



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERVHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf – M'sila-

Faculté de Mathématiques et l' informatique

Département de Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques

Spécialité : EDP APPLICATION

Thème

Approximation des équation et des inéquation de type monotone

Présenté par: **Lachache Sabrina**

Soutenu le **10/06/2024**, devant le jury :

Touahria Messoud	M.C.B.	Université de M'sila	président
Chadi Khelifa	M.A.A.	Université de M'sila	Encadreur
Dechoucha Noureddine	M.A.B.	University of M'sila	Examineur

L'année univesitaire : **2023/2024**

Remerciements

Dieu soit loué et cela suffit, et que les prières et la paix soient sur le bien-amié Mustafa

Et sa famille et ceux qui sont morts et après:

Loué soit Dieu qui m'a ouvert les portes du succès

Dieu soit loué, qui m'a permis de valoriser cette étape de mon parcours universitaire avec ce mémoire. c'est la fruit d'effort et de la réussite, par sa grace. Il est dédié aux "Honorables parents". Que Dieu les préserve de leur vivant et perpétue eux comme une lumière pour mon chemin, qui ont tenu à me motiver à étudier, qui m'ont appris le sens de la patience et le sens des difficultés, à l'honorable famille et à mes soeurs. à mon professeur, le superviseur "**Chadi Khelifa**", qui m'a dirigé et aidé, que Dieu bénisse :

" **Touahria Messaud** " et " **Dechoucha Nour ddine**", comme je n'oublie pas mes professeurs en général et à tous ceux qui m'ont enseigné une lettre et une dernière lettre à mes proches en Dieu qui ont prié pour moi pour le bien et m'ont tendu une main secourable pour moi et ont été un soutien pour moi .

Et la paix et la miséricorde et les bénédictions de Dieu soient sur vous.

Table des matières

Introduction	1
Introduction	3
1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle	4
1.1 Espaces normés	4
1.1.1 Espace réflexif et espace séparable	5
1.2 Espaces fonctionnels	6
1.2.1 Espaces des fonctions continues et continûments différentiables	7
1.2.2 Espaces $C^k(0, T; X)$	8
1.2.3 Espace de Distributions	8
1.3 Les espaces L^p	9
1.3.1 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty[$	9
1.3.2 Les espaces $L^p(\Gamma)$	10
1.3.3 Les espaces $L^p(0, T; X)$	10
1.4 Espaces de Sobolev	12
1.4.1 Injection de Sobolev	13
1.4.2 Théorème de trace	13
1.4.3 Espaces $W^{1,p}(0, T; X)$ et $W^{1,p}(0, T; V, H)$	14
1.5 Éléments de l'analyse convexe	15
1.6 La méthode de Galerkin	16
1.6.1 Étapes principales de la méthode de Faedo-Galerkin	16

2	Les équations et inéquations avec opérateurs monotones	17
2.1	problèmes elliptiques :	17
2.1.1	Inéquations variationnelles de deuxième espèce	19
2.1.2	Les équations et inéquations elliptiques non linéaire	25
2.2	Les problèmes dépendants du temps	27
2.2.1	Les équations variationnelles paraboliques	27
2.2.2	Les inéquations variationnelles paraboliques	29
3	Approximation des équations et inéquations de type monotone	34
3.1	Approximation des équations elliptiques	34
3.2	Approximation des inéquations variationnelles elliptiques	39
3.3	Approximation des équations paraboliques et des inéquations variationnelles	43
3.3.1	Approximation semi-discrète	44
3.3.2	Estimations d'erreur entre les solutions du problème semi-discret et du problème continu	45
3.3.3	Approximations des inéquations variationnelles paraboliques.	47
3.3.4	Les inéquation variationnelles paraboliques du deuxième type	48
3.3.5	Approximation entièrement discrète.	49
3.3.6	Les résultats de convergence des schémas entièrement discrets.	51
Bibliographie		52

Introduction

L'approximation des équations et des inéquations de type monotone constitue un domaine crucial dans le domaine de l'analyse mathématique et de ses applications. Ces équations et inéquations sont omniprésentes dans de nombreux problèmes des sciences appliquées, allant de la mécanique aux sciences de l'ingénieur en passant par l'économie et les sciences sociales. L'objectif principal de l'approximation dans ce contexte est de trouver des solutions numériques aux problèmes qui sont souvent difficiles à résoudre analytiquement. Cela implique souvent l'estimation de l'espace ou du temps, ou les deux, ainsi que l'utilisation de techniques d'approximation pour obtenir des solutions approchées.

Dans cette mémoire, nous explorerons les différentes approches utilisées pour approximer les équations et inéquations de type monotone. Cela comprendra l'utilisation des méthodes numériques telles que les méthodes des éléments finis, les méthodes de Galerkin, et d'autres méthodes numériques avancées telles que les méthodes de Newton, les méthodes du gradient projeté, et la méthode de point fixe. Nous examinerons également les défis spécifiques associés à l'approximation des équations et inéquations de type monotone, tels que la convergence des schémas numériques, la stabilité numérique, et la préservation des propriétés des solutions telles que la coercivité, la monotonie, et la régularité. Enfin, nous discuterons des applications concrètes de l'approximation des équations et inéquations de type monotone dans différents domaines scientifiques et d'ingénierie.

La mémoire est divisée en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à certains éléments de l'analyse fonctionnelle et de l'analyse non linéaire.

Dans le chapitre 2, nous discutons de certains des principaux résultats de la théorie des équations différentielles et des inéquations incluant des facteurs monotones. Dans la première partie, nous nous concentrons sur le cas stationnaire, tandis que la deuxième partie aborde les problèmes liés au temps. Nous nous limitons à des résultats très fondamentaux, en particulier dans la théorie des équations d'ordre non linéaire.

Le dernier chapitre a pour but de montrer comment de telles solutions peuvent être approximées à l'aide de méthodes des éléments finis. Nous commençons par une approche

théorique simplifiée. Nous verrons que ces problèmes, lorsqu'ils sont formulés dans des espaces fonctionnels de dimension finie, peuvent être résolus de manière constructive.

Notations

\mathbb{N}	L'ensemble des entiers positifs.
\mathbb{R}	La droite réelle.
\mathbb{R}^n	L'espace euclidien de dimension n .
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$	La droite réelle étendue.
$[a, b]$	Un intervalle fermé dans \mathbb{R} .
(a, b)	Un intervalle ouvert dans \mathbb{R} .
$[a, b), (a, b]$	Des intervalles semi-ouverts dans \mathbb{R} .
X^n	$X \times \dots \times X$ (n fois).
Ω	Un domaine borné dans \mathbb{R}^n .
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω , i.e. $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.
$\partial\Omega$	La frontière de Ω .
$\text{int}_B A$	L'intérieur de A dans B .
$D_{\text{eff}} = \{x \in X \mid f(x) < \infty\}$	Le domaine effectif de f .
espaces fonctionnels	
$Y(\Omega)$	Ensemble de fonctions $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$Y(\Omega, \mathbb{R}^n)$	Ensemble de fonctions $v = (v_1, \dots, v_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$\mathcal{L}(X, Y)$	L'espace de toutes les applications linéaires continues $A : X \longrightarrow Y$
Fonctions	
$DF(u)$	Dérivée de Gâteaux de F en u
I_K	La fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé K .
Autres symboles	
A, M	Matrices

Chapitre 1

Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous présentons quelques préliminaires de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés partout dans cette mémoire. Il nous est paru utile de donner quelques rappels sur les espaces normés, les espaces fonctionnels, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux de l'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert.

1.1 Espaces normés

Soit X un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Définition 1.1.1. Une application $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée norme si, et seulement si :

1. $\|u\|_X \geq 0 \quad \forall u \in X$ et $\|u\|_X = 0 \Rightarrow u = 0_X$. (Positivité et séparation)
2. $\|\lambda u\|_X = |\lambda| \|u\|_X \quad \forall u \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. (Homogénéité)
3. $\|u + v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X \quad \forall u, v \in X$. (Inégalité triangulaire)

Définition 1.1.2. On appelle espace vectoriel *normé* un espace X muni d'une norme $\|\cdot\|_X$.

Passons maintenant à la notion d'espace vectoriel normé complet.

Définition 1.1.3. Un espace normé E est dit complet si toutes les suites de Cauchy de E convergent dans E . Un espace de Banach est un espace normé complet.

1.1.1 Espace réflexif et espace séparable

Soit X un espace de Banach et $J : X \longrightarrow X''$ l'injection canonique de X dans X'' , définie par

$$J_x(\varphi) = \varphi(x) \quad \forall x \in X, \varphi \in X'$$

Définition 1.1.4. (Espace réflexif)([7])

L'espace X est dit réflexif, si : $J(X) = X''$. On a le résultat

Théorème 1.1.1. ([7]) Toute suite bornée d'un espace de Banach réflexif X , admet au moins une sous suite faiblement convergente dans X .

Définition 1.4.5 (Espace séparable)([7])

Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble $D \subset X$ dense et dénombrable. On donne le résultat

Théorème 1.2.3. ([7]) Si X est un espace de Banach séparable, alors de toute suite bornée de X on peut extraire une sous-suite faiblement-* convergente dans X' .

Corollaire 1.1.1. ([7]) Soit X est un espace de Banach. Alors X est réflexif si et seulement si X' est réflexif .

Nous présentons dans ce qui suit un type particulier d'espace normé, dans lequel la norme est définie d'une manière spéciale.

Définition 1.1.6. Soit X un espace vectoriel réel, on appelle produit scalaire sur X toute forme bilinéaire symétrique définie positive autrement dit, toute application $(\cdot, \cdot)_X$ de $X \times X$ dans \mathbb{R} vérifiant

1. $(u, u)_X \geq 0$ et si $(u, u)_X = 0$ alors $u = 0_X \quad \forall u \in X$.
2. $(u, v)_X = (v, u)_X \quad \forall u, v \in X$.
3. $(\alpha u + \beta v, w)_X \leq \alpha(u, w)_X + \beta(v, w)_X \quad \forall u, v, w \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Définition 1.1.7. On appelle espace préhilbertien réel un espace vectoriel X muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$.

Il est bien connu qu'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ permet de définir une norme par la relation

$$\|u\|_X = \sqrt{(u, u)_X} \quad \forall u \in X$$

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)_X| \leq \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X$$

De plus, l'égalité du parallélogramme est satisfaite

$$\|u + v\|_X^2 + \|u - v\|_X^2 = 2(\|u\|_X^2 + \|v\|_X^2) \quad \forall u, v \in X$$

Parmi les espaces de produits scalaire, il y a une importance particulière pour les espaces de Hilbert.

Définition 1.1.8. Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associée à son produit scalaire.

Théorème 1.1.4 (*Représentation de Riesz*). Soit H un espace de Hilbert et soit $f \in H'$. Alors il existe un et un seul élément $T_f \in H$ tel que

$$\langle f, g \rangle_{H' \times H} = (T_f, g)_H \quad \forall g \in H.$$

1.2 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces fonctionnels à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons aborder les espaces des fonctions continues, continûment différentiables, les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev. Pour plus de détail, voire par exemple [7, 15].

Étant donné un ouvert Ω de \mathbb{R}^n . Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de \mathbb{R}^n et soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice tel que $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, nous posons

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

c'est-à-dire, on dérive u , α_i fois par rapport à x_i , $i = 1, \dots, n$.

1.2.1 Espaces des fonctions continues et continûments différentiables

L'espace $C^k(\Omega)$ Soit $k \in N_0$. Alors $C^k(\Omega)$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues définies dans Ω , dont les dérivées D^α jusqu'à l'ordre k (c'est-à-dire, toutes $\alpha \in N_0^n$ telles que $|\alpha| < k$) sont continues dans Ω avec la convention de notation suivante : si $k = 0$ alors $D^k v(x) = v(x)$ pour $x \in \Omega$ et $C^k(\Omega) = C(\Omega)$. En outre

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$$

Soit $k \in N_0 \cup \{\infty\}$. Alors $C_0^k(\Omega)$ représente le sous-ensemble de $C^k(\Omega)$ contenant toutes les fonctions nulles dans un voisinage de $\partial\Omega$. Encore $C_0^0(\Omega) = C_0(\Omega)$.

L'espace $C^k(\bar{\Omega})$: Soit d'abord $k = 0$. Par $C(\bar{\Omega}) = C^0(\bar{\Omega})$ on désigne le sous-ensemble de $C(\Omega)$ contenant toutes les fonctions qui peuvent être étendues continûment sur la fermeture de Ω .

Maintenant, soit $k \in \mathbb{N}$. Alors le symbole $C^k(\bar{\Omega})$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions réelles définies en Ω , dont les dérivées jusqu'à l'ordre k peuvent être étendues continûment sur Ω , c'est-à-dire une fonction $u \in C^k(\bar{\Omega})$ si et seulement si pour tout $\alpha \in N_0^n$ tel que $|\alpha| < k$ il existe une fonction $v_\alpha \in C(\bar{\Omega})$ telle que

$$v_\alpha(x) = D^\alpha u(x) \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Par souci de simplicité des notations nous écrirons $D^\alpha u$ au lieu de v_α même pour $x \in \partial\Omega$.

Nous fixons

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\bar{\Omega})$$

Il est bien connu que pour tout $k \in N_0$ l'expression

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha u(x)|_{C(\bar{\Omega})} \quad (1.2.1)$$

définit la norme par rapport à laquelle $C^k(\bar{\Omega})$ est complet, c'est-à-dire que $C^k(\bar{\Omega})$ est un espace de Banach. On voit aussi aisément que

$$\|u_j - u\|_{C^k(\bar{\Omega})} \longrightarrow 0 \text{ ssi } D^\alpha u_j \longrightarrow D^\alpha u \text{ (uniformément) en } 0 \text{ pour tout } \alpha \in N_0^n, |\alpha| < k.$$

L'espace $C^{0,1}(\overline{\Omega})$: Soit $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que u est Lipschitz dans $\overline{\Omega}$ ssi il existe une constante positive c telle que

$$\left| u(x) - u(y) \right| \leq c \|x - y\| \text{ pour tout } x, y \in \overline{\Omega}.$$

L'ensemble de toutes les fonctions continues Lipschitz en $\overline{\Omega}$ sera noté $C^{0,1}(\overline{\Omega})$.

1.2.2 Espaces $C^k(0, T; X)$.

Nous définissons $C(0, T; X)$ l'espace des fonctions $v : [0, T] \longrightarrow X$ qui sont continues sur l'intervalle $[0, T]$. Avec la norme

$$\|u\|_{C(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X. \quad (1.2.2)$$

L'espace $C(0, T; X)$ est un espace de Banach. Pour $k \geq 0$, nous définissons l'espace

$$C^k(0, T; X) = \{u \in C(0, T; X) : u^{(i)} \in C(0, T; X)\}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.2.3)$$

Il est un espace de Banach avec la norme

$$\|u\|_{C^k(0,T;X)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{t \in [0,T]} \|u^{(i)}(t)\|_X.$$

En particulier, $C^1([0, T]; X)$ désigne l'espace des fonctions continûment différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans X . C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|u\|_{C^1(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X + \max_{t \in [0,T]} \|u'(t)\|_X.$$

Soit aussi

$$C^\infty(0, T; X) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(0, T; X) = \{u \in C(0, T; X) : u \in C^k(0, T; X)\}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.2.4)$$

l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans X .

1.2.3 Espace de Distributions

Définition 1.2.1. On note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles sur Ω , indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω et par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω . Le produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ sera noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est à dire :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow K; u \in C^\infty(\Omega) \text{ et } \text{Supp } u \text{ est compact } \subset \Omega\}$$

où

$$\text{Supp } u = \overline{\{u \in \Omega, u(x) \neq 0\}}$$

et

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow K; \text{ Linéaire et Continue}\}$$

Distributions sur $(0, T)$ à valeurs dans X

Définition 1.2.2. $\mathcal{D}(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X , c'est à dire :

$$\mathcal{D}(0, T; X) = \{u : (0, T) \longrightarrow X; u \in C^\infty(0, T) \text{ et } \text{Supp } u \text{ est compact } \subset (0, T)\}$$

Définition 1.2.3. L'espace des distributions sur $(0, T)$ à valeurs dans X , noté par $\mathcal{D}'(0, T; X)$ défini par :

$$\mathcal{D}'(0, T; X) = \{u : \mathcal{D}(0, T) \longrightarrow X; \text{ Linéaire et Continue }\},$$

muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de $\mathcal{D}(0, T)$.

1.3 Les espaces L^p

1.3.1 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty[$

Pour $p \in [1, \infty[$, $L^p(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} .

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ Lebesgue mesurable et } |u|^p \text{ Lebesgue intégrable sur } \Omega\}$. C'est un espace de Banach, dont la norme est donné par

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = \infty$, on désigne par $L^\infty(\Omega)$ l'espace vectoriel des (classes des) fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables et essentiellement bornées dans Ω , i.e.

$$\exists M \geq 0, \text{ telle que : } |u(x)| \leq M, \text{ p.p. } x \in \Omega,$$

muni de sa norme :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)| = \inf\{M \geq 0; |u(x)| \leq M, \text{ p.p. } x \in \Omega\}.$$

Propriétés 1.3.1 .

1. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $(L^p(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)})$ est un espace de Banach ;
2. Pour : $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable ;
3. Pour : $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif, et le dual de $L^p(\Omega)$ s'identifie avec $L^q(\Omega)$ où : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pour : $p = 2$, on obtient l'espace $L^2(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx,$$

et la norme associée :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3.1)$$

1.3.2 Les espaces $L^p(\Gamma)$

Définition 1.3.1. Si on note $d\Gamma$ la mesure superficielle sur Γ induite par la mesure de Lebesgue

dx , alors on définit $L^p(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$ comme l'ensemble des fonctions $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, $|u|^p$ soit intégrable sur Γ ; muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |u(x)|^p d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.3.3 Les espaces $L^p(0, T; X)$

Soit X un espace de Banach, avec ; $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.3.2. On désigne par $L^p(0, T; X)$ l'espace des (classes des) fonctions u mesurables

sur $[0, T]$ à valeurs dans X et telles que

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty \quad (\text{au sens de Lebesgue}) \quad (1.3.2)$$

Est noté $L^p(0.T.X)$ Cet espace est équipé de la norme.

$$\|u\|_{L^p(0.T.X)} \equiv \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.3.3)$$

Pour $p = \infty$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0.T.X)} \equiv \sup_{t \in [0.T]} \text{ess} \|u(t)\|_X \quad (1.3.4)$$

Théorème 1.3.1. il est vrai:

(i) l'espace $L^p(0.T.X)$ est complet par rapport à la norme (1.17) si $p \in [1, \infty]$ et (1.18) lorsque $p = \infty$.

(ii) soit X un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$. Alors $L^2(0.T.X)$ est aussi un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire

$$(u.v)_{L^2(0.T.X)} \equiv \int_0^T (u(t).v(t))_X dt \quad (1.3.5)$$

Théorème 1.3.2.

Soit X un espace de Banach réflexif et séparable, Alors:

(i) Soit $p \in (1, \infty)$, Alors l'espace $L^p(0.T.X)$ est réflexif et séparable, de plus son espace dual est:

$$(L^p(0.T.X))^* = (L^q(0.T.X^*)) \quad \text{où} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (1.3.6)$$

(ii) Soit $p = 1$, Alors l'espace $L^1(0.T.X)$ est séparable et son espace dual est:

$$(L^1(0.T.X))^* = (L^\infty(0.T.X^*)) \quad (1.3.7)$$

Le *théorème 1.3.2.* la conséquence importante

théorème 1.3.3.

Soit X un espace de Banach réflexif et séparable Alors

(a) Soient $p \in (1, \infty)$ et $\{u_n\}$ une suite bornée dans $L^p(0, T; X)$. Alors il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ qui converge dans l'espace $L^p(0, T; X)$ **faiblement** c'est-à-dire qu'il existe $u \in L^p(0, T; X)$ et

$$\int_0^T \langle u_{n_k}, v(t) \rangle_X dt \rightarrow \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X dt \quad \forall v \in L^q(0, T; X') \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (1.3.8)$$

(b) Soit $p = \infty$ et $\{u_n\}$ une suite bornée dans $L^\infty(0, T; X)$. Alors il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ qui converge dans l'espace $L^\infty(0, T; X)$ **faiblement étoilé** c'est-à-dire qu'il existe $u \in L^\infty(0, T; X)$ et

$$\int_0^T \langle u_{n_k}(t), v(t) \rangle_X dt \rightarrow \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X dt \quad \forall v \in L^1(0, T; X') \quad (1.3.9)$$

Théorème 1.3.4. (L'inégalité de Hölder): Soit X un espace de Banach, $1 < p < \infty$ et $1/p + 1/q = 1$. Alors l'inégalité suivante est vraie

$$\int_0^T |\langle v(t), u(t) \rangle_{X^* \times X}| dt \leq \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^T \|v(t)\|_{X^*}^q dt \right)^{1/q}$$

pour tout $u \in L^p(0, T; X), v \in L^q(0, T; X^*)$. (1.3.10)

1.4 Espaces de Sobolev

Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev. On renvoie le lecteur aux ouvrages ([1], [7]) pour plus de détails.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. Nous définissons les espaces de Sobolev par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ avec } |\alpha| \leq k\} \quad (1.4.1)$$

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est définie par

L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. Pour $p = 2$, $W^{k,p}(\Omega)$ sera noté par $H^k(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega). \quad (1.4.2)$$

1.4.1 Injection de Sobolev

Soit X, Y deux espaces de Banach tels que $X \subset Y$.

Définition 1.4.1. On dit que X s'injecte dans Y de manière continue. Si l'application :

$$j : X \longrightarrow Y \quad (1.4.3)$$

$$x \longrightarrow j(x) = x, \quad (1.4.4)$$

est continue, et on note :

$$X \hookrightarrow Y$$

Si :

$$\exists C > 0 : \|j(x)\|_Y = \|x\|_Y \leq C \|x\|_X. \quad (1.4.5)$$

Définition 1.4.2. On dit que X s'injecte dans Y de manière compacte.

Si l'application :

$$j : X \longrightarrow Y \quad (1.4.6)$$

$$x \longrightarrow j(x) = x, \quad (1.4.7)$$

est compacte, et on note :

$$X \hookrightarrow_{compacte} Y;$$

C'est à dire : de toute suite bornée $(u_n)_n$ de X on peut extraire une sous-suite convergente dans Y .

1.4.2 Théorème de trace

Théorème 1.4.1.

Soit $p \in [1; \infty]$. Alors il existe une application linéaire unique $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ telle que

$$\gamma u = u \text{ sur } \partial\Omega \text{ pour tout } u \in C^\infty(\bar{\Omega});$$

$$\exists C > 0 \text{ tel que: } \|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

L'application linéaire Continue γ introduits dans le Théorème précédent est appelé application de traces.

1.4.3 Espaces $W^{1,p}(0, T; X)$ et $W^{1,p}(0, T; V, H)$

Espaces $W^{1,p}(0, T; X)$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, nous présentons l'espace

$$W^{1,p}(0, T; X) = \{u \in L^p(0, T; X) : u' \in L^p(0, T; X)\}.$$

Si $p = 2$ on utilisé la notation $H^1(0, T; X)$ au lieu de $W^{1,2}(0, T; X)$. L'espace $W^{1,p}(0, T; X)$ Avec la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} = \|u\|_{L^p(0, T; X)} + \|u'\|_{L^p(0, T; X)} \quad (1.4.8)$$

Alors $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach.

Espaces $W^{1,p}(0, T; V, H)$

Pour définir $W^{1,p}(0, T; V, H)$, nous introduisons d'abord le triplet d'évolution

$$V \subseteq H \subseteq V'$$

dans lequel V est un espace de Banach réel, séparable et réflexif, H est un espace de Hilbert réel séparable et V' est l'espace dual de V . Par $\|\cdot\|_X$ et $|\cdot|_H$, nous désignons les normes dans V et H , respectivement. Le couplage dual entre V et V' est noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$ et le produit scalaire dans H par $(\cdot, \cdot)_H$. Nous supposons que l'espace V est continuellement et densément plongé dans H . Par conséquent, en identifiant H et H' , le plongement $V \hookrightarrow H$ a également un sens et il est continu et dense. La caractérisation suivante des dérivées généralisées tient dans le cas des triplets évolutifs.

Proposition 1.4.1. Soient $p, q \in [1, \infty]$. Les énoncés suivants sont équivalents :

(i) il existe la dérivée généralisée $u^{(i)} \in L^p(0, T; V)$;

(ii) il existe une fonction $\omega \in L^q(0, T; V')$ telle que

$$\int_0^T (u(t), v)_H \varphi^i(t) dt = (-1)^i \int_0^T (\omega(t), v)_V \varphi(t) dt \quad \forall v \in V, \varphi \in C_0^\infty(0, T) \text{ et } \omega = u^{(i)}.$$

Soit $p \in (1, \infty)$. L'espace $W^{1,p}(0, T; V, H)$ est défini comme un sous-espace de $L^p(0, T; V)$ comme suit :

$$W^{1,p}(0, T; V, H) = \{u \in L^p(0, T; V) : u' \in L^q(0, T; V')\}. \quad (1.4.9)$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nous équipons $W^{1,p}(0, T; V, H)$ avec la norme suivante.

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;V,H)} = \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'\|_{L^q(0,T;V')} \quad (1.4.10)$$

Rappelons quelques résultats importants de l'espace $W^{1,p}(0, T; V, H)$.

- 1- L'espace $W^{1,p}(0, T; V, H)$ est complet par rapport à la norme (1.4.10).
- 2- La proposition suivante de l'inclusion continue est vérifiée :

$$W^{1,p}(0, T; V, H) \hookrightarrow C([0, T]; H). \quad (1.4.11)$$

3- Soient u et v dans $W^{1,p}(0, T; V, H)$ et t_1, t_2 dans $[0, T]$. Alors, la formule générale d'intégration par parties suivante est vérifiée :

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t) \rangle_{V' \times V} dt = (u(t_2), v(t_2))_H - (u(t_1), v(t_1))_H - \int_0^T \langle u(t), v'(t) \rangle_{V' \times V} dt. \quad (1.4.12)$$

1.5 Éléments de l'analyse convexe

L'objectif de cette partie est de présenter quelques résultats de base de l'analyse convexe. Un sous-ensemble K de X est dit convexe si et seulement si

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \in K \quad \forall u, v \in K \text{ et } \lambda \in (0, 1) \quad (1.5.1)$$

Soit $\overline{\mathbb{R}}$ la droite réelle étendue, c'est-à-dire $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle propre dans X , c'est-à-dire $f \neq +\infty$ dans X . Une fonctionnelle $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite convexe dans K si et seulement si :

$$f(tu + (1 - t)v) \leq tf(u) + (1 - t)f(v) \quad \forall u, v \in K \text{ et } t \in (0, 1) \quad (1.5.2)$$

Définition 1.5.1. Un élément $w \in X$ est dit être un sous-gradient d'une fonctionnelle convexe f en un point u où $f(u)$ est fini si et seulement si :

$$f(v) - f(u) \geq (w, v - u) \quad \forall v \in X. \quad (1.5.3)$$

Un exemple important de fonctionnelle convexe est la soi-disant fonction indicatrice I_K du sous-ensemble convexe K définie par :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } u \in K \\ +\infty & \text{si no} \end{cases}$$

Proposition 1.5.1. Supposons que $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ soient convexes et semi-continus inférieurement dans X , et qu'il existe un point $u_0 \in D_{eff}(f) \cap D_{eff}(g)$ auquel f est continue. Alors

$$\partial(f + g)(u) = \partial f(u) + \partial g(u) \quad \forall u \in X.$$

1.6 La méthode de Galerkin

La méthode de Faedo-Galerkin est une technique mathématique efficace pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP). Elle appartient à la catégorie des méthodes approximatives ou numériques et est largement utilisée en mécanique des fluides, mécanique des matériaux, et dans de nombreux autres domaines de l'ingénierie et de la physique.

1.6.1 Étapes principales de la méthode de Faedo-Galerkin

1- **Choix d'un espace approprié** : On commence par choisir un espace fonctionnel approprié V contenant des fonctions de base $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$.

2- **Formulation du problème faible** : On reformule le problème original (EDP) sous une forme faible. Cela implique de multiplier l'équation différentielle par une fonction test et d'intégrer sur le domaine défini.

3- **Approximation de la solution** : On cherche une solution approximative u_n dans un sous-espace V_n constitué d'un nombre fini de fonctions de base. La solution approximative est représentée comme une combinaison linéaire des fonctions de base :

$$u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$$

où α_i sont les coefficients à déterminer.

4- **Insertion de la solution approximative dans le problème faible** : On substitue u_n dans le problème faible, ce qui conduit à un système d'équations algébriques pour les coefficients α_i .

5- **Résolution du système d'équations** : On résout ce système d'équations algébriques pour obtenir les valeurs approximatives des coefficients α_i , puis la solution approximative u_n .

Chapitre 2

Les équations et inéquations avec opérateurs monotones

Le but de ce chapitre est de rappeler les principaux résultats de la théorie des équations différentielles et des inégalités impliquant des opérateurs monotones, dans la première partie nous concentrons sur le cas statique tandis que la seconde partie traite des problèmes dépendants du temps, Nous limitons à des résultats très basiques notamment en théorie des équation non linéaire, pour un traitement plus approfondi des problèmes non linéaires, nous référons à [18] et [14].

2.1 problèmes elliptiques :

Nous commençons par des problème linéaire (voir [20])

Soit V un espace de Hilbert réel et V' son dual, la norme, le produit scalaire dans V sera noté $\|\cdot\|_V$, (\cdot, \cdot) respectivement. La valeur de $f \in V'$ en $v \in V$ sera notée par $\langle f, v \rangle$. La norme de $f \in V'$ est définie de manière standard :

$$\|f\|_{V'} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\langle f, v \rangle}{\|v\|_V}$$

Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire telle que :

$$\exists M > 0 : |a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V \text{ (borné)} \quad (2.1.1)$$

$$\exists M > 0 \quad a(v, v) \geq \alpha |v|^2 \quad \forall v \in V \quad (V - \text{elliptique}) \quad (2.1.2)$$

Par une équation elliptique linéaire abstraite, nous appelons un triplet $\{v, a, f\}$ ou $f \in V^*$, tout élément $u \in V$ satisfaisant :

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V \quad (2.1.3)$$

sera appelé un solution de $\{V, a, f\}$.

En ce qui concerne l'existence et l'unicité de la solution de $\{V, a, f\}$ on a :

Théorème 2.1.1. (lax – Milgram)

Soit la forme bilinéaire $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ borné et V – elliptique. Alors il existe un Solution unique de (2.1.3) pour tout $f \in V'$ et

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}$$

Tout au long de cette section, nous supposerons que a satisfait (2.1.1) et (2.1.2) la forme bilinéaire é définit une application linéaire $A : V \rightarrow V'$:

$$a(u, v) = (Au, v) \quad \forall u, v \in V \quad (2.1.4)$$

Ainsi l'équation elliptique linéaire abstraite $\{V, a, f\}$ est équivalent l'équation de l'opérateur linéaire

$$Au = f \quad \text{in } V'$$

De (2.1.1) et (2.1.2) il résulte facilement que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(V, V')} \leq M, \quad \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(V', V)} \leq \frac{1}{\alpha}$$

C' est-a-dire:

$$A \in \mathcal{L}(V, V') \quad A^{-1} \in \mathcal{L}(V', V)$$

Inéquations variationnelles de première espèce

Soit K un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de V , par une inégalité elliptique abstraite de première espèce, nous appelons un triplet $\{K, a, f\}$ où $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est forme bilinéaire et $f \in V'$ tout élément $u \in K$ satisfaisant :

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in K \quad (2.1.5)$$

Sera appelé une solution de $\{K, a, f\}$.

Théorème 2.1.2. [17] Soit K a la propriété mentionnée ci-dessous et soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ satisfasse (1.41) et (1.42). Alors $\{K, a, f\}$ a un solution unique u pour tout $f \in V'$, si u sont des solutions de $\{K, a, f\}$, $i = 1, 2$ alors :

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|_{V'}$$

Remarque 2.1.1.

Soit I_K la fonction indicatrice de K Alors (2.1.5) équivalant a :

$$\begin{aligned} u \in V \quad \text{tel que} \\ a(u, v - u) + I_k(u) - I_k(u) \geq \langle f, v - u \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

A l'aide de (2.1.4), l'inégalité (2.1.6) peut s'écrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \quad \text{tel que} \\ I_k(v) - I_k(u) \geq \langle f - Au, v - u \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \end{array} \right.$$

ou équivalent

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \quad \text{tel que} \\ f - Au \in \partial I_k(u), \end{array} \right.$$

où $\partial I_k(u)$ désigne le sous-différentiel de la fonction indicatrice I_K au point u .

2.1.1 Inéquations variationnelles de deuxième espèce

La formulation (2.1.6) est un cas particulier d'un cadre plus général d'inégalités variationnelles elliptiques. Soit $j : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle convexe semi-continue inférieure et propre dans V , par un inégalité elliptique abstraite du deuxième type, nous appelons un quadruplet $\{K, a, f, j\}$ une fonction $u \in K$ Satisfaisant.

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in K \quad (2.1.7)$$

Sera appelé une solution de $\{k.a.f, j\}$ en rappelant la *proposition 1.5.1.* et en supposant qu'il existe un point De $u \in D_{eff}(j) \cap K$ où j ou I_K est continu (notez que I_K est continu en u_0 si $u \in \text{int } K$).

L'inégalité (2.1.7) peut s'écrire sous la forme équivalente suivante formulaire :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ f - Au \in \partial J(u) + \partial I_k(u) \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Si a, k et j satisfont toutes les hypothèses mentionnées ci-dessus il existe une solution unique u de (2.1.7).

Dans de nombreux problèmes posés en pratique. La forme bilinéaire a est symétrique dans V c'est é-dire

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V \quad (2.1.9)$$

Dans ce cas les problèmes (2.1.3), (2.1.5) et (2.1.7) peuvent être caractérisés de manière équivalente comme un problème de minimisation abstraite pour le $j : V \rightarrow \mathbb{R}$ Fonctionnel convexe défini par :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle_{V' \times V} \quad (2.1.10)$$

Ou :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) + j(v) - \langle f, v \rangle_{V' \times V} \quad (2.1.11)$$

Dans le cas de l'inégalité du deuxième type, en effet, il détient

Théorème 2.1.3. Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ symétrique dans V , Alors

(i) $u \in V$ solution (2.1.3) si et seulement si

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v) \quad (2.1.12)$$

où J est donné par (2.1.10);

(ii) $u \in K$ solution (2.1.5) ou (2.1.7) si et seulement si

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) \quad (2.1.13)$$

où J est donné par (2.1.10) ou par (2.1.11) dans le cas de l'inéquation variationnelle de deuxième type.

Nous montrons ensuite comment ces résultats abstraits peuvent être utilisés lors de la formulation de problèmes elliptiques linéaires particuliers permet :

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0 u \quad (2.1.14)$$

Etre l'opérateur différentiel scalaire linéaire du deuxième ordre. Avec tout A sera associée la forme bilinéaire a suivante définie sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$:

$$a(u, v) = \int \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right) dx \quad (2.1.15)$$

Les colicines a_{ij} , a_0 satisferont les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} a_{ij}.a_0 \in L^\infty(\Omega) & i, j = 1, \dots, n \\ a_0 \geq 0 \text{ p.p dans } \Omega \end{cases} \quad (2.1.16)$$

et

$$\exists \alpha_0 > 0 \quad a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha_0(x) \xi_i \xi_i \text{ satisfait } \forall \xi_i \in \mathbb{R} \text{ et p.p. } x \in \Omega \quad (2.1.17)$$

D'après (2.1.16) et l'inégalité de Hölder, il ressort que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega) \quad (2.1.18)$$

Dans la suite la convention de sommation sera utilisée

Où la constante position M dépend uniquement de

$$\max_{i, j=1, 2, \dots, n} \left\{ \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}$$

La condition (2.1.17) donne :

$$a(v, v) \geq \alpha_0 |v_1|^2 + \int a_0 v^2 dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.1.19)$$

Supposons qu'il existe un nombre positif α_1 tel que :

$$\alpha_0(x) \geq \alpha_1 > 0 \quad \text{pour p.p. } x \in \Omega \quad (2.1.20)$$

Alors de ceci et (2.1.19) il résulte que

$$a(v, v) \geq \alpha_0 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

où $\alpha = \min \{\alpha_0, \alpha_1\}$ Au contraire si $a(x) \equiv 0$ Alors :

$$a(v, v) \geq \alpha_0 |v_1|^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (2.1.21)$$

C'est-à-dire que a n'est plus elliptique sur tout l'espace $H^1(\Omega)$, D'autre part, si l'on se limite à un sous espace V de $H^1(\Omega)$ dans lequel la semi-norme $|\cdot|_1$ devient déjà une norme, alors a est $H^1(\Omega)$ - elliptique dans V .

Soit

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1\} \quad (2.1.22)$$

où $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ et $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, Ensuite, en raison de l'inégalité généraliste de Poincaré-Friedrichs, nous avons

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V$$

Nous sommes désormais capables de formuler des problèmes simples de valeurs limites scalaires, soit la frontière $\partial\Omega$ divisée en deux parties disjointes et mesurables Γ_1, Γ_2 Telles que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$ soit V donnée par (2.1.22), soit en outre $h \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Gamma_2)$ considérons le problème elliptique linéaire $\{V, a, f\}$ avec a donnée par (2.1.15) et $f \in V$ défini par :

$$\langle f, v \rangle_{V' \times V} = \int_{\Omega} h v dx + \int_{\Gamma_2} g v ds \quad (2.1.23)$$

En utilisant la théorème de la trace (voir *théorème 1.4.1.*) nous voyons que l'expression sur le cote droit de (2.1.23) définit réellement la fonctionnelle linéaire et continue sur V , c'est-é-dire $f \in V'$, A fonction $u \in V$ résout $\{V, a, f\}$ si et seulement si :

$$\int \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0 u \varphi \right) dx = \int_{\Omega} h \varphi dx + \int_{\Gamma_2} g \varphi ds \quad (2.1.24)$$

est vérifié pour tout $\varphi \in V$ Puisque toutes les hypothéses du théorème de lax-Milgram sont satisfaites, il existe une solution unique u . En supposant que u est suffisamment on peut applique la formule de Green é la première intégrale de (2.1.24) on voit ça u est la solution de la valeur limite mixte de Dirichlet- Neumann suivante problème :

$$\begin{cases} Au = h & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \partial u / \partial n_A = g & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (2.1.25)$$

où le symbole $\partial / \partial n_A$ représente l'opérateur dérive conormal défini comme suite :

$$\partial u / \partial n_A = a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_j \quad (2.1.26)$$

Avec n_i étant la i -éme composante du vecteur normal externe unitaireé $\partial \Omega$, si $\Gamma_1 \equiv \partial \Omega$ alors (2.1.25) se réduit é la valeur limite de Dirichlet homogéne problème, Au contraire si $\Gamma_2 \equiv \partial \Omega$ alors on obtient le problème de Neumann garantir l'existence et l'unicité de sa solution pour une donnée $h \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_2)$ il faut supposer que a_0 vérifie (2.1.20).

Nous présentons maintenant un exemple simple de modèle d'inégalité variationnelle. Soit $\{K, a, f\}$ donnée par les données suivantes

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

$f \in L^2(\Omega)$ et a par (2.1.15), Nous résolvons le probleme

$$\text{trouver } u \in K \text{ tel que} \quad \int \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (\varphi - u)}{\partial x_j} + a_0 u (\varphi - u) \right) dx \succeq \int_{\Omega} f (\varphi - u) dx \quad \forall \varphi \in K \quad (2.1.27)$$

Puisque K est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de $H_0^1(\Omega)$ et que la forme bilinéaire est $H^1(\Omega)$ - elliptique, il existe une solution unique à (2.1.27) comme le stipule le

Théorème 2.1.2. En supposant que u soit suffisamment régulier, nous pouvons appliquer la formule de Green au premier intégrale et nous obtenons

$$\int_{\Omega} Au(\varphi - u)dx \geq \int_{\Omega} f(\varphi - u)dx \quad \forall \varphi \in K \quad (2.1.28)$$

L'intégrale frontière disparaît car u et φ sont égaux à zéro sur $\partial\Omega$, prenons maintenant la fonction φ de la forme $\varphi = u + w$ où $w \in C_0^\infty(\Omega)$, $w \geq 0$ dans Ω , alors (2.1.28) donne :

$$\int_{\Omega} (Au - f)w dx \geq 0 \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega), w \geq 0 \quad (2.1.29)$$

Ainsi :

$$Au \geq f \quad \text{p.p. dans } \Omega \quad (2.1.30)$$

En remplaçant $\varphi = 2u, 0$ dans (2.1.28) nous détenons

$$\int_{\Omega} (Au - f)u dx = 0$$

Puisque l'intégrande est non négatif en Ω comme il ressort de (2.1.30) et de la définition de K , nous en déduisons finalement que

$$(Au - f)u = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

En résumé : la fonction suffisamment régulière u étant la solution du système $\{k, a, f\}$ satisfait les relations suivantes presque partout dans Ω .

$$u \geq 0, \quad Au \geq f, \quad (Au - f)u = 0. \quad (2.1.31)$$

Le domaine Ω peut être divisé en deux parties :

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}, \\ \Omega_0 &= \{x \in \Omega \mid u(x) = 0\}. \end{aligned}$$

De (2.1.31) il résulte que $Au = f$ dans Ω_+ . La partition de Ω en Ω_+ et Ω_0 n'est l'un des inconnus de notre problème.

Remarque 2.1.3.

Si la matrice des coefficients définissant a est symétrique en Ω , c'est-à-dire $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$. c'est-à-dire dans Ω , alors la forme bilinéaire correspondante a est symétrique dans $H^1(\Omega)$ dans ce cas. Le problème (2.1.25) équivalant à la minimisation de

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 v^2 \right) dx - \int_{\Omega} h v dx - \int_{\Gamma_2} g v ds$$

Sur l'espace V . tandis que la solution de (2.1.27) est caractérisée comme le minimum de :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 v^2 \right) dx - \int_{\Omega} f v dx$$

Sur l'ensemble convexe K .

2.1.2 Les équations et inéquations elliptiques non linéaire

Jusqu'à présent, les équations et inéquations elliptiques avec des applications linéaires ont été présentées. Passons maintenant à des cas plus généraux.

Soit $T : W \rightarrow W'$ une application d'un espace de banach réflexil W dans son dual W' , qui est en général non linéaire.

Nous chercherons des solution de l'équation.

$$T(u) = f \text{ dans } W' \iff \langle T(u), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in W \quad (2.1.32)$$

Ou l'inégalité

$$u \in K : \langle T(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K, \quad (2.1.33)$$

où $f \in W'$ est donné et K est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de W . Pour garantir l'existence et l'unicité de la solution des équations (2.1.32) et (2.1.33), nous supposons que :

l'application T satisfait les hypothèses suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } T \text{ est fortement montone dans } W, \text{ i.e., qu'il existe une fonction} \\ \text{strictement croissante } \alpha : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}. \text{ Telle que } \alpha(0) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \infty \text{ pour tout } u, v \in W \text{ est vérifié} \\ \langle T(u) - T(v), v - u \rangle \geq \alpha(\|u - v\|) \|u - v\|; \\ \text{(b) } T \text{ est localement lipschizien contuni dans } W, \text{ i.e.,} \\ \text{qu'il existe une constante positive } M(r) \text{ tell que} \\ \|T(u) - T(v)\|_{W'} \leq M(r) \|u - v\| \text{ est valable pour tout } u, v \in B_r \\ \text{où } B_r = \{v \in W / \|v\| \leq r\} \end{array} \right. \quad (2.1.34)$$

Alores

Théorème 2.1.4.[18] Soit $T : W \rightarrow W'$ fortement monotone et localement lipschitz dans W . alors l'équation (2.1.32) et l'inégalité (2.1.33) ont une solution u pour tout $f \in W'$.

Ce théorème est une généralisation des *théorèmes 2.1.1* et *2.1.2*. De plus, le *théorème 2.1.3* s'étend au cas des applications non linéaires. Nous disons que $T : W \rightarrow W'$ est l'opérateur potentiel s'il existe une fonction $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}$ qui est différentiable de Gateaux en tout point $v \in W$ et telle que sa dérivée Gateaux $D\Phi(v) = T(v)$ pour tout $v \in W$. Une telle fonctionnelle (si il existe) est appelée le potentiel de T . Dans ce cas, l'équation (2.1.32) et l'inégalité (2.1.33) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$u \in W : \langle D\Phi(u), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in W; \quad (2.1.35)$$

$$u \in W : \langle D\Phi(u), v - u \rangle = \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \quad (2.1.36)$$

Il n'est pas surprenant que ces deux problèmes soient liés respectivement à la minimisation de Φ Dans W, K , En effet on a

Théorème 2.1.5.[20] Soit $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}$ Un potentiel de T tel que:

$$\text{Pour tout } u, v, z \in W \text{ Fixe, la fonction } \rightarrow \langle D\Phi(u + v), z \rangle \text{ est continue dans } \mathbb{R}; \quad (2.1.37)$$

$$\langle D\Phi(u + v), v \rangle - \langle D\Phi(u), v \rangle \geq \alpha(\|u\|) \|v\| \quad \forall u, v \in W \quad (2.1.38)$$

avec la fonction α , ayant les mêmes propriétés que dans (2.1.34 (a)). Alors il existe des solutions uniques aux problème de minimisation suivantes:

$$u \in W : \Phi(u) = \min_{v \in W} \Phi(v) \quad (2.1.39)$$

$$u \in K : \Phi(u) = \min_{v \in K} \Phi(v) \quad (2.1.40)$$

En outre, (2.1.39) est équivalent à (2.1.35) et (2.1.40) à (2.1.36).

2.2 Les problèmes dépendants du temps

2.2.1 Les équations variationnelles paraboliques

Comme dans le cas elliptique, nous commençons par des problèmes linéaires.

Soient V et H des espaces de Hilbert réels séparables. La norme et le produit scalaire dans H sont noté $|\cdot|$ et (\cdot, \cdot) . Nous supposons que V est continuellement et densément ancré dans H et, de plus, nous identifions H avec son dual H' . Alors

$$"V \subseteq H \subseteq V'"$$

Forme un triplet d'évolution et l'espace de Bochner $W(v) \equiv W^{1,2}(0,T; V, H)$ est bien définie (voir *Chapitre 1*).

Soit $a(t, \cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un bilinéaire satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ |a(t, u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V, \forall t \in [0, T]; \\ \text{(b) Il existe } \alpha > 0, \beta > 0 \text{ tel que} \\ a(t, u, v) \geq \alpha \|u\|^2 - \beta |v|^2 \quad \forall v \in V, \forall t \in [0, T]. \\ \text{(c) La fonction } t \longrightarrow a(t, u, v) \text{ est mesurable dans } (0, T) \quad \forall u, v \in V \end{array} \right. \quad (2.2.1)$$

$$\text{La fonction } f \in L^2(0, T; V') \text{ et la valeur initial } u_0 \in H \text{ est donné.} \quad (2.2.2)$$

Par une équation parabolique linéaire abstraite, nous entendons le problème

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in W(V) \text{ satisfait} \\ \int_0^T \langle u'(t), v(t) \rangle dt + \int_0^T a(t, u(t), v(t)) dt \\ = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt \quad \forall v \in L^2(0, T; V) \end{cases} \quad (2.2.3)$$

et

$$u(0) = u_0 \quad (2.2.4)$$

Remarque 2.2.1. L'équation (2.2.3) est équivalente

$$\langle u'(t), v \rangle + a(t; u(t), v(t)) = \langle f(t), v \rangle \quad \forall v \in V \text{ et p.p. } t \in (0, T)$$

Dans la suite, nous utiliserons les deux formulations simultanément. Le résultat de base suivant concernant l'existence et l'unicité

Théorème 2.2.1.[22] Soit la forme bilinéaire $a(t, \cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant ((2.2.1) (a)-(d)). Alors il existe un solution unique u de (2.2.3)- (2.2.4) pour tout $f \in L^2(0, T; V')$ et $u_0 \in H$. De plus, si u_i est la solution du problème (2.2.3)- (2.2.4) correspond à $\{f_i, u_{0_i}\}$, pour $i = 1, 2$ alors

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \left(|u_{0_1} - u_{0_2}|^2 + \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|_{L^2(0, T; V')}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.2.5)$$

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(|u_{0_1} - u_{0_2}|^2 + \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|_{L^2(0, T; V')}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2.6)$$

Pour tout $t \in [0, T]$ La bilinéaire $a(t, \cdot, \cdot)$ définit un opérateur linéaire $A(t) : V \rightarrow V'$ par

$$a(t, u, v) = \langle A(t)u, v \rangle \quad \forall u, v \in V \quad (2.2.7)$$

Clairement de (2.2.1)(a), (2.2.1)(b) il s'ensuit que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|A(t)\|_{\mathcal{L}(V, V^*)} \leq M \quad , \quad \sup_{t \in [0, T]} \|A(t)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V, V^*)} \leq \frac{1}{\alpha} \quad (2.2.8)$$

Par conséquent l'équation (2.2.3) peut être réécrite sous la forme d'opérateur équivalent suivante:

$$u'(t) + Au(t) = f(t) \quad \text{dans } V', \text{ pour p.p. } t \in [0, T]. \quad (2.2.9)$$

2.2.2 Les inéquations variationnelles paraboliques

État linéaire

De manière analogue au cas elliptique, nous définissons les inégalités variationnelles paraboliques.

Soit K un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de V , par un parabolique abstraite inéquation variationnelle du premier type, nous entendons le problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in W(V) \cap L^2(0, T; K) \text{ tel que} \\ \int_0^T \langle u'(t), v(t) - u(t) \rangle dt + \int_0^T a(t, u(t), v(t) - u(t)) dt \\ \geq \int_0^T \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle dt \quad \forall v \in L^2(0, T; K) \\ \text{et } u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (2.2.10)$$

Soit $j : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle convexe, semi-continue inférieurement et propre sur V . Alors, une inéquation variationnelle parabolique abstraite du deuxième type est définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in W(V) \cap L^2(0, T; K) \text{ tel que} \\ \int_0^T \langle u'(t), v(t) - u(t) \rangle dt + \int_0^T a(t; u(t), v(t) - u(t)) dt \\ + \int_0^T j(v(t)) dt - \int_0^T j(u(t)) dt \\ \geq \int_0^T \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle dt \quad \forall v \in L^2(0, T; K) \\ \text{et } u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (2.2.11)$$

Remarque 2.2.2. De même qu'en remarque 2.2.1. l'inégalité parabolique (2.2.10) a une forme équivalente.

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u'(t), v - u(t) \rangle + a(t; u(t), v - u(t)) \\ \geq \langle f(t), v - u(t) \rangle \quad \forall v \in K \text{ et p.p. } t \in (0, T) \end{array} \right.$$

Le même chose pour (2.2.11).

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u'(t), v - u(t) \rangle + a(t; u(t), v - u(t)) + j(v) - j(u(t)) \\ \geq \langle f(t), v - u(t) \rangle \quad \forall v \in K \text{ et p.p. } t \in (0, T) \end{array} \right.$$

Afin de garantir que les problèmes formulés ci-dessous aient des solutions, nous nécessitent des hypothèses supplémentaires sur a, f, u_0 et j . Supposons d'abord que $a(t, \dots)$ est différentielle par rapport à t dans $(0, T)$ et sa dérivée $a'(t, \dots) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un bilinéaire satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } \overline{M} > 0 \text{ tel que} \\ |a(t, u, v)| \leq \overline{M} \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V, \forall t \in [0, T]; \\ \text{(b) La fonction } t \rightarrow a'(t, u, v) \text{ est mesurable dans } (0, T) \text{ pour } u, v \in V. \end{array} \right. \quad (2.2.12)$$

et

$$f, f' \in L^2(0, T; V') \text{ et } u_0 \in K \quad (2.2.13)$$

Pour simplifier, on suppose que la fonctionnelle j est finie comme suit

$$|j(v)| < +\infty \quad \forall v \in K \text{ et } \left| \int_0^T j(v(t)) dt \right| < +\infty \quad \forall v \in L^2(0, T; K) \quad (2.2.14)$$

Cette condition garantit que (2.2.11) est bien défini pour tout $v \in L^2(0, T; K)$ sinon, on restreint les fonction de test v à $L^2(0, T; K \cap D_{eff}(j))$ enfin nous supposons soit que

$$Au(0) - f(0) \in H \quad (2.2.15)$$

Pour l'inégalité du premier type ou

$$\{Au(0) - f(0) + \partial j(u_0)\} \cap H \neq \emptyset \quad (2.2.16)$$

Pour l'inégalité du deuxième type, où $A(0)$ est défini par (2.2.7) en $t = 0$ le résultat d'existence suivant

Théorème 2.2.2. [6] Soit les formes bilinéaires $a(t, \cdot, \cdot)$, $a'(t, \cdot, \cdot)$ satisfont (2.2.1)(a)-(c) et (2.2.12) (a)-(b) respectivement, et soit (2.2.13), et (2.2.15) est valides. Alors l'inéquation variationnelle parabolique abstraite du premier type admet une solution unique u de plus.

$$u, u' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$$

Théorème 2.2.3.

Soit les formes bilinéaires $a(t, \cdot, \cdot)$, $a'(t, \cdot, \cdot)$ satisfaisant les mêmes condition que dans le *théorème 2.2.2*, et soit (2.2.13), (2.2.14) et (2.2.16) valide. Alors l'inégalité variationnelle parabolique abstraite du deuxième type a un caractère solution unique u de plus

$$u, u' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H).$$

Ensuite, nous appliquons ces résultats théoriques à quelques exemples pratiques, comme le modèle de l'équation linéaire parabolique.

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = h(t) & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \partial u / \partial v_{A(t)} = g(t) & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.2.17)$$

où l'opérateur $A(t)$, $t \in [0, T]$, est défini par

$$A(t)u(t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_i(t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(t)u(t) \quad (2.2.18)$$

et la dérivée conormal $\partial / \partial v_{A(t)}$ Par (2.1.26) pour p.p. $t \in (0, T)$. la frontière $\partial\Omega$ est composée de deux ensembles disjoint et mesurables Γ_1 et Γ_2 et l'espace de Hilbert

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

En définissant $H = L^2(\Omega)$ nous constatons que $\{V, H, V'\}$ forme un triplet d'évolution.

La forme bilinéaire $a(t, \cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$, associée à notre problème a la forme.

$$a(t, u, v) = \int_{\Omega} \left(a_{ij}(t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_i(t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + a_0(t)uv \right) dx. \quad (2.2.19)$$

Nous supposons que

$$a_{ij}, a_i, a_0 \in L^\infty(\Omega_T), \quad (2.2.20)$$

et les coefficients a_{ij} satisfont la condition d'ellipticité (2.1.17) uniformément par rapport à $t \in (0, T)$, Maintenant, de (1.131) nous avons que

$$\begin{aligned} \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \|a_i\|_{L^\infty(\Omega_T)} \right\} &\leq c_1 \\ \|a_0\|_{L^\infty(\Omega_T)} &\leq c_2, \end{aligned}$$

et donc en appliquant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega} a_i(t) \frac{\partial v}{\partial x_i} v dx \right| + \left| \int_{\Omega} a_0(t) v^2 dx \right| \\ &\leq \frac{\alpha_0}{2} \|v\|^2 + \left(\frac{c_1^2}{2\alpha_0} + c_2 \right) |v|^2 \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

avec α_0 de (2.1.17). À partir de cela

$$\begin{aligned} a(t, v, v) &\geq \frac{\alpha_0}{2} |v|_1^2 - \left(\frac{c_1^2}{2\alpha_0} + c_2 \right) |v|_0^2 \\ &\geq \frac{\alpha_0}{2} \|v\|^2 - \left(\frac{c_1^2}{2\alpha_0} + c_2 + \frac{\alpha_0}{2} \right) |v|^2 \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

et, anisi, (2.2.1) (b) est satisfait avec $\alpha = \alpha_0/2$ et $\beta = c_1^2/2\alpha_0 + c_2 + \alpha_0/2$.

Notez que l'hypothèse selon laquelle $mes_{n-1}\Gamma_1 > 0$ n'est pas nécessaire. La validité de (2.2.1) (a) et (2.2.1) (c) est claire.

De plus, soit $h \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $g \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$. Alors le côté droit f (dans (2.2.3) a la représentation

$$\langle f(t), v \rangle = \int_{\Omega} h(t)v dx + \int_{\Gamma_2} g(t)v ds \quad \forall v \in V. \quad (2.2.21)$$

En appliquant à nouveau le théorème de trace (théorème 1.4.1) nous voyons que $f \in L^2(0, T; V')$. Finalement, nous supposons que $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Alors à partir du *théorème 2.2.1.* nous pouvons conclure que notre problème de modèle peut être résolu de manière unique.

État non linéaire

Maintenant on passe aux opérateurs non linéaires.

Soit $\{A(t) : t \in [0, T]\}$ une famille d'opérateurs non linéaires de V à V' satisfait les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } A(t) \text{ est monotone dans } V \text{ pour tout } t \in [0, T] \text{ c'est-à-dire,} \\ \langle A(t)u - A(t)v, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in V, \forall t \in [0, T] \\ \text{(b) } A(t) \text{ est demicontinue dans } V \text{ pour tout } t \in [0, T] \text{ c'est-à-dire,} \\ u_k \rightarrow u \text{ fortement dans } V \implies A(t)u_k \rightarrow A(t)u \text{ faiblement dans } V', \forall t \in [0, T] \\ \text{(c) La fonction } t \longrightarrow A(t) \text{ est faiblement mesurable, c'est-à-dire, la fonction} \\ t \rightarrow \langle A(t)u, v \rangle \text{ est mesurable sur } (0, T) \text{ pour tout } u, v \in V \\ \text{(d) } A(t) \text{ est uniformément coercif dans } V \text{ par rapport à } t \in [0, T], \\ \exists \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R} : \langle A(t)u, u \rangle \geq \alpha \|u\|^2 + \beta \quad \forall u \in V, \forall t \in [0, T]; \\ \text{(e) } A(t) \text{ est uniformément borné dans } V \text{ par rapport à } t \in [0, T], \\ \exists M > 0 : \|A(t)u\|_{V'} \leq M(1 + \|u\|) \quad \forall u \in V, \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.2.22)$$

Par équation parabolique non linéaire abstraite (sous forme d'opérateur), nous entendons le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in W(V) \text{ tel que} \\ u'(t) - A(t)u(t) = f(t) \text{ dans } V' \text{ pour p.p. } t \in (0, T) \\ \text{et } u(0) = u_0 \end{array} \right. \quad (2.2.23)$$

Ces dernières hypothèses elles nous suffisent pour notre objet suivant

Théorème 2.2.4. [23]

Soit $A(t) : V \rightarrow V', t \in [0, T]$ des opérateurs vérifiant (2.2.22) (a)-(e). Alors pour $f \in L^2(0, T; H)$ et $u_0 \in H$ l'équation (2.2.23) admet une solution unique.

Remarque 2.2.3. De même, il est également possible d'étendre les *théorème 2.2.2.-2.2.3.* au cas des opérateur non linéaire.

Chapitre 3

Approximation des équations et inéquations de type monotone

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les résultats d'existence et d'unicité pour les équations et les inéquations impliquant des opérateurs monotones. L'objectif du présent chapitre sera de montrer comment de telles solutions peuvent être approchées en utilisant des méthodes d'éléments finis. Nous commençons par une théorie d'approximation abstraite. Nous constaterons que ces problèmes, lorsqu'ils sont formulés dans des espaces de fonctions de dimension finie, peuvent être résolus de manière constructive

3.1 Approximation des équations elliptiques

Soit considérons une équation elliptique linéaire abstraite $\{V, a, f\}$ où V est un espace de Hilbert, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire V -elliptique bornée et $f \in V'$ soit $S \subset V$ un sous-espace de dimension finie de V . $\dim S = n$ et soit $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ sa base, maintenant, au lieu de $\{V, a, f\}$ nous considérons le problème elliptique $\{S, a, f\}$ dont la solution est notée par nos soins u_s :

$$u_s \in S : a(u_s, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in S \quad (3.1.1)$$

Grace au théorème de Lax-milgram, il existe une solution unique u_s de $\{S, a, f\}$ puisque S est de dimension finie, u_s peut s'écrire sous la forme.

$$u_s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \quad (3.1.2)$$

Pour un choisie approprié des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Insér cette expression dans (3.1.1) et en la fait que la condition nécessaire et suffisante pour (3.1.1) qui doit être satisfait pour tout $v \in S$ doit être satisfait pour tout fonction de base φ_i On obtient :

$$a\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j, \varphi_i\right) = \langle f, \varphi_i \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3.1.3)$$

Cela conduit au système linéaire d'équations algébriques suivant :

$$\sum_{j=1}^n a(\varphi_j, \varphi_i) \alpha_j = \langle f, \varphi_i \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3.1.4)$$

ou sous matricielle :

$$A \vec{\alpha} = \vec{F} \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1.5)$$

où $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ avec $\alpha_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ est ce qu'on appelle la matrice de rigidité et $\vec{F} = (F_i)_{i=1}^n$ avec $F_i = \langle f, \varphi_i \rangle$ est le vecteur de charge. Ainsi le cas de les équation elliptiques dans un sous-espace de dimension finie S de V se réduisent au classique problème d'algèbre linéaire, à savoir résoudre (3.1.5)

Une question naturelle se pose à savoir estiment l'erreur entre les solution u, u_s de $\{V, a, f\}, \{S, a, f\}$ respectivement on a le fondamental suivant résultat ([9]).

Lemme 3.1.1. (lemme de cea) : Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. un borné et V - elliptique forme bilinéaire Alors

$$\|u - u_s\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in S} \|u - v\|. \quad (3.1.6)$$

Où M, α sont les constantes de (2.1.2) et (2.1.3).

Démonstration.

D'après les définition de $\{V, a, f\} \cdot \{S, a, f\}$ et du fait que $S \subset V$ il s'ensuite que.

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in S \\ a(u_S, v) &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in S \end{aligned}$$

A partir de la on voit que :

$$a(u - u_S, v) = 0 \quad \forall v \in S \quad (3.1.7)$$

Soit $v \in S$ un élément arbitraire de (2.1.2) et (2.1.3) on obtient que

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_S\|^2 &\leq a(u - u_S, u - u_S) \\ &= a(u - u_S, u - v) + a(u - u_S, v - u_S) \\ &= a(u - u_S, u - v) \leq M \|u - u_S\| \|u - v\| \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

En utilisant (3.1.7) et le fait que S est un ensemble linéaire de la nous pouvons facilement arrêter é (3.1.6).

Remarque 3.1.1.

Si a est symétrique dans V alors $\{S, a, f\}$ est équivalent a la minimisation de J donnée par (2.3.4) sur S :

$$u_S \in S \quad J(u_S) = \min_{v \in S} J(v) \quad (3.1.7)$$

Ou exprimée sous la forme algébrique :

$$\vec{\alpha}^* \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \mathcal{J}(\vec{\alpha}^*) = \min_{\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{J}(\vec{\alpha}) \quad (3.1.8)$$

Où

$$\mathcal{J}(\vec{\alpha}) = \frac{1}{2}(\vec{\alpha}, A\vec{\alpha}) - (\vec{F}, \vec{\alpha}) \quad (3.1.9)$$

Avec A, \vec{F} étant respectivement la matrice de rigidité le vecteur de charge.

L'approche ou l'espace de dimension infinie V est remplacé par son espace fini le sous-espace dimensionnel S est connu sous le nom de méthode galerkim ou de méthode Ritz (Voir (3.1.9)) lorsque a est symétrique.

D'après (3.1.6) nous voyons que si $u \notin S$ Alors l'erreur $\|u - u_s\|$ est positive, un des problèmes fondamentaux de la théorie de l'approximation peuvent être formulés comme suit :

Sommes nous capables de réduire cette erreur en dessous d'une tolérance donnée ? de toute évidence, un seul l'espace S n'est pas suffisant.

Soit $h > 0$ un paramétré de discrétisation (la signification de h sera vue plus tard) A tout $h > 0$ Nous associons un sous-espace de dimension finie V_h de V , $\dim V_h = n(h)$ où : $n(h) \rightarrow +\infty$ pour $h \rightarrow 0_+$. Soit $u_h \in V_h$ est une solution unique de $\{V_h, a, f\}$. Alors sur la base du *lemme 3.1.1* nous savons que l'erreur entre u et u_h peuvent être estimés comme suit :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \quad (3.1.10)$$

De la découle facilement le résultat de convergence suivant.

Théorème 3.1.1.

soit la famille $\{V_h\}, h \rightarrow 0_+$ possédé proprement l'approximation suivante :

$$\forall v \in V \exists \{v_h\}, v_h \in V_h \quad \text{tel que} \quad \|v - v_h\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0_+. \quad (3.1.12)$$

Alors :

$$\|u - u_h\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0_+$$

La méthode de Ritz- Galerkin est convergente.

Passons maintenant aux équations elliptiques non linéaire. Soit $T : W \rightarrow W'$ un fonction d'une espace de Banach réflexif W dans son dual W' qui est fortement monotone et localement Lipchitz continu en W (voir (2.1.34)(a),(b))

Soit $S \subset W$ un sous-espace de dimension finie de W de manière analogue au linéaire cas ou nous résolvons le problème :

$$u_S \in S : \langle T(u_S), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in S \quad (3.1.13)$$

Pour $f \in W'$ Donnée ou équivalent.

$$\left\langle T\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j\right), \varphi_i \right\rangle = \langle f, \varphi_i \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3.1.14)$$

Où encore une fois $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ sont les fonctions de base de S contrairement au linéaire problème (3.1.14) représente un système non linéaire d'équations algébriques pour des coefficients inconnus $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. L'analogie avec le *lemme 3.1.1* est également vrai en effet.

Lemme 3.1.2 : Soit T fortement monotone et localement Lipchitz continu dans W . Alors

$$\alpha(\|u - u_s\|) \leq C \inf_{v \in S} \|u - v\|, \quad (3.1.15)$$

Où α est un fonction de (2.1.34)(a) et C est une constante dépendant de $\|f\|_{W'}$ et $\|T(0)\|_{W'}$

La preuve est parallèle à celle du *lemme 3.1.1*.

Remarque 3.1.2.

Si T est l'opérateur potentiel Φ Satisfaisant (2.1.37) et (2.1.38) le problème (3.1.13) est équivalent à

$$u_S \in S : \Phi(u_S) = \min_{v \in S} \Phi(v), \quad (3.1.16)$$

c'est-à-dire au problème de minimisation pour une fonctionnelle mais non quadratique.

Pour les mêmes raisons que précédemment nous introduisons une famille $\{w_h\}$, $h \rightarrow 0_+$ de les sous-espace de dimension finie de W et définissent les problèmes non linéaires suivants sur W_h :

$$u_h \in W_h : \langle T(u_h), v_h \rangle = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in W_h \quad (3.1.17)$$

De (3.1.15) et des propriétés de α on déduit facilement le résultat de convergence suivant :

Théorème 3.1.2. Soit T le même que ci-dessous et supposons que :

$$\forall v \in W \quad \exists \{v_h\}, v_h \in W_h \quad \text{tel que} \quad \|v - v_h\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0_+. \quad (3.1.18)$$

Alors :

$$\|u - u_h\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0_+. \quad (3.1.19)$$

3.2 Approximation des inéquations variationnels elliptiques

Dans cette section, nous rappelons brièvement les principaux résultats de l'approximation abstraite théorie des inéquations elliptiques. Pour plus de détails. [17].

Soit $\{V, a, f\}$ une inéquation elliptique de première espace, où K est un sous-ensemble non vide fermé et convexe d'une espace de Hilbert réel V , $f \in V'$ et $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire bornée et elliptique dans V . notre objectif est cas de l'elliptique équations, supposons que Q est une autre sous-ensemble non vide, fermé et convexe de un sous-espace de dimension finie $S \subset V$. considérons l'inéquation $\{V, a, f\}$ avec la solution u_Q c'est-à-dire :

$$u_Q \in Q : a(u_Q, v - u_Q) \geq \langle f, v - u_Q \rangle \quad \forall v \in Q \quad (3.2.1)$$

Nous commençons par la représentation algébrique de (3.2.1). Soit $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ une base de S . Alors, S est isométriquement isomorphe à \mathbb{R}^n . L'isomorphisme correspondant qui associe à tout $v \in S$ ses coordonnées par rapport à $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ sera noté par \mathcal{T}_s tandis que \mathcal{T}_s^{-1} Représente son inverse. Il est facilement constaté que $U = \mathcal{T}_s^{-1}(Q)$ est un sous-ensemble non vide fermé et convexe de \mathbb{R}^n et que (3.2.1) peut être exprimer de mailée équivalente comme suit :

$$\vec{\alpha}^* \in U : (A\vec{\alpha}^*, \vec{\alpha} - \vec{\alpha}^*) \geq (\vec{F}, \vec{\alpha} - \vec{\alpha}^*) \quad \forall \vec{\alpha} \in U, \quad (3.2.2)$$

où A, \vec{F} est la matrice de rigidité le vecteur de charge respectivement.

Si la forme bilinéaire A est symétrique en V (3.2.1) équivant à :

$$u_Q \in Q \quad J(u_Q) = \min_{v \in Q} J(v), \quad (3.2.3)$$

où J est donnée par (2.1.10) la représentation algébrique de (3.2.3) conduit à la problématique de programmation mathématique non linéaire suivante :

$$\vec{\alpha}^* \in U : \mathcal{J}(\vec{\alpha}^*) = \min_{\vec{\alpha}^* \in U} \mathcal{J}(\vec{\alpha}), \quad (3.2.4)$$

où

$$\mathcal{J}(\vec{\alpha}) = \frac{1}{2}(\vec{\alpha}, A\vec{\alpha}) - (\vec{F}, \vec{\alpha})$$

est la fonction quadratique, ce problème peut être résolu en utilisation des méthodes de minimisation numérique dont le choix particulier dépend fortement du caractère de l'ensemble U , définissant les contraintes.

Maintenant, Nous allons dériver l'estimation d'erreur $\|u - u_Q\|$ notons que l'ensemble Q utilisé pour la définition du problème approximatif $\{Q, a, f\}$ n'est pas nécessairement une partie d'ensemble original K . Nous avons la généralisation suivante du *lemme 3.1.1*.

Lemme 3.2.1.

Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire bornée et V -elliptique et u, u_Q sont des solutions uniques à $\{K, a, f\}, \{Q, a, f\}$ respectivement. Alors

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_Q\|^2 &\leq a(u - u_Q, u - u_Q) \\ &\leq \langle f, u - u_Q \rangle + \langle f, u_Q - v \rangle + a(u - u_Q, u - v_Q) \\ &\quad + a(u, v - v_Q) + a(u, v_Q - u) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Se vérifie pour tout $v_Q \in Q$ est tout $v \in K$.

Démonstration.

De la définition de $\{K, a, f\}, \{Q, a, f\}$ il s'ensuit que.

$$\begin{aligned} a(u, u) &\leq \langle f, u - v \rangle + a(u, v) \quad \forall v \in K \\ a(u_Q, u_Q) &\leq \langle f, u_Q - v_Q \rangle + a(u_Q, v_Q) \quad \forall v_Q \in Q \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \alpha \|u - u_Q\|^2 &\leq a(u - u_Q, u - u_Q) = a(u, u) + a(u_Q, u_Q) \\
 &\quad - a(u_Q, u) - a(u, u_Q) \leq \langle f, u - v \rangle + a(u, v) \\
 &\quad + \langle f, u_Q - v_Q \rangle + a(u_Q, v_Q) - a(u_Q, u) - a(u, u_Q) \\
 &= \langle f, u - v_Q \rangle + \langle f, u_Q - v \rangle + a(u - u_Q, v - v_Q) \\
 &\quad + a(u, v - u_Q) + a(u, v_Q - u) \quad \forall v_Q \in Q, \quad \forall v \in K
 \end{aligned}$$

Remarque 3.2.1.

Si $Q \subset K$ alors (3.2.5) peut être simplifiée, en effet : insérer $v = u_Q \in K$ dans le membre droit de (3.2.5) nous obtient :

$$\begin{aligned}
 \alpha \|u - u_Q\|^2 &\leq a(u - u_Q, u - u_Q) \leq \langle f, u - v_Q \rangle \\
 &\quad + a(u - u_Q, u - v_Q) + a(u, v_Q - u) \quad \forall v_Q \in Q.
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Pour réduire l'erreur entre u et u_Q en dessous d'une tolérance donnée a priori, une seule ensemble convexe Q n'est encore une fois pas suffisante. Comme dans le cas des équations, avec n'importe quel paramètre de discrétisation $h > 0$, nous associons un sous-ensemble non vide, fermé et convexe K_h d'un espace de dimension finie V_h . Désignons par u, u_h la solution de $\{K, a, f\}, \{Q, a, f\}$, respectivement. Sur la base du *Lemme 3.2.1*, l'erreur entre $\|u - u_h\|$ peut être estimée comme suit:

$$\begin{aligned}
 \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq \langle f, u - v_h \rangle + \langle f, u_h - v \rangle + a(u - u_h, u - v_h) \\
 &\quad + a(u, v - u_h) + a(u, v_h - u) \quad \forall v_h \in K_h, \quad \forall v \in K
 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Avec la modification suivants lorsque $K_h \subset K, \forall h > 0$:

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq \langle f, u - v_h \rangle + a(u - u_h, u - v_h) + a(u, v_h - u) \quad \forall v_h \in K_h \tag{3.2.8}$$

Remarque 3.2.2.

Si $K_h \subset K$ pour tout $h > 0$ alors K_h est appelé une approximation interne de K , sinon ou dit que K_h est un approximation externe.

Une autre application possible de (3.2.7), (3.2.8) est la convergence suivant résultat :

Théorème 3.2.1.

Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire bornée et V -elliptique soit la famille $\{K_h\}$ posséder les propriétés suivantes :

$$\forall v \in K \exists \{v_h\}, v_h \in K_h \quad \text{tel que} \quad \|v_h - v\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0_+ \quad (3.2.9)$$

$$\text{de } v_h \rightarrow v \text{ (faiblement) dans } V, v_h \in K_h, \text{ il s'ensuit que } v \in K \quad (3.2.10)$$

Alors :

$$\|u - u_h\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0_+$$

Démonstration :

Il est facilement visible que $\{u_h\}$ est borné dans V . Par conséquent, il existe une sous-suite $\{u_{h'}\} \subset \{u_h\}$ et un élément $u^* \in V$ tel que

$$u_{h'} \rightarrow u^* \text{ dans } V, \quad h' \rightarrow 0_+$$

De (3.2.10) il résulte que $u^* \in K$ par contre la solution u de $\{K, a, f\}$ peut être approximée par des éléments de K_h

$$\exists \{\bar{v}_h\}, \bar{v}_h \in K_h \quad \text{tel que} \quad \|u - \bar{v}_h\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0_+.$$

Insérant $v = u^*, v_h = \bar{v}_h$ dans (3.2.7) on voit que tous les termes du membre de droite tendent vers zéro et par conséquent

$$\|u - u_{h'}\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0_+.$$

Nous avons prouvé que toute sous-suite faiblement convergente de $\{u_h\}$ converge fortement vers u . ce qui est unique, de là nous pouvons conclure que la suite entière $\{u_h\}$ tend vers u dans la norme de V .

Remarque 3.2.3.

Si $K_h \subset K$ pour tout $h > 0$ Alors (3.2.10) est automatiquement satisfait cela découle du fait que tout ensemble convexe et fermé si et seulement s'il est faiblement fermé.

Ces résultats peuvent être facilement étendus aux inégalités variationnelles du deuxième type. Soit $\{K, a, f, j\}$ une inégalité de seconde espèce et $\{K_h, a, f, j\}$ son approximation alors

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq \langle f, u - v_h \rangle + \langle f, u_h - v \rangle \\ &+ a(u - u_h, u - v_h) + a(u, v - u_h) + a(u, v_h - u) \\ &+ j(v) - j(u_h) + j(v_h) - j(u) \quad \forall v_h \in K_h, \forall v \in K \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

ou lorsque $K_h \subset K, \forall h > 0$:

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq \langle f, u - v_h \rangle + a(u - u_h, u - v_h) \\ &+ a(u, v_h - u) + j(v_h) - j(u) \quad \forall v_h \in K_h \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

De plus, le *Théorème 3.2.1* reste valable. Enfin, ces résultats peuvent être facilement étendus aux inégalités elliptiques impliquant des applications fortement monotones et localement Lipschitz T dans un espace de Banach réflexif W . Si u et u_h sont des solutions de

$$u \in K : \langle T(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K \quad (3.2.13)$$

$$u_h \in K_h : \langle T(u_h), v_h - u_h \rangle \geq \langle f, v_h - u_h \rangle \quad \forall v_h \in K_h, \quad (3.2.14)$$

alors

$$\begin{aligned} \alpha (\|u - u_h\|) \|u - u_h\| &\leq \langle f, u - v_h \rangle + \langle f, u_h - v \rangle \\ &+ \langle T(u_h) - T(v), v_h - u \rangle + \langle T(u), v - u_h \rangle + \langle T(u), v_h - u \rangle \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

est valable pour tout $v \in K$ et tout $v_h \in K_h$, où α est une fonction avec les propriétés formulé dans (2.4.34)(a)

3.3 Approximation des équations paraboliques et des inéquations variationnelles

Dans cette section, nous introduisons les idées de base et les résultats concernant la théorie abstraite de l'approximation pour les problèmes paraboliques, nous allons nous restreindre à la méthode dite standard de galavkin (voir [17, 19]), nous commençons par la théorie de

l'approximation semi-secrète (appelée aux méthode Galerkin en temps continu), dans laquelle seules les variables spatiales sont discrétisées, Après cela, nous tournons notre attention vers l'approximation entièrement discrète théorie.

3.3.1 Approximation semi-discrète

Soit V et H des espaces de Hilbert réels séparables de telle sorte qu'ils forment un triplet d'évolution

$$"V \subseteq H \subseteq V^*"$$

Par son de simplicité, nous supposons que la forme bilinéaire $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ne dépend pas du temps t , supposons que a satisfasse (2.2.1) et (2.2.2) (car "Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $\beta = 0$ dans (2.2.2), $f \in L^2(0, T; V')$ et $u_0 \in H$. Nous décrivons l'approximation de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in W(v) \text{ tel que} \\ \langle u'(t) - Au(t) - f(t), v \rangle = 0 \quad \forall v \in V \text{ pour p.p. } t \in (0, T) \\ \text{et } u(0) = u_0 \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

avec A définie par (2.1.4).

Soit $S \subset V$ un sous-espace de dimension finie de V . $\dim S = n$ et $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ être sa base, Notons u_{0s} une approximation de u_0 à partir de S , Alors l'approximation semi-discrète (les variables spatiales sont discrétisées, mais le temps la variable t est continue) de (3.3.1) se lit comme suite

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_s \in H^1(0, T; S) \text{ tel que} \\ \langle u'_s(t) - Au_s(t) - f(t), v \rangle = 0 \quad \forall v \in S \text{ pour p.p. } t \in (0, T) \\ \text{et } u_s(0) = u_{0s} \end{array} \right. \quad (3.3.2)$$

Insérer l'extension:

$$u_s(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \varphi_j$$

Dans (3.3.2) nous arrivons au système d'équations différentielles ordinaires:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n) \text{ tel que} \\ \sum_{j=1}^n \alpha'_j(t) \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle + \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \langle A\varphi_j, \varphi_i \rangle = \langle f(t), \varphi_i \rangle \\ \forall i = 1, \dots, n \text{ pour p.p. } t \in (0, T) \text{ et} \\ \alpha_j(0) = \alpha_{0j} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \left(u_{0S} = \sum_{j=1}^n \alpha_{0j} \varphi_j \right), \end{array} \right. \quad (3.3.3)$$

ou sous forme matricielle

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M} \vec{\alpha}'(t) + \mathbf{A} \vec{\alpha} = \vec{\mathbf{F}}(t) \\ \text{et } \vec{\alpha}(0) = \vec{\alpha}_0, \end{array} \right. \quad (3.3.4)$$

où $\mathbf{M} = (m_{ij})_{ij=1}^n$, $m_{ij} = \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle$, est-ce qu'on appelle la matrice de masse et $\mathbf{A}, \vec{\mathbf{F}}$ la matrice de rigidité respectivement le vecteur de charge. Soit u_S mentionnons l'appariement de dualité $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$ est réalisé par le produit scalaire dans H c'est-à-dire $m_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i)$.

Ensuite, nous analyserons comment les problèmes semi-discrets approximat l'original. À cette fin, nous introduisons une famille $\{V_h\}$ de sous-espaces de dimension finie de V ($h > 0$ est un paramètre de discrétisation, $\dim V_h = n(h)$ et $n(h) \rightarrow \infty$ lorsque $h \rightarrow 0+$). Notons $u_h \in L^2(0, T; V_h)$ une solution unique de (3.3.2) avec la condition initiale $u_h(0) = u_{0h} \in V_h$. Le résultat de convergence bien connu suivant s'applique ([20, 17])

Théorème 3.3.1.

Soit la famille $\{V_h\}$, $h \rightarrow 0+$ satisfaisant (3.1.12) et

$$|u_{0h} - u_0| \rightarrow 0 \quad , \quad h \rightarrow 0+. \quad (3.3.5)$$

Alors:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(0, T; V)} &\rightarrow 0, \\ \|u - u_h\|_{C([0, T]H)} &\rightarrow 0, h \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

3.3.2 Estimations d'erreur entre les solutions du problème semi-discret et du problème continu

Pour obtenir les estimations d'erreur entre les solutions du problème semi-discret et du problème continu, il est nécessaire d'imposer certaines hypothèses supplémentaires de régu-

larité sur u_h, u et u_0 . Ensuite, nous supposons que $u \in H^1(0, T; V)$ (notez que u_h satisfait automatiquement à cette hypothèse) et $u_0 \in V$. De plus, nous définissons la projection dite de Ritz P_h de V sur V_h , qui est la "projection orthogonale" par rapport au "produit scalaire"

$$\langle A., . \rangle$$

$$\langle A_{P_h} v, w_h \rangle = \langle Av, w_h \rangle \quad \forall w_h \in V_h. \quad (3.3.6)$$

Dans ce qui suit, nous supposons que A est symétrique.

Théorème 3.3.2. Soient u et u_h des solutions de (3.3.1) et (3.3.2), respectivement.

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|u_h(t) - u(t)| \leq C \left(|u_{0h} - u_0| + |P_h u_0 - u_0| + \int_0^t |P_h u'(s) - u'(s)| ds \right) \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.3.7)$$

et

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq C (\|u_{0h} - u_0\| + \|P_h u_0 - u_0\| + \|P_h u(t) - u(t)\| + \left(\int_0^t |P_h u'(s) - u'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}) \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.3.8)$$

Démonstration : Notons

$$u_h - u = (u_h - P_h u) + (P_h u - u) \equiv \theta_h + \rho_h \quad (3.3.9)$$

Tout d'abord, nous estimons θ_h . En utilisant le fait que u et u_h sont des solutions de (3.3.1) et (3.3.2), respectivement, nous obtenons la relation clé

$$\begin{aligned} & \langle \theta_h'(s), v \rangle + \langle A\theta_h(s), v \rangle \\ &= (\langle u_h'(s), v \rangle + \langle Au_h(s), v \rangle) - \langle AP_h u(s), v \rangle - \langle (P_h u)'(s), v \rangle \\ &= \langle f(s), v \rangle - \langle Au(s), v \rangle - \langle (P_h u)'(s), v \rangle \\ &= -\langle (P_h u)'(s) - u'(s), v \rangle = -\langle \rho_h'(s), v \rangle \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

En insérant $v = \theta_h(s)$ dans (3.3.10) et en tenant compte de (2.2.2), nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} |\theta_h(s)|^2 + \alpha \|\theta_h(s)\|^2 \leq |\rho_h'(s)| |\theta_h(s)|. \quad (3.3.11)$$

Ainsi, nous avons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} |\theta_h(s)| \leq |\rho_h'(s)| \quad (3.3.12)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} |\theta_h(t)| &\leq |\theta_h(0)| + \int_0^t |\rho'_h(s)| ds \\ &\leq |u_{0h} - u_0| + |P_h u_0 - u_0| + \int_0^t |P_h u'(s) - u'(s)| ds \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Ici, nous avons également utilisé le fait que la dérivée temporelle et l'opérateur P_h commutent, c'est-à-dire, $(P_h u)' = P_h u'$ et que $u \in H^1(0, T; V)$. Pour ρ_h , nous obtenons facilement l'estimation.

$$\begin{aligned} |\theta_h(t)| &= \left| \rho_h(0) + \int_0^t \rho'_h(s) ds \right| \\ &\leq |P_h u_0 - u_0| + \int_0^t |P_h u'(s) - u'(s)| ds. \end{aligned}$$

Ceci, combiné à (3.3.13), prouve (3.3.7).

Pour prouver (3.3.8), nous choisissons $v = \theta'_h(s)$ dans (3.3.10). Cela donne

$$\begin{aligned} |\theta'_h(s)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \langle A\theta_h(s), \theta_h(s) \rangle &\leq |\rho'_h(s)| |\theta'_h(s)| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(|\rho'_h(s)|^2 + |\theta'_h(s)|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Nous intégrons (3.3.14) sur l'intervalle $(0, t)$ et utilisons (2.2.1), (2.2.2). Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \|\theta_h(t)\|^2 &\leq \frac{M}{\alpha} \|\theta_h(0)\|^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t |\rho'_h(s)|^2 ds \\ &\leq \frac{M}{\alpha} (\|u_{0h} - u_0\| + \|P_h u_0 - u_0\|)^2 + \int_0^t |P_h u'(s) - u'(s)|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

De cela, nous arrivons facilement à la deuxième estimation de l'erreur (3.3.8).

3.3.3 Approximations des inéquations variationnelles paraboliques.

Soit K un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de V , et soit Q un autre sous-ensemble non vide, fermé et convexe d'un sous-espace de dimension finie $S \subset V$. Soient a et f comme précédemment. Ensuite, l'approximation semi-discrète de l'inégalité variationnelle parabolique du premier type (2.2.10) est définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_Q \in H^1(0, T; S) \cap L^2(0, T; Q) \text{ tel que} \\ \langle u'_Q(t) + Au_Q(t), v - u_Q(t) \rangle \geq \langle f(t), v - u_Q(t) \rangle \\ \text{pour tout } v \in Q, \text{ pour p.p. } t \in (0, T) \\ \text{et } u_Q(t) = u_{0Q} \end{array} \right. \quad (3.3.16)$$

où u_{0Q} est une approximation de u_0 provenant de Q . La représentation algébrique correspondante de l'équation (3.3.16) se lit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{\alpha}^* \in H^1(0, T; \mathbb{R}^n) \cap L^2(0, T; U) \text{ tel que} \\ (\mathbf{M}\vec{\alpha}^*(t) + \mathbf{A}\vec{\alpha}^*(t), \vec{\alpha} - \vec{\alpha}^*) \geq (\vec{\mathbf{F}}(t), \vec{\alpha} - \vec{\alpha}^*) \\ \text{pour tout } \vec{\alpha} \in U, \text{ pour p.p. } t \in (0, T) \\ \text{et } \vec{\alpha}^*(0) = \vec{\alpha}_0. \end{array} \right. \quad (3.3.17)$$

Ici, $U = \mathcal{T}_S^{-1}(Q)$ et $\vec{\alpha}_0 = \mathcal{T}_S^{-1}(u_{0Q})$ (rappelons que \mathcal{T}_S est l'isomorphisme entre \mathbb{R}^n et S). La signification des autres symboles est la même que dans (3.3.4). Maintenant, nous établissons une analogue du *Théorème 3.3.1.* pour l'approximation (3.3.16). Nous introduisons une famille $\{V_h\}$ de sous-espaces de dimensions finies $V_h \subset V$ et une famille $\{K_h\}$ de sous-ensembles non vides, fermés et convexes $K_h \subset V_h$. Pour simplifier, nous supposons que $0 \in K$ et $0 \in K_h$ pour tout $h > 0$. Nous désignons par u et u_h la solution de (2.2.10), (3.3.16), respectivement (avec $S = V_h$ et $Q = K_h$). Alors,

Théorème 3.3.3. [16] Soit $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire bornée, V -elliptique et symétrique, et $f \in L^2(0, T; H)$. Soit la famille $\{K_h\}$ satisfaisant (3.2.9), (3.2.10), la suite $\{u_{0h}\}, u_{0h} \in K_h$, satisfait (3.3.5) et est bornée dans V . De plus, supposons que V soit également compactement intégré dans H . Alors,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(0, T; V)} &\rightarrow 0, \\ \|u - u_h\|_{C([0, T]; H)} &\rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0_+. \end{aligned}$$

3.3.4 Les inéquation variationnelles paraboliques du deuxième type

Soit $j : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe, semi-continue inférieurement et propre. En rappelant la formulation (2.2.11), nous pouvons étendre l'approximation semi-discrète (3.3.16), (3.3.17) aux inégalités variationnelles du second type de manière évidente. Esquisons qu'un équivalent du *Théorème 3.3.3* tient à nouveau. Nous supposons que j est également différentiable au sens de Gateaux dans V (dans le cas non différentiable, nous devons approximer j par une séquence de fonctionnelles convexes différentiables au sens de Gateaux ayant des

propriétés appropriées, voir, par exemple [12]. Alors, (2.2.11) est égal à

$$\begin{cases} \langle u'(t) + Au(t) + Dj(u(t)), v - u(t) \rangle \geq \langle f(t), v - u(t) \rangle \\ \text{pour tout } v \in K, \text{ pour p.p. } t \in (0, T) \end{cases} \quad (3.3.18)$$

où $Dj(u(t))$ est la dérivée de Gateaux de j en $u(t)$. Ci-dessous, nous montrons les modifications nécessaires de la preuve du *Théorème 3.3.3* pour obtenir le résultat. Comme dans l'étape **I**, nous arrivons aux inégalités

$$\langle u'_h(s) + Au_h(s) + Dj(u_h(s)), u_h(s) \rangle \leq \langle f(s), u_h(s) \rangle \quad (3.3.19)$$

et

$$\langle u'_h(s) + Au_h(s) + Dj(u_h(s)), u'_h(s) \rangle \leq \langle f(s), u'_h(s) \rangle \quad (3.3.20)$$

Par souci de simplicité, nous supposons que $Dj(0) = 0$. Rappelons d'abord que la dérivée de Gateaux d'une fonctionnelle convexe est monotone. Ainsi, nous avons

$$\langle Dj(u_h(t)), u_h(t) \rangle = \langle Dj(u_h(t)) - Dj(0), u_h(t) - 0 \rangle \geq 0. \quad (3.3.21)$$

Deuxièmement, la différentiabilité et la convexité de j impliquent

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle Dj(u_h(s)), u'_h(s) \rangle ds &= \int_0^t \frac{d}{ds} j(u_h(s)) ds \\ &= j(u_h(t)) - j(u_h(0)) \geq -C(\|u_h(t)\| + 1) \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

En utilisant (3.3.21) et (3.3.22) dans (3.3.19) et (3.3.20) respectivement, et en répétant l'analyse de l'étape **I**.

Dans les étapes **II-IV**, il suffit de noter que

$$\liminf_{h \rightarrow 0_+} \int_0^T j(u_h(t)) dt \geq \int_0^T \liminf_{h \rightarrow 0_+} j(u_h(t)) dt \geq \int_0^T j(u(t)) dt$$

ce qui est dû au lemme de Fatou, à la semi-continuité inférieure faible de j et à $u_h(t) \rightarrow u(t)$.

Le reste de la preuve est le même qu'avant.

3.3.5 Approximation entièrement discrète.

Soit S un sous-espace de dimension finie de V . Soit Δ_k une partition équidistante de $[0, T]$ en $m = m(k)$ sous-intervalles de longueur $k = \frac{T}{m}$. Nous désignons par λ^{i+1} les fonctions

caractéristiques des intervalles $]ik, (i+1)k]$, $i = 0, \dots, m-1$. Le symbole $L^2(\Delta_k; X)$ représente toutes les fonctions constantes par morceaux v sur la partition Δ_k avec des valeurs dans X , c'est-à-dire $v \in L^2(\Delta_k; X)$ ssi et seulement $v = \sum_{i=1}^m v^i \lambda^i$, où $v^i \in X$. La dérivée temporelle $u'(t)$ est approximée par les quotients de différence suivants :

$$u'(t) \approx \frac{u(t+k) - u(t)}{k} \quad \text{ou} \quad u'(t) \approx \frac{u(t) - u(t-k)}{k}.$$

D'autre part, le côté droit f est approximé par une famille de fonctions $\{f_k^i\}_{i=1}^m$, où $f_k^i \in V'$. En utilisant ces notations, nous introduisons plusieurs approximations entièrement discrètes des équations paraboliques.

Nous commençons par le schéma implicite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_{S,k} = \sum_{i=1}^m u_{S,k}^i \lambda^i \in L^2(\Delta_k; S) \text{ tel que} \\ \left\langle \frac{u_{S,k}^{i+1} - u_{S,k}^i}{k}, v \right\rangle + \langle Au_{S,k}^{i+1}, v \rangle = \langle f_k^{i+1}, v \rangle \quad \forall v \in S, i = 0, \dots, m-1 \\ \text{et } u_{S,k}^0 = u_{0S} \in S. \end{array} \right. \quad (3.3.23)$$

D'autres approximations pratiques sont : le schéma de Crank-Nicolson défini par (3.3.23) avec la modification suivante dans (3.3.22)(2).

$$\left\langle \frac{u_{S,k}^{i+1} - u_{S,k}^i}{k}, v \right\rangle + \left\langle A \frac{u_{S,k}^{i+1} - u_{S,k}^i}{2}, v \right\rangle = \left\langle \frac{f_k^{i+1} + f_k^i}{2}, v \right\rangle \quad (3.3.24)$$

and the explicit scheme:

$$\left\langle \frac{u_{S,k}^{i+1} - u_{S,k}^i}{k}, v \right\rangle + \langle Au_{S,k}^i, v \rangle = \langle f_k^i, v \rangle \quad (3.3.25)$$

En utilisant le schéma général θ , nous pouvons réécrire (3.3.23,(2)), (3.3.24), (3.3.25) en une seule expression.

$$\left\langle \frac{u_{S,k}^{i+1} - u_{S,k}^i}{k}, v \right\rangle + \langle Au_{S,k}^{i+\theta}, v \rangle = \langle f_k^{i+\theta}, v \rangle, \quad (3.3.26)$$

où $u_{S,k}^{i+\theta} = \theta u_{S,k}^{i+1} + (1-\theta) u_{S,k}^i$ et $f_k^{i+\theta} = \theta f_k^{i+1} + (1-\theta) f_k^i$, $\theta \in [0, 1]$. Si $\theta = 1, \frac{1}{2}$ ou 0 , (3.3.26) définit respectivement le schéma implicite, le schéma de Crank-Nicolson et le schéma explicite.

En rappelant la définition de la matrice de rigidité \mathbf{A} , de la matrice de masse \mathbf{M} et du vecteur de charge $\vec{\mathbf{F}}$, nous pouvons exprimer le schéma θ comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \vec{\alpha}^{(i+1)} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que} \\ \mathbf{M} \frac{\vec{\alpha}^{(i+1)} - \vec{\alpha}^{(i)}}{k} + \theta \mathbf{A} \vec{\alpha}^{(i+1)} + (1 - \theta) \mathbf{A} \vec{\alpha}^{(i)} = \theta \vec{\mathbf{F}}^{(i+1)} + (1 - \theta) \vec{\mathbf{F}}^{(i)} \\ \text{pour tout } i = 1, \dots, m - 1 \text{ et } = \vec{\alpha}_0. \end{array} \right. \quad (3.3.27)$$

D'après l'équation (3.3.27), nous voyons qu'à chaque niveau de temps $(i + 1)k$, $i = 0, \dots, m - 1$, nous devons résoudre le système linéaire d'équations algébriques suivant :

$$(\mathbf{M} + k\theta \mathbf{A}) \vec{\alpha}^{(i+1)} = k \vec{\mathbf{F}}^{(i+\theta)} + (\mathbf{M} - k(1 - \theta) \mathbf{A}) \vec{\alpha}^{(i)}, \quad (3.3.28)$$

où $\vec{\mathbf{F}}^{(i+\theta)} = \theta \vec{\mathbf{F}}^{(i+1)} + (1 - \theta) \vec{\mathbf{F}}^{(i)}$.

3.3.6 Les résultats de convergence des schémas entièrement discrets.

Ensuite, nous mentionnons brièvement les résultats de convergence des schémas entièrement discrets ci-dessus.

Soit $\{V_h\}$ une famille de sous-espaces de dimension finie de V . Nous notons $u_{h,k}^\theta = \sum_{i=0}^m u_{h,k}^{i+\theta} \lambda^{i+1} \in L^2(\Delta_k; V_h)$ avec $u_{h,k}^{i+\theta}$ étant une solution unique du schéma θ (avec $S = V_h$ et $u_{0S} = u_{0h}$) et u la solution unique du problème continu (2.2.4). Supposons que $\{V_h\}, \{u_{0h}\}$ satisfont respectivement (3.1.12) et (3.3.5). Concernant la famille $\{\{f_k^i\}_{i=0}^{m(k)}\}_k$, nous imposons les hypothèses suivantes :

La suite $\{f_k^\theta\}$, où $f_k^\theta = \sum_{i=0}^m f_k^{i+\theta} \lambda^{i+1}$, $\theta \in [0, 1]$, est uniformément bornée dans $L^2(\Delta_k; V')$ par rapport à k et θ , c'est-à-dire, (3.3.29)

$$\exists C > 0 : \|f_k^\theta\|_{L^2(\Delta_k; V')} \leq C \quad \forall k, \theta;$$

La suite $\{f_k^\theta\}$ possède la propriété de convergence (3.3.30)

$$v_h \rightarrow v \text{ dans } L^2(0, T; V), \quad v_h \in L^2(0, T; V_h), \text{ lorsque } h \rightarrow 0_+$$

$$\Rightarrow \int_0^T \langle f_k^\theta, v_h \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle f, v \rangle dt \text{ lorsque } h, k \rightarrow 0_+.$$

En outre, nous supposons que l'inégalité inverse suivante tient entre les normes V et H :

$$\|v\| \leq s(h) |v| \quad \forall v \in V_h, \quad (3.3.31)$$

où $s(h)$ est une constante positive dépendant de h .

Il est alors possible de démontrer ce qui suit

Théorème 3.3.4.[16] Si les hypothèses énoncées ci-dessus sont satisfaites, alors :

(i) Si $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, le schéma θ est stable et convergent au sens où la suite $\{u_{h,k}^\theta\}$ tend faiblement vers u dans $L^2(0, T; V)$ lorsque $h, k \rightarrow 0_+$;

(ii) Si $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ et que (3.3.31) est satisfaite, alors le schéma θ est stable et convergent (dans le sens ci-dessus) sous la condition $ks(h)^2 < C$, où $C > 0$ est suffisamment grand.

Remarque 1.22 : Nous verrons plus tard que la constante C dans le *Théorème 3.3.4* (ii) peut être choisie comme $\frac{\alpha}{2(1-\theta)M^2} <$, où α, M sont les constantes de (2.2.1) et (2.2.2) respectivement.

References

Bibliographie

- [1] Adams, R. A. (1975). Sobolev Spaces. Academic Press, New York. .
- [2] Aubin, J.-P. and Clarke, F. H. (1979). Shadow prices and duality for a class of optimal control problems. SIAM J. Control Optimization, 17:567-586.
- [3] Aubin, J.-P. and Ekeland, I. (1984). Applied Nonlinear Analysis. J. Wiley and Sons, New York.
- [4] Aubin, J.-P. and Frankowska, H. (1990). Set-valued analysis, volume 2 of Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhauser, Boston.
- [5] Axelsson, O. and Barker, V. A. (1984). Finite Element Solution of Boundary Value Problems. Academic Press, Orlando.
- [6] Barbu, V. (1993). Analysis and control of nonlinear infinite-dimensional systems, volume 190 of Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, Boston.
- [7] Brezis, H. (1973). Operateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert. North-Holland Publ. Co. Amsterdam and American Elsevier Publ. Co., New York.
- [8] Browder, F. E. and Hess, P. (1972). Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces. J. Funct. Anal., 11:251-294.
- [9] Ciarlet, P. G. (1978). The Finite Element Method for Elliptic Problems. North Holland, Amsterdam, New York, Oxford.
- [10] Clarke, F. (1983). Optimization and Nonsmooth Analysis. J. Wiley, New York.

- [11] Doktor, P. (1973). On the density of smooth functions in certain subspaces of Sobolev spaces. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 14:609-622.
- [12] Duvaut, G. and Lions, J. L. (1976). *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [13] Ekeland, I. and Temam, R. (1976). *Convex Analysis and Variational Problems*. North-Holland, Amsterdam.
- [14] Fučík, S. and Kufner, A. (1980). *Nonlinear Differential Equations*. Studies in Applied Mechanics 2. Elsevier, Amsterdam, New York.
- [15] Glowinski, R. (1984). *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer-Verlag, New York.
- [16] Glowinski, R., Lions, J. L., and Tremolieres, R. (1981). Numerical analysis of variational inequalities, volume 8 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North Holland, Amsterdam, New York.
- [17] Hlavacek, I., Haslinger, J., Necas, J., and Lovisek, J. (1988). *Numerical Solution of Variational Inequalities*. Springer Series in Applied Mathematical Sciences 66. Springer-Verlag, New York.
- [18] Lions, J. L. (1969). *Quelques Methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires*. Dunod/Gauthier-Villairs, Paris.
- [19] Nečas, J. (1967). *Les Methodes Directes en Theorie des Equations Elliptiques*. Masson, Paris.
- [20] Nečas, J. and Hlavacek, I. (1981). *Mathematical Theory of Elastic and Elasto Plastic Bodies: An Introduction*. Elsevier, Amsterdam.
- [21] Thomee, V. (1984). *Galerkin finite element methods for parabolic problems*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [22] Zeidler, E. (1990a). *Nonlinear functional analysis and its applications*. II/A. Linear monotone operators. Springer-Verlag, Berlin, New York.

- [23] Zeidler, E. (1990b). Nonlinear functional analysis and its applications. II/B. Nonlinear monotone operators. Springer-Verlag, Berlin, New York.

Résumé

ملخص :

هدفنا في هذه المدكرة هو تقريب المعادلات والمتباينات النموذجية في إيجاد حلول عددية لمشكلات تحليلية معقدة. ولتحقيق ذلك، يتطلب غالبًا تقسيم الفضاء أو الزمان إلى أجزاء متناهية، بالإضافة إلى استخدام تقنيات التقريب للحصول على حلول تقريبية. تستكشف هذه النهج مجموعة من الطرق العددية، مثل السلالم التفاضلية المنتهية وطرق العناصر المحدودة، لحل هذه المشكلات.

الكلمات المفتاحية: تقريب، معادلات، متباينات، نوع الأحادي، طريقة جالركين، طرق التكرار، الرياضيات التطبيقية، التحليل العددي.

Abstract :

Our goal in this memorandum is to approximate model equations and inequalities to find numerical solutions for complex analytical problems. To achieve this, it often requires dividing space or time into finite parts, in addition to using approximation techniques to obtain approximate solutions. This approach explores a range of numerical methods, such as finite difference schemes and finite element methods, to solve these problems.

Keywords : Approximation, Equations, Inequalities, Monotone Type, Galerkin Method, Iterative Methods, Applied Mathematics, Numerical Analysis.

Résumé

Notre objectif dans ce mémoire est d'approximer les équations et les inéquations monotones afin de trouver des solutions numériques pour des problèmes analytiquement complexes. Pour ce faire, il est souvent nécessaire de diviser l'espace ou le temps en parties finies, en plus d'utiliser des techniques d'approximation pour obtenir des solutions approchées. Cette approche explore diverses méthodes numériques, telles que les schémas aux différences finies et les méthodes des éléments finis, pour résoudre ces problèmes.

Mots-Clés : Approximation, Équations, Inégalités, Type monotone, Méthode de Galerkin, Méthodes itératives, Mathématiques appliquées, Analyse numérique.