$

Par le Lemme 4.6, nous pouvons majorer le terme $\|u_2\|_{F_{p,q}^{s+N(1-\delta),\tau}(\mathbb{R}^n)}$ par

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{m > k_+} 2^{(s+N(1-\delta))mq} \left| \sum_{j=0}^{m-1} 2^{(j\delta-m)N-sj} \omega(2^{j\delta-m}) \Omega(2^{\delta j}) |2^{sj} f_j(\cdot)|^q \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})},$$

donc l'inégalité de Hölder assure l'estimation

$$\|u_2\|_{F_{p,q}^{s+N(1-\delta),\tau}(\mathbb{R}^n)}^q \leq cA \times \sum_{m \geq 1} 2^{(s+N(1-\delta))mq} \left(\sum_{j=0}^{m-1} 2^{(j\delta-m)N-sj} \omega(2^{j\delta-m}) \Omega(2^{\delta j}) \right)^q,$$

où

$$A := \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{nq\tau k} \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}_0} (2^{sj} f_j(\cdot)) \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \leq \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{nq\tau k} \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |2^{sj} f_j(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q.$$

Par les mêmes techniques de la preuve de la Proposition 2.12 (estimation de g_2), nous

avons

$$A \leq c \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{nq\tau k} \left\| \left(\sum_{j=k_+}^{\infty} |2^{sj} f_j(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q.$$

Le terme

$$B := \sum_{m \geq 1} 2^{(s+N(1-\delta))mq} \left(\sum_{j=0}^{m-1} 2^{(j\delta-m)N-m-sj} \omega(2^{j\delta-m}) \Omega(2^{2j}) \right)^q$$

a été estimé dans la preuve de la Proposition 4.17. ■

4.2.2 Preuve du Théorème 4.12 et 4.14

Nous allons utiliser les propositions suivantes :

Proposition 4.20 Soient $t \in]0, 1]$, $C > 0$ et $R \geq 1$. Soient $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que h et $\widehat{\theta}$ sont portées par les boules $|\xi| \leq C$ et $|\xi| \leq CR$, respectivement. Alors l'inégalité

$$|(\theta * \mathcal{F}^{-1}h)(x)| \leq c(CR)^{n/t-n} \|h\|_{\dot{B}_{1,t}^{n/t}(\mathbb{R}^n)} (M|\theta|^t(x))^{1/t}$$

est vérifiée, où M et $\dot{B}_{1,t}^{n/t}(\mathbb{R}^n)$ sont la fonction maximale de Hardy-Littlewood sur $\mathbb{R}^n$ et l'espace de Besov homogène, respectivement. La constante c est indépendante de θ, h, C, R et x .

Preuve. Voir [35, Lemme 6.1, p. 150]. ■

Proposition 4.21 Soient $b > 0, 0 < p, q \leq \infty, s > (n/p - n)_+$ et $\tau \geq 0$. Il existe une constante $c > 0$, telle que pour toute $g \in B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ et toute fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ portée par la boule $|\xi| \leq b$, la suite $(g_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ définie par $\widehat{g_j} := \theta(2^{-j})\widehat{g}$, vérifie

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j=k_+}^{\infty} 2^{sj} \|g_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q} \leq c \|g\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve. Par considération des supports nous avons,

$$g_j = \sum_{\mu \geq 0} Q_\mu g_j = \sum_{m \geq j-\mu} Q_m g_j \quad \left(\mu := 1 + \left\lceil \frac{\log 2b}{\log b} \right\rceil \right),$$

donc

$$\|g_j\|_{L_p(P_{k,\nu})} = \left\| \sum_{m \geq j-\mu} 2^{jn} \mathcal{F}^{-1} \theta(2^j \cdot) * Q_m g \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}. \quad (4.19)$$

On traite les cas $p < 1$ et $p \geq 1$ séparément. Commençons par le cas $0 < p < 1$. Nous avons

$$\text{supp}(2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\theta(2^j\cdot)) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2^j\} \quad \text{et} \quad \text{supp } Q_m \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2^m = 2^{m-j}2^j\},$$

donc par la Proposition 4.20, pour tout $t \in]0, 1]$ et $m \geq j$ nous avons

$$\begin{aligned} |2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\theta(2^j\cdot) * Q_m g(x)| &\leq c2^{(n/t-n)m} \|\theta(2^{-j}\cdot)\|_{\dot{B}_{1,t}^{n/t}(\mathbb{R}^n)} (M|Q_m g|^t(x))^{1/t} \\ &\leq c2^{(n/t-n)(m-j)} (M|Q_m g|^t(x))^{1/t}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

pour la dernière estimation, nous avons utilisé la propriété de $\dot{B}_{1,t}^{n/t}(\mathbb{R}^n)$ suivante :

$$\|\theta(2^{-j}(\cdot))\|_{\dot{B}_{1,t}^{n/t}(\mathbb{R}^n)} \leq c2^{j(n-n/t)} \|\theta\|_{\dot{B}_{1,t}^{n/t}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}_0.$$

Par les inégalités (4.19) et (4.20) nous obtenons

$$\|g_j\|_{L_p(P_{k,\nu})} \leq \left(\int_{L_p(P_{k,\nu})} \left(\sum_{m \geq j} 2^{(n/t-n)(m-j)} (M|Q_m g|^t(x))^{1/t} \right)^p dx \right)^{1/p},$$

donc l'injection $\ell_p \hookrightarrow \ell_1$ ($p < 1$) assure que

$$\begin{aligned} \|g_j\|_{L_p(P_{k,\nu})} &\leq \left(\sum_{m \geq j} 2^{p(n/t-n)(m-j)} \int_{L_p(P_{k,\nu})} (M|Q_m g|^t(x))^{p/t} dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{m \geq j} 2^{p(n/t-n)(m-j)} \|M|Q_m g|^t\|_{L_{p/t}(P_{k,\nu})}^{p/t} \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Choisissons $0 < t < p$, donc la fonction maximale est bornée sur $L_{p/t}(P_{k,\nu})$ autrement dit $\|Mg\|_{L_{p/t}(P_{k,\nu})} \leq c\|g\|_{L_{p/t}(P_{k,\nu})}$ pour toute fonction g localement intégrable (voir la Proposition 1.6), donc l'inégalité (4.21) devient

$$\begin{aligned} \|g_j\|_{L_p(P_{k,\nu})} &\leq \left(\sum_{m \geq j} 2^{p(n/t-n)(m-j)} \| |Q_m g|^t \|_{L_{p/t}(P_{k,\nu})}^{p/t} \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{m \geq j} 2^{p(n/t-n)(m-j)} \|Q_m g\|_{L_p(P_{k,\nu})}^p \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sj} \|g_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q} &\leq \left(\sum_{j \geq k_+} \left(\sum_{m \geq j} 2^{p(n/t-n-s)(m-j)} 2^{smp} \|Q_m g\|_{L_p(P_{k,\nu})}^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \\ &= \left\{ \left(\sum_{j \geq k_+} \left(\sum_{m \geq j} 2^{p(n/t-n-s)(m-j)} 2^{smp} \|Q_m g\|_{L_p(P_{k,\nu})}^p \right)^{q/p} \right)^{p/q} \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Rappelons qu'on a $s > (n/p - n)_+ = n/p - n$ donc $n/(s+n) < p$, le choix de t tel que $n/(s+n) < t < p$ entraîne $n/t - n - s < 0$. Donc la Proposition 1.2 (dans $\ell_{q/p}$) donne l'estimation voulue, i.e.

$$\sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sqj} \|g_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q} \leq c \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{qsj} \|Q_j g\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q}.$$

Supposons maintenant que $p \geq 1$. Posons $\vartheta_j := 2^{jn} \mathcal{F}^{-1} \theta(2^j \cdot)$ et utilisons le fait que $x \in P_{k,\nu}$ implique $x - y \in P_{k, [\nu - 2^k y]} \left(y \in \mathbb{R}^n, [\nu - 2^k y] := ([\nu_1 - 2^k y_1], \dots, [\nu_n - 2^k y_n]) \right)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|g_j\|_{L_p(P_{k,\nu})} &= \sum_{m \geq j-\mu} \left(\int_{P_{k,\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \vartheta_j(y) Q_m f(x-y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\vartheta_j(y)| \sum_{m \geq j-\mu} \left(\int_{P_{k,\nu}} |Q_m f(x-y)|^p dx \right)^{1/p} dy \\ &\leq c \sum_{m \geq j-\mu} \|Q_m g\|_{L_p(P_{k, [\nu - 2^k y]})}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\left(\sum_{j \geq k_+} 2^{sj} \|g_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q} \leq c \left(\sum_{j \geq k_+} \left(\sum_{m \geq j-\mu} 2^{(j-m)s} \|2^{sm} Q_m g\|_{L_p(P_{k, [\nu - 2^k y]})} \right)^q \right)^{1/q}.$$

Enfin, la Proposition 1.2 nous donne l'estimation voulue. ■

Preuve du Théorème 4.12

Soit $op_\sigma \in OP_{\delta,1}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$. Soit φ une fonction C^∞ portée par la boule $|\xi| \leq 1$ et vérifie $\varphi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1/2$. De la décomposition

$$\sigma(x, \xi) = \varphi(\xi)\sigma(x, \xi) + (1 - \varphi(\xi))\sigma(x, \xi)$$

nous avons

$$\sigma(x, \xi) = \kappa(x, \xi) + \lambda(x, \xi), \quad (4.22)$$

où $\kappa(x, \xi) = \varphi(\xi)\sigma(x, \xi)$ et $\lambda(x, \xi)$ est donnée par (4.7). D'où la décomposition

$$op_\sigma(f) = op_\kappa(f) + op_\lambda(f),$$

où

$$op_\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |u|^2)^{-\frac{n+1}{2}} op_{\lambda_u}(f) du, \quad (4.23)$$

voir le sous-paragraphe 4.1.1.

Maintenant, nous allons estimer $\|op_\lambda(f)\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$ et $\|op_\kappa(f)\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$.

Au départ, nous avons

$$\begin{aligned} (op_{\lambda_u}g)(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \lambda_u(x, \xi) \widehat{g}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{j\mu} \theta_u(2^{-j}\xi) \chi_{j,u}(2^{\delta j}x) \right) \widehat{g}(\xi) d\xi \\ &= \sum_{j \geq 0} 2^{j\mu} \chi_{j,u}(2^{\delta j}x) \left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \theta_u(2^{-j}\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

Par la Proposition 4.17, il vient

$$\begin{aligned} \|op_{\lambda_u}g\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} &\leq c \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k\nu \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{(s+\mu)qj} \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \theta_u(2^{-j}\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi \right) \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q} \\ &= c \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k\nu \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{(s+\mu)qj} \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{g}_j(\xi) d\xi \right) \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q}, \\ &= c \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k\nu \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{(s+\mu)qj} \|g_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

ici, $\widehat{g}_j := \theta_u(2^{-j}\cdot)\widehat{g}$, donc la dernière estimation et la Proposition 4.21 nous donnent

$$\|op_{\lambda_u}g\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|g\|_{B_{p,q}^{s+\mu,\tau}(\mathbb{R}^n)}. \quad (4.24)$$

Par la formule (4.23), nous avons

$$|op_{\lambda}(f)(x)| \leq \sup_{u \in \mathbb{R}^n} |op_{\lambda_u}(f)(x)| \int_{\mathbb{R}^n} (1+|u|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \leq c \sup_{u \in \mathbb{R}^n} |op_{\lambda_u}(f)(x)|.$$

Donc (4.24) implique

$$\|op_{\lambda}g\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \|op_{\lambda_u}g\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|g\|_{B_{p,q}^{s+\mu,\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

Maintenant, nous allons estimer $\|op_{\kappa}g\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$. On pose

$$op_{\kappa}g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|u|^2)^{-2n} a_u g(x+u) du,$$

donc a_u est une famille des fonctions continues données par

$$a_u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iu \cdot \xi} (1 - \Delta_{\xi})^{2n} \kappa(x, \xi) d\xi \quad (u \in \mathbb{R}^n).$$

Par l'inégalité (4.2) nous avons

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^n} \|\partial_x^{\beta} a_u(\cdot)\|_{\infty} \leq c \quad (|\beta| \leq N),$$

ce qui implique

$$\|op_{\kappa}g\|_{L_p(P_{k,\nu})} \leq c \left(\sup_{u \in \mathbb{R}^n} \|a_u\|_{\infty} \right) \|g\|_{L_p(P_{k,\nu})} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}). \quad (4.25)$$

Par définition de κ (voir (4.22)), nous avons $Q_j(op_{\kappa}f) = 0$ pour tout $j \geq 1$, donc $op_{\kappa}g =$

$S_0(op_{\kappa}g)$, ce qui implique que

$$\|op_{\kappa}g\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_-} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \|S_0(op_{\kappa}g)\|_{L_p(P_{k,\nu})}.$$

D'autre part, l'implication $(x \in P_{k,\nu} \Rightarrow x - y \in P_{k, [\nu-2^k y]})$ nous donne

$$\begin{aligned}
\|S_0(op_\kappa g)\|_{L_p(P_{k,\nu})} &= \left(\int_{P_{k,\nu}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn} \rho(2^{-j}y) op_\kappa g(x-y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |2^{jn} \rho(2^{-j}y)| \left(\int_{P_{k,\nu}} |op_\kappa g(x-y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |2^{jn} \rho(2^{-j}y)| \|op_\kappa g\|_{L_p(P_{k, [\nu-2^k y]})} dy \\
&\leq c \|\rho\|_1 \sup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \|op_\kappa g\|_{L_p(P_{k,\nu})},
\end{aligned}$$

donc, par l'estimation (4.25) le terme $\|op_\kappa g\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$ est majoré par

$$\sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} 2^{n\tau k} \|g\|_{L_p(P_{k,\nu})} = \|g\|_{L_p^{\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

Enfin, nous utilisons les injections

$$B_{p,q}^{s+\mu,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p^{\tau}(\mathbb{R}^n),$$

pour terminer la preuve du Théorème 4.12. ■

Preuve du Théorème 4.14

La démonstration est la même donnée dans [20, Théorème 2] en utilisant la Proposition 4.21. ■

4.2.3 Preuve du Théorème 4.13 et 4.15

Pour tout $a > 0$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$Q_j^{*,a} f(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q_j f(x-y)|}{1 + |2^j y|^a} \quad (x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{N}_0).$$

Proposition 4.22 Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$ et $\tau \geq 0$. Soit $a > n/\min(p, q)$, alors l'expression

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \left\| \sum_{j=k_+}^{\infty} (2^{sqj} |Q_j^{*,a} g|^q)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}$$

définit une quasi-norme équivalente dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [33]. ■

Proposition 4.23 Soient $b > 1, s > 0, 0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$ et $\tau \geq 0$. Alors, pour toute $g \in F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ et toute fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ portée par la couronne $b^{-1} \leq |\xi| \leq b$ il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left\| \sum_{j=k_+}^{\infty} (2^{sqj} |g_j(\cdot)^q)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \leq c \|g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

avec $\widehat{g}_j := \theta(2^{-j})\widehat{g}$.

Preuve. D'après l'égalité $g_j = \sum_{m \geq 0} Q_m g_j$ nous avons

$$\begin{aligned} |g_j(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|m-j| \leq \mu} |\mathcal{F}^{-1}\theta(y)| Q_m(x - 2^{-j}y) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + 2^\mu |y|^a) |\mathcal{F}^{-1}\theta(y)| \sum_{|m-j| \leq \mu} \frac{Q_m g(x - 2^{-j}y)}{1 + (2^{m-j}|y|)^a} \\ &\leq (2\mu + 1) \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + 2^\mu |y|^a) |\mathcal{F}^{-1}\theta(y)| \right) \sum_{|m-j| \leq \mu} Q_m^{*,a} g(x) \\ &\leq c(\theta) \sum_{|m-j| \leq \mu} |Q_m^{*,a} g(x)|, \end{aligned}$$

donc

$$|g_j(x)| \leq \sum_{|m-j| \leq \mu} 2^{-sm} |2^{sm} Q_m^{*,a} g(x)|.$$

Choisissons $a > n/\min(p, q)$, les Propositions 1.2 et 4.22 nous donnent alors

$$\begin{aligned} 2^{n\tau k} \left\| \sum_{j=k_+}^{\infty} (2^{sqj} |g_j|^q)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} &\leq c 2^{n\tau k} \left\| \sum_{j=k_+}^{\infty} (2^{sqj} |Q_j^{*,a} g|^q)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \\ &\leq c_1 \|g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de la Proposition 4.23. ■

Preuve du Théorème 4.13

Comme dans la preuve du Théorème 4.12, nous allons estimer les quasi-normes de $op_\lambda(f)$ et $op_\kappa(f)$ dans $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$.

Rappelons que

$$(op_{\lambda_u}g)(x) = \sum_{j \geq 0} 2^{j\mu} \chi_{j,u}(2^{\delta_j}x) \left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \theta_u(2^{-j}\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi \right),$$

donc la Proposition 4.19 nous donne

$$\begin{aligned} \|op_{\lambda_u}g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} &\leq c \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \nu \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} 2^{(s+\mu)qj} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \theta_u(2^{-j}\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi \right)^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^q \\ &= c \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \nu \in \mathbb{Z}} 2^{n\tau k} \left\| \left(\sum_{j \geq k_+} (2^{(s+\mu)j} |g_j(\cdot)|)^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}, \end{aligned}$$

où $\widehat{g}_j := \theta_u(2^{-j}\cdot)\widehat{g}$, par la Proposition 4.23 nous avons

$$\|op_{\lambda_u}g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|g\|_{F_{p,q}^{s+\mu,\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

En utilisant le fait que

$$|op_\lambda(f)(x)| \leq c \sup_{u \in \mathbb{R}^n} |op_{\lambda_u}(f)(x)|,$$

nous obtenons

$$\|op_\lambda g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \|op_{\lambda_u}g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|g\|_{F_{p,q}^{s+\mu,\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

Maintenant, nous allons estimer $\|op_\kappa g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$. Le fait que

$$\|op_\kappa g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \|S_0(op_\kappa g)\|_{L_p(P_{k,\nu})}$$

et les injections

$$F_{p,q}^{s+\mu,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p^\tau(\mathbb{R}^n),$$

donnent

$$\|op_\kappa g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|g\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)} \leq c \|g\|_{F_{p,q}^{s+\mu,\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

La preuve du Théorème 4.13 est terminée. ■

Preuve du Théorème 4.15

Considérons le symbole :

$$v(x, \xi) := (1 + |\xi|)^\mu \sum_{j \geq 0} 2^{-\delta N j} \omega(2^{(\delta-1)j}) \Omega(2^{2j}) \exp(i 2^j x_1),$$

où $x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|h\|_p \neq 0$ et $\text{supp } \widehat{h}$ est inclu dans la boule $|\xi| \leq 1/4$, on pose

$$g := \mathcal{F}^{-1}((1 + |\cdot|)^{-m} \widehat{h}),$$

par la Proposition 4.23 nous obtenons

$$\|op_v g\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \geq \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|h\|_{L_p(P_{k,\nu})} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j \geq k_+} \left(2^{(s-\delta N j)} \omega(2^{(\delta-1)j}) \Omega(2^{2j}) \right)^q \right)^{1/q} = \infty.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Annexe

Preuves de quelques résultats secondaires du chapitre 2

Dans cette annexe, nous allons prouver quelques résultats secondaires énoncés dans le chapitre 2.

Preuve de l'inégalité (2.15). Il suffit d'appliquer l'inégalité de Minkowski deux fois,

i.e

$$\begin{aligned}
 \left\| \left(\sum_{\ell \geq 0} \left| \sum_{j \geq 0} h_{j,\ell} \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^d &= \left\| \left(\sum_{\ell \geq 0} \left(\sum_{j \geq 0} |h_{j,\ell}|^d \right)^{q/d} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^d \\
 &= \left\| \left(\sum_{\ell \geq 0} \left(\sum_{j \geq 0} |h_{j,\ell}|^d \right)^{q/d} \right)^{d/q} \right\|_{L_{p/d}(P_{k,\nu})}^d \\
 &\leq \left\| \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{\ell \geq 0} |h_{j,\ell}|^q \right)^{d/q} \right\|_{L_{p/d}(P_{k,\nu})}^d \\
 &= \left\| \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{\ell \geq 0} |h_{j,\ell}|^q \right)^{d/q} \right)^{1/d} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^d \\
 &\leq \sum_{j \geq 0} \left\| \left(\sum_{\ell \geq 0} |h_{j,\ell}|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})}^d,
 \end{aligned}$$

nous avons aussi utiliser l'inégalité $\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \leq \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j^d \right)^{1/d}$ $a_j \geq 0$, $0 < d \leq 1$. ■

Preuve du Corollaire 2.14. Rappelons la proposition suivante :

Proposition 1 (Moussai [21]) *Soit $0 < s \notin \mathbb{N}_0$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f^{(j)} \in L_\infty^{loc}(\mathbb{R})$ pour $j = 1, \dots, [s] + 1$.*

- (i) *Si $s < 1$, alors T_f est borné de $W_\infty^1(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$.*
- (ii) *Si $s > 1$, alors T_f est borné de $B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans lui même.*

En utilisant la Proposition 1 nous montrons que les opérateurs $\{R_j(f', g)\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ sont uniformément borné sur $B_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n)$, donc il suffit d'utiliser (2.22) et la Proposition 2.13 pour estimer $\|f \circ g\|_{B_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)}$. ■

Preuve du Corollaire 2.15. Soit $f \in B_{p, q}^{s+2, loc}(\mathbb{R})$, d'après l'égalité

$$f^{(j)}\psi = (f\psi)^{(j)} - \sum_{k=1}^j \binom{k}{j} f^{(k)}\psi^{(j-k)}, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

on déduit que $f^{(j)}\psi \in B_{p, q}^{s+2-j}(\mathbb{R})$ pour $j = 1, 2, \dots, [s] + 2$. De l'injection

$$B_{p, q}^{s+2-j}(\mathbb{R}) \hookrightarrow B_{\infty, q}^{s+2-j-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}),$$

on a

$$f^{(j)}\psi \in B_{\infty, q}^{s+2-j-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}).$$

Comme

$$B_{\infty, q}^{s+2-j-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \quad \left(s + 2 - j - \frac{1}{p} > 0\right),$$

nous trouvons

$$f^{(j)}\psi \in L_\infty(\mathbb{R}),$$

donc

$$f^{(j)} \in L_\infty^{loc}(\mathbb{R}),$$

la preuve se termine par le Corollaire 2.14. ■

Preuve du Corollaire 2.16. En utilisant la Proposition 1 nous montrons que les opérateurs $\{R_j(f', g)\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ sont uniformément bornés sur $B_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n)$. Par la formule (2.22) et la Proposition 2.12 on a

$$\|f \circ g\|_{F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|R_j(f', g)\|_{B_{\infty, q}^s(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|g\|_{F_{p, q}^{s, \tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Preuve du Corollaire 2.17. Par un raisonnement similaire à celle de la Proposition 2.15, nous prouvons que si $f \in F_{p,q}^{s+2,loc}(\mathbb{R})$ alors $f^{(j)} \in L_{\infty}^{loc}(\mathbb{R})$ ($j = 1, 2, \dots, [s] + 2$) donc la preuve se termine par le Corollaire 2.16. ■

Preuve du Corollaire 2.18. Les hypothèses sur les paramètres assurent qu'on a

$$F_{p_0,q_0}^{s_0,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n), \quad (4.26)$$

(voir la Proposition 1.20). Dans la preuve du Théorème 2.4 on a arrivé aux estimations

$$\|T_f(g)\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})} \phi(c\|g\|_{W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n)}) \|g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \quad (s < 1), \quad (4.27)$$

et

$$\|T_f(g)\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})} \phi(c\|g\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)}) \|g\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \quad (s > 1) \quad (4.28)$$

donc par l'inclusion (4.26) nous obtenons

$$\|T_f(g)\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})} \phi(c\|g\|_{W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n)}) \|g\|_{F_{p_0,q_0}^{s_0,\tau}(\mathbb{R}^n)} \quad (s < 1),$$

et

$$\|T_f(g)\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})} \phi(c\|g\|_{B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)}) \|g\|_{F_{p_0,q_0}^{s_0,\tau}(\mathbb{R}^n)} \quad (s > 1),$$

ce qui termine la preuve. ■

Preuve du Corollaire 2.19. Par la Proposition 1.20 nous avons

$$F_{p_0,q_0}^{s,\tau_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad B_{\infty,q_0}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n). \quad (4.29)$$

Par les inclusions (4.29) et les estimations (4.27)–(4.28) nous obtenons

$$\|T_f(g)\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})} \phi(c\|g\|_{W_{\infty}^1(\mathbb{R}^n)}) \|g\|_{F_{p_0,q_0}^{s,\tau_0}(\mathbb{R}^n)} \quad (s < 1),$$

et

$$\|T_f(g)\|_{F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^{s+1}(\mathbb{R})}\phi(c\|g\|_{B_{\infty,q_0}^s(\mathbb{R}^n)})\|g\|_{F_{p_0,q_0}^{s,\tau_0}(\mathbb{R}^n)} \quad (s > 1),$$

rappelons que la fonction ϕ est croissante. ■

Preuve du corollaire 2.20 Resulte du Théorème 2.3 et les injections $B_{\infty,q_0}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $B_{p_0,q_0}^{s_0,\tau}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ (voir la Proposition 1.20). ■

Preuve du corollaire 2.21 Resulte du Théorème 2.3 et les injections $B_{\infty,q_0}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $B_{p,q_0}^{s,\tau_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ (voir la Proposition 1.20). ■

Preuve du Théorème 2.24. En utilisant la Proposition 2.22, nous montrons l'inégalité suivante :

$$\|R_j(f', g)\|_{B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\varphi_t\|_{\dot{W}_{\infty}^2(\mathbb{R}) \cap B_{\infty,q}^2(\mathbb{R})}(1 + \|g\|_{\dot{W}_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)}).$$

Donc la formule (2.22) et la Proposition 2.13 nous conduisent à l'estimation

$$\|f \circ g\|_{B_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\varphi_t\|_{\dot{W}_{\infty}^2(\mathbb{R}) \cap B_{\infty,q}^2(\mathbb{R})}(1 + \|g\|_{\dot{W}_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)})\|g\|_{B_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

D'où le résultat voulu. ■

Preuve du Théorème 2.25. Par la formule (2.22) et la Proposition 2.12 nous savons

$$\|f \circ g\|_{F_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|R_j(f', g)\|_{B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{F_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

Comme dans la preuve du Théorème 2.24 nous arrivons à l'estimation

$$\|f \circ g\|_{F_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\varphi_t\|_{\dot{W}_{\infty}^2(\mathbb{R}) \cap B_{\infty,q}^2(\mathbb{R})}(1 + \|g\|_{\dot{W}_{\infty}^1(\mathbb{R}^n) \cap B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)})\|g\|_{F_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)},$$

ce qui termine la preuve. ■

Preuve du Théorème 2.26. En utilisant la Proposition 2.23, nous montrons que

$$\|R_j(f', g)\|_{B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f'\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^1(\mathbb{R})}\left(1 + \|g\|_{B_{\infty,q}^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{B_{\infty,q}^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)}^{1/(1+\varepsilon)}\right), \quad (4.30)$$

par les techniques de la preuve du Théorème 2.3 nous obtenons

$$\|f \circ g\|_{B_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^2(\mathbb{R})} \left(1 + \|g\|_{B_{\infty,q}^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{B_{\infty,q}^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)}^{1/(1+\varepsilon)}\right) \|g\|_{B_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)},$$

d'où l'estimation voulue. ■

Preuve du Théorème 2.27. Par la formule (2.22) et la Proposition 2.12 nous avons

$$\|f \circ g\|_{F_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|R_j(f', g)\|_{B_{\infty,q}^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{F_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

Donc l'estimation (4.30) nous donne

$$\|f \circ g\|_{F_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\varphi_t\|_{B_{\infty,q}^2(\mathbb{R})} \left(1 + \|g\|_{B_{\infty,q}^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{B_{\infty,q}^{1+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)}^{1/(1+\varepsilon)}\right) \|g\|_{F_{p,q}^{1,\tau}(\mathbb{R}^n)},$$

ce qui termine la démonstration. ■

Questions ouvertes

Voici quelques questions ouvertes.

- Peut-on étendre les résultats du chapitre 2 pour le cas homogène.
- Pour le chapitre 3, tout le problème de composition est presque sans réponse, en commençant par le cas $p \neq q$ dans $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R})$ jusqu'au n -dimension, i.e. $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ pour $n \geq 2$.
- Dans le chapitre 4, peut-on travailler avec la condition de Yabuta [31] en changeant le terme $\omega(|h||\xi|^\delta)\Omega(|\xi|^\varrho)$ par $\Psi(|\xi|, |h|)$ avec Ψ est une fonction bien donnée. Sinon peut-on améliorer l'hypothèse $(\forall \nu > 0, \exists c_\nu > 0), t > 1 \Rightarrow \int_1^t \frac{\Omega(u)}{u^{\nu+1}} du \leq c_\nu \frac{\Omega(t)}{t^\nu}$, dans les Théorèmes 4.12 et 4.13.

Conclusion

Cette thèse comporte une étude de deux types d'opérateurs sur les espaces de type de Besov $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ et de type de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$, le premier est l'opérateur non linéaire de composition $T_f(g) := f \circ g$, le deuxième est l'opérateur " linéaire " pseudo-différentiel de symbole appartenant à une classe de type $\Sigma_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$.

Bibliographie

- [1] H. Bahouri, J.Y. Chemin, R. Danchin, *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, Grundlehren Math. Wiss. **343**, Springer 2011.
▷ 6, 21
- [2] F. Bensaid, M. Moussai, *Realisations of the homogenous Besov-type spaces*, (submitted).
▷ 40
- [3] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spacce*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York 1976.
▷ 52
- [4] G. Bourdaud, *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel*, Ann. Inst. Henri. Poincaré **10**(4) (1993), 413–422.
▷ 5
- [5] G. Bourdaud, *Ce qu'il faut savoir sur les espaces de Besov*, Paris 2009.
▷ 40
- [6] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis, *Functional calculus in Hölder-Zygmund spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 4109–4129.
▷ 24, 35

- [7] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis, W. Sickel, *Superposition operators and functions of bounded p -variation*, Revista Mat. Iberoamericana **22** (2006), 455–487.
▷ 42
- [8] G. Bourdaud, M. Moussai, W. Sickel, *Composition operators on Lizorkin-Triebel spaces*, Journal of Functional Analysis **259** (2010), 1098–1128.
▷ 5
- [9] G. Bourdaud, M. Moussai, W. Sickel, *Composition operators acting on Besov spaces on the real line*, Ann. Mat. Pura Appl. **193** (2014), 1519–1554.
▷ 5, 46, 47
- [10] R.R. Coifman, Y. Meyer, *Au-delà des opérateurs pseudo-Différentielles*, Astérisque **57**, Soc. Math. France 1978.
▷ 52
- [11] D. Drihem, *Some embeddings and equivalent norms of the $\mathcal{L}_{p,q}^{\lambda,s}$ spaces*, Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici, **41**(1)2009, 15–40.
▷ 17
- [12] D. Drihem, *Characterizations of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces by differences*, Journal of Function Spaces and Applications **2012** (2012), 24 pages.
▷ 10
- [13] D. Drihem, M. Moussai, *On the pointwise multiplication in Besov and Lizorkin-Triebel spaces*, IJMMS, vol 2006, 1–18.
▷ 50

- [14] A. El Baraka, *An embedding theorem for Campanato spaces*, Electron. J. Differential Equations **66** (2002), 1–17.
▷ 10
- [15] C. Fefferman, E.M. Stein, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math. **93** (1971), 107–115.
▷ 12
- [16] M. Frazier, B. Jawerth, *Decomposition of Besov spaces*, Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), 777–799.
▷ 10, 14
- [17] G. Metivier, *Intégrales singulières*, Cours DEA, Université de Renne, France 1981.
▷ 5, 6, 21
- [18] Y. Meyer, *Remarque sur un théorème de J. M. Bony*, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo Serie II **1** (1981), 1–20.
▷ 6, 21
- [19] M. Moussai, *Continuité de certains opérateurs d'intégrales singulières sur les espaces de Besov*, Thèse de Doctorat, Université Paris VII 1988.
▷ 5
- [20] M. Moussai, *Continuity of pseudo-differential operators on Bessel and Besov spaces*, Serdica Math. J. **27** (2001), 249–262.
▷ 7, 51, 53, 65
- [21] M. Moussai, *The composition in Lizorkin-Triebel spaces via para-differential operators*, Math. Rep. **13** (63)(2) (2011), 151–170.

▷ 6, 19, 21, 24, 35, 69

- [22] M. Moussai, S.E. Allaoui, *Boundedness of pseudo-differential operators on localized Besov spaces*, Acta Mathematica Vietnamica **38** (2) (2013), 255–278.

▷ 50

- [23] M. Moussai, A. Djeriou, *Boundedness of some pseudo-differential operators on generalized Triebel-Lizorkin spaces*, Analysis **31** (1) (2011), 13–29.

▷ 50

- [24] M. Moussai, M. Saadi, *Some calculus of the composition of functions in Besov-type spaces*, Matematički Vesnik **72** (2) (2018), 120–133.

▷ 20, 24, 31, 35, 55

- [25] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.

▷ 12

- [26] T. Runst, W. Sickel, *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*, de Gruyter, Berlin 1996.

▷ 5, 10

- [27] E.M. Stein, *Harmonic Analysis, Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Press, Princeton New Jersey 1993.

▷ 12

- [28] F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York-London 1967.

▷ 36

- [29] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, Basel 1983.
▷ 10
- [30] H. Triebel, *Theory of Function Spaces II*, Birkhäuser, Basel 1992.
▷ 10
- [31] K. Yabuta, *Weighted norm inequalities for pseudo-differential operators*, Osaka J. Math. **23** (1986) 703–723.
▷ 5, 50, 74
- [32] D. Yang., W. Yuan, *A new class of function spaces connecting Triebel-Lizorkin spaces and Q spaces*, J. Funct. Anal. **255** (2008), 2760–2809.
▷ 10
- [33] D. Yang., W. Yuan, *Characterizations of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces via maximal functions and local means*, Nonlinear Analysis **73**(12) (2010), 3805–3820.
▷ 10, 66
- [34] D. Yang, W. Yuan, *Relations among Besov-type spaces, Triebel-Lizorkin-type spaces and generalized Carleson measure spaces*, Applicable Analysis **92** (3) (2013), 549–561.
▷ 10, 16
- [35] W. Yuan, W. Sickel, D. Yang, *Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel*, Lecture Notes in Mathematics vol. 2005, Springer, Berlin 2010.
▷ 6, 10, 16, 17, 25, 42, 60

ملخص

تتيم هذه الأطروحة بدراسة نوعين من المؤثرات المعرفة على الفضاءات التابعة من نوع بيزوف ومن نوع ليزوركين-تريبيل، الأول هو مؤثر التركيب $T_f(g) = f \circ g$ والثاني هو المؤثر شبه التفاضلي "الخطي" ذي الرمز المنتهي إلى المجموعة $\Sigma_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \rho, N)$.

كلمات مفتاحية : فضاءات بيزوف وليزوركين-تريبيل، فضاءات من نوع بيزوف ومن نوع ليزوركين-تريبيل، المؤثرات شبه التفاضلية، مؤثر التركيب.

Résumé :

Cette thèse comporte une étude de deux types d'opérateurs sur les espaces de type de Besov $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ et de type de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$. Le premier est l'opérateur non linéaire de composition $T_f(g) := f \circ g$, le deuxième est l'opérateur pseudo-différentiel "linéaire" de symbole appartenant à une classe $\Sigma_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$.

Mots clés : Espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel, Espaces de type de Besov et de type de Lizorkin-Triebel, Opérateurs pseudo-différentiels, Opérateurs de composition.

Abstract :

This thesis includes a study of two operators on Besov-type spaces $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ and Lizorkin-Triebel-type $F_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$. The first is the nonlinear composition operator $T_f(g) := f \circ g$, the second is the pseudo-differential operator "linear" with symbol in the set $\Sigma_{1,\delta}^\mu(\omega, \Omega, \varrho, N)$.

Keywords : Besov and Lizorkin-Triebel spaces, Besov-type and Lizorkin-Triebel-type spaces, Pseudo-differential operators, Composition operators.

2010 Mathematics Subject Classification : 46E35, 47G30, 47H30.