

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master :

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématiques et numérique

Thème :

Quatrième polynôme de Chebyshev décalé pour l'équation
intégrale de Volterra-Fredholm du premier type

Présenté par:
MIHOUBI Imane
Soutenu publiquement le: 06/06/2026

Devant le jury composé de:

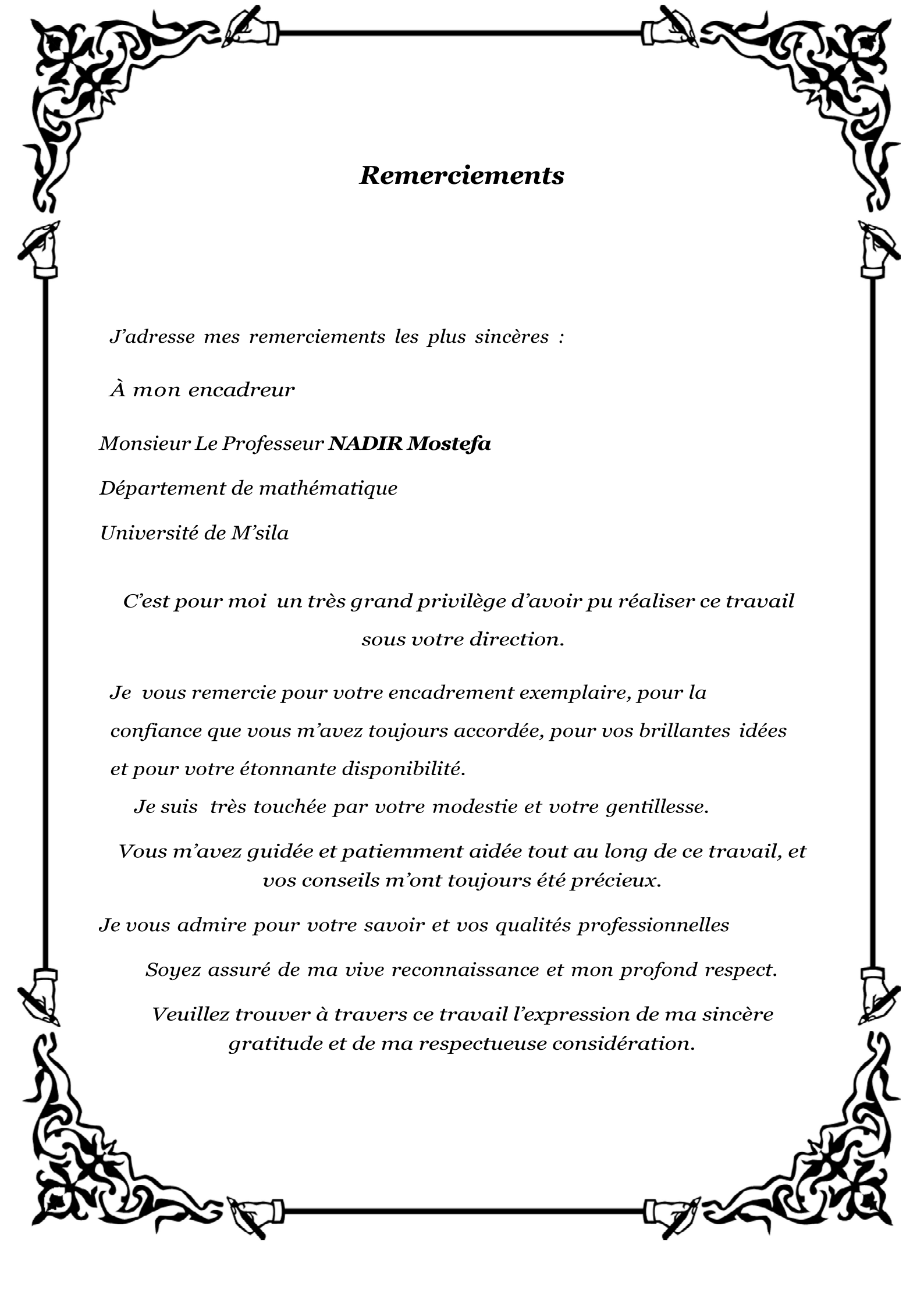
LAKHAL Aissa	M.C.B,	Université de M'sila	Président :
NADIR Mostefa	Prof	Université de M'sila	Encadreur :
GAGUI Bachir	M.C.A,	Université de M'sila	Examineur :

Année universitaire 2025/2026





Avant tout nous remercions
ALLAH *le tout puissant*
et miséricordieux, pour nous
avoir permis de finaliser ce
travail.



Remerciements

J'adresse mes remerciements les plus sincères :

À mon encadreur

*Monsieur Le Professeur **NADIR Mostefa***

Département de mathématique

Université de M'sila

*C'est pour moi un très grand privilège d'avoir pu réaliser ce travail
sous votre direction.*

*Je vous remercie pour votre encadrement exemplaire, pour la
confiance que vous m'avez toujours accordée, pour vos brillantes idées
et pour votre étonnante disponibilité.*

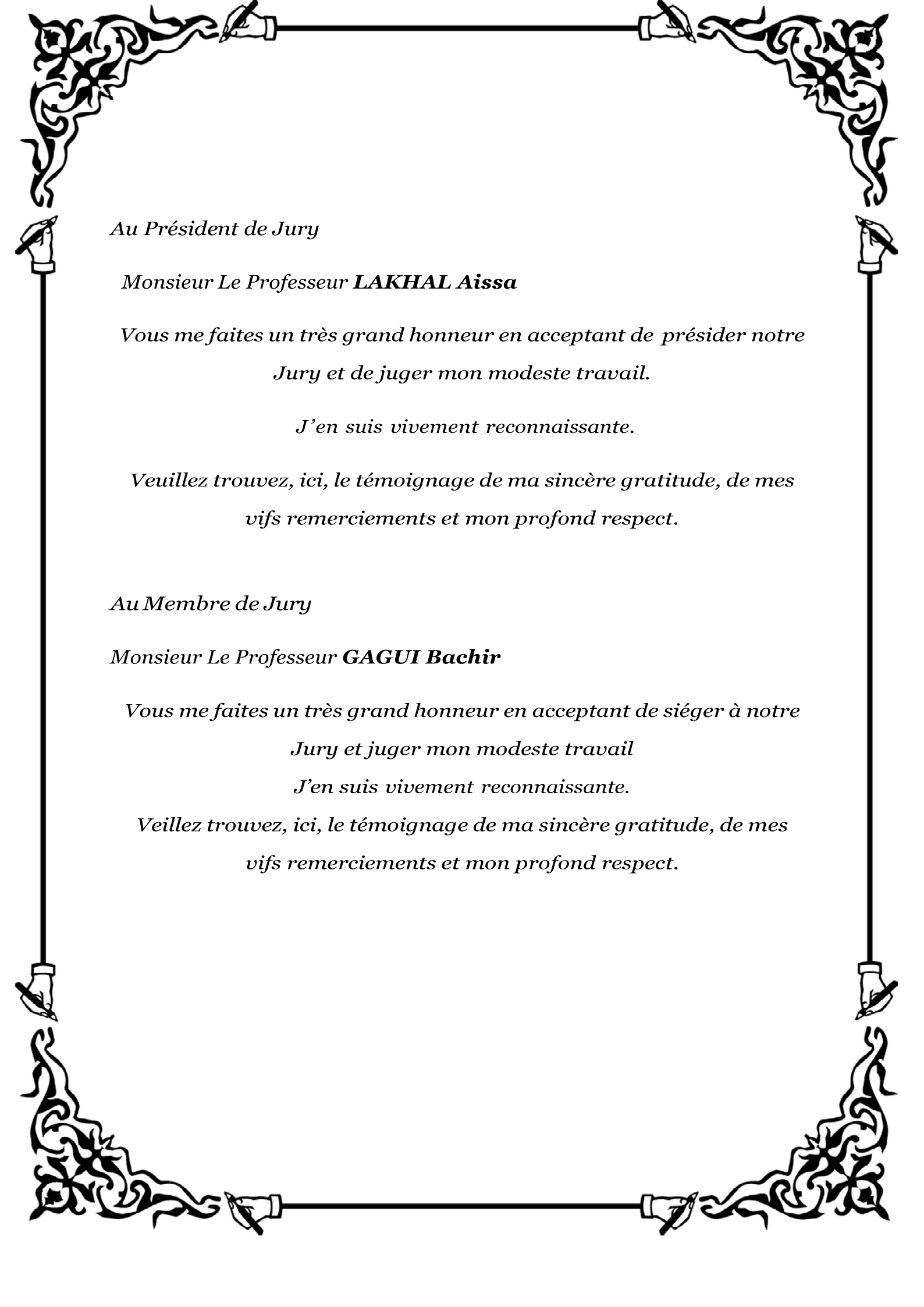
Je suis très touchée par votre modestie et votre gentillesse.

*Vous m'avez guidée et patiemment aidée tout au long de ce travail, et
vos conseils m'ont toujours été précieux.*

Je vous admire pour votre savoir et vos qualités professionnelles

Soyez assuré de ma vive reconnaissance et mon profond respect.

*Veuillez trouver à travers ce travail l'expression de ma sincère
gratitude et de ma respectueuse considération.*



Au Président de Jury

*Monsieur Le Professeur **LAKHAL Aissa***

*Vous me faites un très grand honneur en acceptant de présider notre
Jury et de juger mon modeste travail.*

J'en suis vivement reconnaissante.

*Veillez trouvez, ici, le témoignage de ma sincère gratitude, de mes
vifs remerciements et mon profond respect.*

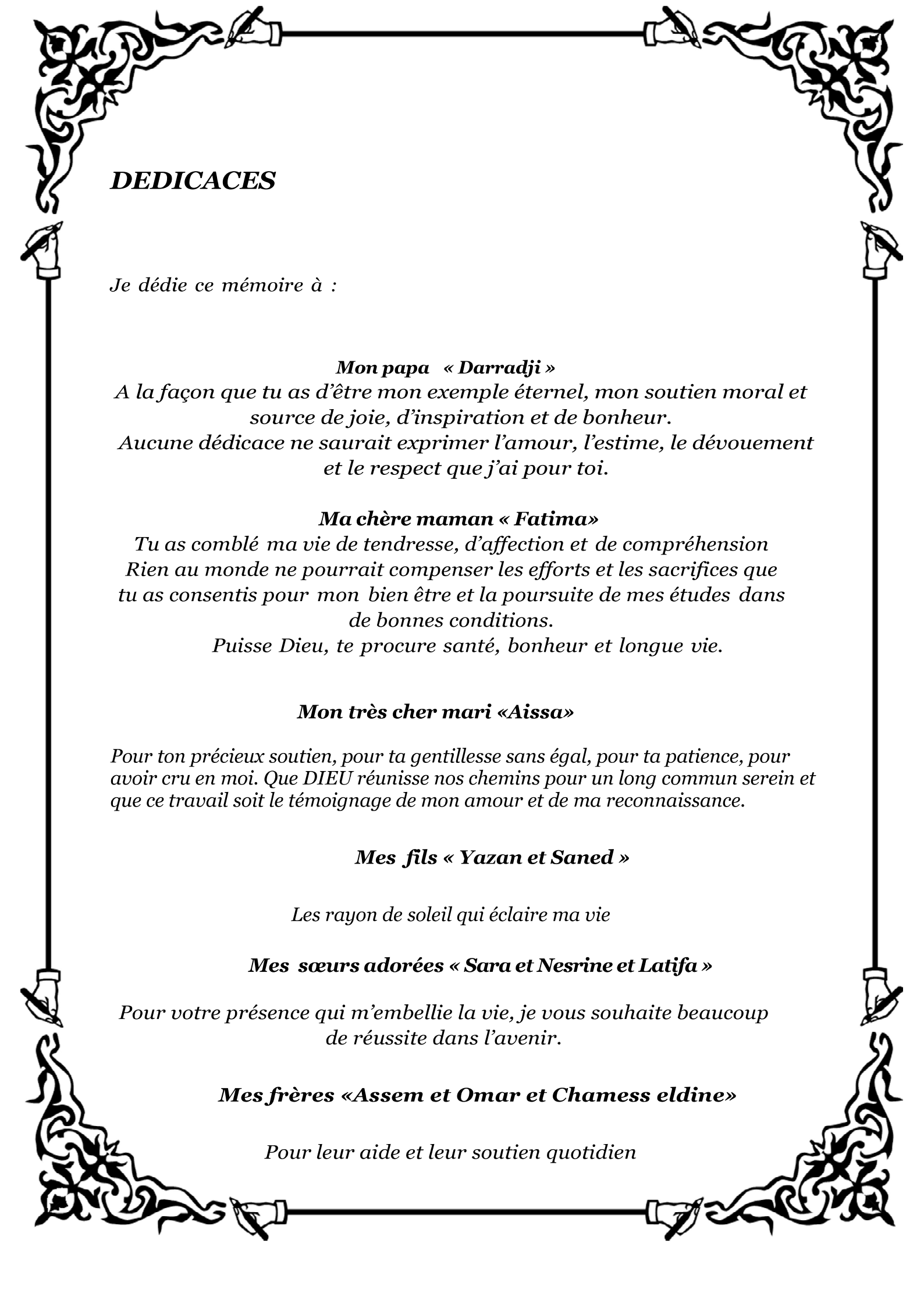
Au Membre de Jury

*Monsieur Le Professeur **GAGUI Bachir***

*Vous me faites un très grand honneur en acceptant de siéger à notre
Jury et juger mon modeste travail*

J'en suis vivement reconnaissante.

*Veillez trouvez, ici, le témoignage de ma sincère gratitude, de mes
vifs remerciements et mon profond respect.*



DEDICACES

Je dédie ce mémoire à :

Mon papa « Darradji »

*A la façon que tu as d'être mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie, d'inspiration et de bonheur.
Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai pour toi.*

Ma chère maman « Fatima »

*Tu as comblé ma vie de tendresse, d'affection et de compréhension
Rien au monde ne pourrait compenser les efforts et les sacrifices que tu as consentis pour mon bien être et la poursuite de mes études dans de bonnes conditions.*

Puisse Dieu, te procure santé, bonheur et longue vie.

Mon très cher mari « Aissa »

Pour ton précieux soutien, pour ta gentillesse sans égal, pour ta patience, pour avoir cru en moi. Que DIEU réunisse nos chemins pour un long commun serein et que ce travail soit le témoignage de mon amour et de ma reconnaissance.

Mes fils « Yazan et Saned »

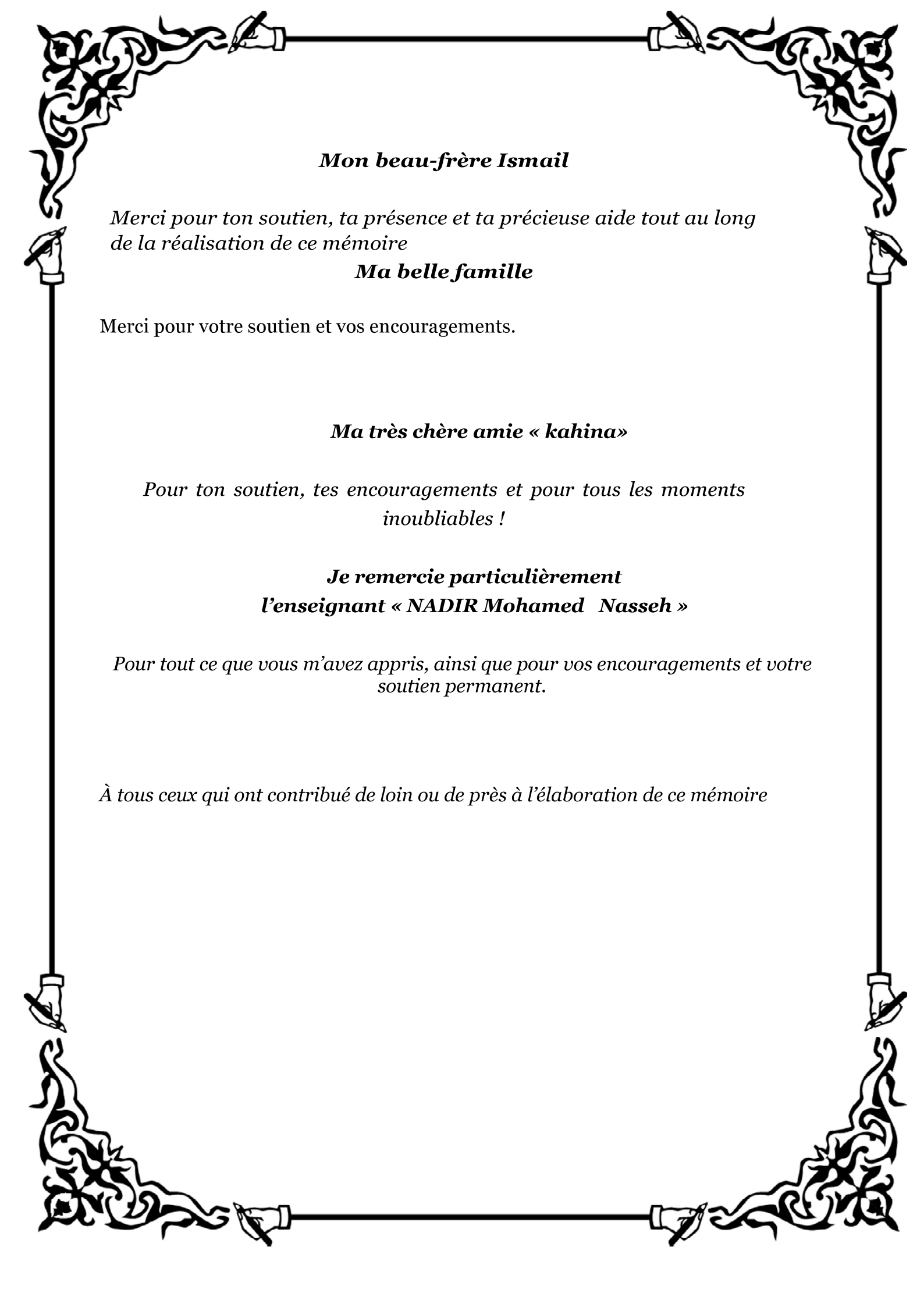
Les rayon de soleil qui éclaire ma vie

Mes sœurs adorées « Sara et Nesrine et Latifa »

Pour votre présence qui m'embellie la vie, je vous souhaite beaucoup de réussite dans l'avenir.

Mes frères « Assem et Omar et Chamess eldine »

Pour leur aide et leur soutien quotidien



Mon beau-frère Ismail

*Merci pour ton soutien, ta présence et ta précieuse aide tout au long
de la réalisation de ce mémoire*

Ma belle famille

Merci pour votre soutien et vos encouragements.

Ma très chère amie « kahina »

*Pour ton soutien, tes encouragements et pour tous les moments
inoubliables !*

***Je remercie particulièrement
l'enseignant « NADIR Mohamed Nasseh »***

*Pour tout ce que vous m'avez appris, ainsi que pour vos encouragements et votre
soutien permanent.*

À tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire

Table des matières

Introduction	i
1 Préliminaires en analyse fonctionnelle	1
1.1 Base de l'analyse fonctionnelle	1
1.1.1 Opérateurs linéaires bornés	1
1.1.2 Espace vectoriel normé :	3
1.1.3 Opérateurs compact :	4
1.1.4 Espace de Banach :	5
1.1.5 Equations aux Opérateurs compacts :	7
1.1.6 Espace de Hilbert	9
2 Equations intégrales et leurs classification	12
2.1 Classification des équations intégrales première espèce :	12
2.1.1 Equations intégrales de Volterra de première espèce :	12
2.1.2 Equations intégrales de Fredholm de première espèce :	12
2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm de première espèce	13
2.2 Régularisation de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm	13
2.3 Classification des équations intégrales de seconde espèce	14
2.3.1 Equations intégrales de Volterra de seconde espèce :	14
2.3.2 Equations intégrales de Fredholm de seconde espèce :	14
2.3.3 Equations intégrales de Volterra -Fredholm de seconde espèce	14
2.4 Théorème d'existence et unicité de la solution des équation intégrale li-	
néaire de Volterra-Fredholm	15
2.5 Polynôme de Chebyshev de quatrième espèce	17
3 Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm	18
3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredholm :	18
3.1.1 Méthode de collocation	18
3.1.2 Méthode de collocation-Chebyshev	19
3.2 Exemples Numériques	21
3.3 Conclusion	24
Bibliographie	25

Introduction

Les équations intégrales de type Volterra–Fredholm de première espèce occupent une place importante dans plusieurs domaines scientifiques et appliqués. Leur résolution analytique étant souvent difficile, les méthodes numériques deviennent indispensables pour obtenir des solutions approchées avec une bonne précision.

Dans ce travail, nous utilisons les polynômes de Chebyshev décalés d'ordre quatre afin de résoudre numériquement ce type d'équations intégrales. Cette méthode permet de transformer le problème initial en une forme plus simple et plus facile à traiter numériquement.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres. Le premier chapitre présente quelques rappels d'analyse fonctionnelle et numérique. Le deuxième chapitre est consacré aux équations intégrales et à leur classification. Enfin, le troisième chapitre porte sur la résolution numérique de l'équation étudiée en utilisant la méthode proposée.

Chapitre 1

Préliminaires en analyse fonctionnelle

1.1 Base de l'analyse fonctionnelle

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Linéarité des opérateurs

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

– *Condition additive*

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

– *Condition homogène*

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in K = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

Continuité des opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la propriété suivante

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0).$$

L'opérateur linéaire A est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F , est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G .

Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.

Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$, ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β , telles que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$.

1.1.2 Espace vectoriel normé :

Normes

Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in E$, et $\lambda \in K$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tout $x, y \in E$

on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|$

Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrisable

Proof. Pour tout $x, y \in E$ on définit la fonction ϕ par

$$\phi(x, y) = \|x - y\|$$

On remarque que cette fonction est bien une métrique sur E car, on a

$$\phi(x, y) = \|x - y\| = 0$$

ou encore

$$x - y = 0$$

D'où l'égalité

$$x = y$$

Il est évident de voir que la distance $\phi(x, y)$ est symétrique

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|y - x\| = \phi(y, x)\end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= \phi(x, z) + \phi(z, y)\end{aligned}$$

□

1.1.3 Opérateurs compact :

Definition 1.1 Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.

Ensembles relativement compacts

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G , il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F .

Theorem 1.2 (critère de compacité)

Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E , la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente dans F .

Proof. Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact. □

Theorem 1.3 Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

Theorem 1.4 Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Proof. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autres part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. $\square$

Theorem 1.5 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors A est compact.

Corollary 1.6 *La boule unité $B(0, 1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

Theorem 1.7 *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.*

Theorem 1.8 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Noyau faiblement singulier

Definition 1.9 *On appelle noyau faiblement singulier la fonction K continue sur $G \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sauf peut être aux points $x = y$ et telle que,*

$$\forall x, y \in G, \ x \neq y, \ \exists M > 0, \ |K(x, y)| < \frac{M}{|x - y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq n$$

Theorem 1.10 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

1.1.4 Espace de Banach :

Suite de Cauchy :

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$; on dit que la suite (x_n) est de Cauchy si, on a la relation suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Soit x_n une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ contient une sous suite x_{n_k} convergente vers x alors la suite x_n est aussi convergente vers le même élément x .

Soit x_n une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

en particulier pour $n_k \geq N_\varepsilon$, on a

$$\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \quad \|x_p - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

avec la convergence de la suite x_{n_k} vers x

$$n_k \geq N_\varepsilon, \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$$

D'où la convergence de la suite x_n vers l'élément x

$$\begin{aligned} \forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \quad \|x_p - x\| &= \|x_p - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| \\ &\leq \|x_p - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Espaces complets

Definition 1.11 *Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy x_n d'élément de E est une suite convergente dans E*

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Implique l'existence d'un élément $x \in E$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Espaces de Banach

Definition 1.12 On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.

1.1.5 Equations aux Opérateurs compacts :

Equations de second espèce

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ définit l'équation de second espèce donnée par

$$\varphi - A\varphi = f ; \quad \varphi, f \in X$$

où f est une fonction donnée et φ la fonction inconnue

Theorem 1.13 Le noyau de l'opérateur T défini par

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X ; T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

est un sous espace fermé et de dimension finie

Theorem 1.14 La suite d'ensemble des noyaux

$$N(T), N(T^2), \dots, N(T^n), \dots$$

est une suite croissante stationnaire. Autrement dit, elle ne contient qu'un nombre fini d'ensembles distincts, c'est à dire il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{0\} \subset N(T), N(T^2) \subset \dots \subset N(T^p) = N(T^{p+1}) = \dots$$

Le nombre p est appelé le nombre de Riez de l'opérateur compact A pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$

Theorem 1.15 *L'image de l'opérateur T défini par ,*

$$\text{Im } T = T(X) = R(T) = \{\psi = T\varphi; \text{ telle que } \varphi \in X\}$$

est un sous espace fermé

Le nombre de Riez p pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$ et le nombre de Riez q pour l'ensemble des images $\{R(T^n)\}$ sont égaux. Autrement dit

$$p = q$$

Theorem 1.16 *Les sous espaces $N(T^n)$ et $R(T^n)$ sont supplémentaires. Autrement dit*

$$X = \ker T^n \oplus \text{Im } T^n \equiv N(T^n) \oplus R(T^n)$$

où $r = p = q$ est le nombre de Riesz

Lemma 1.17 *L'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si, T^r est injectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

Lemma 1.18 *L'opérateur $T = I - A$ est surjectif si et seulement si T^r est surjectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

Theorem 1.19 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si il est surjectif, de plus l'opérateur admet un inverse $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ borné*

Theorem 1.20 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors, pour que l'équation non homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f$$

admette une solution unique $\varphi \in X$, pour tout $f \in X$, il faut et il suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0$$

admette la solution triviale $\varphi = 0$.

Proof. $\square$

1.1.6 Espace de Hilbert

Produit scalaire

Definition 1.21 *On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
5. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Definition 1.22 *un espace de Hilbert H est un espace complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire. En d'autres termes un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme induite par un produit scalaire.*

Généralement l'espace H est séparable est de dimension infinie, en d'autre terme, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans H et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe n vecteurs dans H linéairement indépendants.

Exemple 1.23 *L'espace* $L^2(a, b)$

L'espace $L^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrales défini par

$$L^2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f; \int_I |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

ou l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, muni de la norme

$$\|f\|^2 = \int_I |f(t)|^2 dt$$

induite par le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert

Orthogonalité

Definition 1.24 (*Vecteurs orthogonaux*) On dit que deux vecteurs x et y d'un espace de Hilbert H sont orthogonaux si :

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Base hilbertienne

Une partie X de H est dite dense dans H si :

$$\forall y \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X; \|x - y\| < \varepsilon$$

de manière équivalente si tout y de H est limite d'une suite d'éléments x_n de X :

$$\|x_n - y\| \longrightarrow 0$$

Definition 1.25 Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{k}$ et $F = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que F est une base de Hilbert (base hilbertienne) de H si :

1. F est une famille orthonormée de H , c'est-à-dire : $\begin{cases} \forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0 \\ \forall i \in I, \langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1 \end{cases}$
2. La famille F est de plus complète ou total, c'est-à-dire : l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de F est dense dans H

Theorem 1.26 (*Riesz-Fischer*) Soit un système orthonormé dans un espace de Hilbert H , et soient les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i$ telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ soit convergente, alors on peut trouver un vecteur $f \in H$, tel que

$$\alpha_i = \langle f; \varphi_i \rangle, \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

et de plus, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f; \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

ou encore

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

Soit $\{\varphi_k\}$ un système orthonormé d'éléments d'un espace de Hilbert H , pour que ce système soit complet, il faut et il suffit que, le seul vecteur de H orthogonal au système $\{\varphi_k\}$ est le vecteur nul. Cela signifie qu'il n'existe pas un vecteur non nul de H , qui soit orthogonal à tous les vecteurs du système $\{\varphi_k\}$

Theorem 1.27 Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux.

Remark 1.28 Comme il est connu en algèbre linéaire, que tous les espaces vectoriels ou euclidiens de mêmes dimensions finies n sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à l'espace K^n alors de même tous les espaces de Hilbert sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à L_2

Chapitre 2

Equations intégrales et leurs classification

2.1 Classification des équations intégrales première espèce :

2.1.1 Equations intégrales de Volterra de première espèce :

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est tel que $k(x, t) = 0$ pour $x < t$

Definition 2.1 On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme :

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

2.1.2 Equations intégrales de Fredholm de première espèce :

Definition 2.2 On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme :

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où φ est la fonction inconnue, f et k sont des fonctions connues, les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équations de Fredholm .

2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm de première espèce

Definition 2.3 On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :

$$f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt = 0, \quad x \in [a, b] \quad (2.1)$$

2.2 Régularisation de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm

Pour des fonctions lisses $k_1(x, t)$, $k_2(x, t)$ et $f(x)$ l'équation (2.1) peut être convertie en une équation de Volterra-Fredholm de seconde espèce en différenciant par rapport à x

$$k_1(x, x)\phi(x) + \int_a^x \frac{\partial k_1}{\partial x}(x, t)\phi(t)dt + \int_a^b \frac{\partial k_2}{\partial x}(x, t)\phi(t)dt = f'(x) \quad (2.2)$$

Si $k_1(x, x) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, la division de l'équation (2.2) par le facteur $k_1(x, x)$ nous donne une équation intégrale de seconde espèce, connue en tant que problème bien posé

$$\phi(x) + \int_a^x k_3(x, t)\phi(t)dt + \int_a^b k_4(x, t)\phi(t)dt = g(x) \quad (2.3)$$

où les fonctions k_3, k_4 et g sont données par :

$$k_3 = \frac{1}{k_1(x, x)} \frac{\partial k_1}{\partial x}(x, t), \quad k_4 = \frac{1}{k_1(x, x)} \frac{\partial k_2}{\partial x}(x, t) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{f'(x)}{k_1(x, x)}$$

Si $k_1(x, x) = 0$ pour $t \in [a, b]$, alors nous répétons le processus de différenciation jusqu'à obtenir $\frac{\partial^q k_1}{\partial x^q}(x, t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, avec k_1, k_2 et f dans $C^{q+1}([a, b] \times [a, b])$ et $C^{q+1}([a, b])$, respectivement, où q représente le plus petit entier pour lequel la dérivée de k_1 d'ordre q ne s'annule pas. Ainsi, nous avons :

$$\frac{\partial^q k_1}{\partial x^q}(x, t)\phi(x) + \int_a^x \frac{\partial^{q+1} k_1}{\partial x^{q+1}}(x, t)\phi(t)dt + \int_a^b \frac{\partial^{q+1} k_2}{\partial x^{q+1}}(x, t)\phi(t)dt = f^{(q+1)}(x) \quad (2.4)$$

2.3 Classification des équations intégrales de seconde espèce

2.3.1 Equations intégrales de Volterra de seconde espèce :

Definition 2.4 On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation à inconnue $\varphi(x)$ de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

2.3.2 Equations intégrales de Fredholm de seconde espèce :

Definition 2.5 On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

où $\varphi(x)$ est la fonctions inconnue , $k(x, y)$, et $f(x)$ des fonctions donnés, λ est un facteur connu

2.3.3 Equations intégrales de Volterra -Fredholm de seconde espèce

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints , apparaît dans une équation intégrale .

Definition 2.6 On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt , \quad x \in [a, b] \quad (2.5)$$

On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme :2

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt ds$$

où les fonctions k_1 , k_2 et f sont connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

2.4 Théorème d'existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utilisées pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solutions de l'équation (2.5)

Definition 2.7 Soit X un espace normé complet et $T : X \rightarrow X$ un opérateur, T est dit un opérateur de Picard s'il existe $\varphi_0 \in X$ unique tel que

$$T(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ pour tout } \varphi \text{ de } X$$

Theorem 2.8 (principe de contraction). Soit X un espace normé. Si $T : X \rightarrow X$ un opérateur de contraction admis un point fixe unique φ , alors T est un opérateur de Picard

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi_0)\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|\varphi - T(\varphi)\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Théorèmes d'existence et d'unicité :

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt, \quad x \in [a, b] \quad (2.6)$$

où

1. $f \in C[a, b]$, $k_1(x, t) \in C(D_1)$, avec $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq t \leq x \leq b\}$
2. $\varphi \in C[a, b]$, $k_2(x, t) \in C(D_2)$, avec $D_2 = [a, b] \times [a, b]$
3. $M_1 = \max_{(x, t) \in D_1} |k_1(x, t)|$, et $M_2 = \max_{(x, t) \in D_2} |k_2(x, t)|$

Theorem 2.9 Dans les conditions de continuité ci-dessus, supposons qu'il existe une constante $c > 0$ tel que :

$$\frac{1}{c} [M_1 + M_2 \exp(c(b-a))] < 1$$

Alors l'équation (2.6) a une solution unique $\varphi \in C[a, b]$, et cette solution peut être obtenir par la méthode d'approximation successive, à partir de $\varphi_0 \in C[a, b]$

Proof. Soit l'opérateur intégral $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt$$

On a

$$\begin{aligned} |T\varphi(x) - T\psi(x)| &= \left| \int_a^x k_1(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt + \int_a^b k_2(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |k_1(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt + \int_a^b |k_2(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt \\ &\leq M_1 \int_a^x |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(t-a)) \exp(c(t-a)) dt + \\ &\quad M_2 \int_a^b |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(t-a)) \exp(c(t-a)) dt \\ &\leq \left[\frac{M_1}{c} (\exp(c(x-a)) - 1) + \frac{M_2}{c} (\exp(c(b-a)) - 1) \right] \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \left[\frac{M_1}{c} \exp(c(x-a)) + \frac{M_2}{c} \exp(c(x-a+b-x)) \right] \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp(c(x-a))}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-x))) \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp(c(x-a))}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\| \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|A\varphi(x) - A\psi(x)| \exp(-c(x-a)) \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|, \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

Alors

$$\|A\varphi - A\psi\| \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|$$

On déduit que l'opérateur A est Lipschitzien de constante $k = \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a)))$

La condition supposée garantit que A est une contraction. Alors on applique principe de contraction $\square$

2.5 Polynôme de Chebyshev de quatrième espèce

Le polynôme de Chebyshev $W_n(x)$ de quatrième espèce est un polynôme en x de degré n , défini par la relation

$$W_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} \quad \text{lorsque } x = \cos \theta. \quad (2.7)$$

En pratique, il n'est ni pratique ni efficace de calculer chaque $W_n(x)$ à partir des principes de base. En combinant plutôt l'identité trigonométrique

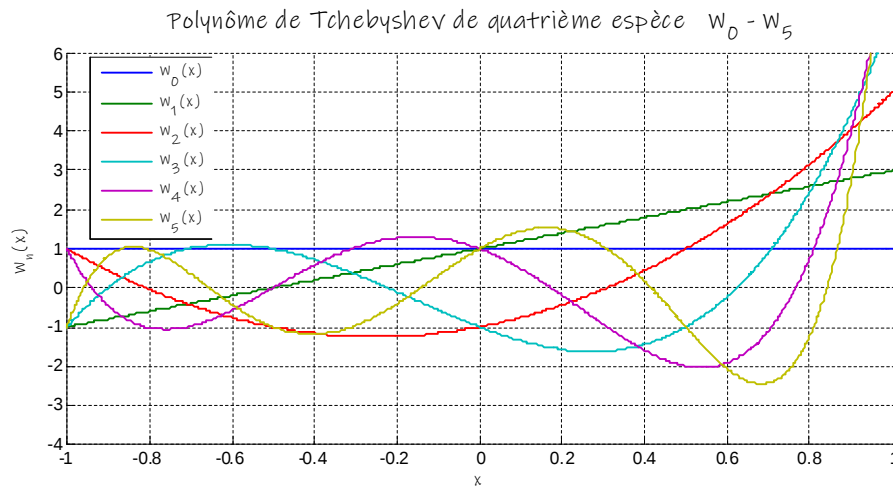
$$\sin(n + \frac{1}{2})\theta + \sin(n - 2 + \frac{1}{2})\theta = 2 \cos \theta \sin(n - 1 + \frac{1}{2})\theta$$

Ainsi, nous obtenons la relation de récurrence fondamentale

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

qui, avec les conditions initiales

$$W_0(x) = 1, \quad W_1(x) = 2x + 1$$



Chapitre 3

Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm

3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredholm :

Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équation intégrales de volterra-Fredholm de second espèce en utilisant les polynômes de Tchebychev.

3.1.1 Méthode de collocation

On considère l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt \quad (3.1)$$

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à l'équation (3.1) consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (3.1) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C([a, b])$ ou de $L^2([a, b])$. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base de X_n . On cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$, telle que

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x) , \quad x \in [a, b]$$

Pour déterminer les coefficients (c_j) , on substituant, cette fonction dans l'équation (3.1), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned}
 r_n(x) &= \varphi_n(x) - \int_a^x k_1(x, t) \varphi_n(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) \varphi_n(t) dt - f(x), \quad x \in [a, b] \\
 &= \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x, t) dt \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(t) - \int_a^b k_2(x, t) dt \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(t) - f(x) \\
 &= \sum_{j=1}^n c_j \left\{ \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x, t) \psi_j(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) \psi_j(t) dt \right\} - f(x), \quad x \in [a, b]
 \end{aligned}$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, (i.e, aux points de collocation)

ce qui conduit à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i, t) \psi_j(t) dt - \int_a^b k_2(x_i, t) \psi_j(t) dt \right\} c_j = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

qui s'écrit sous la forme $AC = F$, où

$$\begin{aligned}
 A &= \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i, t) \psi_j(t) dt - \int_a^b k_2(x_i, t) \psi_j(t) dt, \quad i, j = 1, \dots, n \\
 C &= (c_i), \quad i = 1, \dots, n \\
 F &= f(x_i), \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

ce système admet une solution unique si $\det A \neq 0$, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

3.1.2 Méthode de collocation-Chebyshev

On considère l'équation de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt, \quad x \in [a, b] \quad (3.2)$$

On définit les polynômes de Chebyshev $W_i^*(x)$ de degré i sur $[a, b]$ comme suit

$$W_i^*(x) = W_i\left(\frac{2x - (a + b)}{b - a}\right)$$

où $W_i(x)$ sont les polynômes de Chebyshev de degré i définis sur $[-1, 1]$

On utilise la méthode de Collocation pour approximer la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (3.2).

On suppose

$$\varphi(x) \simeq \varphi_i(x) = \sum_{i=0}^n c_i W_i^*(x) \quad (3.3)$$

où $W_i^*(x)$ sont les polynômes de Chebyshev de degré i définis sur $[a, b]$ et c_i des coefficients à déterminer.

Substituant (3.3) dans (3.2) on obtient

$$\sum_{i=0}^n c_i W_i^*(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t) \sum_{i=0}^n c_i W_i^*(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \sum_{i=0}^n c_i W_i^*(t) dt$$

d'où

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[W_i^*(x) - \int_a^x k_1(x, t) W_i^*(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) W_i^*(t) dt \right] = f(x) \quad (3.4)$$

l'équation (3.4) peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^n c_i \psi_i(x) = f(x)$$

où

$$\psi_i(x) = W_i^*(x) - \int_a^x k_1(x, t) W_i^*(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) W_i^*(t) dt$$

Soit $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), i = 1, \dots, n$ les points de Chebyshev :

Alors les équations de collocation sont obtenues en prenant des points x_j

$$\sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i \psi_{ij} = f_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

L'équation (3.5) représente un système linéaire de (n) inconnues qui s'écrit sous la forme

$$Ac = F$$

où

$$A = \psi_{ij}, i, j = 1, \dots, n$$

$$c = (c_1, \dots, c_n)^t$$

$$F = (f_1, \dots, f_n)^t$$

$$c = A^{-1}F$$

3.2 Exemples Numériques

Après avoir traité les aspects théoriques liés aux équations intégrales et aux méthodes d'approximation en utilisant les polynômes de Chebyshev, nous passons dans ce chapitre à l'aspect pratique, en présentant des exemples numériques visant à évaluer l'efficacité de la méthode proposée.

Exemple 3.1 Résoudre l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^1 xt\varphi(t)dt = f(x)$$

après la régularisation

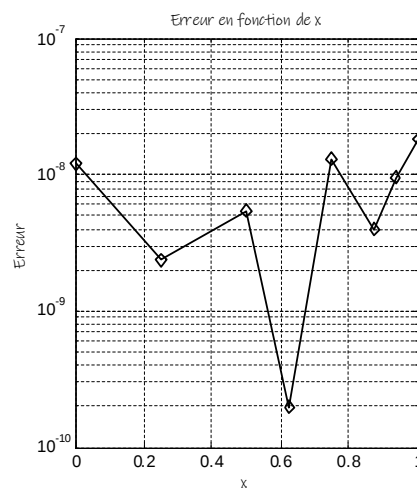
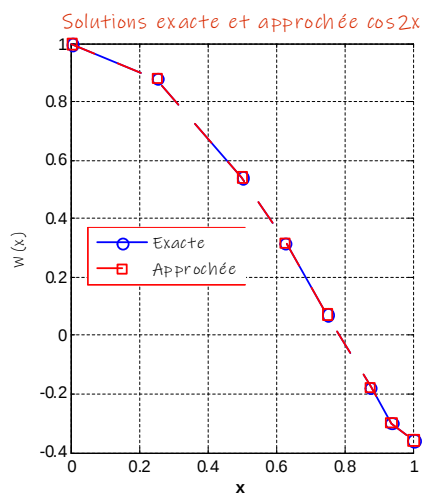
$$\varphi(x) + \int_0^1 t\varphi(t)dt = \frac{1}{4} \cos 2 + \frac{1}{2} \sin 2 + \cos 2x - \frac{1}{4}$$

où la fonction $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4}x (\cos 2 + 2 \sin 2 - 1)$ est calculée une fois que l'on affecte l'équation la solution $\varphi(x)$ donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \cos 2x$$

Nous appliquons polynôme de Chebyshev $W_n(x)$ de quatrième espèce espèce pour approximer la solution $\varphi_{ex}(x)$ c'est-à-dire que $\varphi_N(x)$ solution du système algébrique avec $N = 8$

Pts de x	Solu exacte	Solu approx	Erreur
0.000000e + 000	1.000000e + 000	1.000000e + 000	1.191737e - 008
2.500000e - 001	8.775826e - 001	8.775826e - 001	2.340281e - 009
5.000000e - 001	5.403023e - 001	5.403023e - 001	5.431980e - 009
6.250000e - 001	3.153224e - 001	3.153224e - 001	1.965967e - 010
7.500000e - 001	7.073720e - 002	7.073719e - 002	1.306686e - 008
8.750000e - 001	-1.782461e - 001	-1.782461e - 001	4.008056e - 009
9.375000e - 001	-2.995335e - 001	-2.995335e - 001	9.557755e - 009
1.000000e + 000	-3.585402e - 001	-3.585402e - 001	1.807605e - 008



Exemple 3.2 Résoudre l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^x \varphi(t) (xt + 1) dt + \int_0^1 \varphi(t) x^2 \sqrt{t+1} dt = f(x)$$

après la régularisation

$$\varphi(x) + \int_0^x \frac{t}{x^2 + 1} \varphi(t) dt + \int_0^1 \frac{2x\sqrt{t+1}}{(x^2 + 1)} \varphi(t) dt = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2 + 1} (x - \ln(x+1)) + 4 \frac{x}{x^2 + 1} (\sqrt{2} - 1)$$

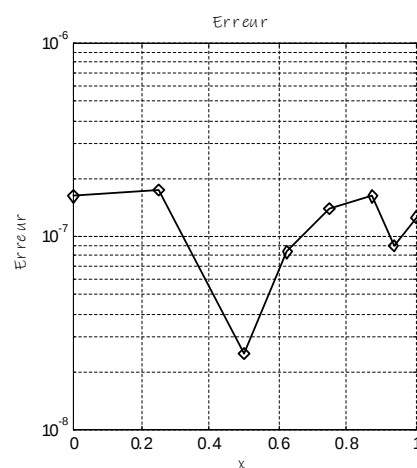
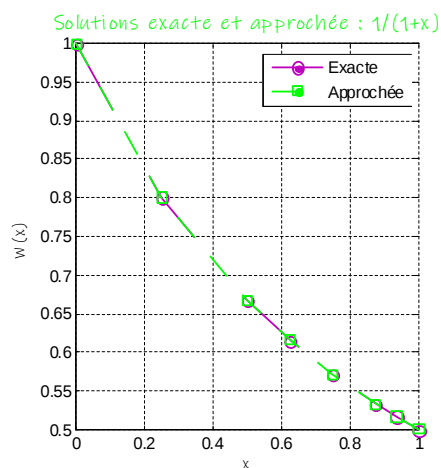
où la fonction $f(x) = \ln(x+1) + 2x^2(\sqrt{2}-1) - x \ln(x+1) + x^2$ est calculée une fois

que l'on affecte l'équation la solution $\varphi(x)$ donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \frac{1}{(t+1)}$$

Nous appliquons polynôme de Chebyshev $W_n(x)$ de quatrième espèce espèce pour approximer la solution $\varphi_{ex}(x)$ c'est-à-dire que $\varphi_N(x)$ solution du système algébrique avec $N = 8$

Pts de x	Solu exacte	Solu approx	Erreur
0.000000e + 000	1.000000e + 000	9.999998e - 001	1.621328e - 007
2.500000e - 001	8.000000e - 001	8.000002e - 001	1.735491e - 007
5.000000e - 001	6.666667e - 001	6.666667e - 001	2.496874e - 008
6.250000e - 001	6.153846e - 001	6.153847e - 001	8.362258e - 008
7.500000e - 001	5.714286e - 001	5.714284e - 001	1.387246e - 007
8.750000e - 001	5.333333e - 001	5.333335e - 001	1.606890e - 007
9.375000e - 001	5.161290e - 001	5.161289e - 001	8.942556e - 008
1.000000e + 000	5.000000e - 001	5.000001e - 001	1.259505e - 007



3.3 Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié les équations intégrales de Volterra–Fredholm du premier type ainsi que les méthodes numériques utilisées pour leur résolution.

Après avoir présenté les aspects théoriques liés aux équations intégrales et aux méthodes d'approximation utilisant les polynômes de Chebyshev décalés, nous avons appliqué cette méthode afin d'obtenir des solutions numériques approchées avec une bonne précision.

Les exemples numériques étudiés ont permis de montrer l'efficacité et l'utilité de la méthode proposée dans la résolution de ce type d'équations intégrales.

Enfin, ce travail peut constituer une base pour des études futures portant sur le développement et l'amélioration des méthodes numériques appliquées aux problèmes intégraux plus complexes.

Bibliographie

- [1] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004
- [2] M. N. NADIR, Sur la Solution Numérique des équations Intégrales de Volterra-Fredholm en Utilisant les Polynômes de Tchebyshev, Master, University of Msila (2022).
- [3] K. E. Atkinson, “The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind,” Cambridge University Press, 2010.
- [4] A.M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications, Saint Xavier University Chicago, IL 60655, USA
- [5] L. Aissa, N. Mostefa, N. Mohamed. Nasseh. Application of Chebyshev Polynomials to Volterra-Fredholm Integral. The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 7, 10 (2022), pp. 1-8.
- [6] NADIR, Mohamed Nasseh ; JAWAHDOU, Adel. Chebyshev polynomials to Volterra-Fredholm integral equations of the first kind. REMAT :, v. 10, n. 1, p. e3002,
- [7] S. Andréas, weakly singular Volterra and Fredholm-Volterra integral equation, Studia Univ . “Babeş-Bolyai, Mathematica , Volume XLVIII, Number 3, September 2003
- [8] Brunner, H. : On the numerical solution of Volterra–Fredholm integral equation by collocation methods. SIAM J. Numer. Anal. 27(4), 87–96 (1990)
- [9] Abd-Elhameed, W.M. ; Youssri, Y.H. : Numerical solutions for Volterra–Fredholm–Hammerstein integral equations via second kind Tchebyshev quadrature collocation algorithm. Adv. Math. Sci. Appl. 24, 129–141 (2014)

- [10] P. Kumar and G. C. Dubey, “ An application of Volterra integral equation by expansion of Taylor’s series in the problem of heat transfer and electrostatics,” IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), vol.11, no. 5, pp. 59-62, 2015.
- [11] Al-Jubory, A. (2010) ; "Some Approximation Methods for Solving Volterra-Fredholm Integral and IntegroDifferential Equations" ; Ph.D. Thesis, University of Technology.

الملخص:

الهدف من هذا البحث هو إيجاد حلول عددية تقريبية للمعادلات التكاملية من نوع فولتيرا-فريدولم من النوع الأول، وذلك بعد تحويلها إلى معادلات من النوع الثاني باستخدام تقنية النظام، ثم استخدام كثرات حدود تشيبيشيف للمعادلة من النوع الرابع لتقريب الحل. وفقد تقدير أمثلة عددية لتوضيح فعالية ودقة الطريقة المقترحة.

الكلمات المفتاحية:

كثرات حدود تشيبيشيف من النوع الرابع - المعادلات التكاملية - النظام - الطرق العددية

Résumé :

Le but de ce mémoire est de trouver des solutions numériques approximatives aux équations intégrales de Volterra-Fredholm du premier type, en les transformant en équations du second type à l'aide de la technique de régularisation. Les polynômes de Chebyshev décalés de Quatrième espèce sont utilisés pour approximer la solution. Des exemples numériques sont présentés pour démontrer l'efficacité et la précision de la méthode proposée.

Mots clés :

Polynômes de Chebyshev de Quatrième espèce – Équations intégrales – Régularisation – Méthodes numériques

Abstract:

The objective of this study is to find approximate numerical solutions for Volterra-Fredholm integral equations of the first kind by transforming them into second kind equations using a regularisation technique. Shifted Chebyshev polynomials of the fourth-kind are used to approximate the solution. Numerical examples are presented to demonstrate the effectiveness and accuracy of the proposed method.

Keywords:

Fourth-kind Chebyshev polynomials – Integral equations – Regularisation – Numerical methods