REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF – MSILA

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT PHYSIQUE

N° :Ph /TH/07/2021

DOMAINE : Sciences de la matière

FILIERE : Physique

OPTION : PHYSIQUE THEORIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique

Par : Lehmissi Mohamed

Intitulé

L'oscillateur de Dirac dans le modèle Anti de Sitter

Soutenu le 24 /06 /2021 devant le jury composé de:

BOUSSEHEL Mounir	Université de M'sila	Président
SABRI Youcef	Université de M'sila	Rapporteur
DEBBABI Mourad	Université de M'sila	Examinateur

Année universitaire : 2020/2021

Remerciement

On remercie Dieu, tout puissant, de m’avoir donné la force la santé et la volonté d’entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d’abord Je tiens à exprimer ma plus grande gratitude va à mon encadreur *Monsieur SABRI YOUCEF* . Ce travail n'aurait pas été possible sans son aide. je remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

J’exprime toute ma reconnaissance à *Mr BOUSSEHEL MOUNIR* pour avoir bien voulu accepter de présider le jury de ce mémoire, et *Mr DEBBABI MOURAD* d’avoir accepté d’examiner ce travail.

Et Je veux aussi exprimer mes sincères remerciements à tous les enseignants ceux qui nous ont appris en l'Université Mohamed Boudiaf à M'sila et a tous les niveaux d'enseignement

A mes très chers parents, Je remercie mes frères et mes sœurs, pour leurs encouragements

Enfin, je remercie tous les amis, camarades de classe et tous ceux qui nous ont encouragés à terminer l'étude.

Table de matières

Introduction

Le problème de l'oscillateur de Dirac est très important soi pour la théorie ou dans l'application. Il était étudié pour la première fois par Ito et al. [1]. Ils ont considéré une équation de Dirac dans laquelle le moment p est remplacé par p-imβωr, avec r étant le vecteur de position, m la masse de la particule, et ω la fréquence de l'oscillateur. Ce problème a été relancé par Moshinsky et Szczepaniak [2], qui lui ont donné le nom d'oscillateur de Dirac (DO) parce que, dans la limite non relativiste, il devient un oscillateur harmonique avec un très fort terme de couplage spin-orbite. Physiquement, il peut être démontré que l'interaction (OD) est un système physique, qui peut être interprété comme l'interaction du moment magnétique anormal avec un champ électrique linéaire [3,4]. Le potentiel électromagnétique .Le potentiel électromagnétique associé à l'OD a été trouvé par Benitez et al. [5]. Expérimentalement, cet oscillateur a été bien établi par Franco-Villafane et al. [6].

Dans les dernières années, plusieurs modèles de la mécanique quantique basée sur des relations de commutation modifiées ont été étudiés par plusieurs physiciens. Cette modification de la relation de commutation impliquent une incertitude minimale sur la position conduisant à une longueur minimale [7],[8]. Il existe aussi des relations de commutations modifiées qui conduisent à une impulsion maximale [[9].[16]].

Apres l'introduction de la constante cosmologique dans la théorie de la relativité générale d'Einstein pour obtenir des solutions cosmologiques statiques, Dirac [17] a proposé d'étudier les équations de la physique atomique dans un espace-temps avec une constante cosmologique que l'on appelle l'espace de Sitter. Par conséquent, en présence d'une constante cosmologique, la relativité restreinte de Poincaré ordinaire doit être remplacée par une relativité restreinte de de Sitter. Il est intéressant de noter que l'algèbre de Sitter déformée a deux échelles invariantes [18], la vitesse de la lumière c et le rayon $R = \pm 3/\Lambda$, où le signe $\pm$ est pour AdS et dS, respectivement. Récemment, il a été montré par Guo et al. [19] qu'il existe un correspondance entre le modèle de Snyder et la dS relativité restreinte. De plus, Mignemi [20] a montré que sur background (A)dS, la relation de commutation doit être modifiée en introduisant des corrections proportionnelles à la constante cosmologique.

Dans ce mémoire, nous allons attaquer la formulation mathématique du problème de l'oscillateur de Dirac à 1d et ses conséquences en résolvant des équations fondamentales dans le cadre de la mécanique quantique relativiste dans le cadre des deux model , de Sitter et anti de Sitter. Ce mémoire se décompose à une introduction, où on parle sur l'oscillateur de Dirac et le sur le model anti de Sitter et le modèle de Sitter

Dans le premier chapitre nous allons donner un rappel sur l'équation de Dirac et sa solution pour une particule libre et aussi pour le cas de l'oscillateur de Dirac.

Dans le deuxième chapitre, nous allons formuler la mécanique quantique basée sur le modèle anti de Sitter. Puis, nous allons étudier le problème d'oscillateur de Dirac a 1d dans le cadre de ce modèle.

Dans le chapitre 3 nous allons faire la même chose qu'on a fait dans le chapitre précédent, mais cette fois dans le model de Sitter.

1. Notation

Pour passer de la mécanique quantique habituelle à la mécanique quantique relativiste, il suffit de remplacer la géométrie euclidienne par celle de Minkowski, ou bien on remplace la métrique par celle de Lorentz dé.nie par :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

En utilisant cette métrique , on peut défnir la longueur du vecteur $dx = \{dx^{\mu}\}$ par $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ Cette relation est souvent considérée comme la relation de définition du tenseur métrique La forme contra-variante du tenseur métrique est

$$g^{\mu\sigma} = (g^{-1})_{\mu\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

On remarque que, le tenseur métrique contra-variant et le tenseur métrique covariant sont identiques :

$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ (Pour Lorentz métrique) (1.3)

À partir de maintenant, nous utiliserons le quadrivecteur contra-variantes

$$x^{\mu} \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \tag{1.4}$$

Pour décrire les coordonnées de l'espace-temps. Le quadrivecteur covariants est donnée par

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu}x^{\mu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) \tag{1.5}$$

En utilisant la convention de sommation d'Einstein, nous obtenons le carré de la longueur de vecteur x^{μ} donné par

$$x.x = x^{\mu}x_{\mu} \equiv \sum_{\mu}^{3} x^{\mu}x_{\mu} = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3$$

$$= c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$= c^2t^2 - \boldsymbol{x^2} \qquad (1.6)$$

Même chose pour la définition du 4-vecteur de moment , c-à-d :

$$p^\mu = \left\{\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right\} \qquad (1.7)$$

Et nous écrivons le produit scalaire en quatre dimensions (espace-temps) comme :

$$p_1p_2 = p_1^\mu p_{2\mu} \frac{E_1E_2}{C^2} - \boldsymbol{P}_1.\boldsymbol{P}_2 \qquad (1.8)$$

Ou également

$$x.p = x^\mu p_\mu = x_\mu p^\mu = Et - \boldsymbol{x}.\boldsymbol{p} \qquad (1.9)$$

Par analogie avec mécanique quantique habituelle, on peut écrire le 4-opérateur de moment par

$$\hat{p}^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial(ct)}, +i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1}, +i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2}, +i\hbar\frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$$

$$= i\hbar\nabla^\mu = \left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial(ct)}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

$$= i\hbar\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla\right\} \qquad (1.10)$$

Il se transforme en un 4-vecteur contra-variant, de sorte que

$$\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu = -\hbar^2\frac{\partial}{x_\mu}\frac{\partial}{x^\mu} = -\hbar^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \right)\right)$$

$$\equiv -\hbar^2\Box = -\hbar^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \qquad (1.11)$$

Avec $\Delta = \nabla^2$ et $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ représentent respectivement le Laplacien et le D'alembectien. En utilisant (2:4) et (1:10)on obtient la relation de commutation suivante:

$$[\hat{p}^\mu, x^\nu] = i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}, g^{\nu\sigma}x_\sigma\right] = i\hbar g^{\nu\sigma}\frac{\partial x_\sigma}{\partial x_\mu} = i\hbar g^{\nu\sigma}\delta_\sigma^\mu = i\hbar g^{\nu\mu} = i\hbar g^{\mu\nu} \qquad (1.12)$$

Le 4-potentiel du champ électromagnétique est donné par :

$$A^{\mu} = \{A_0, A\} = \{A_0, A_x, A_y, A_z\} = g^{\mu\nu} A_{\nu} \quad \text{(contravariant)} \qquad (1.13)$$

$$A^{\mu} = \{A_0, -A_x, -A_y, -A_z\} \text{ (covariante)} \qquad (1.14)$$

à partir de A^{μ}, le tenseur de champ électromagnétique suit de la manière bien connue :

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.15)$$

2. Equation de Dirac

En 1928, Dirac a trouvé une équation d'onde relativiste covariante, de la forme de Schrödinger et avec une densité de probabilité positive, donnée par :

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad (1.16)$$

À cette époque, il existait des doutes sur l'équation de Klein-Gordon , qui donnait des énergies négatives . Et comme l'interprétation de la densité de charge n'était pas connue à ce moment-là et aussi les mésons π^+ et π^- sous forme de particules de spin 0 chargées n'avaient pas encore été découverts, les énergies négative représentent un grand problème.

Puisque l'équation (1.16) est linéaire dans la dérivée temporelle, il est naturel d'essayer de construire un Hamiltonien également linéaire par rapport aux dérivées spatiales. Par conséquent, l'équation doit prendre la forme suivante

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i}\left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial}{\partial x^3}\right) + \hat{\beta} m_0 c^2\right]\psi \equiv \hat{H}_f \psi \qquad (1.17)$$

Ou ψ est un vecteur donné par

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x,t) \\ \psi_2(x,t) \\ \vdots \\ \psi_n(x,t) \end{pmatrix} \qquad (1.18)$$

Les $\hat{\beta}$ et $\hat{\alpha}_i$ sont des matrices de dimensions $N \times N$ et

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \ , \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.19)$$

où $\hat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}_i$ sont les matrices 2×2 de Pauli et I est la matrice d'unités 2×2. Donc on écrit ces matrices en détail comme suit:

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,\hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\hat{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (1.20)$$

Pour trouver l'équation de la continuité, il suffit de multiplier (1.17) par $\psi^\dagger$ par la gauche. Ce qui donne:

$$i\hbar\psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^{3} \psi^\dagger \hat{\alpha}_k \frac{\partial}{\partial x^k}\psi + mc^2\psi^\dagger\hat{\beta}\psi \qquad (1.21)$$

D'autre part la multiplication de l'équation conjuguée de (1.17) par ψ à nous donne

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi = \frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^k}\hat{\alpha}_k\psi + m_0c^2\psi^\dagger\hat{\beta}\psi \qquad (1.22)$$

la soustraction de (1.22) de (1.21) donne

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) = \frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^k}(\psi^\dagger\hat{\alpha}_k\psi) \qquad (1.23)$$

Cette équation appelée l'équation de continuité et s'écrit comme suit

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{j} = 0 \qquad (1.24)$$

avec

$$\rho = \psi^\dagger\psi = \sum_{i=1}^{4} \psi^*\psi \qquad (1.25)$$

représente la densité définie positives et

$$j^k = c\psi^\dagger\hat{\alpha}^k\psi \ ou \ \ j = c\psi^\dagger\hat{\alpha}\psi \qquad (1.26)$$

représente la densité de courant

3. la solution de l'équation de Dirac pour une particule libre

Pour une particule libre (V=0) l'équation de Dirac (1.17) s'écrit sous la forme

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = \hat{H}_f\psi = (\,c\hat{\alpha}.\hat{\boldsymbol{p}} + m_0c^2\hat{\beta})\psi \qquad (1.27)$$

En remplaçant l'expression suivante

$$\psi(x,t) = \psi(x)exp\left[-\left(\frac{i}{\hbar}\right)\varepsilon t\right] \qquad (1.28)$$

Dans l'équation (1.27) nous obtenons l'équation de Dirac pour le cas stationnaire

$$\varepsilon\psi(x) = \hat{H}_f\psi(x) \qquad (1.29)$$

Maintenant nous allons chercher la solution de (1.29) en mettant

$$\psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}\; avec\; \varphi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\quad et \quad \chi = \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} \qquad (1.30)$$

En utilisant la forme explicite des matrices $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ (1.19), l'équation (1.29) devient

$$\varepsilon\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}0 & \hat{\alpha}\\ \hat{\alpha} & 0\end{pmatrix}.\hat{p}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} + m_0c^2\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \qquad (1.31)$$

Ou bien

$$\varepsilon\varphi = c\hat{\sigma}.\hat{\boldsymbol{p}}\chi + m_0c^2\varphi$$

$$\varepsilon\varphi = c\hat{\sigma}.\hat{\boldsymbol{p}}\varphi - m_0c^2\chi \qquad (1.32)$$

Pour un moment **p**, on définit les états :

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_0\\ \chi_0\end{pmatrix}exp\,\left(\frac{i}{\hbar}px\right) \qquad (1.33)$$

En remplaçant ces quantités dans l'équation (1.32) on obtient les équations de φ_0 et χ_0

$$(\varepsilon - m_0c^2)I\varphi_0 - c\hat{\sigma}.P\chi_0 = 0 \qquad (1.34)$$

$$-c\hat{\sigma}.P\varphi_0 + ((\varepsilon + m_0c^2)I\chi_0 = 0 \qquad (1.35)$$

Ce système d'équations n'a pas de solution sauf pour que le déterminant s'annule. Ou bien

$$det = \left|\begin{pmatrix} (\varepsilon - m_0c^2)I & -c\hat{\sigma}.\boldsymbol{p} \\ -c\hat{\sigma}.\boldsymbol{P} & (\varepsilon + m_0c^2)I \end{pmatrix}\right| = 0 \qquad (1.36)$$

En utilisant la relation

$$(\hat{\sigma}.A)(\hat{\sigma}.B) = A.BI + i\hat{\sigma}.(A \times B), \qquad (1.37)$$

L'expression (2.36) devient

$$det = ((\varepsilon^2 - m_0^2c^4)I - c^2(\hat{\sigma}.P)(\hat{\sigma}.P)$$
$$= (\varepsilon^2 - m_0^2c^4 - c^2P^2)I = 0 \qquad (1.38)$$

Ce qui donne :

$$\varepsilon = \pm E_p \,, \quad E_p = +c\sqrt{P^2 + m_0c^2} \qquad (1.39)$$

Les deux signes, plus moins, correspondent aux deux type de solution de l'équation de Dirac et on dit la solution positives et la solution négative. De l'équation (1.34), pour ε fixé on obtient

$$\chi_0 = \frac{c((\hat{\sigma}.P)}{m_0c^2+\varepsilon}\varphi_0 \qquad (1.40)$$

Soit la notation suivante

$$\varphi_0 = U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \qquad (1.41)$$

Avec U normalisé, ou bien

$$U^+U = U_1^*U_1 + U_2^*U_2 = 1 \qquad (1.42)$$

Et aussi U_1 et U_2 sont des complexe. En utilisant (1.28) et (1.33), on obtient les deux solutions de Dirac, positive et négative pour une particule libre sous la forme

$$\psi_{p\curlywedge}(x,t) = N\begin{pmatrix} U \\ \frac{c((\hat{\sigma}.P)}{m_0c^2+\curlywedge E_p}U \end{pmatrix}\frac{exp[i(\boldsymbol{P}.x-\varepsilon t)/\hbar]}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} \qquad (1.43)$$

Avec $\varepsilon = \curlywedge E_p$ et $\curlywedge = \pm 1$. Pour déterminer N, on applique la condition de normalisation suivante

$$\int \psi_{p\curlywedge}^*(x,t)\psi_{\curlywedge' p'}(x,t)d^3x = \delta_{\curlywedge\curlywedge'}\delta(p-p') \qquad (1.44)$$

Ce qui donne

$$N^2\left(U^\dagger U + U^+\frac{c^2(\hat{\sigma}.P)(\hat{\sigma}.P)}{m_0c^2+\curlywedge E_p}U\right) = 1 \qquad (1.45)$$

En utilisant (2.37), on obtient

$$N = \sqrt{\frac{(m_0^2c^2+\curlywedge E_p)}{2\curlywedge E_p}} \qquad (1.46)$$

4. Solution de l'oscillateur de Dirac

L'équation de Dirac pour un oscillateur de Dirac à une dimension s'obtient en remplaçant P par $P - i\beta m\omega X$ dans l'équation de la particule libre. Ce qui donne

$$[c\alpha(p - i\beta m\omega X) + \beta mc^2]\psi = E\psi \qquad (1.47)$$

ou m est la masse au repos et ω est la fréquence de l'oscillateur. En mettant $\psi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, l'équation précédente devient

$$c\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\left[p\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}m\omega X\right] + \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}mc^2 = E\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

ou bien

$$\begin{cases} c(-ip + m\omega X)g = (E - mc^2)f \\ c(ip + m\omega X)f = (E + mc^2)g \end{cases} \qquad (1.48)$$

En utilisant la définition des opérateur des position et de moment dans l'espace des positions, nous obtenons le système des équation différentielle suivant

$$c\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + m\omega x\right)g = (E - mc^2)f \qquad (1.49)$$

$$c\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + m\omega x\right)f = (E + mc^2)g \qquad (1.50)$$

La combinaison de ces deux équations nous donne l'équation différentielle suivante

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}+m\omega x\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x}+m\omega x\right)f=\left(\frac{E^2+m^2c^4}{c^2}\right)f \quad (1.51)$$

On peut écrire cette équation sous forme d'une équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{m\omega^2}{2}x^2\right)f=\left(\frac{E^2-m^2c^4}{2mc^2}+\frac{\hbar\omega}{2}\right)f \quad (1.52)$$

Avec l'énergie de cet oscillateur harmonique est

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{n}}=\left(\frac{E^2-m^2c^4}{2mc^2}+\frac{\hbar\omega}{2}\right) \quad (1.53)$$

La solution de (1.52) est

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n.n!}}.\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}.H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}.x\right).e^{-\frac{m\omega}{\pi\hbar}x^2} \quad (1.54)$$

Puisque notre système est équivalent à un oscillateur harmonique, on a

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{n}}=\hbar\omega\left(n+\frac{\hbar\omega}{2}\right)=\left(\frac{E^2-m^2c^4}{2mc^2}+\frac{\hbar\omega}{2}\right)$$

D ou le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac est donné par

$$E=\pm mc^2\sqrt{1+2n\frac{\hbar\omega}{mc^2}} \quad (1.52)$$

La limite non relativiste est obtenue, en mettant $E=mc^2+E_r$ avec $mc^2\gg E_r$. Une expansion de Taylor de (1.52) donne

$$E\approx mc^2+n\hbar\omega-\frac{\omega^2\hbar^2n^2}{2mc^2} \quad (1.53)$$

Il est clair que, le deuxième et le troisième terme représentent, respectivement, l'énergie de l'oscillateur non relativiste et la correction relativiste à la fois dans le modèle anti de Sitter.

1. La mécanique quantique dans l'espace temps anti-de Sitter

L'algèbre de Heinsenberg modifiée qui conduit à un principe d'incertitude étendue dans le modèle anti de Sitter est donnée par

$$[X,P]=i\hbar(1+\beta X^2) \tag{2.1}$$

où α > 0, est un petit paramètre positive proportionnel à la constante cosmologique , le cas $\beta=0$ on obtient la mécanique quantique habituelle .

En utilisant la même méthode utilisée dans le cas de la mécanique quantique ordinaire ,on peut montrer que la relation de communication (2.1) conduit au principe d'incertitude étendu suivant

$$(\Delta X)(\Delta P)\geq\frac{\hbar}{2}(1+\beta(\Delta X)^2) \tag{2.2}$$

La solution de cette équation en fonction (ΔP) est

$$(\Delta P)=\frac{\beta\hbar}{2}\left(\beta\,(\Delta X)+\frac{1}{(\Delta X)}\right) \tag{2.3}$$

Cette solution implique l'existence d'une incertitude minimale non nulle donnée par

$$(\Delta P)_{min}=\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{2} \tag{2.4}$$

On peut interpréter ce résultat comme un effet infrarouge (IR) de la gravité sur un système quantique.

La représentation de la relation de commutation (2.1) peut être obtenue à partir des opérateurs X et P suivants

$$X=x \tag{2.5}$$

$$P=\frac{\hbar}{i}(1+\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x}$$

La valeur propre de l'operateur des moment dans l'espace position est la solution de l'équation de différentielle suivante

$$\frac{\hbar}{i}(1+\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_\lambda(x)=\lambda\varphi_\lambda(x)$$

La solution de cette équation est

$$\varphi_\lambda(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} e^{\frac{i\lambda}{\sqrt{\beta}\hbar}\arctan\left(\sqrt{\beta}x\right)}$$

Il est important de noter que la relation de fermeture, le produit scalaire et

la relation de projection sont données respectivement dans ce cas par

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+\beta x^2)} |x\rangle\langle x| = 1 \tag{2.6}$$

et

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+\beta x^2)} \psi^*(x)\varphi(x) \tag{2.7}$$

et

$$\langle x|x'\rangle = (1+\beta x^2)\delta(x-x') \tag{2.8}$$

2. Solution de l'oscillateur de Dirac

Pour trouver la solution de l'équation de Dirac pour le cas de l'oscillateur de Dirac dans l'espace anti de Sitter, il suffit de remplacer les operateur Xet P par les définitions (2.1) dans le système d'équations de Dirac Ce qui donne

$$c\left(-i\hbar(i+\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x} + m\omega X\right) g = (E - mc^2) f \tag{2.15}$$

$$c\left(i\hbar(i+\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x} + m\omega X\right) f = (E + mc^2) g \tag{2.16}$$

La deuxième équation de ce système nous donne à

$$g = \frac{c}{(E+mc^2)}\left(i\hbar(i+\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x} + m\omega X\right) f$$

En remplaçant cette dernière équation dans la première équation du système (2.15), on aboutit à l'équation différentielle suivante

$$\left(-\hbar(i+\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x} + m\omega X\right)\left(\hbar(i+\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x} + m\omega X\right) f$$

$$= \left(\frac{E^2 - m^2c^4}{c^2}\right) f$$

$$\left[(1+\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x}(1+\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m\omega\beta}{\hbar}\left(1 - \frac{m\omega}{\hbar}\right)x^2\right] f$$

$$= -\left(\frac{E^2-m^2c^4}{c^2\hbar^2}+\frac{m\omega}{\hbar}\right)f \qquad (2.17)$$

En introduisant la nouvelle variable

$$q = \frac{1}{\sqrt{\beta}}arctang(\sqrt{\beta}x).$$

$$q \in \left]\frac{-\pi}{2\sqrt{\beta}},\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\right[\qquad (2.18)$$

L'équation (2.17) devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial q^2}+\frac{m\omega\beta}{\hbar}\left(1-\frac{m\omega\beta}{\hbar}\right)tan^2(\sqrt{\beta}q)+\varepsilon\right]f = 0 \qquad (2.19)$$

Avec $\varepsilon = \frac{E^2-m^2c^4}{c^2\hbar^2}+\frac{m\omega}{\hbar}$. Le changement de fonction $f(q) = (1-u^2)^{\frac{\lambda}{2}}.h(u)$

Avec $u = sin(\sqrt{\beta}q)$. Nous donne l'équation différentielle suivante

$$(1-u^2)h'' - (2\lambda\ +1)uh' + \left(\frac{\varepsilon}{\beta}-\lambda^2+\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\beta^2}-\frac{\lambda(\lambda-1)}{(1-u^2)}-\frac{m\omega}{\hbar\beta}\left(1-\frac{m\omega}{\hbar\beta}\right)\frac{1}{(1-u^2)}\right)h = 0 \qquad (2.20)$$

Pour réduire (2.12) à une classe d'équations différentielles connues, nous éliminons d'abord le terme proportionnel à $\frac{1}{(1-u^2)}$ en mettant

$$\frac{m\omega}{\hbar\beta}\left(1-\frac{m\omega}{\hbar\beta}\right)-\lambda(\lambda-1) = 0 \qquad (2.21)$$

Ce qui donne

$$\lambda_1 = \frac{m\omega}{\hbar\beta}\ ,\lambda_2 = 1-\frac{1}{\frac{m\omega}{\hbar\beta}} \qquad (2.22)$$

La solution λ_2 n est pas acceptable parce que elle ne vérifie pas la condition $\frac{m\omega}{\hbar\beta} < 1.$

$$(1-u^2)h'' - (2\lambda\ +1)uh' + n(n+2\lambda)\,h(u) = 0 \qquad (2.23)$$

Avec

$$n(n+2\lambda) = \frac{\varepsilon}{\beta} \qquad (2.24)$$

n un entier non négatif. La solution de l'équation (2.23) est donnée en termes de polynômes de Gegenbauer par

$$h(u) = N.c_n^{\lambda}(u) \qquad (2.25)$$

avec N une constante de normalisation .On en déduit que les fonction propre de l'oscillateur Dirac unidimensionnel dans le modèle anti-Sitter sont données par

$$f = N(1-u^2)^{\frac{\lambda}{2}} c_n^{\lambda}(u)$$
$$g = \frac{c\hbar}{\sqrt{\beta}(E+mc^2)}\left[(1-u^2)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{m\omega}{\hbar}u\right] f \tag{2.26}$$

En remplaçant la première équation dans la deuxième, on obtient la fonction de g suivante

$$g = \frac{c\hbar N}{\sqrt{\beta}(E+mc^2)}\left[(1-u^2)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{m\omega}{\hbar}u\right](1-u^2)^{\frac{\lambda}{2}} c_n^{\lambda}(u) \tag{2.27}$$

En utilisant la propriété des polynômes de Gegenbauer suivante

$$\frac{d}{du} c_n^{\lambda}(u) = 2\lambda c_{n-1}^{\lambda+1}(u) \tag{2.28}$$

on obtient

$$g = \frac{c\hbar N}{\sqrt{\beta}(E+mc^2)}\left[-\beta\hbar\lambda v u(1-u^2)^{\frac{\lambda}{2}-1} c_n^{\lambda}(u) + 2\lambda(1-u^2)^{\frac{\lambda+1}{2}} c_{n-1}^{\lambda+1}(u) + \frac{m\omega}{\hbar}\frac{u}{v}(1-u^2)^{\frac{\lambda}{2}} c_n^{\lambda}(u)\right]$$

D’où

$$g = \frac{2c\hbar N m\omega}{\sqrt{\beta}(E+mc^2)} c_{n-1}^{\lambda+1}(u) \tag{2.29}$$

Dans les anciens variables ou $u = \frac{\sqrt{\beta}x}{(1+\beta x^2)}$, les solutions s’écrivent comme suit

$$f = N\left(\frac{1}{1+\beta X^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}} c_n^{\lambda}\left(\frac{\sqrt{\beta}x}{(1+\beta x^2)}\right)$$
$$g = \frac{2Ncm\omega}{\beta^{\frac{3}{2}}(E+mc^2)}\frac{1}{(1+\beta X^2)^{\frac{\lambda+1}{2}}} c_{n-1}^{\lambda+1}\left(\frac{\sqrt{\beta}x}{(1+\beta x^2)}\right) \tag{2.30}$$

Pour calculer N, nous utilisons la condition de normalisation suivante

$$\int \frac{dx}{(1+\beta x^2)}\left[|f|^2 + |g|^2\right] = 1 \tag{2.31}$$

En insérant (2.30) dans (2.31) et utilisant l'identité suivante

$$\int_{-1}^{+1} du(1-u^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}(c_n^{\lambda}(u))^2 = \frac{\pi 2^{1-2\lambda}\Gamma(2\lambda+n)}{n!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2} \tag{2.32}$$

On obtient

$$N = \frac{2^{\lambda}\beta^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2} + \frac{c^2m^2\omega^2}{\beta^3(E+mc^2)^2}\frac{\Gamma(2\lambda+n+1)}{(n-1)!(n+\lambda)[\Gamma(\lambda+1)]^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.33)$$

Vérifions maintenant si les fonctions d'onde données par (2.30) sont physiquement acceptables. Nous devons avoir

$$\langle X^2\rangle = \int \frac{dx}{(1+\beta X^2)} X^2[|f|^2 + |g|^2] < \infty \quad (2.34)$$

Ou bien

$$\int \frac{dx}{(1+\beta X^2)} X^2|f|^2 < \infty \qquad \text{et} \qquad \int \frac{dx}{(1+\beta X^2)} X^2|g|^2 < \infty \quad (2.35)$$

Pour les petites distances, la convergence est évidente puisque λ est positif et g se comporte comme $p^{-2\lambda-2}$. Pour les grandes distances, on a $f \sim p^{-2\lambda}$ on en déduit que f est convergeant si $\lambda > \frac{1}{2}$. Cela conduit à la longueur minimale

$$l_{min} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \frac{(\Delta X)_{min}}{\sqrt{2}} \quad (2.36)$$

On peut tirer le spectre d'énergie est de l' equation (3.20) ce qui conduit à

$$\frac{E^2-m^2c^4}{c^2\hbar^2} + \frac{m\omega}{\hbar} = \beta(n^2 + 2\lambda n) \quad (2.37)$$

D'où on tire le spectre d'énergie exacte

$$E = \pm mc^2\sqrt{1 + \beta\frac{\omega^2\hbar^2 n^2}{c^2} + 2n\frac{\omega\hbar}{mc^2}} \qquad n = 0,1,2,\ldots \quad (2.38)$$

En développer au premier ordre dans β on obtient

$$E = \pm mc^2\sqrt{1 + 2n\frac{\hbar\omega}{mc^2}}\left[1 \pm \frac{\beta\hbar^2\omega^2}{2c^2}\frac{n^2}{1+2n\frac{\hbar\omega}{mc^2}}\right] \quad (2.39)$$

Le premier et le deuxième termes de (3.38) représente le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel habituel et le troisième terme représente la correction apporté par le modèle anti de Sitter. Nous notons la dépendance à n^2 qui est une caractéristique du confinement dur. C'est une conséquence naturelle puisque notre problème d'origine est un mouvement d'une particule ponctuelle près de la surface d'une sphère qui est essentiellement un mouvement dans un potentiel de puits. Dans notre cas, les limites du puits sont $\pm\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}$. Une autre propriété intéressante est que n grand la différence entre deux niveaux d'énergie devient constante. En effet

$$\lim_{n\to\infty}|\Delta \mathrm{E}| = \hbar\omega mc\sqrt{\beta} \qquad (2.40)$$

Ca veut dire que la continuité d'énergie pour les grandes valeurs de n dans le cas de l'oscillateur de Dirac dans le cas habituel, est éliminé dans le cas de de modèle anti de sitter. En plus, le comportement de l'oscillateur de Dirac dans le modèle anti de Sitter est similaire au comportement de l'oscillateur harmonique dans la mécanique quantique habituelle.

comme dans le cas habituel, la limite non relativiste est obtenue, en mettant $E = mc^2 + E_r$ avec $mc^2 \gg E_r$. Une expansion de Taylor de (2.40) donne

$$E \approx mc^2 + n\hbar\omega\left(1 + \frac{\beta\hbar\omega mn}{2}\right) - \frac{\omega^2\hbar^2 n^2}{2mc^2}\left(1 + \frac{\beta\hbar\omega mn}{2}\right)^2 \qquad (2.41)$$

Il est clair que, le deuxième et le troisième termes représentent, respectivement, l'énergie de l'oscillateur non relativiste et la correction relativiste à la fois dans le modèle anti de Sitter. Les corrections à l'oscillateur harmonique ordinaire s'obtiennent en mettant $\beta = 0$ dans (2.41) ou directement en définissant $\beta = \frac{1}{mc^2}$ dans (2.40).

Nous allons étudier maintenant la limite $\beta \to 0$. Dans cette limite, nous avons $\lambda \to \infty$. En utilisant les relations suivantes

$$\lim_{n\to\infty}\lambda^{-\frac{n}{2}}C_n^{\frac{\lambda}{2}}\left(x\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{n!}H(x),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\lambda+a)}{\Gamma(\lambda)}e^{-a\ln\lambda} = 1, \qquad (2.42)$$

et

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) \qquad (2.43)$$

et en a pour (à $O(\beta^2)$)

$$(1+\beta x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} = \exp\left(-\frac{x^2}{2m\hbar\omega}\right), \qquad (2.44)$$

on obtient

$$f(p) = \pm\frac{(E+mc^2)^2}{c^2}\left[2^{2n}n!\sqrt{\pi m\omega}\left(\frac{(E+mc^2)^2}{c^2} + 2nm\hbar\omega\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\exp\left(-\frac{x^2}{2m\hbar\omega}\right)H\left(\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}p\right) \qquad (2.45)$$

$$g(p) = \pm\sqrt{n\sqrt{m\hbar\omega}}\left[2^{2n-1}\sqrt{\pi}(n-1)!\left(\frac{(E+mc^2)^2}{c^2} + 2nm\hbar\omega\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left(-\frac{x^2}{2m\hbar\omega}\right) H_{n-1}\left(\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}x\right) \quad (2.46)$$

Ce sont les fonctions propres de l'espace de la position de l'oscillateur de Dirac pour $\beta = 0$ et elles coïncident avec celles obtenues directement à partir de l'équation de Dirac habituelle pour la cas de l'oscillateur de Dirac.

3. Propriétés statistiques

La fonction de partition de l'oscillateur de Dirac, à une température T, dans le modèle anti de Sitter est donnée par

$$Z_{\overline{\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E}{KT}} = \sum_{n=o}^{\infty} \exp\left(-\tilde{\beta}mc^2\sqrt{1 + \frac{\beta\omega^2\hbar^2n^2}{c^2} + \frac{2n\omega\hbar}{mc^2}}\right) \quad (2.47)$$

avec $\beta = \frac{1}{KT}$ Pour faire le calcul de la somme sur n, nous allons utiliser la formule d'Euler donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x)dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} B_{2p} f^{(2p-1)}(0) \quad (2.48)$$

où B_{2p} sont les nombres de Bernoulli et $f^{(2p-1)}(0)$ sont les dérivées de la fonction $f(x)$ en $x = 0$

Mettant $\gamma = \tilde{\beta}mc^2$ et $y = \sqrt{1 + \frac{\beta\omega^2\hbar^2n^2}{c^2} + \frac{2n\omega\hbar}{mc^2}}$,l'intégrale sur x dans (2.47) est alors donnée par

$$J = \frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)}{\sqrt{1-\beta m^2c^2}} \int_1^{\infty} dydy\left(1 - \frac{\beta m^2c^2}{1-\beta m^2c^2}y^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\gamma y} \quad (2.49)$$

En utilisant le développement en série de la racine carrée, l'intégrale peut être évalué

$$J = \frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)}{\sqrt{1-\beta m^2c^2}} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{-1}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\left(1 - \frac{\beta m^2c^2}{1-\beta m^2c^2}\right)^n \left[\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\gamma^{2n+2}} - \frac{e^{-\gamma}}{(2n+2)}\Phi(1,2,2n+2;\gamma)\right] \quad (2.50)$$

Dans le régime à haute température$\gamma < 1$, les contribution de premier et troisième termes dans (2.48) et celui du deuxième terme de (2.49) sont négligeables par rapport au terme $\frac{1}{\gamma^{2n+1}}$. On obtient alors

$$Z_{\overline{\beta}} \approx \frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)}{\sqrt{1-\beta m^2c^2}} \sum_{n=o}^{\infty} (-1^n)\, \Gamma(2n+2) \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \eta^n \tag{2.51}$$

Avec

$$\eta = \frac{1}{(\widetilde{\beta} mc^2)^2} \left(\frac{\beta m^2c^2}{1-\beta m^2c^2}\right) \tag{2.52}$$

A ce stade, nous montrons que pour l'expansion à haute température η est un petit paramètre. En fait, nous ont $1 > \beta m^2c^2$ et η est donné par

$$\eta = \left(\frac{(\Delta X)_{min}}{l_{th}}\right)^2 \tag{2.53}$$

Où $l_{th} = \frac{\hbar c}{KT}$ représente la longueur d'onde thermique obtenue à haute température. Cette longueur d'onde est une longueur caractéristique du système et afin d'être accessible expérimentalement, elle doit être supérieure à la longueur minimale.

Prenons seulement les termes au premier ordre en β, on

$$Z_{\overline{\beta}} \approx \frac{(KT)^2}{m\hbar\omega c^2} - \frac{3\beta(KT)^4}{m\hbar\omega c^4}\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{mc^2}{KT}\right)^2\right) \tag{2.54}$$

En Utilisant le fait que $\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{mc^2}{KT}\right)^2\right) \approx 1$, on obtient finalement le développement de la fonction de partition

$$Z_{\overline{\beta}} \approx \frac{(KT)^2}{m\hbar\omega c^2} - \frac{3\beta(KT)^4}{m\hbar\omega c^4} \tag{2.55}$$

Le premier terme est la fonction de partition de l'oscillateur de Dirac habituel, tandis que le second terme représente la correction apportée par le modèle anti de Sitter.

De (2.55), on déduit la contrainte suivante sur la distance minimale :

$$(\Delta X)_{min} \leq \frac{l_{th}}{\sqrt{3}} \tag{2.56}$$

L'énergie moyenne définie par $U \approx \mathrm{kT}^2 \frac{\partial lnZ}{\partial \mathrm{T}}$ est alors donnée par

$$U \approx 2\mathrm{kT}\left[1 - 3\left(\frac{(\Delta\mathrm{X})_{min}}{l_{th}}\right)^2\right] \tag{2.57}$$

tandis que la capacité calorifique $C = \frac{\partial U}{\partial T}$ est

$$U \approx 2\mathrm{k}\left[1-9\left(\frac{(\Delta \mathrm{X})_{min}}{l_{th}}\right)^{2}\right] \qquad (2.58)$$

A la limite $\beta = 0$ et (2.57) et (2.58) se réduisent à l′énergie moyenne et capacité calorifique de l′oscillateur de Dirac habituel donnée, respectivement, par $2kT$ et $2k$. On remarque que, à haute températures, l'énergie moyenne et la capacité calorifique dans le cas de modèle anti de Sitter sont plus faibles que ceux dans le cas habituel.

1. La mécanique quantique dans le cafre du modèle anti-de Sitter

Le modèle de Sitter est basé sur l'algèbre d'Heisenberg modifiée suivante

$$[X,P]=i\hbar(1-\beta X^2) \tag{3.1}$$

De la même manière utilisée dans le chapitre précédent, on peut tirer le principe d'incertitude à partir de la relation de commutation précédente

$$(\Delta X)(\Delta P)\geq\frac{\hbar}{2}(1-\beta(\Delta X)^2) \tag{3.2}$$

La solution de cette inégalité nous donne

$$-\frac{(\Delta P)}{\beta\hbar}-\frac{1}{\beta}\sqrt{\beta+\frac{(\Delta P)^2}{\beta\hbar^2}}\leq(\Delta X)\leq-\frac{(\Delta P)}{\beta\hbar}+\frac{1}{\beta}\sqrt{\beta+\frac{(\Delta P)^2}{\beta\hbar^2}} \tag{3.3}$$

des opérateurs X et P satisfaisant (3.1) sont donnés par

$$X=x \tag{3.4}$$

$$P=\frac{\hbar}{i}(1-\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.5}$$

Dans ce modèle, la définition de produit scalaire et la relation de fermeture est

$$\int\frac{dx}{(1-\beta x^2)}|x\rangle\langle x|=1 \tag{3.6}$$

et

$$\langle\varphi|\psi\rangle=\int\frac{dx}{(1-\beta x^2)}\varphi^*(x)\psi(x) \tag{3.7}$$

1. Solution de l'oscillateur du Dirac dans le cadre du modèle de sitter

En introduisant les operateurs (3.4) et (3.5) dans le système d'équation de Dirac on obtient

$$c\left(-i\hbar(1-\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x}+m\omega x\right)g=(E-mc^2)f \tag{3.8}$$

$$c\left(i\hbar(1-\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x}+m\omega x\right)f=(E+mc^2)g \qquad (3.9)$$

En remplaçant (3.9) dans (3.8) nous obtenons l'équation différentielle de f suivante

$$\left[(1-\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x}(1-\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x}-\frac{m\omega\beta}{\hbar}\left(1+\frac{m\omega}{\hbar\beta}\right)x^2\right]f = -\left(\frac{E^2-m^2c^4}{c^2\hbar^2}+\frac{m\omega}{\hbar}\right)f \qquad (3.10)$$

On pose $u=\sqrt{\beta}x$, d ou l'équation precedente devient

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}(1-u^2)\frac{\partial}{\partial u}-\frac{m\omega}{\hbar\alpha}\left(1+\frac{m\omega}{\hbar\beta}\right)\frac{u^2}{1-u^2}\right]f=-\frac{\left(\frac{E^2-m^2c^4}{c^2\hbar^2\beta}+\frac{m\omega}{\hbar\beta}\right)f}{1-u^2} \qquad (3.11)$$

ou bien

$$\left[(1-u^2)\frac{\partial^2}{\partial u^2}-2u\frac{\partial}{\partial u}+\frac{m\omega}{\hbar\beta}\left(1+\frac{m\omega}{\hbar\beta}\right)-\frac{\left(-\frac{E^2-m^2c^4}{c^2\hbar^2\beta}+\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\beta^2}\right)}{1-u^2}\right]f=0 \qquad (3.12)$$

on remarque que cette équation a la forme suivante

$$(1-u^2)f''-2uf'+\left(q(1+q)-\frac{\varepsilon^2}{1-u^2}\right)f=0 \qquad (3.14)$$

avec

$$\varepsilon^2=\left(-\frac{E^2-m^2c^4}{c^2\hbar^2\beta}+\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\beta^2}\right)\ et\ q=\frac{m\omega}{\hbar\beta} \qquad (3.13)$$

Comme nous savons, la solution de l'équation (3.14) est le polynômes de Legendre associé . On en deduit que la solution de l'équation (3.12) est donnée par

$$f=NP_q^{\varepsilon}(\sqrt{\beta}X) \qquad (3.14)$$

Avec N est une constant de normalisation qui peut être calculer à partir de la condition de normalisation. $P_q^{\varepsilon}(\sqrt{\beta}X)$ représente le polynômes de Legendre associé.

On va remplacer (3.14) dans (3.9) nous obtenous

$$g=\frac{Nc}{(E+mc^2)}\left(i\hbar(1-\beta x^2)\frac{\partial}{\partial x}+m\omega x\right)P_q^{\varepsilon}(\sqrt{\beta}x) \qquad (3.15)$$

En utilisant la propriété des polynômes de Legendre associé suivante

$$(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}P_l^n=l.P_l^n-(l+n)P_{l-1}^n$$

On trouve

$$g=\frac{Nc}{(E+mc^2)}\left(-\hbar\beta qxP_q^{\varepsilon}(\sqrt{\beta}x)+\hbar\sqrt{\beta}(q+\varepsilon)P_{q-1}^{\varepsilon}(\sqrt{\beta}x)+m\omega xP_q^{\varepsilon}(\sqrt{\beta}x)\right)$$

Ou bien

$$g=\frac{Nc\hbar\sqrt{\beta}}{(E+mc^2)}(q+\varepsilon)P_{q-1}^{\varepsilon}(\sqrt{\beta}x) \qquad (3.16)$$

Pour trouver le spectre d'énergie, nous écrivons la solution en fonction de la fonction hypergéométrique. Pour cela nous utilisons la relation entre le polynôme de Legendre associé et la fonction hypergéométrique suivante

$$P_q^{\varepsilon}(\sqrt{\beta}X)=\frac{(-1)^n\Gamma(q+\varepsilon+1)(1-\beta x^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{2^n\Gamma(q-\varepsilon+1)\varepsilon!}F_1(\varepsilon-q,\varepsilon+q+1,\varepsilon+1,\frac{1-\sqrt{\beta}X}{2}) \quad (3.17)$$

Et on remplacer (3.17) en (3.14) nous obtenons

$$f=N\frac{(-1)^n\Gamma(q+\varepsilon+1)(1-\beta X^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{2^n\Gamma(q-\varepsilon+1)\varepsilon!}F_1(\varepsilon-q,\varepsilon+q+1,\varepsilon+1,\frac{1-\sqrt{\beta}X}{2}) \qquad (3.18)$$

Pour que f et q deviennent finis, il faut que

$$\varepsilon-q+n=0\Rightarrow\varepsilon=q-n\Leftrightarrow\varepsilon^2=(q-n)^2 \qquad (3.19)$$

En remplaçant (3.13) en (3.19), on obtient

$$\left(-\frac{E^2-m^2c^4}{\beta c^2\hbar^2}+\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\beta^2}\right)=(q-n)^2\Rightarrow\frac{E^2-m^2c^4}{\beta c^2\hbar^2}=-(q-n)^2+\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\beta^2}$$

Ou bien

$$E^2-m^2c^4=c^2\hbar^2\left(-\beta(q-n)^2+\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2\beta}\right) \qquad (3.20)$$

On déduit que le spectre d'énergie pour l'oscillateur de Dirac dans le cadre de modèle de Sitter est donné par

$$E = \pm mc^2 \sqrt{1 - \beta \frac{\omega^2 \hbar^2 n^2}{c^2} + 2n \frac{\omega \hbar}{mc^2}} \qquad n = 0,1,2,. \qquad (3.21)$$

En développer au premier ordre dans β on obtient

$$E = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2n \frac{\hbar\omega}{mc^2}} \left[1 \mp \frac{\beta \hbar^2 \omega^2}{2c^2} \frac{n^2}{1+2n\frac{\hbar\omega}{mc^2}} \right] \qquad (3.33)$$

Le premier et le deuxième terme de (3.32) représente le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel habituel et le troisième terme représente la correction apporté par le modèle anti de Sitter. Nous notons la dépendance à n^2 qui est une caractéristique du confinement dur. C'est une conséquence naturelle puisque notre problème d'origine est un mouvement d'une particule ponctuelle près de la surface d'une sphère qui est essentiellement un mouvement dans un potentiel de puits. Dans notre cas, les limites du puits sont $\pm \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}$. Une autre propriété intéressante est que n grand la différence entre deux niveaux d'énergie devient constante. En effet

$$lim_{n\to\infty} |\Delta E| = \hbar\omega mc\sqrt{\beta} \qquad (3.22)$$

Ca veut dire que la continuité d'énergie pour les grandes valeurs de n dans le cas de l'oscillateur de Dirac dans le cas habituel, est éliminée dans le cas de de modèle anti de Sitter. En plus, le comportement de l'oscillateur de Dirac dans le modèle anti de Sitter est similaire au comportement de l'oscillateur harmonique dans la mécanique quantique habituelle.

Comme dans le cas habituel, la limite non relativiste est obtenue, en mettant $E = mc^2 + E_r$ avec $mc^2 \gg E_r$. Une expansion de Taylor de (3.34) donne

$$E \approx mc^2 + n\hbar\omega\left(1 - \frac{\beta\hbar\omega mn}{2}\right) - \frac{\omega^2\hbar^2 n^2}{2mc^2}\left(1 - \frac{\beta\hbar\omega mn}{2}\right)^2 \qquad (3.23)$$

Il est clair que, le deuxième et le troisième terme représentent, respectivement, l'énergie de l'oscillateur non relativiste et la correction relativiste à la fois dans le modèle anti de Sitter.

Les corrections à l'oscillateur harmonique ordinaire s'obtiennent en mettant $\beta = 0$ dans (3.35) ou directement en définissant $\beta = \frac{1}{m^2c^2}$ dans (3.34).

Nous allons étudier maintenant la limite$\beta \to 0$. Dans cette limite, nous avons $\lambda \to \infty$. En utilisant les relations suivantes

$$lim_{n\to\infty}\lambda^{-\frac{n}{2}}C_n^{\frac{\lambda}{2}}\left(x\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{n!}H(x),$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\lambda+a)}{\Gamma(\lambda)}e^{-aln\lambda} = 1,$$

(3.24)

et

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) \qquad (3.25)$$

et en a pour (à $O(\beta^2)$)

$$(1+\beta x^2)^{-\frac{\lambda}{2}} = exp\,(-\frac{x^2}{2m\hbar\omega}), \qquad (3.26)$$

on obtient

$$f(p) = \pm\frac{(E+mc^2)^2}{c^2}\left[2^{2n}n!\sqrt{\pi m\omega}\left(\frac{(E+mc^2)^2}{c^2} + 2nm\hbar\omega\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$exp\left(-\frac{p^2}{2m\hbar\omega}\right)H_n\left(\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}p\right) \qquad (3.27)$$

et

$$g(p) = \pm\sqrt{n\sqrt{m\hbar\omega}}\left[2^{2n-1}\sqrt{\pi}(n-1)!\left(\frac{(E+mc^2)^2}{c^2} + 2nm\hbar\omega\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$exp\left(-\frac{p^2}{2m\hbar\omega}\right)H_{n-1}\left(\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}p\right) \qquad (3.28)$$

Ce sont les fonctions propres de l'espace de la position de l'oscillateur de Dirac pour β =0 et elles coïncident avec celles obtenues directement à partir de l'équation de Dirac habituelle pour la cas de l'oscillateur de Dirac.

1. Propriétés statistiques

La fonction de partition de l'oscillateur de Dirac, à une température T, dans le modèle anti de Sitter est donnée par

$$Z_{\overline{\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E}{KT}}$$
$$= \sum_{n=o}^{\infty} exp\left(-\beta mc^2\sqrt{1-\frac{\beta\omega^2\hbar^2n^2}{c^2}+\frac{2n\omega\hbar}{mc^2}}\right) \qquad (3.29)$$

avec $\beta = \frac{1}{KT}$. Pour faire le calcul de la somme sur n, nous allons utiliser la formule d'Euler donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x)dx - \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)!}B_{2p}f^{(2p-1)}(0) \qquad (3.30)$$

où $B_{2\mathrm{p}}$ sont les nombres de Bernoulli et $f^{(2p-1)}(0)$ sont les dérivées de la fonction $f(x)$ en $x = 0$.

Mettant $\gamma = \beta mc^2$ et $y = \sqrt{1-\frac{\beta\omega^2\hbar^2n^2}{c^2}+\frac{2n\omega\hbar}{mc^2}}$, l'intégrale sur x dans (3.42) est alors donnée par

$$J = \frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)}{\sqrt{1-\beta m^2c^2}}\int_1^{\infty} dyy\left(1+\frac{\beta m^2c^2}{1+\beta m^2c^2}y^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-yy} \qquad (3.31)$$

En utilisant le développement en série de la racine carrée, l'intégrale peut être évalué

$$J = \frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)}{\sqrt{1+\beta m^2c^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{-n} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \left(1 + \frac{\beta m^2 c^2}{1-\beta m^2c^2}\right)^n \left[\frac{\Gamma(2n+2)}{\gamma^{2n+2}} - \frac{e^{-\gamma}}{(2n+2)} \phi(1,2,2n+2;\gamma)\right] \tag{3.32}$$

Dans le régime à haute température $\gamma < 1$, la contribution de premier et troisième termes dans (3.42) et celui du deuxième terme de (3.44) sont négligeables par rapport au terme $\frac{1}{\gamma^{2n+1}}$. On obtient alors

$$Z_\beta \approx \frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)}{\sqrt{1-\beta m^2c^2}} \sum_{n=o}^{\infty} (-1^n)\, \Gamma(2n+2) \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \eta^n \tag{3.33}$$

Avec

$$\eta = \frac{1}{(\beta mc^2)^2} \left(\frac{-\beta m^2c^2}{1+\beta m^2c^2}\right) \tag{3.34}$$

A ce stade, nous montrons que pour l'expansion à haute température α est un petit paramètre. En fait, nous ont $1 < \beta c^2$ et η est donné par

$$\eta = \left(\frac{(\Delta X)_{max}}{l_{th}}\right)^2 \tag{3.35}$$

Où $l_{th} = \frac{\hbar c}{KT}$ représente la longueur d'onde thermique obtenue à haute température. Cette longueur d'onde est une longueur caractéristique du système et afin d'être accessible expérimentalement, elle doit être inferieure à la longueur maximale.

Prenons seulement les termes au premier ordre en β, on obtient

$$Z_\beta \approx \frac{(KT)^2}{m\hbar\omega c^2} + \frac{3\beta(KT)^4}{m\hbar\omega c^4}\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{mc^2}{KT}\right)^2\right) \qquad (3.36)$$

En utilisant le fait que $\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{mc^2}{KT}\right)^2\right) \approx\ 1$, on obtient finalement le developpement de la fonction de partition à haute température

$$Z_\beta \approx \frac{(KT)^2}{m\hbar\omega c^2} + \frac{3\beta(KT)^4}{m\hbar\omega c^4} \qquad (3.37)$$

Le premier terme est la fonction de partition de l'oscillateur de Dirac habituel, tandis que le second terme représente la correction apportée par le modèle anti de Sitter.

L'énergie moyenne définie par $U \approx \mathrm{kT}^2 \frac{\partial lnZ}{\partial \mathrm{T}}$ est alors donnée par

$$U \approx 2kT\left[1 + 3\left(\frac{(\Delta X)_{max}}{l_{th}}\right)^2\right] \qquad (3.38)$$

tandis que la capacité calorifique $C\ = \frac{\partial U}{\partial T}$ est

$$C \approx 2k\left[1 + 9\left(\frac{(\Delta X)_{max}}{l_{th}}\right)^2\right] \qquad (3.39)$$

Conclusion

L'objet central de ce mémoire était la dérivation des fonctions d'ondes et le spectre d'énergie et les propriétés statistiques de l'oscillateur de Dirac à 1D et dans le cadre du modèle anti de Sitter et aussi dans le cadre du modèle de Sitter.

Le premier chapitre contient deux parties. Dans la première partie, on a donné un rappel sur l'équation de Dirac puis ont dérivé sa solution pour le cas d.une particule libre et aussi pour le cas de l'oscillateur de Dirac à une dimension.

Dans le chapitre 2, en utilisant la représentation de l'espace des positions, nous avons résolu exactement l'équation de Dirac pour l'oscillateur de Dirac à une dimension dans le cadre de modèle anti de Sitte. Ensuite, nous avons obtenus les valeurs propres et les fonctions propres. Contrairement à l'oscillateur Dirac habituel à une dimension, les niveaux d'énergie sont dépends de n2 comme les niveaux d'énergie d.une particule confinée dans un potentiel de puits. L'oscillateur Dirac dans le modèle anti-Snyder dans un bain thermal est également étudié. Dans le régime à hautes températures, l'énergie moyenne et la capacité thermique sont plus faibles que celles de l'oscillateur de Dirac ordinaire.

Dans le chapitre 4, nous avons fait la même chose qu on fait au chapitre précédent. On a trouve aussi que les niveaux d'énergie sont dépends de n2 comme les niveaux d'énergie d.une particule confinée dans un potentiel de puits. Par contre, dans le régime à hautes températures, l'énergie moyenne et la capacité thermique sont plus fortes que celles de l'oscillateur de Dirac ordinaire.