



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de
L'informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse mathématique et numérique

Thème

Sur la réalisation des espaces de Sobolev homogènes et applications

Présenté par:

HAFFAF Sana

Devant le jury composé de:

GAGUI Bachir

MOUSSAI Madani

TALLAB Abdelhamid

M.C.A

Pr

M.C.A

Université de M'sila

Université de M'sila

Université de M'sila

Président

Encadreur

Examineur

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce travail.

Je tiens à remercier vivement le professeur Moussai Madani pour avoir accepté de proposer et diriger ce travail.

Je remercie aussi les professeurs Gagui Bachir et Tallab Abdelhamid d'avoir accepté respectivement la présidence et d'être membre du jury.

Je remercie tous ceux qui m'ont aidé pour réaliser ce travail.

Dédicace

Je dédie mon travail à mon père, ma mère, ma soeur et mes frères.

Merci

Table des matières

Introduction	iii
1 L'espace de Sobolev classique $H^s(\mathbb{R}^n)$	1
1.1 L'espace de Sobolev classique $H^s(\mathbb{R}^n)$	1
1.2 Propriétés des espaces de Sobolev	2
1.3 Le dual de $H_0^k(\Omega)$	3
1.4 Inégalité de Poincaré	4
1.5 Compacité	4
2 Les espaces de Sobolev homogènes	6
2.1 Caractérisation continue	6
2.1.1 Définitions et propriétés de bases	6
2.1.2 Plongement de Sobolev dans les espaces de Lebesgue.	9
2.1.3 Le cas limite $\dot{H}^{\frac{d}{2}}$	13
2.2 Caractérisation par Littlewood-Paley homogène	14
3 Réalisations de l'espace de Sobolev homogène \dot{W}_p^m	17
3.1 Généralité sur les réalisations	17
3.2 Réalisation l'espace de Sobolev \dot{H}^s	18
3.3 L'espace de Sobolev \dot{W}_p^m	20
3.3.1 Définitions	20
3.3.2 Réalisations	20
3.3.3 Espaces homogènes de Besov et de Lizorkin-Triebel	21

Bibliographie

22

Notations

\mathcal{S}'_m	:	<i>L'espace des distributions tempérées modulo les polynômes \mathcal{P}_m.</i>
\mathcal{S}'_∞	:	<i>L'espace des distributions tempérées modulo les polynômes \mathcal{P}_∞.</i>
$C_0^\infty(\Omega)$:	<i>L'espaces des fonctions de classe C^∞ à support compact inclut dans Ω.</i>
$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$:	<i>L'espace des fonctions mesurable sur \mathbb{R}^n intégrables sur tout compact de \mathbb{R}^n.</i>
\mathcal{S}	:	<i>L'espace de Schwartz.</i>
\dot{H}_p^s	:	<i>L'espace de potentiel homogène.</i>
$\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$:	<i>L'espace de Besov homogène.</i>
$L^p(\Omega)$	=	$\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \text{ mesurable tel que } \int_\Omega f ^p d\mu < \infty\}$ muni de la norme $\ f\ _p = (\int_\Omega f ^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty.$
<i>Inégalité de Hölder</i>	:	<i>Si $1 \leq p \leq \infty$, q est le conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), alors $\forall f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ on a $f.g \in L^1(\Omega)$ et $\ f.g\ _1 \leq \ f\ _p \ g\ _q$, pour $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder de Cauchy-Schwartz.</i>
<i>Transformée de Fourier-Plancherel</i>	:	<i>Soit $f \in L^1 \cap L^2$. On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt} dt$. Alors $\hat{f} \in L^2$ et $\ f\ _2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \hat{f}\ _2$.</i>

Introduction

L'espace de Sobolev est une classe d'espaces fonctionnels qui permet d'étudier les fonctions et leurs dérivées faibles. Ces espaces jouent un rôle fondamental dans l'analyse mathématique et sont utilisés dans le nombreux domaines pour étudier les propriétés des équations aux dérivées partielles et d'autres problèmes mathématiques.

De façon générale, ce travail est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons l'espace de Sobolev classique du côté définition et quelques propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions les espaces de Sobolev homogènes, qui se compose de deux parties caractérisation continue et caractérisation par Littewood-Paley.

Dans le troisième chapitre, nous étudions la réalisation de l'espace de Sobolev et réalisation l'espace de Sobolev \dot{H}^s et l'espace de Sobolev \dot{W}_p^m , l'espace de Sobolev \dot{W}_1^m .

Chapitre 1

L'espace de Sobolev classique $H^s(\mathbb{R}^n)$

Ce chapitre est consacré aux espaces de Sobolev du côté définitions et quelques propriétés.

1.1 *L'espace de Sobolev classique $H^s(\mathbb{R}^n)$*

Définition 1.1.1 *Soit Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n et k un entier naturel. On définit $H^k(\Omega)$ par*

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq k\}. \quad (1.1)$$

On considère sur cet espace le produit scalaire,

$$\langle u, v \rangle_k = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}. \quad (1.2)$$

Le produit scalaire usuel de $L^2(\Omega)$ est

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx.$$

Il s'en suit une norme sur $H^k(\Omega)$,

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3)$$

1.2 Propriétés des espaces de Sobolev

Nous donnons dans cette partie quelques propriétés de ces espaces.

1. L'espace $H^k(\Omega)$ muni du produit scalaire défini en (1.2) est un espace de Hilbert. Soit (u_j) une suite de Cauchy de $H^k(\Omega)$ pour chaque $|\alpha| \leq k$, la suite $(\partial^\alpha u_j)$ est une suite de Cauchy de L^2 donc converge vers un $v_\alpha \in L^2$. En particulier $u_j \rightarrow u_0$ dans $D'(\Omega)$, donc $\partial^\alpha u_j \rightarrow \partial^\alpha v_0 \in L^2(\Omega)$, et $(u_j) \rightarrow v_0$ dans $H^k(\Omega)$.
2. Si $k \geq k'$, $H^k(\Omega)$ est contenu dans $H^{k'}(\Omega)$ et cette inclusion est continue. De plus $C_0^\infty(\Omega)$ est continue dans $H^k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^k(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.2.1 L'espace $H_c^k = H^k(\mathbb{R}^n) \cap \xi'(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^k(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$, $\chi(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$.

Soit $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$, posons $u_j(x) = \chi\left(\frac{x}{j}\right) u(x)$, $j \geq 1$. Alors $u_j \in H_c^k$ et $u_j \rightarrow u$ dans $H^k(\mathbb{R}^n)$.

En effet d'après la formule de Leibniz

$$\partial^\alpha (u_j - u) = \left(\chi\left(\frac{x}{j}\right) - 1\right) \partial^\alpha u + \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ \beta \neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} \frac{1}{j^{|\beta|}} (\partial^\beta \chi) \left(\frac{x}{j}\right) \partial^{\alpha-\beta} u.$$

Pour $\beta \neq 0, k^{|\beta|} \geq k$; d'autre part

$$\left| (\partial^\beta \chi) \left(\frac{x}{j}\right) \right| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\partial^\beta \chi(y)| = C_\beta.$$

On en déduit, puisque

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq k} |\alpha_\alpha|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |\alpha_\alpha|,$$

l'inégalité

$$\|u_j - u\|_{H^k(\Omega)} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \left\| \chi\left(\frac{x}{j}\right) - 1 \right\| \|\partial^\alpha u\|_{L^2} + \frac{C}{k} \sum_{|\alpha| \leq k-1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}.$$

■

Proposition 1.2.2 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans H_c^k .

Preuve. Soit $p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que $\rho \geq 0$ et $\int \rho(x)dx = 1$.

Soit $u \in H_c^k$. Posons $u_\mathcal{E}(x) = (p_\mathcal{E} * u)(x) = \int \rho_\mathcal{E}(x-y)u(y)dy$, où

$$\rho_\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}^{-n} \rho\left(\frac{x}{\mathcal{E}}\right), \quad \mathcal{E} > 0.$$

On a $u_\mathcal{E} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (car $u \in \mathcal{E}'$ et $\rho_\mathcal{E} \in C_0^\infty$) et $u_\mathcal{E} \rightarrow u$ dans $H^k(\mathbb{R}^n)$. En effet $\partial^\alpha u_\mathcal{E} = \rho_\mathcal{E} * \partial^\alpha u$ et comme $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On a vu que $(p_\mathcal{E} * \partial^\alpha u)$ converge vers $\partial^\alpha u$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, lorsque $\mathcal{E} \rightarrow 0$. ■

Remarque 1.2.1 On peut montrer que $C_0^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^k(\Omega)$ pour $k \neq 0$ si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

1.3 Le dual de $H_0^k(\Omega)$

Définition 1.3.1 Soit $k \in \mathbb{N}$. L'espace $H^{-k}(\Omega)$ est l'espace des formes linéaires u sur $H_0^k(\Omega)$ telles qu'il existe une constante $c > 0$ pour la quelle $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq c \|\phi\|_{H^k}.$$

On note $\|u\|_{H^{-k}}$ la plus petite constante c possible dans l'inégalité ci-dessus.

Exemple 1.3.1 Si $f \in L^2(\Omega)$, on a $\partial_j f \in H^{-1}(\Omega)$. En effet pour $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

$$|\langle \partial_j f, \phi \rangle| = |\langle f, \partial_j \phi \rangle| \leq \int |f| |\partial_j \phi| dx \leq \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{H^1}.$$

On a d'ailleurs au passage

$$\|\partial_j f\|_{H^{-1}} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Proposition 1.3.1 Pour $k \in \mathbb{N}$, $u \in L^2(\Omega)$ et $v \in H_0^k(\Omega)$ on a

$$\left| \int u(x) \bar{v}(x) dx \right| \leq \|u\|_{H^{-k}(\Omega)} \|v\|_{H_0^k(\Omega)}. \quad (1.4)$$

Preuve. Supposons tout d'abord que $v = \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. On a $u \in L^2(\Omega) \subset H^{-k}(\Omega)$; considérons une décomposition quelconque $u = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha f_\alpha$, où $f_\alpha \in L^2(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned} |\langle u, \bar{\varphi} \rangle| &= \left| \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \langle f_\alpha, \partial^\alpha \bar{\varphi} \rangle \right| \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|f_\alpha\|_{L^2} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^2} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|f_\alpha\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H_0^k}. \end{aligned}$$

En passant à l'inf sur toutes les décompositions, on en déduit (1.4) si $v \in H_0^k(\Omega)$, il existe $(\varphi_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers v dans $H_0^k(\Omega)$. On écrit (1.4) pour φ_m et on passe à la limite, on obtient le cas général. ■

1.4 Inégalité de Poincaré

Proposition 1.4.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, borné de diamètre d .

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2d \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (1.5)$$

Preuve. Fixons $x_0 \in \Omega$, alors $\Omega \subset B(x_0, d)$. Il s'en suit que, pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $u(d+x_1^0, x') = 0$, quelque soit $x' = (x_2, \dots, x_n)$ appartenant à \mathbb{R}^{n-1} . On peut alors écrire,

$$u(x) = \int_{d+x_1^0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x') dt.$$

On en déduit que,

$$|u(x)|^2 \leq \int_{d+x_1^0}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x') \right|^2 dt. \quad |x_1 - x_1^0 - d| \leq 2d \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x') \right|^2 dt.$$

Comme pour $x \in \Omega$ on a, $|x_1 - x_1^0| < d$, on peut écrire,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx &\leq 2d \int_{|x_1 - x_1^0| < d} \int_{x'} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x') \right|^2 dt dx' dx_1 \\ \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx &\leq 2d \left(\int_{|x_1 - x_1^0| < d} dx_1 \right) \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2}^2 \leq 4d^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ceci prouve l'inégalité (1.5). Pour $u \in C_0^\infty(\Omega)$, si $u \in H_0^1(\Omega)$ il existe $(u_j) \subset C_0^\infty(\Omega)$ telle que $u_j \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. Il suffit alors d'écrire (1.5) pour u_j puis de faire tendre $j \rightarrow +\infty$.

■

Remarque 1.4.1 L'inégalité de Poincaré n'est pas vraie pour les u constantes non nulles, qui n'appartiennent donc pas à $H_0^1(\Omega)$ pour Ω borné (dans une direction).

1.5 Compacité

Théorème 1.5.1 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et $k > k' \geq 0$, l'application $u \mapsto u$, de $H_0^k(\Omega)$ dans $H_0^{k'}(\Omega)$ est compacte.

Preuve. 1) Comme l'injection $H_0^k \subset H_0^{k'+1}$ est continue et que la composée d'applications continues et compactes est compacte, il suffit de prouver le théorème pour $k = k' + 1$.

2) Il suffit de prouver que l'injection, $H_0^1 \subset L^2(\Omega)$ est compacte.

En effet (u_j) une suite bornée de $H_0^{k'+1}(\Omega)$, alors (u_j) est bornée dans H_0^1 et pour $|\alpha| \leq k'$, $(\partial^\alpha u_j)$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Il existe donc une sous-suite $(u_{\varphi(k)})$ qui converge vers v dans $L^2(\Omega)$. La suite $\left(\frac{\partial u_{\varphi(k)}}{\partial x_1}\right)$ est bornée dans H_0^1 , donc il existe une sous suite $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} u_{\varphi_1(k)}\right)$ qui converge vers v_1 dans $L^2(\Omega)$. Evidemment $v = \frac{\partial v}{\partial x_1}$ (puisque c'est le cas dans $D'(\Omega)$). En itérant ce procédé, on construit une sous suite $(u_{\Psi(k)})$ telle que $(\partial^\alpha u_{\Psi(k)})$ converge vers $\partial^\alpha v$ dans $L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq k'$ c'est à dire $(u_{\Psi(k)})$ converge vers v dans $H^{k'}(\Omega)$. L'injection $H_0^1 \subset L^2(\Omega)$ est compacte. ■

Chapitre 2

Les espaces de Sobolev homogènes

Cette section concerne les espaces de Sobolev homogènes. Nous établissons d'abord les propriétés classiques de ces espaces, puis nous concentrons sur l'inclusion dans les espaces de Lebesgue, BMO et les espaces de Hölder. Voir le livre [1].

2.1 *Caractérisation continue*

2.1.1 *Définitions et propriétés de bases*

Définition 2.1.1 *Soit s dans \mathbb{R} . L'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ (également noté \dot{H}^s) est l'espace des distributions tempérées f sur \mathbb{R}^d dont la transformée de Fourier appartient à $L^1_{Loc}(\mathbb{R}^d)$ et vérifie*

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

On note que les espaces \dot{H}^s et $\dot{H}^{s'}$ ne sont pas comparables pour l'inclusion.

Proposition 2.1.1 *Si $r \leq s \leq t$ alors $\dot{H}^r \cap \dot{H}^t(\mathbb{R}^d)$ appartient à $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et on a*

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{\dot{H}^r(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta} \|f\|_{\dot{H}^t(\mathbb{R}^d)}^\theta, \text{ avec } s = (1-\theta)r + \theta t.$$

Preuve. *Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder avec $p = 1/(1-\theta)$ et $q = 1/\theta$ aux fonctions $\xi \mapsto |\xi|^{2(1-\theta)s_0}$, $\xi \mapsto |\xi|^{2\theta s_1}$ et la mesure de Borel $|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$.*

En utilisant la formule de Fourier–Plancherel, nous observons que $L^2 = \dot{H}^0$ et que si s est un entier positif, alors \dot{H}^s est le sous-ensemble des distributions tempérées ayant des transformées de Fourier localement intégrables et telles que $\partial^\alpha f$ appartient à L^2 pour tout α en \mathbb{N}^d de longueur s . Dans le cas où s est un entier négatif, l'espace de Sobolev \dot{H}^s est décrit par la proposition suivante. ■

Proposition 2.1.2 Soit k un entier positif. L'espace $\dot{H}^{-k}(\mathbb{R}^d)$ consiste en distributions qui sont les sommes des dérivées d'ordre k des fonctions $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Soit f être dans $\dot{H}^{-k}(\mathbb{R}^d)$. En utilisant le fait que pour certaines constantes entières A_α , nous avons:

$$|\xi|^{2k} = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq d} \xi_{j_1}^2 \dots \xi_{j_k}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha (i\xi)^\alpha (-i\xi)^\alpha, \quad (1.6)$$

nous obtenons que

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} (i\xi)^\alpha v_\alpha(\xi) \quad \text{avec} \quad v_\alpha(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} A_\alpha \frac{(-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}} \hat{f}(\xi).$$

Comme f est dans \dot{H}^{-k} , les fonctions v_α appartiennent à L^2 . Définition de $f_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1} v_\alpha$ puis obtenir

$$f = \sum_{|\alpha|=k} (\partial^\alpha f_\alpha) \quad \text{avec} \quad f_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

■

Proposition 2.1.3 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert si seulement si $s < \frac{d}{2}$.

Preuve. Voir [1] ■

Proposition 2.1.4 Pour tout réel $s < \frac{d}{2}$, l'espace $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dont la transformée de Fourier est identiquement nulle près de l'origine est un sous-espace dense de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. L'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ étant un espace de Hilbert, il suffit de vérifier que l'orthogonal de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ pour le produit scalaire de $H^s(\mathbb{R}^d)$ est réduit à $\{0\}$. Supposons donc qu'il existe une distribution f dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ telle que pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{2s} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi = 0.$$

Alors l'application $\xi \mapsto \langle \xi \rangle^{2s} \hat{f}(\xi)$ est identiquement nulle dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, donc $\hat{f} \equiv 0$ et donc $f \equiv 0$.

De même supposons qu'il existe une distribution f dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ telle que pour toute fonction φ de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} \hat{f}(\xi) \overline{\varphi(\xi)} d\xi = 0.$$

Alors \hat{f} s'annule sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et donc $\hat{f} \equiv 0$. Le résultat suit puisque $s < \frac{d}{2}$ et donc $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert. ■

Proposition 2.1.5 Soit s un nombre réel dans l'intervalle $]0, 1[$ et f dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d) \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|f(x+y) - f(x)|^2}{|y|^{d+2s}} dx dy < \infty.$$

De plus, il existe une constante C_s telle que pour toute fonction f dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, nous avons

$$\|f\|^2 = C_s \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|f(x+y) - f(x)|^2}{|y|^{d+2s}} dx dy. \quad (\text{A.1})$$

Nous allons utiliser la théorème de Plancherel (1.25) suivant: (formule de Fourier–Plancherel). La transformée de Fourier est un automorphisme de \mathcal{S}' d'inverse $(2\pi)^{-d} \check{\mathcal{F}}$. De plus, \mathcal{F} est aussi un automorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie, pour toute fonction f dans L^2 , $(2\pi)^{\frac{d}{2}} \|f\|_{L^2}$.

Preuve. Pour montrer que f est dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$, il suffit d'écrire:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(1_{B(0,1)})\hat{f} + \mathcal{F}^{-1}(1_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)})\hat{f}.$$

En effet $1_{B(0,1)}\hat{f}$ est une distribution à support compact donc $\mathcal{F}^{-1}(1_{B(0,1)})\hat{f}$ est de classe C^∞ est donc dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Par ailleurs comme $s \geq 0$ on a que $(1_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)})\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et donc $\mathcal{F}^{-1}(1_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)})\hat{f}$ aussi. Montrons l'égalité (A.1) On a par le Théorème de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+y) - f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |e^{iy \cdot \xi}|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|f(x+y) - f(x)|^2}{|y|^{d+2s}} dx dy = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} L(y) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

avec

$$L(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{iy \cdot \xi} - 1|^2}{|y|^{d+2s}} dy.$$

Comme la fonction L est radiale et homogène de degré $2s$ elle est proportionnelle à $|\xi|^{2s}$. ■

2.1.2 Plongement de Sobolev dans les espaces de Lebesgue.

Dans cette sous-section, nous étudions l'inclusion des espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$. Nous commençons par un résultat classique.

Théorème 2.1.1 Si s est dans $[0, d/2[$, alors l'espace $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est continûment plongé dans $L^{\frac{2d}{d-2s}}(\mathbb{R}^d)$.

Nous allons utiliser les propositions

(1.7) : Pour tout (u, θ) dans $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $(a, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on a

$$(i\partial)^\alpha \hat{u} = \mathcal{F}(x^\alpha u), (i\xi)^\alpha \hat{u} = \mathcal{F}(i\partial u), e^{-i(\alpha \cdot \xi)} \hat{u} = \mathcal{F}(\tau_\alpha f), \tau_\omega \hat{f} = \mathcal{F}(e^{i(x \cdot \omega)} f), \lambda^{-d} \hat{f}(\lambda^{-1} \xi) = \mathcal{F}(f(\lambda x)), \text{ et } \mathcal{F}$$

(1.8) : Si $\sigma \in]0, d[$, alors $\mathcal{F}(| \cdot |^{-\sigma}) = c_{d,\sigma} | \cdot |^{\sigma-d}$, pour une constante $c_{d,\sigma}$ ne dépendant que de d et s .

Preuve. Tout d'abord, notons que l'indice critique $p = 2d/(d - 2s)$ peut être déterminé en utilisant un argument d'échelle. En effet, si v est une fonction sur \mathbb{R}^d et v_λ désigne la fonction $v_\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} v(\lambda x)$, alors nous avons

$$\|v_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{d}{p}} \|v\|_{L^p} \text{ et } \|v_\lambda\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{-\frac{d}{2}+s} \|v\|_{\dot{H}^s}.$$

Si une inégalité du type $\|v\|_{L^p} \leq C \|v\|_{\dot{H}^s}$ est vraie pour toute fonction lisse v , alors elle est également vraie pour v_λ pour tout λ . Par conséquent, nous devons avoir $p = 2d/(d - 2s)$.

Considérons une fonction ϕ dans $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$. En définissant $\hat{\phi}_s(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} |\xi|^s \hat{\phi}(\xi)$ et en utilisant les Propositions (1.7) et (1.8), on obtient que

$$\phi = \frac{(2\pi)^{-d} c_{d,s}}{|\cdot|^{d-s}} \star \phi_s \text{ avec } \|\phi_s\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{-d}{2}} \|\phi\|_{\dot{H}^s}.$$

l'espace $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ est dense en \dot{H}^s donc la preuve est complète. ■

Corollaire 2.1.1 Si $p \in]1, 2]$, alors $L^p(\mathbb{R}^d)$ s'inclut continûment dans \dot{H}^s avec $s = -d(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$.

Définition 2.1.2 Soit θ une fonction dans $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ telle que θ est à support compact, prenne la valeur 1 près de zéro et satisfasse $0 \leq \hat{\theta} \leq 1$. Pour u dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\sigma > 0$, nous définissons

$$\| f \|_{\dot{B}^{-\sigma}} \stackrel{def}{=} \sup_{A>0} A^{d-\sigma} \| \theta(A \cdot) \star f \|_{L^\infty}.$$

Il revient au lecteur de vérifier que l'espace $\dot{B}^{-\sigma}$ des distributions tempérées f telles que $\| f \|_{\dot{B}^{-\sigma}}$ soit fini est un espace de Banach. Il est également clair que le changement de la fonction θ donne le même espace avec une norme équivalente. Ces espaces sont abordés dans le prochain chapitre dans un contexte plus général. Nous verrons que $\dot{B}^{-\sigma}$ coïncide avec l'espace de Besov homogène $\dot{B}_{\infty, \infty}^{-\sigma}$.

Proposition 2.1.6 Pour l'instant, nous allons comparer $\dot{B}^{-\sigma}$ avec les espaces de Sobolev. Pour tout $s \leq d/2$, l'espace \dot{H}^s est continûment inclus dans $\dot{B}^{s-\frac{d}{2}}$, et il existe une constante C , dépendant uniquement du support de $\text{Supp } \hat{\theta}$ et de d , telle que

$$\| f \|_{\dot{B}^{s-\frac{d}{2}}} \leq \frac{C}{(\frac{d}{2} - s)^{\frac{1}{2}}} \| f \|_{\dot{H}^s}, \forall f \in \dot{H}^s.$$

Preuve. Comme u est localement dans L^1 , la fonction $\hat{\theta}(A^{-1} \cdot) \hat{f}$ est dans L^1 . Le théorème de l'inversion de Fourier implique que

$$\begin{aligned} \| A^d \theta(A \cdot) \star f \|_{L^\infty} &= (2\pi)^{-d} \| \hat{\theta}(A^{-1} \cdot) \hat{f} \|_{L^1} \\ &\leq (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\theta}(A^{-1} \xi) |\xi|^{-s} |\xi|^s |\hat{f}(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\hat{\theta}$ est à support compacte, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$\| A^d \theta(A \cdot) \star f \|_{L^\infty} \leq \frac{C}{(\frac{d}{2} - s)^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{d}{2}-s} \| f \|_{\dot{H}^s}$$

et la proposition est ainsi prouvée. La différence entre la norme \dot{H}^s et la norme $\dot{B}^{s-\frac{d}{2}}$ est mise en évidence par la proposition suivante. ■

Proposition 2.1.7 Soit $\sigma \in]0, d]$ et soit $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ défini comme dans $\phi_\varepsilon(x) = e^{i\frac{x^2}{\varepsilon}} \phi(x)$. Il existe alors une constante C telle que $\| \phi_\varepsilon \|_{\dot{B}^{-\sigma}} \leq C\varepsilon^\sigma$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Preuve. Par l'inégalité de Hölder, nous avons

$$A^d \|\theta(A.) \star \phi_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|\theta\|_{L^1} \|\phi\|_{L^\infty}.$$

De là, nous déduisons que si $A\varepsilon \geq 1$, alors nous avons

$$A^{d-\sigma} \|\theta(A.) \star \phi_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \varepsilon^\sigma \|\theta\|_{L^1} \|\phi\|_{L^\infty}. \quad (1.9)$$

Si $A\varepsilon \leq 1$, alors nous effectuons une intégration par parties. Plus précisément, en utilisant le fait que

$$(-i\varepsilon\partial_1)^d e^{i\frac{x_1}{\varepsilon}} = e^{i\frac{x_1}{\varepsilon}}$$

et la formule de Leibniz, nous obtenons

$$\begin{aligned} A^d(\theta(A.) \star \phi_\varepsilon)(x) &= (iA\varepsilon)^d \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{y_1}^d (\theta(A(x-y))\phi(y)) e^{i\frac{y_1}{\varepsilon}} dy \\ &= (iA\varepsilon)^d \sum_{k \leq d} \binom{d}{k} A^k ((-\partial_1)^k \theta)(A.) \star (e^{i\frac{y_1}{\varepsilon}} \partial_1^{d-k} \phi)(x). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$A^k \|\theta(A.) \star (e^{i\frac{y_1}{\varepsilon}} \partial_1^{d-k} \phi)\|_{L^\infty} \leq \|\partial_1^k \theta\|_{L^{\frac{d}{k}}} \|\partial_1^{d-k} \phi\|_{L^{(\frac{d}{k})'}}.$$

Ainsi, nous obtenons $A^d \|\theta(A.) \star \phi_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C(A\varepsilon)^d$. Comme nous considérons le cas où $A\varepsilon \leq 1$, nous obtenons pour tout $\sigma \leq d$,

$$A^d \|\theta(A.) \star \phi_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C(A\varepsilon)^\sigma.$$

En combinant cela avec (1.9), cela conclut la démonstration de la proposition. ■

Proposition 2.1.8 Soit $s \in]0, 2/d[$. Il existe une constante C , dépendant uniquement de d et $\hat{\theta}$, tel que

$$\|u\|_{L^p} = \frac{C}{(p-2)^{\frac{1}{2}}} \|u\|_{\dot{B}^{s-\frac{d}{2}}}^{1-\frac{p}{2}} \|u\|_{\dot{H}^s}^{\frac{p}{2}} \quad \text{avec } p = \frac{2d}{d-2s}.$$

Preuve. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\|u\|_{\dot{B}^{s-\frac{d}{2}}} = 1$. Comme cela sera souvent fait dans ce livre, nous allons décomposer la fonction en fréquences basses et hautes. Plus précisément, nous écrivons

$$u = u_{l,A} + u_{h,A} \quad \text{avec } u_{l,A} = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\theta}(A^{-1})\hat{u}), \quad (1.10)$$

où θ est la fonction de la Définition 2.1.3. L'inégalité triangulaire implique ce

$$(|u| > \lambda) \subset (|u_{l,A}| > \lambda/2) \cup (|u_{h,A}| > \lambda/2).$$

D'après la définition $\|\cdot\|_{\dot{B}^{s-\frac{d}{2}}}$ nous avons $\|u_{l,A}\|_{L^\infty} \leq A^{\frac{d}{2}-s}$. Nous en déduisons que

$$A = A_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{p}{d}} \implies \mu(|u_{l,A}| > \lambda/2) = 0.$$

À partir de l'identité $\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(|f| > \lambda) d\lambda$, nous en déduisons que

$$\|u\|_{L^p}^p \leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(|u_{h,A_\lambda}| > \lambda/2) d\lambda.$$

En utilisant le fait que

$$\mu(|u_{h,A_\lambda}| > \lambda/2) \leq 4 \frac{\|u_{h,A_\lambda}\|_{L^2}^2}{\lambda^2},$$

nous obtenons

$$\|u\|_{L^p}^p \leq 4p \int_0^\infty \lambda^{p-3} \|u_{h,A_\lambda}\|_{L^2}^2 d\lambda.$$

Étant donné que la transformée de Fourier est (à une constante près) une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et que la fonction $\hat{\theta}$ a une valeur égale à 1 près de 0, nous obtenons alors, pour un certain $c > 0$ dépendant uniquement de $\hat{\theta}$,

$$\|u\|_{L^p}^p \leq 4p(2\pi)^{-d} \int_0^\infty \lambda^{p-3} \int_{(|\xi| \geq cA_\lambda)} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi d\lambda. \quad (1.11)$$

Maintenant, selon la définition de A_λ , nous avons

$$|\xi| \geq cA_\lambda \iff \lambda \leq C_\xi \stackrel{\text{def}}{=} 2 \left(\frac{|\xi|}{c}\right)^{\frac{d}{p}}.$$

Le théorème de Fubini implique donc que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p}^p &\leq 4p(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{C_\xi} \lambda^{p-3} d\lambda\right) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-d} \frac{p2^p}{p-2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|\xi|}{c}\right)^{\frac{d(p-2)}{p}} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Comme $s = d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$, le théorème est prouvé. ■

Définition 2.1.3 Définissons $Q \stackrel{\text{def}}{=} [-1/2, 1/2]^d$ et soit $x_j = 3/8$ pour tout élément J de $\{-1, 1\}^d$. Nous définissons ensuite la transformation T par:

$$T : \begin{cases} \mathcal{D}(Q) \rightarrow \mathcal{D}(Q) \\ f \mapsto Tf \stackrel{\text{def}}{=} 2^d \sum_{J \in \{-1, 1\}^d} T_J f \quad \text{avec } T_J f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(4(x - x_J)). \end{cases}$$

Pour $B \subset Q$, nous définissons $T_J(B) \stackrel{\text{def}}{=} x_J + \frac{1}{4}B$, $T(B) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{J \in \{-1,1\}^d} T_J(B)$ et nous notons $T_J(Q)$ par Q_J . En utilisant le fait que pour tout $f \in \mathcal{D}(Q)$, le support de $T_J f$ est inclus dans Q_J et que si $J \neq J'$, alors $Q_J \cap Q_{J'} = \emptyset$, nous obtenons immédiatement

$$\| T f \|_{L^p} = 2^{d(1-\frac{1}{p})} \| f \|_{L^p} .$$

Dans un souci de simplicité, nous nous limitons ici au cas où s est un entier. En observant que

$$\partial_j(Tf)(x) = 2^d \sum_{J \in \{-1,1\}^d} 4(\partial_j f)(4(x - x_j)) = 4T(\partial_j f)(x).$$

et en utilisant nous obtenons (1.11),

$$\| T f \|_{\dot{H}^s} = 2^{\frac{d}{2}+2s} \| f \|_{\dot{H}^s} . \quad (1.12)$$

L'estimation de T_f en termes de la norme $\dot{B}^{-\sigma}$ est décrite par la proposition suivante .

Proposition 2.1.9 Pour $\sigma \in]0, d]$, il existe une constante C telle que

$$\| T f \|_{\dot{B}^{-\sigma}} \leq 2^{d-2\sigma} \| f \|_{\dot{B}^{-\sigma}} + C \| f \|_{L^1} .$$

Preuve. Voir [1] ■

2.1.3 Le cas limite $\dot{H}^{\frac{d}{2}}$

L'espace $\dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas inclus dans $L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Nous donnons un contre-exemple explicite en dimension deux.

Soit la fonction u définie par

$$u(x) = \phi(x) \log(-\log|x|)$$

pour une fonction lisse ϕ support dans $B(0,1)$ et de valeur 1 près de 0. D'une part, u n'est pas bornée. D'autre part, nous avons, près de l'origine,

$$| \partial_j u(x) | \leq \frac{C}{|x| |\log|x||}$$

de sorte que u appartient à $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$. Cela motive la définition suivante.

Définition 2.1.4 L'espace $BMO(\mathbb{R}^d)$ des oscillations moyennes bornées est l'ensemble des fonctions localement intégrables f telles que

$$\| f \|_{BMO} \stackrel{def}{=} \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| dx < \infty \text{ avec } f_B \stackrel{def}{=} \frac{1}{|B|} \int_B f dx.$$

Le supremum ci-dessus est pris sur l'ensemble des boules euclidiennes. Nous soulignons que la semi-norme $\cdot BMO$ s'annule sur les fonctions constantes. Par conséquent, ce n'est pas une norme. Nous énonçons maintenant le théorème critique pour l'inclusion de Sobolev.

Théorème 2.1.2 L'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \cap \dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d) \subset BMO(\mathbb{R}^d)$. De plus, il existe une constante C telle que

$$\| u \|_{BMO} \leq C \| u \|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}}$$

pour toutes les fonctions $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \cap \dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Nous utilisons la décomposition en basses et hautes fréquences. Pour toute boule euclidienne B nous avons

$$\int_B |u - u_B| \frac{dx}{|B|} \leq \| u_{l,A} - (u_{l,A})_B \|_{L^2(B, \frac{dx}{|B|})} + \frac{2}{|B|^{\frac{1}{2}}} \| u_{h,A} \|_{L^2}.$$

Soit R le rayon de la boule B . Nous avons:

$$\begin{aligned} \| u_{l,A} - (u_{l,A})_B \|_{L^2(B, \frac{dx}{|B|})} &\leq R \| \nabla u_{l,A} \|_{L^\infty} \\ &\leq CR \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{1-\frac{d}{2}} |\xi|^{\frac{d}{2}} |\hat{u}_{l,A}(\xi)| d\xi \\ &\leq CRA \| u \|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\int_B |u - u_B| \frac{dx}{|B|} \leq CRA \| u \|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}} + C(RA)^{\frac{-d}{2}} \left(\int_{|\xi| \geq A} |\xi|^d |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right).$$

En choisissant $A = R^{-1}$, la démonstration est ainsi complétée. ■

2.2 Caractérisation par Littlewood-Paley homogène

Nous introduisons maintenant les espaces de Sobolev homogènes \dot{L}^p_s , [Voir [5]]. La principale différence avec les espaces inhomogènes L^p_s est que les éléments de \dot{L}^p_s peuvent ne pas

être eux-mêmes des éléments de L^p . Un autre point de différenciation est que les éléments d'espaces de Sobolev homogènes dont les différences sont des polynômes sont identifiés. Pour les besoins de la définition suivante, pour $1 < p < \infty$ on définit $\dot{L}^p(\mathbb{R}^n)$ comme l'espace de tous les éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tel que toute classe d'équivalence formée de la relation $u \equiv v$ si $u - v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ contient un unique représentant qui appartient à $\dot{L}^p(\mathbb{R}^n)$, on définit la norme $\dot{L}^p(\mathbb{R}^n)$ de tout élément de la classe d'équivalence comme étant la norme L^p de la représentant unique. Selon cette définition, nous avons

$$\| f + P \|_{\dot{L}^p} = \| f \|_{\dot{L}^p} = \| f \|_{L^p}$$

chaque fois que $f \in L^p$ et P est un polynôme.

Définition 2.2.1 Soit s un nombre réel, et soit $1 < p < \infty$. L'espace de Sobolev homogène $\dot{L}_s^p(\mathbb{R}^n)$ est défini comme l'espace de tout u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ pour lequel distribution bien définie

$$(| \xi |^s \hat{u})^\vee$$

coïncide avec une fonction dans $\dot{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Pour les distributions u dans $\dot{L}_s^p(\mathbb{R}^n)$ on définit

$$\| u \|_{\dot{L}_s^p} = \| (| \cdot |^s \hat{u})^\vee \|_{\dot{L}^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.13)$$

Comme indiqué précédemment, pour éviter de travailler avec des classes d'équivalence de fonctions, nous identifions deux distributions dans $\dot{L}_s^p(\mathbb{R}^n)$ dont la différence est un polynôme. Sous cette identification, la quantité dans (1.13) est une norme.

Théorème 2.2.1 Soit Ψ satisfait (1.3.6), et soit Δ_j^Ψ être l'opérateur de Littlewood – Paley associé à Ψ . Soit $s \in \mathbb{R}$ et $1 < p < \infty$. Alors il existe une constante C_1 qui ne dépend que de n, s, p et Ψ tels que pour tout $f \in \dot{L}_s^p(\mathbb{R}^n)$ on ait

$$\left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} | \Delta_j^\Psi(f) |)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq C_1 \| f \|_{\dot{L}_s^p}.$$

Inversement, il existe une constante C_2 qui dépend des paramètres n, s, p et Ψ telle que tout élément f de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ qui satisfait

$$\left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} | \Delta_j^\Psi(f) |)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq \infty,$$

se trouve dans l'espace homogène de Sobolev $\dot{L}_s^p(\mathbb{R}^n)$. et on a

$$\|f\|_{\dot{L}_s^p} \leq C_2 \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} |\Delta_j^\Psi(f)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}. \quad (1.14)$$

Preuve. Voir[5]. ■

Chapitre 3

Réalisations de l'espace de Sobolev homogène \dot{W}_p^m

Pour ce chapitre, nous citons les références suivantes [2], [3], [4] et [6].

3.1 Généralité sur les réalisations

Proposition 3.1.1 Soit $\sigma_0 : E \longrightarrow \mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^n)$ une réalisation. Pour toute famille finie $(\mathcal{L}_\alpha)_{k \leq |\alpha| < N}$ de fonctionnelles linéaires continues sur E , la formule suivante définit une réalisation de E in $\mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^n)$.

$$\sigma(f)(x) := \sigma_0(f)(x) + \sum_{k \leq |\alpha| < N} \mathcal{L}_\alpha(f)x^\alpha \pmod{\mathcal{P}_k}.$$

(2.1) Inversement, toute réalisation de E modulo \mathcal{P}_k est donnée de cette manière. Dans le cas où E est invariante par translation, une fonctionnelle L sur E est dite invariante par translation si

$$\mathcal{L} \circ \tau_\alpha = \mathcal{L}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 3.1.2 Sous les hypothèses de la Proposition 2.1, supposons en outre que E est isométriquement invariante par translation et que σ_0 commute avec les translations. Soit $(\mathcal{L}_\alpha)_{|\alpha|=k}$ une famille de fonctionnelles linéaires continues invariantes par translation sur

E . Alors la formule suivante définit une réalisation de E modulo \mathcal{P}_k qui commute avec les translations:

$$\sigma(f)(x) := \sigma_0(f)(x) + \sum_{|\alpha|=k} \mathcal{L}_\alpha(f)x^\alpha \pmod{\mathcal{P}_k}.$$

Inversement, toute réalisation de E modulo \mathcal{P}_k qui commute avec les translations est donnée de cette manière.

Définition 3.1.1 Dans le cas où E est invariante par dilatation, une fonctionnelle \mathcal{L} sur E est dite homogène de degré r si $\mathcal{L} \circ h_\lambda = \lambda^{r+n} \mathcal{L}$ pour tout $\lambda > 0$. Dans le cas où $E \hookrightarrow \mathcal{S}_N(\mathbb{R}^n)$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, la restriction d'une telle fonctionnelle à $\mathcal{S}_N(\mathbb{R}^n)$ est clairement une distribution homogène de degré r .

Proposition 3.1.3 Sous les hypothèses de la Proposition 2.1, supposons en outre que E est homogène de degré r . (1) Si $r - k \notin \mathbb{N}$, alors E admet au plus une réalisation de dilatation qui commute modulo \mathcal{P}_k . (2) Supposons que $r - k \in \mathbb{N}$ et que $\sigma_0 : E \rightarrow \mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^n)$ est une réalisation de dilatation qui commute. Soit $(\mathcal{L}_\alpha)_{|\alpha|=r}$ une famille de fonctionnelles linéaires continues sur E , toutes homogènes de degré $-r - n$. Alors la formule suivante définit une réalisation de dilatation qui commute de E dans $\mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^n)$:

$$\sigma(f)(x) := \sigma_0(f)(x) + \sum_{|\alpha|=r} \mathcal{L}_\alpha(f)x^\alpha \pmod{\mathcal{P}_k}.$$

Inversement, toute réalisation de dilatation qui commute de E modulo \mathcal{P}_k est donnée de cette manière.

3.2 Réalisation l'espace de Sobolev \dot{H}^s

Définition 3.2.1 Soit E un sous-espace de $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^n)$ muni d'une structure d'espace de Banach, telle que l'injection canonique de $E \rightarrow \mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^n)$ soit continue. On appelle réalisation de E une application linéaire et continue $\sigma : E \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout $u \in E$, $\sigma(u) = u$ dans $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^n)$. Le sous-espace $\sigma(E) \subset \mathcal{S}'$ est également appelé réalisation de E . L'application étant une bijection de E sur $\sigma(E)$, ce dernier hérite de la norme de E et devient donc un espace de Banach de distributions tempérées.

Proposition 3.2.1 *Pour $s > 0, s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$, l'espace $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ admet une et une seule réalisation σ invariante par dilatations, i.e. vérifiant*

$$\sigma(u(\lambda x)) = \sigma(u)(\lambda x), \quad \forall \lambda > 0, \forall u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n).$$

La réalisation de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ est alors notée $\dot{H}_{\text{real}}^s(\mathbb{R}^n)$.

Pour $s - \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$, l'espace $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ n'admet aucune réalisation invariante par dilatations.

Si $s < \frac{n}{2}$, la réalisation consiste à choisir le représentant de $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ appartenant à $L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{n}{q} = \frac{n}{2} - s$.

Si $s > \frac{n}{2}, s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$, la réalisation consiste à choisir le représentant de $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ appartenant à $\dot{C}^{s-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ et vérifiant

$$\partial^a u(0) = 0, \quad \forall a \in \mathbb{N}^n, |a| \leq E(s - \frac{n}{2}).$$

Ce résultat est vrai pour $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ défini comme sous-espace de distributions modulo les constantes. Les fonctions des espaces réalisés vérifient une inégalité de type Hardy. Cette inégalité est importante et permet notamment d'obtenir des résultats sur la localisation des espaces. On a en effet la

Proposition 3.2.2 *Soit $s \geq 0, s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction f de l'espace $\dot{H}_{\text{real}}^s(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{|x|^{2s}} dx \leq C \|f\|_{\dot{H}^s}^2.$$

Cette inégalité permet d'obtenir le résultat suivant

Soit $s \geq 0, s - \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$. L'espace $\dot{H}_{\text{real}}^s(\mathbb{R}^n)$ est localisable, c'est-à-dire que, pour une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, à support compact dans une couronne et telle que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a

$$\forall f \in \dot{H}_{\text{real}}^s(\mathbb{R}^n), \quad \|f\|_{\dot{H}^s}^2 \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|f \varphi_j\|_{\dot{H}^s}^2,$$

où $\varphi_j = \varphi(2^{-j} \cdot)$.

3.3 L'espace de Sobolev \dot{W}_p^m

3.3.1 Définitions

Définition 3.3.1 Soit $m \in N \cup \{\infty\}$. Un espace de distribution de Banach (E.D.B.) dans $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ (ou un espace de Banach de distributions modulo \mathcal{P}_m) est un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ muni d'une norme complète telle que l'application naturelle $E \hookrightarrow \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ soit continue.

Définition 3.3.2 Soit $m \in N \cup \{\infty\}$ et k un entier tel que $0 \leq k \leq m$. Soit E un E.D.B. dans $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$. Une réalisation de E dans $\mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^n)$ (ou modulo \mathcal{P}_k) est une application linéaire continue $\sigma : E \longrightarrow \mathcal{S}'_k(\mathbb{R}^n)$ telle que $[\sigma(f)]_m = f$ pour tout $f \in E$.

Remarque 3.3.1 Pour tout $f \in E$, $\sigma(f)$ est le représentant unique de f dans $\sigma(E)$. Cela signifie que σ est entièrement déterminée par son image, une remarque fréquemment utilisée dans l'article.

Remarque 3.3.2 Si $k = m$, il existe une unique réalisation triviale, à savoir l'inclusion naturelle $E \hookrightarrow \mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$.

3.3.2 Réalisations

L'espace de Sobolev homogène \dot{W}_p^m est l'ensemble des distributions f telles que $f^{(\alpha)} \in L_p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $|\alpha| = m$. Il est muni de la semi-norme

$$\|f\|_{\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\alpha|=m} \|f^{(\alpha)}\|_p.$$

L'espace quotient $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_m$ est un B.D.S dans $\mathcal{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ pour la norme ci-dessus. Dans cette section, on se limite à $1 < p < \infty$. Pour les cas extrêmes $p = 1$ et $p = +\infty$, on se réfère à [3] Le lien entre les espaces de Sobolev et les espaces de Lizorkin-Triebel est donné par le théorème classique de Littlewood-Paley

Théorème 3.3.1 En supposant $0 < m < n/p$, l'application σ_0 définie selon la proposition 4.6 est une réalisation de $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_m$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Cette réalisation a les propriétés suivantes :

(1) C'est l'unique réalisation commutant translation (resp. dilatation) de $\dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_m$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(2) Son domaine $V_{p,2}^m(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec $L_q \cap \dot{W}_p^m(\mathbb{R}^n)$, w ici $(1/q) := (1/p) - (m/n)$.

3.3.3 Espaces homogènes de Besov et de Lizorkin-Triebel

Définition 3.3.3 Soit $p \in [1, \infty[$. L'espace de Lizorkin-Triebel homogène $\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions modulo les polynômes f tels que

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{sj} \|Q_j f\|)^q \right)^{1/q} \right\|_p < +\infty.$$

Définition 3.3.4 L'espace de Besov homogène $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions modulo les polynômes f tels que

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{sj} \|Q_j f\|_p)^q \right)^{1/q} < +\infty.$$

Nous utiliserons la notation $\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ pour $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ ainsi que pour $\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, si nous n'avons pas besoin de distinguer entre les espaces B et F . Nous désignons tous ces espaces comme les "espaces $B-L-T$ ".

Remarque 3.3.3 Les espaces $B-L-T$ peuvent être décrits de manière plus familière en utilisant des différences. Nous renvoyons à la Section 6 pour cette perspective.

Théorème 3.3.2 $\dot{E}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach et la chaîne d'inclusions continues suivante est vérifiée :

$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{E}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n).$$

En tant qu'E.D.B., $\dot{E}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est isométriquement invariante par translation, et homogène de degré $S - (n/p)$, à un remplacement de la norme près par une équivalente.

Proposition 3.3.1 Un élément f de $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ appartient à $\dot{E}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si ses dérivées d'ordre 1 $\partial_j f$ appartiennent à $\dot{E}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ pour $j = 1, \dots, n$. De plus

$$\sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_{\dot{E}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^n)},$$

est une norme équivalente dans $\dot{E}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Bibliographie

- [1] *H. Bahouri, J.Y. Chemin, R. Danchin., Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations . Springer, 2011.*
- [2] *G. Bourdaud, Ce qu'il faut savoir sur les espaces de Besov. Preprint, Paris 2009.*
- [3] *G. Bourdaud, Realizations of homogeneous Besov and Lizorkin-Triebel spaces. Math. Nachr. 286 (2013), no.5-6, 490-491.*
- [4] *G. Bourdaud, Realizations of homogeneous Sobolev spaces, Complex Var. Elliptic Equ. 56 (2011), no.10-11, 857-874.*
- [5] *L. Grafakos, Modern Fourier Analysis . Springer, New York, 2009.*
- [6] *B. Vedel, Thèse de mathématiques de doctorat de l'univ. de Picardie Jules Verne, 2004.*
- [7] *C. Zuily, Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles. Dunod 2002.*

Résumé

Dans ce mémoire nous avons rappeler les définitions et les propriétés des espaces de Sobolev, espaces de Sobolev homogènes et la décomposition de Littlewood-Paley.

Nous avons aussi étudié la réalisation sur les espaces de Sobolev homogènes de puissance entier.

Mots-clés : *Espace de Sobolev homogène, réalisation, l'espace BMO, espace homogène de Besov.*

Abstract

In this memory, we have studied the Sobolev spaces and his homogeneous counterpart.

We have also studied the Littlewood-Paley decomposition and the realizations of homogeneous Sobolev spaces of integer power.

Key-words: *Homogeneous Sobolev space, realization, BMO space, homogeneous Besov space.*

ملخص

في هذه المذكرة قمنا باعادة استعراض تعريفات وخصائص مساحات سوبوليف ومساحات سوبوليف المتجانسة وتكوين ليبلود-بايلي.

كما قمنا بدراسة التحقق على المساحات سوبوليف المتجانسة ذات القوة الصحيحة.

الكلمات المفتاحية: *فضاء سوبوليف المتجانس, التحقق, فضاء , فضاء بيزوف المتجانس.*