REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et applications

Thème

Etude de quelques équations différentielles liés au calcul fractionnaire conformable

---

Présentée par :

BOUNOUIGA Mohamed

SAADI Abderachid	M.C.A,	Université de M'sila	**Président**.
BENMEDDOUR Mohamed Ourabah	M.A.A,	Université de M'sila	**Encadreur**.
ABDELKEBIR Saad	M.C.B,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

*Mes remerciements vont tout premièrement, à **Allah** le tout puissant de m'avoir donné courage et patience durant toutes ces années d'études. Je suis heureux d'exprimer au Dr. **BENMEDDOUR Mohamed Ourabah** , ma gratitude pour la confiance qu'il m'a accordé. Je le remercie pour sa disponibilité et pour ses conseils très éclairés.*

Aux membres de jury, nous vous remercions de l'honneur que vous nous avez fait en acceptant de siéger dans le jury de notre mémoire. Enfin, je ne saurais jamais suffisant remercie mon père et ma mère, que je porte toujours avec moi dans ma pensée. Sans leurs confiances immenses en moi, sans leurs aides, je n'aurais pas pu aller au bout de mes projets.

À toute personne ayant participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail. je remercie également toutes les personnes du département Mathématiques de l'Université de Mohamed Boudiaf, Pôle Universitaire de M'sila.

Dédicaces

Invocations à ALLAH, pour toute puissance.

À ma très chère mère,

À mon très cher père,

À mon frères et mes soeurs,

À toute ma famille,

À mes meilleurs amis

Et à tous ceux qui me sont chers

Je dédie ce travail.

Résumé

Récemment, une nouvelle approche du calcul différentiel fractionnaire est apparue, appelée calcul différentiel conformable. Pour $0 < \alpha < 1,\ a \in \mathbb{R}$ on définit la dérivée fractionnaire conformable d'une fonction f en un point $x \in]a, +\infty[$ comme suivant :

$$\mathcal{D}_a^\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon(x-a)^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon},$$

Dans ce travail, nous présenterons cette approche, et donnerons les définitions et propriétés nécessaires, puis nous étudierons quelques équations différentielles et problèmes aux à cette frontières liés approche.

Mots clés : fractionnaire, conformable.

Notations

▶ $\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
▶ $\mathbb{N}$	Ensembles des nombres entiers naturels.
▶ $\mathbb{C}$	Ensembles des nombres complexes.
▶ $\Gamma(.)$	La fonction Gamma.
▶ $\mathcal{D}_a^\alpha(f)(t)$	La dérivée conformable fractionnaire gauche de f d'ordre α à partir de a.
▶ ${}_b\mathcal{D}^\alpha(f)(t)$	La dérivée conformable fractionnaire droit de f d'ordre α se terminant en b.
▶ $\mathcal{I}_a^\alpha(f)(t)$	L'intégrale conformable fractionnaire gauche de f d'ordre α à partir de a.
▶ ${}_b\mathcal{I}^\alpha(f)(t)$	L'intégrale conformable fractionnaire droit de f d'ordre α se terminant en b.
▶ $\mathcal{F}_\alpha(s) = \mathcal{L}_\alpha\{f(t)\}(s)$	La transformation de La Laplace conformable fractionnaire de $f(t)$.
▶ $AC^n([a, b])$	L'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

Table des matières

Introduction

Récemment, l'auteur Khalil et d'autres (2014)ont présenté une nouvelle définition simple pour la dérivée partielle appelée la dérivée fractionnaire conformable, aù ils ont développé les définitions de base de ce nouveau calcul fractionnaire. Ce calcul fractionnaire a attiré l'attention de la recherche en différentiation et intégration fractionnaires des siècles passés et actuels, et a commencé à influencer tous les domaines de l'ingénierie appliquée et pure. Ils ont également utilisé la définition des intégration pour définir les dérivées de Riemann et de Caputo fractionnaire.

On définit la dérivée fractionnaire conformable d'une fonction f en un point $x \in]0, \infty[$ et $0 < \alpha < 1$ comme suivant :

$$\mathcal{D}_a^\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon(x-a)^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}$$

Dans ce mémoire, nous aborderons trois chapitres, le premier chapitre sera consacré au calcul fractionnaire et à ses définitions de base. Au deuxième chapitre, nous discuterons du calcul fractionnaire conformable. Enfin, dans le troisième chapitre, nous donnerons un exemple de résolution du problème de Cauchy conformable par deux méthodes numériques différentes et quelques concepts et théories auxiliaires à cet égard.

CHAPITRE 1

QUELQUES PRÉLIMINAIRES ET OUTILS DE BASE

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques notions de base sur la calcul fractionnaire ainsi que quelques propriétés, et nous donnerons ègalement la dèfinition d'une fonction spèciale et certaines de ses propriètès .

1.1 Fonction spéciale pour la dérivation conformable fractionnaire

Dans cette partie, nous présentons la fonction Gamma.

1.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction **Gamma d'Euler** $\Gamma(z)$ qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs(et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 1.1. *(Voir* [11]*) Pour* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(z) > 0$*. La fonction Gamma* $\Gamma(z)$ *est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$,$\Gamma(z)$ *est une fonction monotone et strictement décroissante pour* $0 < z < 1$.

1.1.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma

1. Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ Re(z) > 0, \tag{1.2}$$
qu'on peut la démonter par l'intégration par partie
$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt = \left[-e^{-t}t^z\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z).$$
La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, en effet $\Gamma(1) = 1$ et en utilisant la relation (1.2)nous obtenons :
$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!, \end{aligned}$$

2. $$\Gamma(z) = (z+1).\gamma(z-1)\ : z > 0. \tag{1.3}$$
qui peut être prouvé en utilisant l'intégration par parties.

3. $$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}\ : z < 0, z \neq -1, -2, -3, ... \tag{1.4}$$
qui résulte de la substitution de $z+1$ par z dans la propriété récursive.

4. $$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!}{2^n}\sqrt{\Pi}\ : n \in \mathbb{N}^*, \tag{1.5}$$
$(2n-1)! = (2n-1)(2n-3)(2n-5)....(5)(3)(1)$. qui est également le résultat de la propriété récursive.

5. $$\Gamma(k) = \pm\infty\ : k = 0, -1, -2, ... \tag{1.6}$$

1.2 Intégrale de Rimann-Liouville

1.2.1 Fonctions définies sur $[a, b]$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$.
Notons par $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$ la primitive de f qui s'annule en a :

$$\forall t \in [a, b]; \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

L'itération de$\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$ permet d'obtenir la primitive seconde de$f$et dont la dérivée s'annule en$a$.
De plus, d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^2(t) = \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right) \circ \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right) &= \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau) d\tau\right) du \\ &= \int_a^t \left(\int_\tau^t du\right) f(\tau) d\tau \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n$ la nième itération de $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$, une récurrence directe montre que

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Si on note $g = \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n$, g est donc l'unique fonction vérifiant

$$\forall 0 \leq k \leq n - 1, g^{(k)}(a) = 0, g^{(n)} = f$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante :

Définition 1.2. *(Voir* [12]*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale à gauche d'ordre n de f, que l'on note $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$, est défini par*

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^n f\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Grâce la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment.
C'est la propriété $\Gamma(n + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition 1.2 de la manière suivante :

Définition 1.3. *(Voir* [12]*) L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droit d'ordre $\alpha > 0$ de f, par*

$$\forall t \in [a, b]; \left(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à d'ordre $\alpha > 0$ de f, par

$$\forall t \in [a, b]; \left(\mathcal{I}_{b^-}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

1.2.2 Fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$.

Il est naturel d'étendre la définition 1.3 aux axes $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$. Notons ces opérateurs $\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f\right)$ et $\left(\mathcal{I}_{+}^{\alpha} f\right)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+; \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$
$$\forall t \in \mathbb{R}; \left(\mathcal{I}_{+}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Proposition 1.1. *(Voir* [8]*) Pour $\alpha > 0, \beta > 0$, on a*

1. $\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}$.
2. $\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha} (\beta-t)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\beta-t)^{\alpha+\beta-1}$.

Théorème 1.1. *(Voir* [3]*) Si $f \in L^1([a,b])$, alors $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f$ existe pour tout $\alpha > 0$ et $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f \in L^1([a,b])$.*

Proposition 1.2. *(Voir* [9]*) Soit $\alpha > 0, \beta > 0$, et $f \in L^1([a,b])$. Alors*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} \mathcal{I}_{a^+}^{\beta} f = \mathcal{I}_{a^+}^{\beta} \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f = \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta} f$$

Lemme 1.1. *(Voir* [12]*) Soit $\alpha > 0, f \in L^1([a,b]), b > 0$. Alors la transformée de Laplace l'intégrale de Riemann-Liouville $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f$ est*

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}(f)(s)$$

1.3 Dérivées fractionnaire

1.3.1 Opérateur de dérivée n^{ime}

Définition 1.4. *(Voir* [7]*) La dérivation entière d'ordre n d'une fonction f est donnée par :*

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dx^n} f(t).$$

1.3.2 Dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α : $[\alpha]$ l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha]+1$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. En s'inspirant de la relation classique $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d^2}{dt^2} \circ_a \mathcal{I}_t^1$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \circ_a \mathcal{I}_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, on peut poser :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ_a \mathcal{I}_t^{n-\alpha}.$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 1.5. *(Voir* [14]*) Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in [a,b], \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De plus, ona vue que définition 1.5 d'intégrale à droite était associée à $-d/dt$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 1.6. *(Voir* [8]*) Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droit d'ordre α de f est définit par :*

$$\forall t \in [a,b], \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau - t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Si maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivée de Liouville.

Définition 1.7. *(Voir* [9]*) Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_{+}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De plus, on a vu que définition 1.7 d'intégrale à droite était associée à $-d/dt$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 1.8. *(Voir* [8]*) Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droit d'ordre α de f est définit par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_{-}^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (\tau - t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Remarque 1.1.

1. *Pour $\alpha = 0, n = 1$. on a $\mathcal{D}_{a^+}^0 f(t) = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right) = f(t)$.*
2. *Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \mathcal{D}_{a^+}^n f(t) = \mathcal{D}_{+}^n f(t) = \dfrac{d^n}{dt^n} f(t) \\ \mathcal{D}_{b^-}^n f(t) = \mathcal{D}_{-}^n f(t) = (-1)^n \dfrac{d^n}{dt^n} f(t) \end{cases}$$

Proposition 1.3. *(Voir* [8]*) Pour* $\alpha \geq 0, \beta > 0$*, on a*

1. $\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}.$
2. $\left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}.$

Remarque 1.2. *Pour* $\lambda = \beta - 1, a = 0$ *on a*

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}t^{\lambda}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(n-\alpha+\lambda)(n-\alpha+\lambda-1)...(\lambda+1-\alpha)t^{\lambda-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(n-(\alpha-\lambda))(n-1-(\alpha-\lambda))...(1-(\alpha-\lambda))t^{\lambda-\alpha} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha}, & si\ \alpha-\lambda \notin \{1,2,...,n\} \\ 0, & si\ \alpha-\lambda \in \{1,2,...,n\} \end{cases}, \lambda > -1.\end{aligned}$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1,2,...,n\} \Rightarrow \alpha - \lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m,\ m \in \{1,2,...,n\}$ *C-à-d*

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}t^{\alpha-m} = 0,\ m \in \{1,2,...,n\}$$

1.3.3 Drivées fractionnaires de Caputo

Cette définition se base sur l'interversion des compositions dans la formule de définition (1.5) semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire appellée dérivée de Caputo.

Définition 1.9. *(Voir* [8]*) Soit* $\alpha > 0$*, et* $n = [\alpha] + 1$*. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre* α *de* f *est définie par :*

$$\forall t \in [a,b],\ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)d\tau.$$

Définitions aussi son analogue à droit.

Définition 1.10. *(Voir* [8]*) Soit* $\alpha > 0$*, et* $n = [\alpha] + 1$*. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre* α *de* f *est définie par :*

$$\forall t \in [a,b],\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f(t) = \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)d\tau.$$

Remarque 1.3. *Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivées classique :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{n}f(t) = f^n(t) - f^n(a) \\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{n}f(t) = (-1)^n(f^n(t) - f^n(b)) \end{cases}$$

Heureusement, le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classiques par limite inférieure.

Lemme 1.2. *(Voir* [7]*) Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ *et* $n = [\alpha] + 1$*. Si* $f \in AC^n([a, b])$*, alors presque partout*

$$\lim_{\alpha \to n^-} {}^C\mathcal{D}^\alpha_{a^+} f(t) = f^{(n)}(t)$$
$$\lim_{\alpha \to n^-} {}^C\mathcal{D}^\alpha_{b^-} f(t) = (-1)^n f^{(n)}(t)$$

Proposition 1.4. *(Voir* [14]*) Pour* $\alpha \geq 0, \beta > 0$*, on a*

1. $\left({}^C\mathcal{D}^\alpha_{a^+}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1},\ \beta > n.$
2. $\left({}^C\mathcal{D}^\alpha_{b^-}(b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1},\ \beta > n.$

Remarque 1.4. *Pour* $\lambda = \beta - 1,\ a = 0$*, on a*

$$\begin{aligned}\left({}^C\mathcal{D}^\alpha_{0^+}\right)(t) &= \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-(n-1))\Gamma(\lambda-(n-1))}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha}, & si\ \lambda \notin \{1, 2, ..., n-1\} \\ 0, & si\ \lambda \in \{1, 2, ..., n-1\} \end{cases}, \lambda > -1.\end{aligned}$$

C-à-d

$$\left({}^C\mathcal{D}^\alpha_{0^+} t^m\right)(t) = 0,\ m \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

Théorème 1.2. *(Voir* [7]*) Soient* $\alpha \geq 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$*.*

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, si* f *possède* $(n-1)$ *dérivées en aet* $\left(\mathcal{D}^\alpha_{a^+} f\right)$ *existe. Alors*

$$\left({}^C\mathcal{D}^\alpha_{a^+} f\right)(t) = \mathcal{D}^\alpha_{a^+}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right],$$

presque pour tout $t \in [a, b]$*.*

Corollaire 1.1. *(Voir* [8]*) Soient* $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$ *et* $\left(\mathcal{D}^\alpha_{a^+} f\right), \left({}^C\mathcal{D}^\alpha_{a^+} f\right)(t)$ *sont existent, on suppose que* $f^{(k)}(a) = 0$ *pour* $k = 0, 1, ..., n-1$*. Alors*

$$\left({}^C\mathcal{D}^\alpha_{a^+} f\right)(t) = \left(\mathcal{D}^\alpha_{a^+} f\right)(t).$$

1.4 Propriétés des opérateurs fractionnaires

1.4.1 Linéarité

La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérateurs linéaires :

$$\mathcal{D}^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda \mathcal{D}^\alpha f(t) + \mu \mathcal{D}^\alpha g(t).$$

pour n'importe quelle approche de dérivation.

1.4.2 Compositions entre opérateurs

Proposition 1.5. *(Voir [6]) Soit $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes :*

1. *Si $f(t) \in L_p([a,b]),\ (1 \leq p \leq \infty)$, alors :*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t),\ et\ \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = f(t).$$

2. *Si $\alpha > \beta$, et $f(t) \in L_p([a,b]),\ (1 \leq p \leq \infty)$, alors :*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\beta}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-\beta} f\right)(t),\ et\ \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\beta}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = \left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha-\beta} f\right)(t).$$

3. *Si $f(t) \in C^p([a,b]),\ q = [\alpha + \beta] + 1$, alors :*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\beta} f\right)(t) = \left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(t),\ et\ \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{I}_{b^-}^{\beta} f\right)(t) = \left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha+\beta} f\right)(t).$$

4. *Si $f(t) \in L_1([a,b]),\ \left(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f\right) \in AC^m([a,b])$, alors :*

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f\right)^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\alpha - k + 1)}(t-a)^{\alpha-k}.$$

$$\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\left(\mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f\right)^{(n-k)}(b)}{\Gamma(\alpha - k + 1)}(b-t)^{\alpha-k}.$$

En particulier si $0 < \alpha \leq 1$

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t).$$

$$\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\ \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = f(t).$$

Proposition 1.6. *(Voir [6]) Soit $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes :*

1. *Si $f(t) \in C^q([a,b]),\ q = [\alpha + \beta] + 1$, alors :*

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\beta} f\right)(t) = \left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(t),\ et\ \left({}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\beta} f\right)(t) = \left({}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha+\beta} f\right)(t).$$

2. *Si $f(t) \in C^n([a,b])$, ou $f(t) \in AC^n([a,b])$, alors :*

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f)^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}.$$

$$\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}(f)^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^{k}.$$

En particulier si $0 < \alpha \leq 1$

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - f(a).$$

$$\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = f(b) - f(t).$$

1.4.3 Intégration par parties

Corollaire 1.2. *(Voir* [9]*) Soit* $\alpha > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tels que* $n-1 < \alpha < n$*. Soit* $f(t) \in C^n([a,b])$ *et* $g(t) \in C^n([a,b])$*, Alors :*

$$\int_a^b \mathcal{I}_{b^-}^{\alpha} f(t).g(t)dt = \int_a^b f(t).\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} g(t)dt.$$

$$\int_a^b f(t)\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} g\right)(t)dt = \left(\mathcal{I}_{b^-}^{1-\alpha} g\right)(a)f(a) - \left(\mathcal{I}_{a^+}^{1-\alpha} f\right)(b)g(b) + \int_a^b \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t)g(t)dt.$$

$$\int_a^b f(t)\left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} g\right)(t)dt = \left(\mathcal{I}_{a^+}^{1-\alpha} f\right)(a)g(a) - \left(\mathcal{I}_{b^-}^{1-\alpha} g\right)(b)f(b) + \int_a^b \left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t)g(t)dt.$$

CHAPITRE 2

LE CALCUL FRACTIONNAIRE CONFORMABLE

Ce chapitre sera consacré aux définitions primaires et aux concepts de base liés au calcul fractionnaire conformable, ainsi qu'à l'exploration de plusieurs théories et preuves.

2.1 Dérivées conformable fractionnaires

Définition 2.1. *(Voir* [1]*) (Les dérivées conformable fractionnaire gauche et droit) :Étant donné une fonction $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0, 1]$. Alors la dérivée conformable fractionnaire gauche de f d'ordre α à partir de a est définie par :*

$$\mathcal{D}_{\alpha}^{a}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \tag{2.1}$$

Si $\mathcal{D}_{\alpha}^{a}(f)(t)$ existe sur (a, b), alors :

$$\mathcal{D}_{\alpha}^{a}(f)(a) = \lim_{t \to a^{+}} \mathcal{D}_{\alpha}^{a}(f)(t) \quad quand\ a = 0.$$

On écrit $\mathcal{D}_{\alpha}$ qui définition originale , et nous disons f est α-différentiable chaque fois que $\mathcal{D}_{\alpha}$ existe, on donne une fonction $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors la dérivée conformable fractionnaire de f d'ordre α pour tout $t > 0$ est définie par :

$$\mathcal{D}_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \tag{2.2}$$

tel que cette limite existe et terminée.

Étant donné une fonction $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0, 1]$. Alors la dérivée conformable fractionnaire droit de f d'ordre α se terminant en b est définie par :

$$^{b}\mathcal{D}_{\alpha}(f)(t) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \tag{2.3}$$

Si ${}^{b}\mathcal{D}_{\alpha}(f)(t)$ *existe sur* (a,b) *alors :*

$$ {}^{b}\mathcal{D}_{\alpha}(f)(b) = \lim_{t\to b^-} {}^{b}\mathcal{D}_{\alpha}(f)(t). $$

2.1.1 Quelques propriétés de dérivation conformable fractionnaire

Propriétés 2.1. *Pour* $f, g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *et* $t > 0$, $\mathcal{D}_{\alpha}$ *sera réaliser les propriétés suivantes pour* $\alpha \in (0,1]$ *:*

1. *Si* f *est* α*-différentiable à* $t > 0$ *alors* f *est continue a* t*, soit*

$$ \lim_{\varepsilon\to 0} f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) = f(t). \tag{2.4} $$

2.

$$ \mathcal{D}_{\alpha}(\alpha f+\beta g) = \alpha\mathcal{D}_{\alpha}(f)+\beta\mathcal{D}_{\alpha}(g) \ : \alpha,\beta\in\mathbb{R} \tag{2.5} $$

Démonstration.

$$ \begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha}(\alpha f+\beta g)(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha f(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha})+\beta g(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha})-\alpha f(t)-\beta g(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\alpha\frac{f(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}+\beta\frac{g(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon}\right) \\ &= \alpha\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}+\beta\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon} \\ &= \alpha\mathcal{D}_{\alpha}f(t)+\beta\mathcal{D}_{\alpha}g(t). \end{aligned} $$

□

3.

$$ \mathcal{D}_{\alpha}(t^k) = kt^{k-\alpha} \ : k\in\mathbb{R}. \tag{2.6} $$

Démonstration. Ona :

$$ \begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha}(t^k) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^k-t^k}{\varepsilon} &= t^{1-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^k-t^k}{h}, \quad \textit{telle que } h=\varepsilon t^{1-\alpha} \\ &= t^{1-\alpha}kt^{k-1} \\ &= kt^{k-\alpha} \ k\in\mathbb{R}. \end{aligned} $$

□

Si $a\neq 0$ *alors* $\mathcal{D}_{\alpha}(t^k) = (t-a)^{1-\alpha}kt^{k-1}.$

4.

$$\mathcal{D}_\alpha(C) = 0 \ : C\ constant, \tag{2.7}$$

$$\mathcal{D}_t^\alpha(t)^\beta = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n)} t^{\beta-n}; & Si\ \beta \in \mathbb{N}\ et\ \beta > \alpha, \\ 0; & Si\ \beta \in \mathbb{N}\beta \leq \alpha, \end{cases} \tag{2.8}$$

Où $n < \alpha \leq n+1$.

5.

$$\mathcal{D}_\alpha(fg) = f\mathcal{D}_\alpha(g) + g\mathcal{D}_\alpha(f). \tag{2.9}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha(fg) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}).g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= t^{1-\alpha} \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h).g(t+h) - f(t)g(t)}{h}, \quad tel\ que\ h = \varepsilon t^{1-\alpha} \\
&= t^{1-\alpha} \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)g(t+h) + f(t+h)g(t) - f(t+h)g(t) - f(t)g(t)}{h} \\
&= t^{1-\alpha} \lim_{h\to 0} f(t+h)\frac{g(t+h)-g(t)}{h} + t^{1-\alpha} \lim_{h\to 0} g(t)\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \\
&= t^{1-\alpha}\left[f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\right] \\
&= f\mathcal{D}_\alpha g + g\mathcal{D}_\alpha f
\end{aligned}$$

□

6. *Si* f *est différentiable alors :*

$$\mathcal{D}_\alpha(f) = t^{1-\alpha} f'(t). \tag{2.10}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\
&= t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon t^{1-\alpha}} \\
&= t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad tel\ que\ h = \varepsilon t^{1-\alpha} \\
&= t^{1-\alpha} f'(t)
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.1. *On a :*

1. *Si* f *est différentiable alors :*

$$\mathcal{D}_\alpha^a(f)(t) = (t-a)^{1-\alpha} f'(t). \tag{2.11}$$

2. *Si f est différentiable alors :*
$$^{b}\mathcal{D}_{\alpha}(f)(t) = -(b-t)^{1-\alpha} f'(t). \tag{2.12}$$

Remarque 2.1. *Soit f une fonction différentiable :*

1. *Si $a = 0$ alors $\mathcal{D}_{\alpha}^{a}(f)(t) = t^{1-\alpha} f'(t)$.*
2. *Si $b = 0$ alors $^{b}\mathcal{D}_{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} f'(t)$.*

Remarque 2.2. *f n'est pas dérivable $\not\Rightarrow$ f n'est α différentiable*

Exemple 2.1. $f(x) = \sqrt{x}$
On a $\mathcal{D}^{\alpha} f = x^{1-\alpha} f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} x^{1-\alpha} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2}$. Alors $\mathcal{D}^{\alpha} f$ existe si $\dfrac{1}{2} \geq \alpha$

2.2 Intégrations conformable fractionnaires

Définition 2.2. *(Voir [1]) (Les intégrales conformable fractionnaires gauche et droite)*

Étant donné une fonction $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0, 1]$. Alors l'intégrale conformable fractionnaire gauche de f d'ordre α à partir de a est définie par :

$$\mathcal{I}_{\alpha}^{a}(f)(t) = \int_{a}^{t} f(x) d_{\alpha}(x, a) = \int_{a}^{t} f(x)(x-a)^{\alpha-1} dx. \tag{2.13}$$

Si $a = 0$ on écrit $d_{\alpha}(x) = x^{\alpha-1}dx$ quand $a = 0$, on écrit $\mathcal{I}_{\alpha}$ qui est la définition originale fondée par (Voir [13]), et nous disons que f est α-différentiable chaque fois que $\mathcal{I}_{\alpha}$ existe, on donne une fonction $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0, 1]$. Alors l'intégrale conformable fractionnaire de f d'ordre α pour tout $t > 0$ est définie par :

$$\mathcal{I}_{\alpha}(f)(t) = \int_{0}^{t} f(x) x^{\alpha-1} dx, \ t \geq 0. \tag{2.14}$$

tel que cette limite existe et terminée.

Étant donné une fonction $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0, 1]$. Alors l'intégrale conformable fractionnaire droite de fd'ordre α se terminant en b est définie par :

$$^{b}\mathcal{I}_{\alpha}(f)(t) = \int_{t}^{b} f(x) d_{\alpha}(b, x) = \int_{t}^{b} f(x)(b-x)^{\alpha-1} dx. \tag{2.15}$$

Lemme 2.1. *(Voir [1]) Étant donné une fonction continue $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0, 1]$. Alors pour tout $t > a$ On a :*

$$\mathcal{D}_{\alpha}^{a}[\mathcal{I}_{\alpha}^{a}(f)(t)] = f(t). \tag{2.16}$$

Démonstration. Puisque f est continue, alors $\mathcal{I}_\alpha^a(f)(t)$ est clairement différentiable et bien définie. donc en appliquant(2.10) sur $\mathcal{I}_\alpha^a(f)(t)$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha^a(\mathcal{I}(f))(t) &= (t-a)^{1-\alpha}.\frac{d}{dt}\mathcal{I}_\alpha^a(f)(t)\\
&= (t-a)^{1-\alpha}.\frac{d}{dt}\int_a^t f(t)(t-a)^{\alpha-1}dt.\\
&= (t-a)^{1-\alpha}.f(t)(t-a)^{\alpha-1}\\
&= f(t).
\end{aligned}$$

Ensuite, nous avons un lemme similaire. S'il preuve de la même manière. □

Lemme 2.2. *(Voir* [1]*) Étant donné une fonction continue $f:[-\infty,b)\to\mathbb{R}$ et $\alpha\in(0,1]$. Alors pour tout $t<b$ On a :*

$$^b\mathcal{D}_\alpha\, {}^b\mathcal{I}_\alpha(f)(t) = f(t). \tag{2.17}$$

Définition 2.3. *(Voir* [1]*) Soit $\alpha\in]n,n+1]$ alors l'intégrale de fractionnaire gauche de f d'ordre α se terminant en a est définie par*

$$\left(\mathcal{I}_\alpha^a f\right)(t) = \boldsymbol{I}_{n+1}^a((t-a)^{\beta-1}f) = \frac{1}{n!}\int_a^t (t-x)^n(x-a)^{\beta-1}f(x)dx$$

On remarque que si $\alpha=n+1$ alors $\beta=\alpha-n=n+1-n=1$ et donc $\left(\mathcal{I}_\alpha^a f\right)(t)=\left(\boldsymbol{I}_{n+1}^a f\right)(t)=\frac{1}{n!}\int_a^t(t-x)^n f(x)dx$, qui est au moyen de la formule de Cauchy itérative de f, $n+1$ fois sur $]a,t]$.

En rappelant que l'intégrale fractionnaire gauche de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha>0$ de $f$est définie par :

$$\left(\boldsymbol{I}_\alpha^a f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds$$

tel que $\left(\mathcal{I}_\alpha^a f\right)(t)=\left(\boldsymbol{I}_\alpha^a f\right)(t)$ pour $\alpha=n+1, n=0,1,2...$

Proposition 2.1. *(Voir* [1]*) Soit $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$une fonction et $0<\alpha,\mu\le 1$ tel que $1<\alpha+\mu\le 2$. Alors*

$$\left(\mathcal{I}_\alpha\mathcal{I}_\mu f\right)(t) = \frac{t^\mu}{\mu}\left(\mathcal{I}_\alpha f\right)(t) + \frac{1}{\mu}\left(\mathcal{I}_{\alpha+\mu}f\right)(t) - \frac{t}{\mu}\int_0^t s^{\alpha+\mu-2}f(s)ds,$$

Démonstration. En intervertissant l'ordre des intégrales et en remarque que

$$\left(\mathcal{I}_{\alpha+\mu}f\right) = \left(\mathbf{I}_2 s^{\alpha+\mu-2}f(s)\right)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha+\mu-2}f(s)ds,$$

On remarque aussi

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_\alpha \mathcal{I}_\mu\right)(t) &= \int_0^t \left(\int_0^{t_1} f(s) s^{\alpha-1} ds\right) t_1^{\mu-1} dt_1 \\
&= \int_0^t f(s) s^{\alpha-1} \left(\int_s^t t_1^{\mu-1} dt_1\right) ds \\
&= \int_0^t f(s) s^{\alpha-1} \left[\frac{t^\mu}{\mu} - \frac{s^\mu}{\mu}\right] ds \\
&= \frac{t^\mu}{\mu}\left(\mathcal{I}_\alpha f\right)(t) + \frac{1}{\mu}\left[\left(\mathcal{I}_{\alpha+\mu} f\right)(t) - t \int_0^t s^{\alpha+\mu-2} f(s) ds\right].
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.3. *(Voir* [1]*) Étant donné une fonction différentiable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0, 1]$. Alors pour tout $t > a$ On a :*

$$\mathcal{I}_\alpha^a \mathcal{D}_\alpha^a (f)(t) = f(t) - f(a). \tag{2.18}$$

Démonstration. Puisque f est différentiable, alors $\mathcal{D}_\alpha^a(f)(t) = (t-a)^{1-\alpha} f^{'}(t)$, donc nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\alpha^a \mathcal{D}_\alpha^a (f)(t) &= \int_a^t \mathcal{D}_\alpha^a (f)(t)(t-a)^{\alpha-1} dt \\
&= \int_a^t (t-a)^{1-\alpha} f^{'}(t)(t-a)^{\alpha-1} dt \\
&= \int_a^t f^{'}(t) dt \\
&= f(t) - f(a).
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.2. *(Voir* [1]*)(Règle de Chaîne). Supposons $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions α-différentiables (à gauche), où $0 < \alpha \leq 1$. Soit $h(t) = f(g(t))$. Alors $h(t)$ est (à gauche)α-différentiable et pour tout t avec $t \neq a$ et $g(t) \neq 0$ ona :*

$$\left(\mathcal{D}_\alpha^a h\right)(t) = \left(\mathcal{D}_\alpha^a f\right)(g(t)).\left(\mathcal{D}_\alpha^a g\right)(t).g(t)^{\alpha-1}.$$

si $t = a$ on a

$$\left(\mathcal{D}_\alpha^a h\right)(a) = \lim_{t \to a^+} \left(\mathcal{D}_\alpha^a f\right)(g(t)).\left(\mathcal{D}_\alpha^a g\right)(t).g(t)^{\alpha-1}.$$

Démonstration. On suppose que $u = t + (t-a)^{1-\alpha}$ dans la définition et en utilisant la continuité de g, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^a_\alpha h(t) &= \lim_{u\to t}\frac{f(g(u))-f(g(t))}{u-t}t^{1-\alpha}\\
&= \lim_{u\to t}\frac{f(g(u))-f(g(t))}{(g(u)-g(t))}.\lim_{u\to t}\frac{g(u)-g(t)}{u-t}t^{1-\alpha}\\
&= \lim_{g(u)\to g(t)}\frac{f(g(u))-f(g(t))}{(g(u)-g(t))}.g(t)^{1-\alpha}.\mathcal{D}^a_\alpha g(t).g(t)^{\alpha-1}\\
&= (\mathcal{D}^a_\alpha f)(g(t)).(\mathcal{D}^a_\alpha g)(t).g(t)^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.3. *(Voir* [1]*) (Intégration par partie) Soit* $0<\beta\leq 1$ *et* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *deux fonctions telles que* f,g *différentiable. alors nous avons :*

$$\int_a^b f(x)\mathcal{D}^a_\beta(g)(x)(x-a)^{\beta-1}dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)\mathcal{D}^a_\beta(f)(x)(x-a)^{\beta-1}dx. \tag{2.19}$$

Démonstration. En utilisant la propriété (2.8), lemme 2.3

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^a_\beta\mathcal{D}^a_\beta(fg) &= \int_a^b (fg)(x)(x-a)^{\beta-1}dx\\
&= \int_a^b [f(x)\mathcal{D}^a_\beta(g)(x)+g(x)\mathcal{D}^a_\beta](x-a)^{\beta-1}dx\\
&= \int_a^b f(x)\mathcal{D}^a_\beta(g)(x)(x-a)^{\beta-1}dx + \int_a^b g(x)\mathcal{D}^a_\beta(f)(x)(x-a)^{\beta-1}dx
\end{aligned}$$

puisque f,g différentiables, nous pouvons appliquer $\mathcal{I}^a_\alpha\mathcal{D}^a_\alpha$ sur fg. donc nous obtenons : $\mathcal{I}^a_\alpha\mathcal{D}^a_\alpha(fg) = fg|_a^b$

$$\begin{aligned}
&\to fg|_a^b = \int_a^b f(x)\mathcal{D}^a_\beta(g)(x)(x-a)^{\beta-1}dx + \int_a^b g(x)\mathcal{D}^a_\beta(f)(x)(x-a)^{\beta-1}dx.\\
&\to \int_a^b f(x)\mathcal{D}^a_\beta(g)(x)(x-a)^{\beta-1}dx = fg|_a^b - \int_a^b g(x)\mathcal{D}^a_\beta(f)(x)(x-a)^{\beta-1}dx.
\end{aligned}$$

□

2.3 La transformation de Laplace conformable fractionnaire

Dans cette section, des chercheurs présentent la définition du transformation de Laplace conformable fractionnaire et quelques propriétés de base du transformation de Laplace de conformable fractionnaire aussi. Où dans cette section nous commencerons rappel sur le transformation de Laplace (Transformation de Laplace classique).

$f(t)$	$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{\Gamma(1+n)}{s^{1+n}}$
e^{bt}	$\frac{1}{s-b}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$e^{bt}f(t)$	$\mathcal{F}(s-b)$
$tf(t)$	$-\mathcal{F}'(s)$

TABLE 2.1 – La transformation de Laplace de certaines fonctions

2.3.1 Rappel sur la transformation de Laplace

La transformation de Laplace crée par le mathématicien français Pierre-Simon Laplace(1749-1827). Il est considère comme une technique très utile pour résoudre les équations différentielles ordinaires et partielles, qui décrivent comment certaines quantités varient avec le temps, comme le flux de chaleur à travers un conducteur isolé ou le courant dans un circuit électrique.

Ces équations sont généralement accompagnées de conditions initiales qui décrivent l'état du système au temps $t = 0$.

Définition 2.4. *(Voir* [4]*) Soit f une fonction réelle ou complexe de la variable(Temps) $t > 0$, et soit s un paramètre réelle ou complexe, alors la transformée de Laplace de $f(t)$ est :*

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt. \tag{2.20}$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-st}f(t)dt. \tag{2.21}$$

Si la limite existe (2.20) est dite convergent, sinon elle diverge et il n'y a pas de transformation Laplace définie pour f. Le domaine du paramètre s est choisi de manière appropritée pour que la convergence de l'intégrale de Laplace (2.20) est assurée. Donc s peut appartenir au plan complexe $\mathbb{C}$, ou linge vraie $\mathbb{R}$.

Dans ce qui suit la transformation de la Laplace de certaines fonctions :

2.3.2 La transformation de Laplace conformable fractionnaire

Définition 2.5. *(Voir* [2]*) Soit* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction à valeur réelle, Alors le Laplace conformable fractionnaire d'ordre* α *est défini par :*

$$\mathcal{L}_\alpha\{f(t)\}(s) = \mathcal{F}_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t)t^{\alpha-1}dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t)t^{\alpha-1}dt. \tag{2.22}$$

Si $\alpha = 1$*, Alors (2.22) est la définition classique de la transformation de Laplace d'ordre entier (2.20), Ce qui signifie que (2.22) est une généralisation de (2.20).*

Théorème 2.4. *(Voir* [1]*) (La transformation de Laplace conformable fractionnaire de dérivée fractionnaire) Soit* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction à valeur réelle différentiable, Alors :*

$$\mathcal{L}_\alpha\{\mathcal{D}_\alpha(f)(t)\}(s) = s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0).$$

Démonstration. Par la définition 2.5 et de l'intégration par partie on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\{\mathcal{D}_\alpha(f)(t)\}(s) &= \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}}\mathcal{D}_\alpha(f)(t)t^{\alpha-1}dt.\\ &= \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}}\frac{df}{dt}t^{1-\alpha}t^{\alpha-1}dt.\\ &= \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}}\frac{df}{dt}dt.\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie, nous fixons :

$$\begin{array}{llll} u = & e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} & dv & = \frac{df}{dt}dt \\ du = & -st^{\alpha-1}e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}}dt & f(t) & \end{array}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\{\mathcal{D}(f)(t)\}(s) &= \lim_{\tau\to\infty}\left[e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}}f(t)\right]_0^\tau - \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau -st^{\alpha-1}e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}}f(t)dt.\\ &= [0 - f(0)] + s\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}}f(t)t^{\alpha-1}dt \quad : s > 0.\\ &= s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0) \quad : s > 0.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2. *(Voir* [1]*) Soit* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *tel que* $\mathcal{L}_\alpha\{f(t)\}(s) = \mathcal{F}(s)$ *existe. Alors :*

$$\mathcal{F}_\alpha(s) = \mathcal{L}\left\{f\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha\right\}(s).$$

Démonstration. Dans la définition 2.5 nous fixons $u = \dfrac{t^\alpha}{\alpha}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha(s) &= \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t)t^{\alpha-1}dt.\\ &= \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-su} f\left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}}\right) du.\\ &= \mathcal{L}\left\{f\left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha\right\}.\end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit la transformation de Laplace conformable fractionnaire de certaines fonctions :

1. $$\mathcal{L}_\alpha\{1\}(s) = \frac{1}{s} \quad : s > 0.$$

2. $$\mathcal{L}_\alpha\{t\}(s) = \alpha^{\frac{1}{\alpha}}\frac{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{s^{1+\frac{1}{\alpha}}} \quad : s > 0.$$

3. $$\mathcal{L}_\alpha\{t^p\}(s) = \alpha^{\frac{p}{\alpha}}\frac{\Gamma(1+\frac{p}{\alpha})}{s^{1+\frac{p}{\alpha}}} \quad : s > 0.$$

4. $$\mathcal{L}_\alpha\left\{e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right\}(s) = \frac{1}{s-1} \quad : s > 0.$$

5. $$\mathcal{L}_\alpha\left\{\sin\left(b\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right\}(s) = \frac{b}{s^2+b^2} \quad : s > 0.$$

6. $$\mathcal{L}_\alpha\left\{\cos\left(b\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right\}(s) = \frac{s}{s^2+b^2} \quad : s > 0.$$

7. $$\mathcal{L}_\alpha\left\{\sinh\left(b\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right\}(s) = \frac{b}{s^2-b^2} \quad : s > |b|.$$

8. $$\mathcal{L}_\alpha\left\{\cosh\left(b\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right\}(s) = \frac{s}{s^2-b^2} \quad : s > |b|.$$

Démonstration. Les preuves suivantes facilement à l'aide du lemme 2.2 et du tableau précédent du transformation de Laplace.

1. $$\mathcal{L}_\alpha\{1\}(s) = \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} \quad : s > 0.$$

2.
$$\mathcal{L}_\alpha\{t\}(s) = \mathcal{L}\left\{(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right\} = \alpha^{\frac{1}{\alpha}}.\mathcal{L}\left\{t^{\frac{1}{\alpha}}\right\} = \alpha^{\frac{1}{\alpha}}\frac{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{s^{1+\frac{1}{\alpha}}} \quad : s > 0.$$

3.
$$\mathcal{L}_\alpha\{t^p\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^p\right\} = \mathcal{L}\left\{(\alpha t)^{\frac{p}{\alpha}}\right\} = \alpha^{\frac{p}{\alpha}}\mathcal{L}\left\{t^{\frac{p}{\alpha}}\right\} = \alpha^{\frac{p}{\alpha}}\frac{\Gamma(1+\frac{p}{\alpha})}{s^{1+\frac{p}{\alpha}}} \quad : s > 0.$$

Notez quand $p = n\alpha$, Alors :

$$\mathcal{L}_\alpha\{t^p\}(s) = \alpha^n\mathcal{L}\{t^n\} \quad : s > 0.$$

4.
$$\mathcal{L}_\alpha\left\{e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right\}(s) = \frac{1}{s-1} \quad : s > 0.$$

5.
$$\mathcal{L}_\alpha\left\{\sin\left(b\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\sin\left(b\frac{\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha}{\alpha}\right)\right\} = \mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2+b^2} \quad : s > 0.$$

6.
$$\mathcal{L}_\alpha\left\{\cos\left(b\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\cos\left(b\frac{\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha}{\alpha}\right)\right\} = \mathcal{L}\{\cos(bt)\} = \frac{s}{s^2+b^2} \quad : s > 0.$$

7.
$$\mathcal{L}_\alpha\left\{\sinh\left(b\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\sinh\left(b\frac{\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha}{\alpha}\right)\right\} = \frac{b}{s^2-b^2} \quad : s > |b|.$$

8.
$$\mathcal{L}_\alpha\left\{\cosh\left(b\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\cosh\left(b\frac{\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha}{\alpha}\right)\right\} = \frac{s}{s^2-b^2} \quad : s > |b|.$$

□

2.3.3 Quelques propriétés de la transformation de Laplace conformable fractionnaire

Propriétés 2.2. *Certaines propriétés du transformation de Laplace conformable fractionnaire :*

1. *La transformation de Laplace conformable fractionnaire est un opérateur linéaire :*

$$\mathcal{L}\{\mu f(t) \pm \lambda g(t)\}(s) = \mu\mathcal{F}_\alpha(s) \pm \lambda\mathcal{G}_\alpha(s),$$

Tel que μ et λ sont des constantes.

2. *Déplacement(Voir* [1]*)*

$$\mathcal{L}_\alpha\left\{e^{-k\frac{t^\alpha}{\alpha}}f(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{f\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right\}|_{s=s+k}\quad : s>-k.$$

Démonstration. Par lemme 2.2, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\left\{e^{-k\frac{t^\alpha}{\alpha}}f(t)\right\}&=\mathcal{L}\left\{e^{\frac{-k\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha}{\alpha}}f\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right\}\\&=\mathcal{L}\left\{e^{-kt}f\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right\}\\&=\mathcal{L}\left\{f\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right\}|_{s=s+k}\quad : s>-k.\end{aligned}$$

par exemple :

$$\mathcal{L}_\alpha\left\{e^{-k\frac{t^\alpha}{\alpha}}\cos\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right\}(s)=\mathcal{L}\{\cos(t)\}|_{s=s+k}=\frac{s}{1+s^2}|_{s=s+k}=\frac{s+k}{1+(s+k)^2}\quad : s>0.$$

$$\mathcal{L}_\alpha\left\{e^{-k\frac{t^\alpha}{\alpha}}\sin\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\right\}(s)=\mathcal{L}\{\sin(t)\}|_{s=s+k}=\frac{1}{1+s^2}|_{s=s+k}=\frac{1}{1+(s+k)^2}\quad : s>0.$$

□

3. *La transformation de Laplace conformable fractionnaire de l'intégrale conformable fractionnaire :*

$$\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{I}_\alpha(f)(t))=\frac{\mathcal{F}_\alpha(s)}{s}.$$

4. *Les dérivées de la transformée de Laplace conformable fractionnaire satisfont :*

$$\mathcal{F}_\alpha^{(n)}(s)=(-1)^n\mathcal{L}_\alpha\left\{\frac{t^{n\alpha}}{\alpha^n}f(t)\right\}.$$

5. *Soit $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions quelconques, Alors la transformée de Laplace conformable fractionnaire de la convolution de $f(t)$ et $g(t)$ est :*

$$\mathcal{L}_\alpha\{(f*g)(t)\}=\mathcal{F}_\alpha(s).\mathcal{G}_\alpha(s)$$

Où $0<\alpha\leq 1$

Démonstration. Par le lemme 2.2 et la définition de la convolution, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\{(f*g)(t)\}&=\mathcal{L}\left\{(f*g)\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right\}(s)\\&=\int_0^\infty(f*g)\left((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)e^{-st}dt\\&=\int_0^\infty\left(\int_0^t f\left((\alpha(t-u))^{\frac{1}{\alpha}}\right)g\left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}}\right)du\right)e^{-st}dt.\end{aligned}$$

On change l'ordre d'intégration, donc :

$$\mathcal{L}_\alpha\{(f*g)(t)\} = \int_0^\infty \int_u^\infty f\left((\alpha(t-u))^{\frac{1}{\alpha}}\right) g\left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-st} dt\, du$$

Soit $t-u=v$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\alpha\{(f*g)(t)\} &= \int_0^\infty \int_0^\infty f\left((\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}}\right) g\left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-s(v+u)} dv\, du \\
&= \left(\int_0^\infty f\left((\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-sv} dv\right) \left(\int_0^\infty g\left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-su} du\right) \\
&= \mathcal{L}\left\{f\left((\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right\}.\mathcal{L}\left\{g\left((\alpha u)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right\} \\
&= \mathcal{L}_\alpha\{f(t)\}.\mathcal{L}_\alpha\{g(t)\} \\
&= \mathcal{F}_\alpha(s).\mathcal{G}_\alpha(s).
\end{aligned}$$

□

6. *Si $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la continuellement première différentiable, alors la transformée de Laplace conformable fractionnaire de la dérivée conformable fractionnaire séquentielle du première ordre de f est :*

$$\mathcal{L}_\alpha\{\mathcal{D}_\alpha(f)(t)\}(s) = s\mathcal{F}(s) - f(0) \quad : 0 < \alpha \leq 1.$$

Chapitre 3

Méthodes numériques sur le problème de Cauchy conformable

Dans ce chapitre, nous avons appliqué deux méthodes numériques, la méthode d'Euler et l'approximation successive, pour résoudre le problème de Cauchy conformable, en plus de certaines théories et définitions liées à cela.

3.1 Problème de Cauchy

Définition 3.1. *Le problème de Cauchy relative à l'équation différentielle du premier ordre, et aux données les conditions initiales* (x_0, y_0) *consiste a chercher la solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} y^{'} = f(x,y) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \tag{3.1}$$

Proposition 3.1. *Le problème (3.1) équivalente de cette équation :*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx.$$

Démonstration.

$\Rightarrow$) Supposons que y est une solution du le problème (3.1). ALors :

$$\begin{aligned} y^{'}(x) = f(x,y) &\Rightarrow \int_{x_0}^{x} y^{'}(x)dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \\ &\Rightarrow [y(x)]_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \\ &\Rightarrow y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \\ &\Rightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Supposons que $y(x)$ est une solution du problème

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx.$$

Dérivons les deux membres par rapport a x, on obtient

$$y^{'}(x) = f(x, y),$$

et

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x_0, y(x_0))dx \Rightarrow y(x_0) = y_0.$$

on obtient

$$\begin{cases} y^{'} = f(x, y) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

□

Théorème 3.1. ***(Théorème de accroissements finies)*** *Soit f une application de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivants :*

$i)$ *f est continue sur $[a, b]$.*

$ii)$ *f est dérivable sur $[a, b]$.*
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f^{'}(c)$.

Théorème 3.2. *Soit f une fonction déffirentiable définie par :*

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

f est Lipschitzienne sur $I \times \Omega \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}$ est bornée sur $I \times \Omega^{\circ}$ avec Ω° est l'intérieur de Ω.

Démonstration.

$\Rightarrow$) Supposons que : f est Lipschitzienne, alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \forall y, y_0 \in \Omega, \exists K > 0 : |f(x, y) - f(x, y_0)| \leq K|y - y_0| &\Rightarrow \left| \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} \right| \leq K \\ &\Rightarrow \lim_{y \to y_0} \left| \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} \right| \leq K \\ &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \leq K. \end{aligned}$$

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est bornée sur $I \times \Omega^{\circ}$.

$\Leftarrow$) Supposons que :$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est bornée sur $I \times \Omega^{\circ}$.

Donc $\exists K > 0$ tel que $\forall x, y \in I \times \Omega$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq K$.

On a $f(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continue, D'après le théorème des accroissements finies 3.1.

$$\forall y_1, y_2 \in \Omega, y_1 < y_2, x \in I : \left|\frac{f(x,y_2) - f(x,y_1)}{y_2 - y_1}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,c)\right|$$

mais $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est bornée. donc $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,c)\right| \leq K$.

Alors

$$\left|\frac{f(x,y_2) - f(x,y_1)}{y_2 - y_1}\right| \leq K \Rightarrow |f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq |y_2 - y_1|.$$

D'où f est Lipschitzienne sur $I \times \Omega$.

□

Proposition 3.2. *Si la fonction $f(x,y)$ est continue sur $I \times \Omega$ et f Lipschitzienne sur$I \times \Omega$. Alors le problème (3.1) admet une solution unique.*

3.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 3.3. *(Voir* [10]*) Soient l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \tag{3.2}$$

et les conditions initiales

$$y = y_0 \text{ pour } x = x_0. \tag{3.3}$$

Si $f(x,y)$ et $f_y^{'}(x,y)$ sont continues dans le domaine fermé D,

$$D = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a,\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\} \tag{3.4}$$

il existe alors dans un certain intervalle

$$x_0 - l < x < x_0 + l \tag{3.5}$$

une solution et une seule de l'équation (3.2)vérifiant les conditions initiales (3.3). Le nombre l sera défini plus pas.

Démonstration. Remarquons que de la continuité des fonctions $f(x,y)$ et $f_y^{'}(x,y)$ dans l'intervalle fermé D, il s'ensuit qu'il existe des constantes $M > 0$ et $N > 0$ telles qu'en tous les points du domaine sont vérifiées les relations :

$$|f(x,y)| \leq M, \tag{3.6}$$

$$|f_y^{'}(x,y)| \leq N. \tag{3.7}$$

Dans l'équation (3.5) l est le plus petit des nombres a et $\frac{b}{M}$, c'est-à-dire

$$l = min\left(a, \frac{b}{M}\right). \tag{3.8}$$

Le théorème de Lagrange appliqué à la fonction $f(x,y)$ aux points quelconques $A_1(x,y_1)$ et $A_2(x,y_2)$ du domaine D donne :

$$f(x,y_2) - f(x,y_1) = f_y^{'}(x,\eta)(y_2 - y_1),$$

où $y_1 < \eta < y_2$; par conséquent, $|f_y^{'}(x,\eta)| \leq N$. De sorte que l'inégalité

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq N|y_2 - y_1| \tag{3.9}$$

est vérifiée pour deux points quelconques.

Revenons à l'égalité

$$y_1(x) = \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx + y_0. \tag{3.10}$$

Il en résulte compte tenu également des égalités (3.5), (3.6), (3.8)

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx\right| \leq \int_{x_0}^{x} Mdx = M|x - x_0| \leq Ml \leq b. \tag{3.11}$$

Ainsi, la fonction $y = y_1(x)$ définie par l'égalité (3.10) sur l'intervalle (3.5) ne sort pas du domaine D.

Passons à présent à l'égalité

$$y_2(x) = \int_{x_0}^{x} f\left[x, y_1(x)\right] dx + y_0. \tag{3.12}$$

Les variables indépendantes de la fonction $f\left[x, y_1(x)\right]$ ne sortent pas du domaine D.

Nous pouvons donc écrire

$$|y_2 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} \left[f(x, y_1(x))\right] dx\right| \leq M|x - x_0| \leq Ml \leq b. \tag{3.13}$$

Par induction on peut démontrer que pour tout n

$$|y_n - y_0| \leq b \tag{3.14}$$

si x appartient à l'intervalle (3.5).

Démontrons maintenant que

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x) \tag{3.15}$$

existe et que la fonction $y(x)$ vérifie l'équation différentielles (3.2) et les conditions initiales (3.3). Considérons pour cela la série

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + ... + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (y_n - y_{n-1}) \tag{3.16}$$

ayant pour terme général $u_n = y_n - y_{n-1}$ et $u_0 = y_0$. De toute évidence la somme des $n+1$ premiers termes de cette série est

$$s_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} u_i = y_n. \tag{3.17}$$

Evaluons les termes de série (3.16) en valeur absolue

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\right| \leq M|x - x_0|. \tag{3.18}$$

En vertu de (3.10), (3.12) et (3.7) il vient

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &= \left|\int_{x_0}^{x} [f(x, y_1) - f(x, y_0)]\, dx\right| \\ &= \left|\int_{x_0}^{x} f_y'(x, \eta_1)(y_2 - y_1) dx\right| \\ &\leq \pm N \int_{x_0}^{x} M|x - x_0| dx \\ &= N\frac{M}{2}|x - x_0|^2 \end{aligned}$$

(on prend le signe $+$ si $x_0 < x$ et le singe $-$ si $x_0 > x$). Donc

$$|y_2 - y_1| \leq M\frac{N}{1.2}|x - x_0|^2. \tag{3.19}$$

En tenant compte de (3.19) nous obtenons

$$\begin{aligned} |y_3 - y_2| &= \left|\int_{x_0}^{x} [f(x, y_2) - f(x, y_1)]\, dx\right| \\ &= \left|\int_{x_0}^{x} f_y'(x, \eta_2)(y_2 - y_1) dx\right| \\ &\leq \pm N \int_{x_0}^{x} \frac{MN}{2}|x - x_0|^2 dx \end{aligned}$$

$$= M\frac{N^2}{1.2.3}|x-x_0|^3. \tag{3.20}$$

Et de proche en proche jusqu'à

$$|y_n - y_{n-1}| = M\frac{N^{n-1}}{n!}|x-x_0|^n. \tag{3.21}$$

La série de fonctions (3.16) est donc majorable dans l'intervalle $|x-x_0|<l$. La série numérique à termes positifs plus grands que les valeurs absolues des termes correspondants de la série (3.16) s'écrit

$$y_0 + Ml + M\frac{Nl^2}{2!} + M\frac{N^2l^3}{3!} + ... + M\frac{N^{n-1}l^n}{n!} + ... \tag{3.22}$$

avec un terme général $v_n = M\dfrac{N^{n-1}l^n}{n!}$. On s'assure aisément de sa convergence en appliquent le critère de d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{v_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{M\dfrac{N^{n-1}l^n}{n!}}{M\dfrac{N^{n-2}l^{n-1}}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{Nl}{n} = 0 < 1.$$

La série (3.16) est majorable, elle est donc convergente. Comme ses membres sont des fonctions continues, elle converge vers une fonction continue $y(x)$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} y_n = y(x), \tag{3.23}$$

où $y(x)$ est une fonction continue vérifiant la condition initiale étant donné que pour tous les n

$$y_n(x_0) = y_0.$$

Démontrons que la fonction $y(x)$ que nous venons d'obtenir vérifie l'équation (3.2).

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx. \tag{3.24}$$

Montrons que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f\left[x, y_{n-1}(x)\right]dx = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx, \tag{3.25}$$

où $y(x)$ est déterminée par l'égalité (3.23).

Remarquons auparavant ce qui suit. Etant donné que la série (3.16) est majorables, il résulte (3.23) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un n tel que

$$|y - y_n| < \varepsilon. \tag{3.26}$$

En tenant compte de (3.26), dans tout l'intervalle (3.5) nous avons

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx - \int_{x_0}^{x} f(x,y_n)dx\right| &\leq \pm \int_{x_0}^{x} |f(x,y) - f(x,y_n)|dx \\ &\leq \int_{x_0}^{x} N|y-y_n|dx \\ &\leq N\varepsilon|x-x_0|.\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to\infty} \varepsilon = 0$; par conséquent

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx - \int_{x_0}^{x} f(x,y_n)dx\right| = 0.$$

De cette dernière égalité découle l'égalité (3.25).

En passant à présent dans les deux membres de l'égalité (3.24) à la limite lorsque $n \to \infty$, nous constatons que $y(x)$ définie par l'égalité (3.23) vérifie l'équation

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx. \tag{3.27}$$

Par conséquent, comme nous l'avons indiqué plus haut, la fonction $y(x)$ que nous venons de trouver vérifie l'équation différentielle (3.2) et les conditions initiales (3.3). □

Remarque 3.1. *(Voir* [10]*) D'autres méthodes de démonstration permettent d'affirmer qu'il existe une solution de l'équation (3.2) vérifiant les conditions initiales (3.3) si la fonction $f(x,y)$ est continue dans le domaine D.*

Remarque 3.2. *Par un procédé analogue à celui qui nous a permis d'établir la relation (3.21), nous pouvons montrer que l'erreur qui apparait après la substitution de la solution $y(x)$ par sa n-ième approximation y_n est donnée par la formule*

$$|y-y_n| \leq \frac{N^n M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq \frac{MN^n l^{n+1}}{(n+1)}. \tag{3.28}$$

Théorème 3.4. *(Voir* [10]*) Si la fonction $f(x,y)$ est continue et admet une dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continue sur le domaine D, la solution de l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{3.29}$$

pour les conditions initiales

$$y = y_0 \text{ quand } x = x_0 \tag{3.30}$$

est alors unique, c'est-à-dire que par le point (x_0, y_0) il ne passe qu'une seule et unique courbe intégrale de l'équation (3.29).

Démonstration. Supposons qu'il existe deux solutions de l'équation (3.29) vérifiant les conditions (3.30) c'est-à-dire deux courbes $y(x)$ et $z(x)$ passant par le point $A(x_0, y_0)$. Ces deux fonctions vérifient donc l'équation (3.27) :

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx, \quad z = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,z)dx.$$

Considérons la différence

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^{x} [f(x,y) - f(x,z)]\, dx. \tag{3.31}$$

D'après la formule de Lagrange et l'inégalité (3.7) nous avons :

$$f(x,y) - f(x,z) = \frac{\partial f(x,\eta)}{\partial y}(y-z), \tag{3.32}$$

d'où il vient

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq N|y-z|. \tag{3.33}$$

D'après (3.31) et (3.33) on peut écrire

$$|y-z| = \left| \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial y}.(y-z)dx \right| \leq \pm \int_{x_0}^{x} N|y-z|dx. \tag{3.34}$$

Soit x tel que $|x - x_0| < \dfrac{1}{N}$. Pour fixer les idées prenons $x_0 < x$, la démonstration étant analogue pour $x < x_0$.

Supposons que $\lambda = \max |y-z|$ dans l'intervalle $x - x_0 < \dfrac{1}{N}$ pour une valeur de $x = x^*$. L'inégalité (3.34) pour le point x^* s'écrit alors sous la forme :

$$\lambda \leq N \int_{x_0}^{x_0^*} \lambda dx = N\lambda(x^* - x_0) < N\lambda \frac{1}{N} < N,$$

d'où

$$\lambda < \lambda$$

En admettant l'existence de deux solutions distinctes nous avons abouti à une contradiction. Par conséquent, la solution est unique. □

Remarque 3.3. *(Voir* [10]*) On peut montrer que la solution sera unique moyennant moins de conditions sur la fonction $f(x,y)$.*

Remarque 3.4. *(Voir* [10]*) Si la fonction $f(x,y)$ admet une dérivée partielle non bornée dans le domaine, il peut alors fort bien exister plusieurs solutions vérifiant l'équation (3.29) et les conditions initiales (3.30).*

3.3 Méthode d'Euler

(Voir [5]) les méthodes numériques plus populaires pour résoudre sont appelées méthodes différences finies. Des valeurs approximatives sont obtenues pour la solution à un ensemble de points de grille

$$x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < ... \tag{3.35}$$

et valeur approximative à chaque x_n, est obtenue en utilisant certaines des valeurs obtenues dans les étapes précédentes. Nous commençons par une méthode simple mais inefficace en termes de calcul attribuée à Leonhard Euler. Son analyse présente d nombreuses caractéristiques des analyses des méthodes de différences finies plus efficaces, mais sans leur complexité supplémentaire. Nous donnons d'abord plusieurs dérivations de la méthode d'Euler, et suivons avec une analyse complète de convergence et de stabilité pour celle-ci. Nous donnons une formule d'erreur asymptotique et concluons la section en généralisant les résultats précédents aux systèmes d'équations

Comme précédemment, $Y(x)$ dénotera vraie la solution de :

$$Y'(x) = f(x, Y(x)) \quad Y(x_0) = Y_0 \tag{3.36}$$

La solution approchée sera notée $y(x)$, et les valeurs $y(x_0), y(x_1), ..., y(x_n), ...$ seront souvent notées $y_0, y_1, ..., y_n, ...$ une grille égale taille $h > 0$ sera utililisée pour définir les neouds

$$x_i = x_0 + ih \quad i = 0, 1, ...$$

Lorsque nous comparons des solutions numériques pour différentes valeurs de h, nous utiliserons également la notation $y_n(x)$ pour faire référence à $y(x)$ avec un pas h. Le problème (3.36) sera résolu sur un intervalle fini fixe, qui sera toujours noté $[x_0, b]$. La notation $N(h)$ désignera le plus grand indice N pour lequel

$$x_N \leq b, \qquad x_{N+1} > b$$

Dans les sections suivantes, nous discuterons de la variation du pas à chaque x_n, afin de controler l'erreur.

3.3.1 Dérivation de la méthode d'Euler

La méthode d'Euler est définie par :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{3.37}$$

avec $y_0 = Y_0$. Quatre points de vue de il est donné.

3.3.2 Un point de vue géométrique

(Voir [5]) Considérons le graphique de la solution $Y(x)$. Formez la ligne tangente au graphique de $Y(x)$ en x_0, et utilisez cette ligne comme approximation de la courbe pour $x_0 < x < x_1$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{\triangle\, y}{h} &= Y^{'}(x_0) = f(x_0, Y_0),\\ Y(x_1) - Y(x_0) &= \triangle\, y = hY^{'}(x_0),\\ Y(x_1) &= Y(x_0) + hf(x_0, Y(x_0)).\end{aligned}$$

En répétant cet argument sur $[x_1, x_2], [x_2, x_3], ...$, on obtient la formule générale (3.37).

3.3.3 Série Taylor

(Voir [5]) Développer $Y(x_{n+1})$ autour de x_n,

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + hY^{'}(x_n) + \frac{h^2}{2}Y^{''}(\xi_n), \quad x_n < \xi_n < x_{n+1}. \tag{3.38}$$

En supprimant le terme d'erreur, on obtient la méthode d'Euler (3.37). Le terme

$$T_n = \frac{h^2}{2}Y^{''}(\xi_n). \tag{3.39}$$

s'appelle erreur de troncature ou erreur de discrétisation en x_{n+1}. Nous utilisons le ancien nom dans ce texte.

3.3.4 Différenciation numérique

(Voir [5]) De la définition d'un dérivé,

$$\begin{aligned}\frac{Y(x_{n+1}) - Y(x_n)}{h} &= Y^{'}(x_n) = f(x_n, Y(x_n)),\\ Y(x_{n+1}) &= Y(x_n) + hf(x_n, Y(x_n)).\end{aligned}$$

3.3.5 Intégration numérique

Intégrer $Y^{'}(t) = f(t, Y(t))$sur $[x_n, x_{n+1}]$:

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, Y(t))dt, \tag{3.40}$$

Considérons la méthode d'intégration numérique simple

$$\int_a^{a+h} g(t)dt = hg(a), \tag{3.41}$$

appelée la règle rectangulaire de gauche. En appliquant cela à (3.40), on obtient

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + hf(x_n, Y(x_n)).$$

Exemple 3.1. *Trouver la valeur approchée pour $x = 1$ de la solution de l'équation*

$$y^{'} = y + x$$

vérifiant la condition initiale : $y_0 = 1$ pour $x_0 = 0$.
Solution *: Divisons le segment $[0, 1]$ en 10 parties à l'aide des points $x_0 = 0; 0,1; 0,2; ...; 1$. Par conséquent, $h = 0,1$. Nous rechercherons les valeurs $y_1, y_2, ..., y_n$ à l'aide de la formule*

$$\triangle\ y_k = (y_k + x_k)h$$

ou

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)h$$

Nous obtenons ainsi :

$$y_1 = 1 + (1 + 0).0,1 = 1 + 0,1 = 1,1$$
$$y_2 = 1,1 + (1,1 + 0,1).0,1 = 1,2$$

....

Au cours la résolution nous formons le tableau :

x_h	y_k	$y_k + x_k$	$\triangle\ y_k = (y_k + x_k)h$
$x_0 = 0$	$1,000$	$1,000$	$0,100$
$x_1 = 0,1$	$1,100$	$1,200$	$0,120$
$x_2 = 0,2$	$1,220$	$1,420$	$0,142$
$x_3 = 0,3$	$1,362$	$1,620$	$0,162$
$x_4 = 0,4$	$1,524$	$1,924$	$0,1924$
$x_5 = 0,5$	$1,7164$	$2,2164$	$0,2216$
$x_6 = 0,6$	$1,9380$	$2,5380$	$0,2538$
$x_7 = 0,7$	$2,1918$	$2,8918$	$0,2892$
$x_8 = 0,8$	$2,4810$	$3,2810$	$0,3281$
$x_9 = 0,9$	$2,8091$	$3,7091$	$0,3709$
$x_{10} = 1,0$	$3,1800$		

Nous avons trouvé la valeur approché $y|_{x=1} = 3,_{1800}$. La solution exacte de l'équation donné, vérifiant les conditions initiales citées précédemment, sera

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Par conséquent,

$$y|_{x=1} = 2(e-1) = 3,4366.$$

L'erreur absolue est égale à $0,2566$, l'erreur relative à :

$$\frac{0,2566}{3,4366} = 0,075.$$

3.4 Résolution de l'équation différentielle du premier ordre par la méthode des approximations successives (méthode d'itération)

Soit à résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{3.42}$$

satisfaisant à la condition initiale

$$y = y_0 \quad pour \quad x = x_0. \tag{3.43}$$

En intégrant les membres de l'équation (3.42) de x_0 à x et en tenant compte de la condition initiale nous obtenons :

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx. \tag{3.44}$$

La fonction inconnue y se trouvant sous le signe d'intégration, l'équation (3.44) est appelée équation intégrale.

La fonction $y = y(x)$ vérifiant l'équation (3.42) et la condition initiale (3.43) vérifie l'équation (3.44). Et inversement, il est évident que la fonction $y = y(x)$ vérifiant l'équation (3.44) vérifie également l'équation (3.42) et la condition initiale (3.43).

Examinons tout d'abord la méthode des solutions approchées de l'équation (3.42) pour les conditions initiales (3.43).

Soit y_0 l'approximation nulle de la solution. En remplaçant y par y_0 dans la fonction à intégrer du deuxième membre de l'égalité (3.44) nous obtenons

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx. \tag{3.45}$$

$y_1(x)$ est la première solution approchée de l'équation différentielle (3.42) vérifiant la condition initiale (3.43).

Portons à présent la première approximation $y_1(x)$ dans la fonction à intégrer de l'égalité (3.44)

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx. \tag{3.46}$$

Nous obtenons de la sorte la deuxième approximation. poursuivons ce processus :

$$\begin{cases} y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2(x))dx. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))dx. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{3.47}$$

Plus bas nous indiquerons l'approximation qu'il faudra prendre compte tenu de la précision requise.

Exemple 3.2. *Trouver la solution approchée de l'équation $y' = x + y^2$ vérifiant les conditions initiales*

$$y_0 = 1 \quad pour \quad x = 0.$$

Solution. *D'après la formule (3.45) nous avons :*

$$y_1 = \int_0^x (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + 1,$$
$$y_2 = \int_0^x \left[x + \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)^2\right] dx + 1 = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{4} + 2.\frac{x^3}{3} + 3.\frac{x^2}{2} + x + 1,$$

et ainsi de suite.

3.5 Le problème de Cauchy conformable

Définition 3.2. *On appelle problème de Cauchy conformable tout problème sous la forme :*

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha y = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.48}$$

Proposition 3.3. *Le problème (3.48) équivalente de cette équation :*

$$y_{n+1}(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{f(x, y)}{x^{1-\alpha}} dx.$$

Démonstration. On a le problème (3.48) équivalente est

$$\begin{cases} y^{'}(x) = \dfrac{f(x,y)}{x^{1-\alpha}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} y^{'}(x)dx = \int_{x_0}^{x} \frac{f(x,y)}{x^{1-\alpha}}dx$$

$$\Leftrightarrow y(x_0) - y_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{f(x,y)}{x^{1-\alpha}}dx$$

$$\Leftrightarrow y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{f(x,y)}{x^{1-\alpha}}dx.$$

□

Théorème 3.5. *Soit* $\dfrac{f(x,y)}{x^{1-\alpha}}$ *fonction différentiable et Lipschitzienne par rapport le second variable sur* $I \times \Omega$*. Alors le problème (3.48)admet une solution unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.*

3.6 Application de la méthode d'Euler et des approximations successives sur le de Cauchy conformable

Nous donnes cet exemple :

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\alpha} y = xy + x \\ y(1) = e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^{'}(x) = x^{\alpha}y + x^{\alpha} \\ y(1) = e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1 \end{cases} \tag{3.49}$$

On a : $\dfrac{f(x,y)}{x^{1-\alpha}} = x^{\alpha}y + x^{\alpha}$ est une fonction différentiable.

et on a : $\dfrac{f(x,y)}{x^{1-\alpha}}$ Lipschitzienne $\Leftrightarrow x^{1-\alpha}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ bornée

Alors : $x^{1-\alpha}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^{\alpha}$

la fonction x^{α} est une fonction différentiable et bornée dans l'intervalle $[1,2]$ avec $\alpha \in (0,1)$. Alors, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz le problème (3.49) admet une solution unique.

Nous avons cette équation différentiable linéaire de premier ordre $y^{'}(x) = x^{\alpha}y + x^{\alpha}$.

Nous avons recherchons la solution exacte de cette equation :

$$y^{'}(x) = x^{\alpha}(y+1)$$

donc

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int x^{\alpha}dx$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+1}{C}\right) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

alors $\qquad y = Ce^{\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}} - 1 \quad$ et on a $\; y(1) = e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1$

d'où

$$y(x) = e^{\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}} - 1.$$

(i) **On résoudre le problème (3.49) par méthode d'Euler :**

Divisons le segment $[1,2]$ en 5 parties a l'aide des points $x_0 = 1; 1,2; 1,4; ....; 2$ par conséquent $h = 0,2$

Nous recherchons les valeurs $y_1, y_2, ...$ ou $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$, avec $f(x_k, y_k) = x_k^\alpha y_k + x_k^\alpha$, nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
y_1 &= e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1 + 0,2\, e^{\frac{1}{1+\alpha}} \\
&= 1,2\, e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1 \\
y_2 &= 1,2\, e^{\frac{1}{1+\alpha}}(1 + 0,2(1,2)^\alpha) - 1 \\
y_3 &= 1,2\, e^{\frac{1}{1+\alpha}}(1 + 0,2(1,2)^\alpha)(1 + 0,2(1,4)^\alpha) - 1 \\
y_4 &= 1,2\, e^{\frac{1}{1+\alpha}}(1 + 0,2(1,2)^\alpha)(1 + 0,2(1,4)^\alpha)(1 + 0,2(1,6)^\alpha) - 1 \\
y_5 &= 1,2\, e^{\frac{1}{1+\alpha}}(1 + 0,2(1,2)^\alpha)(1 + 0,2(1,4)^\alpha)(1 + 0,2(1,6)^\alpha(1 + 0,2(1,8)^\alpha) - 1
\end{aligned}$$

Nous avons la valeur approchée $y|_{x=2} = (y_{x=1,8} + 1)(1 + 0,2(1,8)^\alpha) - 1$

et la valeur exacte $y|_{x=2} = e^{\frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha}} - 1$

L'erreur absolue est :

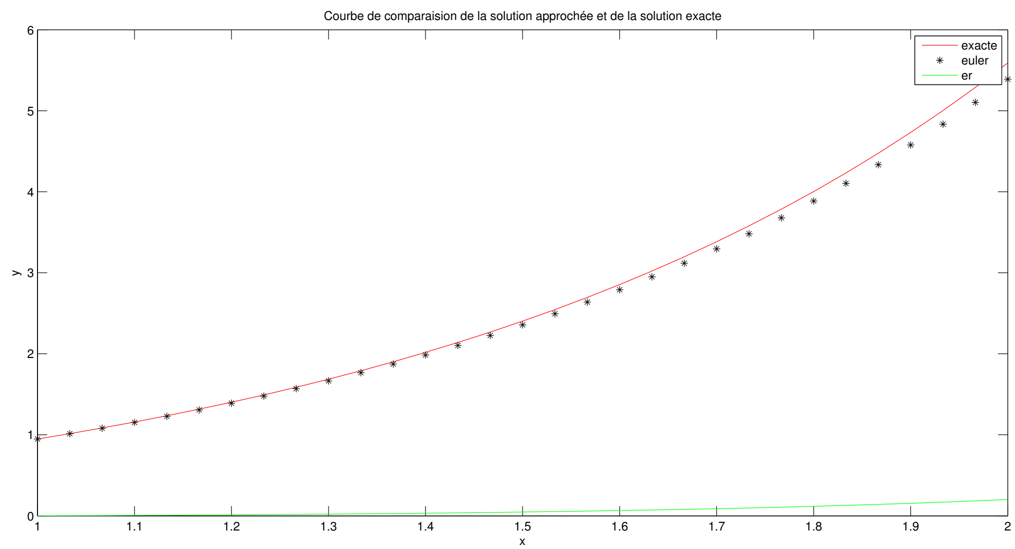
$$|e^{\frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha}} - (y_{x=1,8} + 1)(1 + 0,2(1,8)^\alpha)|$$

par exemple prenons $\alpha = \dfrac{1}{2}$

x_h	la valeur exacte de y_k	la valeur approchée de y_k	l'erreur absolue
$x_0 = 1$	$0,9477$	$0,9477$	0
$x_1 = 1,2$	$1,4021$	$1,3373$	$0,0648$
$x_2 = 1,4$	$2,0172$	$1,8494$	$0,1679$
$x_3 = 1,6$	$2,8545$	$2,5236$	$0,3309$
$x_4 = 1,8$	$4,0027$	$3,4151$	$0,5876$
$x_5 = 2$	$5,5904$	$4,5997$	$0,9907$

Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $n = 30$ telle que $n = \dfrac{b-a}{h} \Rightarrow h = \dfrac{1}{30}$

x_h	la valeur exacte de y_k	la valeur approchée de y_k	l'erreur absolue
x_5	$1,3166$	$1,3068$	$0,0098$
x_{10}	$1,7910$	$1,7665$	$0,0245$
x_{20}	$3,1973$	$3,1178$	$0,0795$
$x_{30} = 2$	$5,5904$	$5,3894$	$0,201$



Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $n = 100 \Rightarrow h = 0,01$

x_h	la valeur exacte de y_k	la valeur approchée de y_k	l'erreur absolue
x_{20}	$1,4021$	$1,3984$	$0,0038$
x_{60}	$2,8545$	$2,8346$	$0,0199$
x_{80}	$4,0027$	$3,9665$	$0,0361$
$x_{100} = 2$	$5,5904$	$5,5282$	$0,0622$

Remarque 3.5. *Plus le nombre de subdivisions n augmente, plus l'erreur diminue.*

(ii) **On résoudre le problème (3.49) par la méthode des approximations successives**

On a

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\alpha} y = f(x,y) \\ y(1) = e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1 \end{cases}$$

D'après la formule $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$ nous avons :

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1 + \int_1^x \left(x^\alpha \left(e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1\right) + x^\alpha\right) dx \\
&= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} e^{\frac{1}{1+\alpha}} - \frac{1}{\alpha+1} e^{\frac{1}{1+\alpha}} + e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1 \\
y_2(x) &= e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1 + \int_1^x \left(x^\alpha \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} e^{\frac{1}{1+\alpha}} - \frac{1}{\alpha+1} e^{\frac{1}{1+\alpha}} + e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1\right) + x^\alpha\right) dx \\
&= \frac{e^{\frac{1}{1+\alpha}}}{\alpha+1} \left[\frac{x^{2\alpha+2}-1}{2\alpha+2} + \frac{1-x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + x^{1+\alpha} - 1\right] + e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1 \\
y_3(x) &= e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1 + \int_1^x \left(\frac{x^\alpha e^{\frac{1}{1+\alpha}}}{1+\alpha} \left(\frac{e^{\frac{1}{1+\alpha}}}{\alpha+1} \left[\frac{x^{2\alpha+2}-1}{2\alpha+2} + \frac{1-x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + x^{1+\alpha} - 1\right]\right) + x^\alpha e^{\frac{1}{1+\alpha}}\right) dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_3 = \frac{e^{1+\alpha}}{1+\alpha} &\left[\frac{x^{3\alpha+3}-1}{(2\alpha+2)(3\alpha+3)} - \frac{(x^{2\alpha+2} + x^{\alpha+1} - 2)}{(2\alpha+2)(\alpha+1)} + \frac{x^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)^2} + \frac{x^{2\alpha+2}-1}{2\alpha+2} - \frac{(x^{\alpha+1}-1)}{\alpha+1} + x^{\alpha+1} - 1\right] \\
&+ e^{\frac{1}{1+\alpha}} - 1.
\end{aligned}
$$

et ainsi de suite.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons appliqué les méthodes numériques pour étudier les équations différentielles et le problème de Cauchy conformable. Pour cela, nous avons choisi deux méthodes numériques différentes, à savoir Euler et les approximations successives. Nous avons également rappelé le calcul fractionnaire et le calcul fractionnaire conformable. il convient de mentionner qu'il est possible d'utiliser d'autres méthodes numériques pour cela.

Bibliographie

[1] Abdeljawad. T. On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 2012, article 62(10 pages), 2015.

[2] ABDELKEBIR, S. (2022). Étude de quelques problèmes d'évolution pour des équations aux dérivées fractionnaires(Doctoral dissertation, Université de M'sila).

[3] T. Houmor, *Analyse du Chaos dans un Système d'èquations Différentielles Fractionnaires*, Thèse Doctorat en sciences, Univ de Constantine, 2014.

[4] Joel L Schiff. *The Laplace Transform : Theory and Applications*. New York : Springer-Verlag, 1999.

[5] Kendall E.Atkinson, *An introduction to numerical analysis second Edition*. 1978, 1989.

[6] A. Kilbas, J.J. Trujillo, *Differential equations of fractional order : methods, results and problems* II, Appl. Anal. 81 (2002) ; 435-493

[7] A.A. Kilbas, H.H. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Dierential Equations*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006..

[8] K.S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Di§erential Equations*, Wiley, New York, 1993.

[9] A.M. Nakhushev, *The Sturm-Liouville problem for a second order ordinary differential equation with fractional derivatives in the lower terms*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 234 (1977) ; 308-311.

[10] N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral*. Traduction française Editions Mir 1980.

[11] I. *Podlubny. Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.

[12] I. PODLUBNY, *Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, New York, 1999.

[13] Roshdi Khalil, Mohammed Al Horani, Abdelrahman Yousef, and Mohammad Sababheh. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264 :65–70, 2014.

[14] S. ZHANG, *Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional equations*, Electron. J. Diff. Equat. 36 (2006) ; 1-12.

ملخص: مؤخرا ظهر مفهوم جديد للتفاضل الكسري، يسمى حساب التفاضل المطابق، من أجل $0 < \alpha < 1$ و $a \in \mathbb{R}$ ، نحدد المشتق الكسري الموافق للدالة f عند النقطة $x \in [a, +\infty[$ على النحو التالي:

$$\mathcal{D}_a^\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon(x-a)^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon},$$

في هذا العمل، سوف نقدم هذا المفهوم ونعطي التعريفات والخصائص اللازمة، ثم سنقوم بدراسة بعض المعادلات التفاضلية المتعلقة بهذا التعريف.

كلمات مفتاحية: حساب كسري، حساب كسري مطابق .

Abstract :Recently, a new concept of fractional differentiation has emerged, called conformable fractional calculus, for the $0 < \alpha < 1$ and $a \in \mathbb{R}$, we determine the conformable fractional dervative of the function f at the point $x \in]a, +\infty[$ as

$$\mathcal{D}_a^\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon(x-a)^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon},$$

In this whok,we will present this definition and provide the necessary definitions and properties, then we will study some differential equations related to this definition.

Key words :fractional, conformable.

Résumé : Récemment, Une nouvelle approche du calcul différentiel fractionnaire est apparue, appelée calcul différentiel conformable. Pour $0 < \alpha < 1$, $a \in \mathbb{R}$ on définit la dérivée fractionnaire conformable d'une fonction f en un point $x \in]a, +\infty[$ comme suivant :

$$\mathcal{D}_a^\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon(x-a)^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon},$$

Dans ce travail, nous présenterons cette approche, et donnerons les définitions et propriétés nécessaires, puis nous étudierons quelques équations différentielles et problèmes aux à cette frontières liés approche.

Mot-clés :fractionnaire, conformable.