



Université Mohamed Boudiaf de Msila
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de MASTER

Faculté : des Mathématiques et d'Informatique

Specialité : Mathématique

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

Boundedness and Compactness of Nonlinear
Integral Equations in Functional Spaces

Présenté par :
M^{lle} CHAABANI Khadidja

Septembre 2020.

Belkacem LAKEHALI
Bachir GAGUI
Mostefa Dillmi

MCA
MCA
MCB

Univ. De M'SILA
Univ. De M'SILA
Univ. De M'SILA

Président
Encadreur
Examinateur

Remerciements

Aucune dédicace à ma chère mama, je dis bien **mama**, ne pourrait exprimer mes sentiments que j'éprouve pour toi mama. Votre sacrifice, ton amour illimité et ta tendresse, font pour moi un encouragement et une confiance en soi même.

Sans oublier mon très cher papa qui m'a couvert d'amour et de tendresse, ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Vous m'avez aidé et soutenu durant toute ma vie, avec à chaque fois une attention renouvelée

Mes plus sincères remerciements vont à Monsieur le Professeur GAGUI Bachir, pour avoir dirigé ce travail. Pour sa disponibilité en ligne, sa patience. Je vous exprime toute ma reconnaissance et mon profond respect.

J'adresse mes sincères remerciements à tous mes collègues de la spécialité **AMN**.

Abstract :

In this memory we study, the bounded of a nonlinear integral equations Hammerstein type, in Lebesgue functional spaces. We use the simplest method, which is the fixed point method. Numerical examples are presented.

Keywords :

Boundedness, Convergence, Nonlinear Integral Equations, Lebesgue Functional Spaces, Hammerstein, fixed point

Résumé :

Dans ce mémoire, on a étudié les propriétés de bornétude et de la convergence dans les équations intégrales non linéaires, de type Hammerstein dans des espaces Fonctionnels. En utilisant la méthode du point fixe, des exemples numériques sont appliqués dans Les équations intégrales de Hammerstein.

Mots clés :

Bornétude, convergence, espaces fonctionnels de Lebesgue, Hamerstein point fixe, équation intégrales

الخلاصة:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة خاصة محدودية مؤثرات التكامل الغير خطية في الفضاءات الدالية. ثم قدمنا أمثلة عددية في المعادلات التكاملية من نوع هامرشتاين باستعمال طريقة النقطة الصامدة.

الكلمات المفتاحية:

المحدودية، النقطة لبصامدة، المؤثرات، الفضاءات الدالية، معادلات هامرشتاين.

Table des matières

0.1	INTRODUCTION	6
1	RAPPELS ET NOTIONS FONDAMENTALES	1
1.1	Espace vectoriel normé	1
1.2	Espace complet	1
1.3	Espace Modulaire	2
1.4	Espaces L_p	3
1.5	Espace $L_p(x)$	4
1.5.1	Inégalités auxiliaires	5
1.5.2	complétude de l'espace	5
1.6	Critères de compacité	5
1.6.1	Critère la Vallée Poussin	5
2	NOTIONS SUR LES OPERATEURS	7
2.1	Opérateur intégral linéaire	8
2.2	Opérateurs compacts	9
2.3	Opérateur de rang fini	11
2.4	Opérateur de Hammerstein	11
2.5	Principe du point fixe	11
3	CONTINUITE DE L'OPERATEUR DE SUPERPOSITION DANS LES ESPACES DE LEBESGUE	13
3.1	Equation intégrale	13
3.2	Classifications des équations intégrales	13
3.2.1	Equations intégrales linéaires	14
3.2.2	Equations intégrales non-linéaires	14
3.2.3	Equations intégrales de Uryson et de Hammerstein	20
3.3	Les équations intégrales dans les espaces fonctionnels	20
3.3.1	Opérateur linéaire dans L_p	21

3.3.2	Opérateur non-linéaire dans L_p	22
3.4	Equations intégrales de type Hammerstein	23
3.5	Existence dans L_p	23
3.5.1	L'opérateur de superposition dans les espaces de Lebesgue	23
3.5.2	Propriétés de l'opérateur de superposition dans l'espace de Lebesgue	24
3.5.3	Opérateur intégral de Fredholm	27
3.5.4	Opérateur intégral d'Hammerstein	28
3.5.5	Equation intégrale de type Hammerstein	28
3.5.6	Principe de Leray-Schauder	29
3.6	CONCLUSION ET PERSPECTIVES	30
3.7	Conclusion	30
3.8	Perspectives	31

0.1 INTRODUCTION

Les équations intégrales linéaires et non linéaires ont plusieurs applications en biologie, control optimal, économie, physique mathématique et ingénierie.

Parmi les équations intégrales non linéaires, les équations intégrales non linéaires de type Hammerstein

$$u(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (x \in \Omega) \quad (1)$$

où Ω est un compact de \mathbb{R}^N , u est la fonction inconnue, k est le noyau donné, f une fonction donné. Ces équations semblent les plus investies.

Le premier résultat significatif concernant la résolubilité de telles équations a été obtenu par A. Hammerstein.

utilisant des méthodes variationnelles. Dans leurs travaux, le noyau k est supposé symétrique défini positif et borné ou bien de carré intégrable; dans le premier cas, aucune condition sur le taux de croissance de la fonction f par rapport à u n'est exigée, tandis que dans le second cas, il est supposé que la fonction f soit sous-linéaire.

La méthode de Hammerstein atteint son plus grand développement dans les travaux de M. Golomb et M. M. Vainberg;

De nouveaux résultats concernant la résolubilité des équations d'Hammerstein ont été obtenu par M. Krasnosel'skii [1].

Ces résultats sont basés sur de nouvelles méthodes, utilisant des arguments topologiques, pour l'existence de solutions.

Dans les premiers travaux sur les équations d'Hammerstein, il a été montré que pour obtenir des conditions de résolubilité, il est nécessaire d'avoir un certain accord entre le caractère des singularités du noyau k et le taux de croissance de f par rapport à u ; Suivant cet accord, l'étude de l'équation d'Hammerstein à non linéarités d'ordre fini (d'ordre pronominal) est faite dans les espaces classiques de Lebesgue L^p , tandis que l'étude de cette même équation à non linéarités essentielles (d'ordre exponentiel) est faite dans les espaces fonctionnels.

Dans ce travail, nous discutons l'existence de solutions dans les espaces L^p des équations intégrales de type Hammerstein et nous proposons de suivre la même méthode utilisée dans L^p , afin d'obtenir des résultats d'existence dans les espaces fonctionnels, c'est-à-dire mettre l'équation intégrale de type Hammerstein (1) sous la forme d'une équation d'opérateurs

$$u = (AN_f) u \tag{2}$$

où A est l'opérateur intégral linéaire de Fredholm

$$A(u)(x) = \int_{\Omega} k(x, y) u(y) dy \quad (x \in \Omega) \tag{3}$$

et où N_f est l'opérateur non linéaire de Nemytskij associé à f

$$N_f(u)(x) = f(x, u(x)). \tag{4}$$

cet opérateur appelé aussi opérateur de superposition .on l'étudié dans les espaces fonctionnels (espaces de Lebesgue).

Dans cet étude on utilise une technique important et ce qu'on appelle linéarisation,à ce fait, chercher des conditions pour que l'opérateur de Nemytskij N_f associé à f soit borné et continu et des conditions pour la continuité et la complète continuité de l'opérateur intégral linéaire de Fredholm A . En combinant ces conditions, nous obtenons des conditions suffisantes pour la continuité et la complète continuité de l'opérateur intégral d'Hammerstein T

$$T = AN_f. \tag{5}$$

Par application du principe de Leray-Schauder, l'opérateur intégral d'Hammerstein T aura au moins un point fixe dans les espaces fonctionnels,et par conséquent l'équation intégrale d'Hammerstein (1) aura au moins une solution dans espaces fonctionnels.

Notre travail est organisé en trois chapitres :

le premier chapitre on rappelle quelques définitions(espaces fonctionnels) et des propriétés des opérateurs linéaires (bornés, continus, compact,... etc), aussi quelques théorèmes fondamentaux très utiles dans ce qui suit.

Le deuxième chapitre est très important est une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, qui a pour notre objectif aussi il est consacré aux propriétés de l'opérateur de superposition dans les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Dans le troisième chapitre,on résoudre l'équation de Hammerstein dans l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette équation, avec la comparaison entre la solution numérique a ses équations et la solution exacte.

Pour plus de détails voir [1].

Chapitre 1

RAPPELS ET NOTIONS FONDAMENTALES

Dans ce chapitre on présente un rappel sur les notions de l'analyse fonctionnelle et on donne quelques notations sur les opérateurs et ses propriétés, qui l'on utilisera dans les chapitre qui se suivent.

1.1 Espace vectoriel normé

Definition 1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on appelle norme sur E toute application notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}_+ ,

vérifie les conditions suivantes :

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

1.2 Espace complet

Definition 2 un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy x_n d'éléments de E est une suite convergente dans E .

Lemma 3 Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Example 4 $(C([\alpha, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

1.3 Espace Modulaire

Definition 5 Soit X un espace vectoriel sur le corps \mathbb{k} . La fonction $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ est dite *semimodulaire* dans X , si les propriétés suivantes sont satisfaisantes :

- (i) $\rho(0) = 0$.
 - (ii) $\rho(\lambda x) = \rho(x)$, $\forall x \in X$, $\lambda \in \mathbb{k}$, avec $|\lambda| = 1$.
 - (iii) ρ est continue à gauche.
 - (iv) $\rho(\lambda x) = 0$, $\forall \lambda > 0$ implique $x = 0$.
- le semimodulaire ρ est dit continu si,
- (v) l'application $\lambda \mapsto \rho(\lambda x)$ est continue dans $(0, \infty]$, pour $x \in X$.

1. Le semimodulaire est toujours convexe.
2. Le semimodulaire est dit modulaire si, $\rho(x) = 0$ implique $x = 0$.

Si $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors

$$\rho_p(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^p dx$$

définie un modulaire continu sur $L^0(\Omega)$.

Si ρ est un semimodulaire ou modulaire dans X , alors.

$$X_p = \{x \in X ; \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho(\lambda x) = 0\}$$

est appelé espace semimodulaire ou espace modulaire (respectivement).

Soit ρ un semimodulaire dans X , alors X_p est un espace vectoriel normé sur le corps \mathbb{k} , où la norme définie par

$$\|x\|_{\rho} = \inf \left\{ \lambda > 0, \rho \frac{1}{\lambda} x \leq 1 \right\}$$

Lemma 6 Soit ρ un semimodulaire sur X , alors $\|x\|_{\rho} \leq 1$ et $\rho(x) \leq 1$ sont équivalents.

Si ρ est continu, alors aussi $\|x\|_{\rho} < 1$ et $\rho(x) < 1$ sont équivalents, comme $\|x\|_{\rho} = 1$ et $\rho(x) = 1$.

Soient ρ un semimodulaire sur X et $x_k \in X_{\rho}$, alors $x_k \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$ si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\lambda x_k) = 0 \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

1.4 Espaces L^p

Definition 7 (*Espace $L^1(\Omega)$*)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , on désigne par $L^1(\Omega)$ des fonctions intégrable sur Ω à valeur dans \mathbb{R} , on pose

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Definition 8 (*Espace $L^p(\Omega)$*)

Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on a $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, vérifiant

$$\exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c, p.p. \text{ sur } \Omega.$$

La norme est notée par

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf \{ c > 0, |f(x)| \leq c, p.p. \text{ sur } \Omega \}.$$

Remark 9 Si $f \in L^\infty(\Omega)$, on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty, p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Theorem 10 (*Fischer-Riesz*) *L'espace L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Theorem 11 (*Théorème de convergence dominée de Lebesgue*) *Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 . On suppose que*

- i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω .
- ii) il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque $n, |f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω .

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

Definition 12 soit $p \in \rho(\Omega)$, on définit la fonction ρ_p et $\|\cdot\|_p$ par

$$\rho_p(f) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \text{ess sup } |f(x)|$$

$$\|f\|_p = \inf \{ \lambda > 0 : \rho_p(f/\lambda) \leq 1 \}$$

$\rho_p(f)$ et $\|f\|_p$ s'appelle modulaire et la norme de l'espace (respectivement).

1.5 Espace $L_p(x)$

Definition 13 L'espace de Lebesgue généralisé $L^{p(x)}(\Omega)$, c'est les classes de toutes les fonctions u , telles que $\rho_p(\lambda u) < +\infty$, pour $\lambda > 0$

1. si $p \in \rho(\Omega)$, alors on a $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ équivalent à $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$.
2. Pour $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, on a
 - (i) Si $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, alors $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$.
 - (ii) Si $1 < \|f\|_{p(\cdot)}$, alors $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \rho_{p(\cdot)}(f)$.

Remark 14 Si la fonction $p(x) = p = \text{cst}$, donc la norme coïncide avec la norme usuelle de l'espace $L^p(\Omega)$, autrement dit

$$L^{p(x)}(\Omega) = L^p(\Omega)$$

1.5.1 Inégalités auxiliaires

(a) Inégalité de Hölder

Soient p et q deux exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et $f \in L^p, g \in L^q$ alors,

$$f \cdot g \in L^1 \text{ et } \int |fg| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

(b) Inégalité de Minkowski

Soit $p \geq 1$ et f, g deux fonctions dans $L^p(\Omega)$; alors, la somme $f + g$ est aussi dans $L^p(\Omega)$ et l'on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

1.5.2 complétude de l'espace

Theorem 15 *L'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ est un espace normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach.*

Si $|\Omega| = 0$, alors l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ c'est l'espace d'Orlicz

1.6 Critères de compacité

1.6.1 Critère la Vallée Poussin

Nous nous rappelons qu'une famille \mathfrak{R} de fonction $\varphi(x)$ équi-continue absolument en intégrale, si pour un ε arbitraire et un $h > 0$ peut être trouvé, tels que, on a

$$\int_{\varepsilon} |\varphi(x)| dx < \varepsilon$$

pour toutes les fonctions dans la famille \mathfrak{R} , où mes $\varepsilon < h$.

Le critère général pour l'équi-continue absolument en intégrale d'une famille des fonctions est donné par le théorème suivant.

Theorem 16 *(la Vallée Poussin) soit $\varphi(u), (0 \leq u < \infty)$ une fonction monotone et croissante qui satisfait la condition*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \infty$$

Supposer que $u(x)$ une fonction d'une certaine famille de \mathfrak{R} , l'intégrale de fonction $\varphi [|u(x)|]$ est uniformément bornée

$$\int_{\Omega} \varphi [|u(x)|] dx \leq A < \infty, \quad u(x) \in \mathfrak{R}$$

Alors la famille \mathfrak{R} est équi-continue absolument.

Proof. Pour la preuve voir [1] ■

Chapitre 2

NOTIONS SUR LES OPERATEURS

Definition 17 Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur A défini sur X dans Y est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :

pour tout u, v dans X et α, β dans \mathbb{R}

i) $Au \in Y$.

ii) $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$.

Definition 18 Un opérateur linéaire A défini sur X dans Y est dit borné s'il existe une constante positive C , telle que :

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X, \forall u \in X.$$

Proposition 19 Le plus petit de nombres C vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur A et se note $\|A\|$, on a

$$\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}.$$

Proposition 20 Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes

- i) L'opérateur T est continu sur X .
- ii) L'opérateur T est continu au point 0_x .
- iii) L'opérateur T est borné.

Theorem 21 Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui-même avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique dans E .

Alors, l'opérateur $I - A$ admet un opérateur inverse borné, donné par la série de Neumann :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

de plus

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Theorem 22 (théorème des opérateur inverses) Soit A un opérateur borné et bijectif, défini sur un espace de Banach E dans un espace de Banach F , alors l'opérateur inverse A^{-1} est aussi borné

Proof. Il en résulte immédiatement du théorème de l'application ouverte, l'application A étant bijective, continue et ouverte elle donc bicontinue, Alors on a

$$A \in L(E, F), A \text{ bijectif} \implies A^{-1} \in L(E, F)$$

■

2.1 Opérateur intégral linéaire

Definition 23 Un opérateur intégral linéaire A est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante

$$(A\varphi)x = \int_{\alpha}^b K(x, t) \varphi(t) dt.$$

La fonction K étant appelée noyau de l'opérateur A .

Remark 24 Si K est une fonction continue de $[\alpha, b] \times [\alpha, b]$, l'opérateur A est appelé opérateur intégral à noyau continu K .

2.2 Opérateurs compacts

Definition 25 (*Compacité*) Soit U un ensemble d'un espace normé X , U est dit compact si de tout recouvrements de U par des ouverts de U on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e

$$\forall V_j, j \in J \text{ (ouverts)}; U \subset \bigcup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(k)} = 1, 2, \dots, n \text{ tel que } U \subset \bigcup_{k=1}^n V_j(k)$$

Definition 26 Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

Definition 27 (*Opérateur compact*) Soit T un opérateur d'un espace normé X dans un espace normé Y , on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans X à un ensemble relativement compact dans Y .

Definition 28 (*opérateur complètement continu*) L'opérateur T est dite complètement continu, si elle est continu et compact.

Definition 29 L'opérateur T est compact, si et seulement si pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$, la suite $\{Tx_n\}_{n \geq 1}$ admet que sous suite convergente dans Y . Dans le cas particulier où $X = C([\alpha, b])$, le théorème suivant d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de T .

Theorem 30 (*Arzela-Ascoli*) Une condition nécessaire et suffisante qu'une famille des fonctions continues définies sur l'intervalle compact $[\alpha, b]$, est compacte dans $C([\alpha, b])$ est que cette famille est uniformément bornée et équi-continue.

Theorem 31 L'opérateur intégral A de $C([\alpha, b])$ dans $C([\alpha, b])$ à noyau continu est un opérateur compact.

Proof. Soit E un ensemble borné de $C([\alpha, b])$ alors, on a $\|\varphi\| \leq M$, pour tout $\varphi \in E$, de plus ■

$$|A\varphi(x)| \leq M |b - \alpha| \max_{x,t \in [\alpha,b]} |K(x,t)|, \forall x \in [\alpha, b] \text{ et } \forall \varphi \in E.$$

D'où l'ensemble $A(E)$ uniformément borné.

D'autre part, le noyau K est uniformément continu sur le compact $[\alpha, b] \times [\alpha, b]$, d'où pour tout x, t, z de $[\alpha, b]$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } |x - t| < \delta \Rightarrow |K(x, z) - K(t, z)| < \frac{\varepsilon}{M|b - \alpha|} .$$

D'où,

$$|A\varphi(x) - A\varphi(t)| < \varepsilon \text{ pour tout } \varphi \in E \text{ et } x, t \in [\alpha, b] \text{ avec } |x - t| < \delta .$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où $A(E)$ est relativement compact par le théorème d'Arzela-Ascoli, alors A est compact.

Theorem 32 *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

Proof. En effet, si on désigne par : ■

$$B(0, 1) = \{x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

alors, $T(B(0, 1))$ est relativement compact d'où

$$\|Tx\| \leq C, \forall x \in B(0, 1) .$$

Alors T est borné.

Réciproquement, l'opérateur identité I de X dans X est borné, mais il n'est pas compact car $I(B(0, 1)) = B(0, 1)$, n'est pas relativement compacte sauf si X est de dimension finie.

Corollary 33 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Alors, l'opérateur identité de E n'est pas compact.*

Plus généralement, tout isomorphisme $T : E \rightarrow E$ n'est pas compact.

Remark 34 *Une application linéaire $A : E \rightarrow F$ entre espaces vectoriels normés qui est continue est souvent dite bornée.*

Notation 35 *On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues entre E et F . Quand $E = F$, $\mathcal{L}(E, F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.*

Proposition 36 *Soient $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B \in \mathcal{L}(F, G)$. Si A ou B est compact alors BA est compact.*

Proof. Si A est compact, alors, pour tout borné $M \subset E$, $\overline{A(M)}$ est compact. Or, l'image d'un compact par une application continue est compacte, donc, $B(\overline{A(M)})$ est compact. Il résulte que $B \circ A(M) \subset B(\overline{A(M)})$ est relativement compacte. ■

Si B est compact, alors, pour tout borné $M \subset E$, $A(M)$ est aussi borné et donc $B \circ A(M)$ est relativement compacte.

On s'intéresse maintenant à une classe d'opérateurs dits de rang fini.

2.3 Opérateur de rang fini

Definition 37 Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, G)$ est dit de rang fini si la dimension de l'image de T est finie, $\dim T(E) < +\infty$

Remark 38 Tout opérateur de rang fini est compact.

Corollary 39 Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T \in (E; F)$, tel qu'il existe $T_n \in \mathcal{L}(E, F)$, T_n de rang fini, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$ Alors T est compact.

2.4 Opérateur de Hammerstein

Definition 40 La fonction f étant une fonction de Carathéodory, on suppose compact et considère un noyau de Green G associé à la fonction f . Alors, l'opérateur H défini par

$$(Hu)(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y, u(y)) dy$$

est appelé opérateur de Hammerstein.

2.5 Principe du point fixe

Definition 41 Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach E dans lui-même, alors pour tout $x \in E$, tel que $x = T(x)$, s'appelle un point fixe de l'opérateur T .

Definition 42 Soit T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui-même, T est un contraction (ou application contractante), s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que, pour tout $x, y \in E$, on ait

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k \|x - y\| \quad (2.1)$$

Remark 43 (i) si $k \geq 0$ dans la relation (1), T est dit Lipschitzienne.

(ii) L'application Lipschitzienne est nécessairement continue.

(iii) Si $k < 1$ dans la relation(1), T est dit contraction.

Theorem 44 Soit E un espace de Banach et F un sous-ensemble fermé de E .

Soit f une application contractante de F dans E , alors il existe un unique $z \in F$, tel que

$$f(z) = z.$$

Theorem 45 Soient A un opérateur borné dans un espace de Banach E dans lui-même et g un élément de E , alors l'opérateur défini par

$$T\varphi = \alpha A\varphi + g$$

a un point fixe, pour $|\alpha|$ suffisamment petit, de plus, si k est une constante positive, telle que

$$\|A\varphi\| \leq k \|\varphi\|, \varphi \in E$$

alors $T\varphi = \varphi$ admet une solution unique pour $|\alpha| k < 1$.

Proof. Puisque l'opérateur A est borné, alors il existe une constante k , telle que

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\| \text{ pour } \varphi_1, \varphi_2 \in E$$

ainsi

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| = |\alpha| \|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq |\alpha| k \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

et par conséquent T est une contraction, lorsque $|\alpha| k < 1$. ■

Dans ce cas et par le théorème précédent, T admet un point fixe unique.

Chapitre 3

CONTINUITÉ DE L'OPÉRATEUR DE SUPERPOSITION DANS LES ESPACES DE LEBESGUE

On donne les définitions et les types des équations intégrales (classifications)

3.1 Equation intégrale

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, s'apparaît sous le signe intégral. Nous allons s'intéresser beaucoup plus aux équations intégrales non linéaires dont les formes suivantes

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_{\Omega} k(x, t) F(x, t, \varphi(t)) dt \quad (1)$$

3.2 Classifications des équations intégrales

La classification des équations intégrales porte sur beaucoup de caractéristiques de base, ce sont :

(A)- Linéarité ou non, (B)- Limite de l'intégration, (C)- Le placement de la fonction inconnue.

3.2.1 Equations intégrales linéaires

1- On appelle équation intégrale de Fredholm (*EIF*) de seconde espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2)$$

2- On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = 0 \quad (3)$$

3- On appelle équation intégrale de Volterra (*EIV*) de seconde espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (4)$$

3- On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = 0 \quad (5)$$

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau $K(x, t) = 0$ pour $t > x$.

3.2.2 Equations intégrales non-linéaires

1- On appelle équation intégrale non-linéaire de Fredholm (*EINF*) de deuxième espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^b k(x, t, \varphi(t)) dt = f(x) \quad (6)$$

2- On appelle équation intégrale non-linéaire de Fredholm de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_{\alpha}^b k(x, t, \varphi(t)) dt = 0$$

1- On appelle équation intégrale non-linéaire de Volterra (*EINV*) de deuxième espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^x k(x, t, \varphi(t)) dt = f(x) \quad (7)$$

2- On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_{\alpha}^x k(x, t, \varphi(t)) dt = 0$$

(i) Si $f(x) \neq 0$, dans les équations (2), (4), (6) et (7) sont dites non homogènes

(ii) Si $f(x) = 0$, dans les équations (2), (4), (6) et (7) sont dites homogènes.

On présente maintenant deux théorèmes de point fixe : le théorème du point fixe de Banach avec application aux équations intégrales non linéaires de Fredholm et de Volterra de seconde espèce et celui de Schauder avec application à ces dernières équations. Pour l'étude de l'existence de solutions pour les équations non linéaires d'opérateurs, on a souvent recours à la théorie du point fixe. Plusieurs théorèmes d'existence sont obtenus à l'aide des théorèmes de points fixes de Banach et celui de Schauder en reformulant le problème d'existence en un problème de point fixe.

Pour plus de détails voir Réf. ([Precup], [Hochstadt] et [Porter])

Theorem 46 Soit E un espace vectoriel normé, $A : E \rightarrow E$ un opérateur et $f \in E$ donné.

Pour résoudre l'équation

$$Ax = f \tag{2.1}$$

on définit souvent d'une certaine manière un opérateur $T : E \rightarrow E$, par exemple

$$Tx = f + (I - A)x,$$

où I est l'opérateur identité, et on réécrit l'équation (2.1) comme un problème de point fixe

$$Tx = x$$

Par application d'un des théorèmes de point fixe, nous obtenons un point fixe pour T qui est une solution pour l'équation (2.1).

Théorème du point fixe de Banach

Theorem 47 (*du point fixe de Banach*) *Supposons que*

- (i) M est une partie fermée non vide d'un espace métrique complet (X, d) ;
- (ii) l'opérateur $T : M \rightarrow M$ est une contraction de rapport $k, 0 \leq k < 1$, i.e.,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \forall x, y \in M.$$

Alors, on a

- (a) Existence et unicité : T a exactement un point fixe dans M ;
- (b) Convergence de l'itération : la suite des approximations successives $(x_{n+1} = T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe, x , de T dans M , pour un choix arbitraire du point initial x_0 dans M ;
- (c) Estimation de l'erreur : pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons l'estimation à priori

$$d(x_n, x) \leq k^n (1 - k)^{-1} d(x_0, x_1),$$

et l'estimation à posteriori

$$d(x_{n+1}, x) \leq k(1 - k)^{-1} d(x_n, x_{n+1});$$

(d) Vitesse de convergence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$d(x_{n+1}, x) \leq kd(x_n, x).$$

Remark 48 *L'estimation à priori (c) montre que, quand on part du point initial x_0 dans M , l'erreur d'approximation du $n^{\text{ième}}$ itéré est complètement déterminée par le coefficient de contraction k et par le déplacement initial $d(x_0, x_1)$.*

*L'estimation à posteriori montre que, pour obtenir l'erreur d'approximation désirée du point fixe, $d(x_n, x) < \varepsilon$, on doit stopper le processus d'itération à la première étape n pour laquelle le déplacement entre deux itérées consécutives est au plus $(1 - k)\varepsilon/k$.

Donc, l'estimation à posteriori offre un critère d'arrêt direct pour l'approximation itérative des points fixes, tandis que l'estimation à priori nous donne indirectement un critère d'arrêt.

Equation intégrale non linéaire de Fredholm Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, y, \varphi(y)) dy \quad x \in [0, 1], \quad (2.2)$$

où λ est un nombre réel donné.

Si on cherche une solution continue pour l'équation (2.2), alors on peut la reformuler en un problème de point fixe, sous des hypothèses appropriées.

Supposons que :

(i) $k : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, bornée ;

k est appelée noyau de l'équation intégrale.

(ii) k est L -Lipschitzienne par rapport à la troisième variable, i.e. il existe $L > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, 1]$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$|k(x, y, z_1) - k(x, y, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|;$$

(iii) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue ;

(iv) $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue, supposée continue.

On considère l'espace de Banach $E = C([0, 1]; \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} muni de la norme $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)|$. On définit sur l'espace E l'opérateur T donné par

$$(T\varphi)(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, y, \varphi(y)) dy \quad x \in [0, 1]. \quad (2.3)$$

Il est évident que T applique E sur lui-même (k et f continues) et donc $T(E) \subset E$.

Donc, l'équation intégrale (2.2) est équivalente au problème de point fixe

$$T\varphi = \varphi,$$

où T est défini par (2.3). De plus, T est Lipschitzien et, sous des hypothèses appropriées sur λ , T est une contraction. En effet,

$$\begin{aligned} |T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)| &= \left| \lambda \left[\int_0^1 k(x, y, \varphi_1(y)) dy - \int_0^1 k(x, y, \varphi_2(y)) dy \right] \right| \\ &\leq |\lambda| \int_0^1 |k(x, y, \varphi_1(y)) - k(x, y, \varphi_2(y))| dy \\ &\leq |\lambda| L \int_0^1 |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| dy. \end{aligned}$$

Mais

$$|\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \quad \text{pour tout } y \in [0, 1]$$

et donc, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $\varphi_1, \varphi_2 \in E$, on a

$$|T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)| \leq |\lambda| L \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty.$$

Finalement, on obtient

$$\|T(\varphi_1) - T(\varphi_2)\|_\infty \leq |\lambda| L \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in E,$$

ce qui montre que T est $|\lambda| L$ -Lipschitzien.

Remark 49 Si on choisit λ tel que $|\lambda| L < 1$, alors T est une contraction, et donc, par le théorème du point fixe de Banach, T a un unique point fixe, qui est la solution unique de l'équation intégrale (2.2), et cette solution peut-être obtenue par les approximations successives.

Théorème du point fixe de Schauder

Theorem 50 (du point fixe de Schauder) Soient E un espace de Banach et $C \subset E$ un convexe non vide, et $T : C \rightarrow C$ une application continue. Si, de plus

C est fermé et borné et T compact ou C est compact, alors T possède un point fixe.

Equation intégrale non linéaire de Fredholm

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = \int_0^1 k(x, y, \varphi(y)) dy \quad x \in [0, 1]. \quad (2.4)$$

Si on cherche une solution continue φ pour l'équation (2.4) dans la boule de centre 0 et de rayon R , $\overline{B}_R(0; C([0, 1]; \mathbb{R}))$, de l'espace $C([0, 1]; \mathbb{R})$, alors on peut la reformuler en un problème de point fixe, sous des hypothèses appropriées. Supposons que :

$k : [0, 1] \times [0, 1] \times [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et que

$$M = \max_{[0,1] \times [0,1] \times [-R,R]} |k(x, y, z)| \leq R.$$

On considère l'espace de Banach $E = C([0, 1]; \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} muni de la norme $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\varphi(x)|$.

On définit l'opérateur $T : \overline{B}_R(0; C([0, 1]; \mathbb{R})) \rightarrow C([0, 1]; \mathbb{R})$ donné par

$$(T\varphi)(x) = \int_0^1 k(x, y, \varphi(y)) dy \quad x \in [0, 1]. \quad (2.5)$$

L'opérateur T applique la boule $\overline{B}_R(0; C([0, 1]; \mathbb{R}))$, sur elle-même.

Donc, l'équation intégrale (2.4) est équivalente au problème de point fixe

$$T\varphi = \varphi,$$

où T est défini par (2.5).

Remark 51 *L'opérateur T est continu et compact, et alors, par le théorème du point fixe de Schauder, T a au moins un point fixe dans la boule $\overline{B}_R(0; C([0, 1]; \mathbb{R}))$, qui est une solution de l'équation intégrale (2.4), dans la boule $\overline{B}_R(0; C([0, 1]; R))$.*

3.2.3 Equations intégrales de Uryson et de Hammerstein

Definition 52 *(équation de Uryson)*

On appelle équation intégrale de Uryson une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_{\Omega} F(x, t, \varphi(t)) = g(x) \quad , t \in \Omega,$$

où F et g sont des fonctions arbitraires.

Definition 53 *(équation de Hammerstein)* On appelle équation intégrale de Hammerstein, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_{\Omega} k(x, t) f(x, t, \varphi) = g(x) \quad , t \in \Omega$$

Remark 54 *L'équation de Hammerstein est un cas particulier de l'équation de Uryson.*

3.3 Les équations intégrales dans les espaces fonctionnels

Après une brève de mise en contact des activités scientifiques de recherche pour virons de qu'elle étude fondamentales d'autre chercheurs basés (Méthodes et techniques).

Dans ce chapitre nous discuterons sur l'objectif de notre article dont on prouve l'existence de la solution d'une équation intégrale non linéaire de type Hammerstein, en utilisant la technique de décomposition de l'opérateur A en deux opérateurs K et N dans les espaces de Lebesgue.

3.3.1 Opérateur linéaire dans L^p

On donne quelques résultats et théorèmes qui sont utiles dans ce qui suit.

Definition 55 Soit D un ensemble mesurable de Ω . On définit l'opérateur linéaire P_D , par

$$P_D x(s) = \begin{cases} x(s) & , s \in D \\ 0 & , s \notin D \end{cases}$$

(i) Il est clair que $P_D^2 = P_D$ et $\|P_D\|_p = 1$.

(ii) Si $\text{mes}(D) \neq 0$. La norme dans $L^p(\Omega)$, posée la propriété de la continuité uniforme, alors pour une fonction $x(s) \in L^p(\Omega)$, on a

$$\lim_{\text{mes}(D) \rightarrow 0} \|P_D x\|_p = 0.$$

Definition 56 On dit qu'une famille M de fonctions dans L^p équi-continues en norme, si quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$, tel que $\text{mes}(D) < \delta$ et $x(s) \in M$, ce qui implique l'inégalité

$$\|P_D x(s)\|_p < \varepsilon.$$

Remark 57 Il est clair que la convergence de suite de fonctions $x_n(s)$ vers $x_0(s)$ en norme de L^p , implique la convergence de cette suite en mesure (mais n'est pas presque partout).

Lemma 58 Une famille M des fonctions $x(s) \in L^p$ est compacte, si et seulement si elle est compacte en mesure et M est équi-continues en norme.

Remark 59 Pour vérifier que les fonctions dans un ensemble M sont équi-continues absolument en norme, il est parfois, utiliser le critère de la Vallée-Poussin.

Nous nous rappelons qu'une famille M de fonctions $\varphi(x)$ a intégrale équi-continues absolument, si pour ε arbitraire un $h > 0$ peut être trouvé, tels que pour toutes les fonctions dans la famille M , par

$$\int_{\xi} |\varphi(x)| dx < \varepsilon.$$

Des critères généraux pour l'équi-continues absolument des intégrales d'une famille des fonctions sont donnés par le théorème suivant.

Lemma 60 *L'ensemble borné M des fonctions dans L^0 est compact si seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$,*

il existe une partition finie de l'ensemble Ω ,

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n, \text{ telle que}$$

pour toute fonction $x(s) \in M$

$$\operatorname{ess\,sup}_{s,t \in \Omega_i} |x(s) - x(t)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n$$

Remark 61 *On peut modifier la condition de compacité, si M est borné dans un sous espace de L^0 .*

Par exemple, si $M \subset (C)$ l'espace de fonctions uniformément continues, et Ω est un ensemble borné, alors le critère d'Arzela-Ascoli est valid.

Definition 62 *Soient E_1, E_2 deux espaces fonctionnels et soit A un opérateur de E_1 dans E_2 . On dit que A est un opérateur positif, s'il transforme des fonctions positives aux fonctions positives.*

Remark 63 *Si A est un opérateur linéaire positif, alors on a l'inégalité suivante*

$$|Ax| \leq A|x|.$$

Theorem 64 *Soit A un opérateur linéaire positif de L^α à L^β . Alors A est continu.*

Proof. Pour la preuve voir [?] ■

3.3.2 Opérateur non-linéaire dans L_p

Dans tout ce qui suit Ω désigne un ensemble mesurable de l'espace euclidien.

L'objet présent est l'étude de l'équation

$$u(x) = \int_{\Omega} k(x,y) f(y, u(y)) dy \quad (8)$$

avec x, y désignant des variables indépendantes. L'équation plus générale

$$\varphi(x) = g(x) + \int_{\Omega} k(x,y) f(y, \varphi(y)) dy \quad (9)$$

dans laquelle $g(x)$ est une fonction connue, se ramène à l'équation (8) par la substitution

$$u(y) = \varphi(y) - g(y),$$

cette équation a été étudiée par M.M. Hammerstein, Iglisch, Leray et Cacciopoli. Mais tandis que ces auteurs se sont bornés à l'étude du noyau symétrique.

3.4 Equations intégrales de type Hammerstein

Nous présentons trois opérateurs continus opérant dans les espaces L^p : l'opérateur de superposition de Nemytskij ; l'opérateur intégral linéaire de Fredholm et l'opérateur intégral non linéaire d'Hammerstein. Puis, nous donnons des résultats d'existence dans L^p avec l'aide du principe de Leray-Schauder, pour l'équation intégrale de type Hammerstein.

3.5 Existence dans L^p

3.5.1 L'opérateur de superposition dans les espaces de Lebesgue

Definition 65 (*Fonction de Carathéodory*) Soit la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est satisfaite la condition, de Carathéodory, si

- (i) La fonction $x \rightarrow f(x, y)$ mesurable dans l'ensemble Ω , pour $y \in \mathbb{R}$,
- (ii) La fonction $y \rightarrow f(x, y)$ est continue dans \mathbb{R} , pour $x \in \Omega$.

Definition 66 *Opérateur de Nemytskii (ou de superposition)* On dit qu'une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction de Carathéodory si l'application

$(x, s) \rightarrow f(x, s)$ est continue en s et mesurable en x .

L'opérateur F de superposition défini par

$$(Fu)(x) = f(x, s)$$

est appelé aussi opérateur de Nemytskij

3.5.2 Propriétés de l'opérateur de superposition dans l'espace de Lebesgue

Theorem 67 *L'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L^p dans L^q si et seulement si il existe une fonction $\alpha \in L^q$ et des constantes $b \geq 0, \delta > 0$ tels que*

$$|f(s, u)| \leq \alpha(s) + b|u|^{p/q} \quad (10)$$

pour tous les $(s, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda(s) \leq \delta \mu(s) |u|^p \leq \delta^p. \quad (11)$$

Proof. Pour la preuve voir [2]. ■

Theorem 68 *Si F une application de L_p dans L_q , alors F est localement borné si et seulement si la fonction $f(s, \cdot)$ est borné pour chacun $s \in \Omega_d$.*

Theorem 69 *Si F une application de L_p dans L_q , alors F est borné sur les ensembles bornés si et seulement si pour chacun $r > 0$ il existe une fonction $\alpha_r \in L_1$ et une constante $b_r \geq 0$ tels que*

$$|f(s, u)|^q \leq \alpha_r(s) + b_r |u|^p$$

pour tous les $(s, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$ tels que

$$\mu(s) |u|^p \leq r^p$$

D'ailleurs, l'évaluation suivante

$$\mu_F(r) \leq v_f(r) \leq \|F\theta\|_q + 3\mu_F(r) \quad (12)$$

se tient par

$$\mu_F(r) = \mu(F, b_r) = \sup_{\|x\| \leq r} \|Fx\| \text{ et } v_f(r) = \inf \{ \|\alpha_r\|_1 + b_r r^p \}.$$

Proof. Pour la preuve voir [2][. ■

Theorem 70 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que l'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_p dans L_q . alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

Corollary 71 (a) F est absolument borné,

(b) "Pour chacun $r > 0$ il existe une fonction monotoniquement croissante Φ_r dessus $[0, \infty)$ tels que est Φ une fonction croissante non négative sur $[0, \infty)$ tels que $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$ prise, et l'opérateur de superposition \tilde{F}_r est généré par la fonction

$$\tilde{f}_r(s, u) = u_0(s) \Phi_r [|F(s, u) u| u_0(s)^{-1}]$$

(avec u_0 une unité arbitraire dans L_q) est borné sur la boule $B_r(L_p)$.

(c) Pour chacun $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ un peuvent trouver une fonction $\alpha_\varepsilon \in L_1$ tels que

$$|f(s, u)|^q \leq \alpha_\varepsilon(s) + \varepsilon |u|^p \quad (\mu(s) |u|^p \leq r^p)$$

Theorem 72 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que l'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_p dans L_q , alors F est continu si et seulement si f est sup-équivalent à une certaine fonction de Carathéodory.

Theorem 73 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que l'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_p dans L_q . Alors F est uniformément continu dessus ensembles borné si et seulement si pour chacun $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ un peut trouver $b_\varepsilon \geq 0$, $\delta > 0$ et $\alpha_\varepsilon \in L_q$ avec $\|\alpha_\varepsilon\|_q \leq \varepsilon$ tels que

$$|f(s, u) - f(s, v)| \leq \alpha_\varepsilon(s) + \varepsilon \left(|u|^{p/q} + |v|^{p/q} \right) + b_\varepsilon |u - v|^{p/q}$$

se tient pour

$$\mu(s) |u|^p \leq r^p, \mu(s) |v|^p \leq r^p \text{ et } \mu(s) |u - v|^p \leq \delta^p.$$

D'ailleurs, l'évaluation suivante :

$$\omega_F(r; \delta) \leq v_f(r, \delta) \leq (1 + 2^{1+1/q}) \omega_F(r, \delta) \quad (13)$$

se tient, par $\omega_F(r, \delta)$ où est définie

$$\omega_F(r, \delta) = \{ \|Fx_1 - Fx_2\| : \|x_1\| \leq r, \|x_2\| \leq r, \|x_1 - x_2\| \leq \delta \}$$

et $v_f(r, \delta)$,

$$v_f(r, \delta) = \inf \left\{ \|\alpha_\varepsilon\|_q + 2\varepsilon r^{p/q} + b_\varepsilon \delta^{p/q} \right\}$$

Proof. Pour la preuve voir [2] ■

Theorem 74 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que l'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_p dans L_q . Est F alors faiblement continu si et seulement si la restriction de $\Omega_c \times \mathbb{R}$ satisfait

$$f(s, u) \simeq \alpha(s) + b(s)u \quad (\delta \in \Omega_c, u \in \mathbb{R}), \quad (14)$$

avec $\alpha \in L_q$ et $b \in L_q/L_p$, et la restriction de f à $\Omega_d \times \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory.

Definition 75 ((p, q) -Carathéodory)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et soit $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty[$. On appelle fonction (p, q) -Carathéodory toute fonction

$$f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, s) \mapsto f(x, s)$$

vérifiant la condition suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } 1 \leq p < +\infty \text{ alors } |f(x, z)| \leq g(x) + c|z|^{p/q} \text{ pour presque tout} \\ \quad x \in \Omega, \text{ tout } z \in \mathbb{R}^m \text{ et } g \in L^q(\Omega; \mathbb{R}_+), c \in \mathbb{R}_+ \\ \text{si } p = +\infty \text{ alors pour tout } R > 0, \text{ il existe } g_R \in L^q(\Omega) \text{ avec } |f(x, z)| \leq g_R(x) \\ \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega \text{ et tout } z \in \mathbb{R}^m \text{ avec } |z| \leq R. \end{array} \right.$$

Bornitude et continuité l'opérateur de Nemytskij

Theorem 76 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et soit $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty[$. Supposons que la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est (p, q) -Carathéodory.

Alors l'opérateur de Nemytskij associé à f , $N_f : L^p(\Omega; \mathbb{R}^m) \rightarrow L^q(\Omega; \mathbb{R}^n)$, est bien défini, continu et vérifie.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \text{pour } 1 \leq p < +\infty : \|N_f(u)\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^q(\Omega)} + c \|u\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)}^{p/q} \\ \quad \text{pour tout } u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^m); \\ \text{(ii)} \quad \text{pour } p = +\infty : \|N_f(u)\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^n)} \leq \|g_R\|_{L^q(\Omega)} \\ \quad \text{pour tout } u \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m) \text{ avec } \|u\|_\infty \leq R \text{ et tout } R > 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

Remark 77 L'inégalité dans (précédente) montre que l'opérateur N_f est borné de $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ dans $L^q(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

3.5.3 Opérateur intégral de Fredholm

Definition 78 Soit $k : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $k \in L^p(D; L^r(D))$ si

- (i) l'application $k(x, \cdot) \in L^r(D)$ pour presque tout $x \in D$;
- (ii) l'application $x \mapsto k(x, \cdot) \in L^r(D) \in \text{à } L^p(D; L^r(D))$.

On dit de même pour $k \in C(\overline{D}; L^r(D))$.

Theorem 79 Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $p, q \in [1, +\infty]$, $r \in [1, +\infty]$

le conjugué de $q, 1/q + 1/r = 1$, et soit $k : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$.

Supposons que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } 1 \leq p < +\infty \text{ alors } k \in L^p(D; L^r(D)); \\ \text{si } p = +\infty \text{ alors } k \in C(\overline{D}; L^r(D)). \end{array} \right. \quad (16)$$

Alors l'opérateur intégral de Fredholm A de noyau k

$$\begin{aligned} A & : L^q(D; \mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(D; \mathbb{R}^n) \\ u & \mapsto A(u)(x) = \int_D k(x, y) u(y) dy \quad (x \in D) \end{aligned}$$

est bien défini et complètement continu. De plus, pour $p = +\infty$ on a

$$A(L^q(D; \mathbb{R}^n)) \subset C(\overline{D}; \mathbb{R}^n).$$

3.5.4 Opérateur intégral d'Hammerstein

Considérons l'opérateur intégral d'Hammerstein donné par

$$T(u)(x) = \int_D k(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (x \in D). \quad (17)$$

Cet opérateur sommable. être une composition de l'opérateur intégral de Fredholm A de noyau k et de l'opérateur de Nemytskij N_f associé à f

$$T = AN_f.$$

Theorem 80 *Soit D un ouvert de \mathbb{R}^n , $k : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $p \in [1, +\infty]$, $q \in [1, +\infty[$ et soit $r \in]1, +\infty]$ le conjugué de q .*

Supposons que l'opérateur intégral de Fredholm

$A : L^q(D; \mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(D; \mathbb{R}^n)$ de noyau k soit bien défini et complètement continu. En plus supposons que f est une fonction (p, q) -Carathéodory.

Alors l'opérateur intégral d'Hammerstein $T : L^p(D; \mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(D; \mathbb{R}^n)$ donné par (17) est bien défini et complètement continu.

Remark 81 *Si D est borné et (16) vérifiée pour k , alors A est bien défini et complètement continu; de plus,*

dans ce cas, pour $p = +\infty$,

$$T(L^\infty(D; \mathbb{R}^n)) \subset C(\overline{D}; \mathbb{R}^n),$$

et donc tout point fixe de T appartient à $C(\overline{D}; \mathbb{R}^n)$.

3.5.5 Equation intégrale de type Hammerstein

Nous présentons un principe d'existence très général pour l'existence de solutions dans L^p et l'existence de solutions continues de l'équation intégrale d'Hammerstein

$$u(x) = \int_D k(x, y) f(y, u(y)) \quad p.p. \text{ sur } D. \quad (18)$$

D est un compact de \mathbb{R}^N . Pour $p \in [1, +\infty]$ donné, nous cherchons une solution faible, i.e. une fonction $u \in L^p(D; \mathbb{R}^n)$ qui vérifie l'équation (précédente) pour presque tout $x \in D$. En plus, nous cherchons des solutions dans \bar{U} , où U est un ouvert borné de $L^p(D; \mathbb{R}^n)$ contenant la fonction nulle.

3.5.6 Principe de Leray-Schauder

Theorem 82 (*Principe de Leray-Schauder*)

Soit E un espace de Banach, K un fermé convexe dans E , U un ouvert borné dans E et u_0 un élément fixé dans U . Supposons que l'opérateur $T : \bar{U} \rightarrow K$ soit complètement continu et vérifie

$$u \neq (1 - \lambda) u_0 + \lambda T(u) \quad \text{pour tout } u \in \partial U, \lambda \in]0, 1[.$$

Alors T admet au moins un point fixe dans \bar{U} .

Theorem 83 *Soit D un ouvert de \mathbb{R}^N , $k : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Supposons qu'il existe $p \in [1, +\infty]$, $q \in [1, +\infty[$ tel que l'opérateur intégral linéaire de Fredholm $A : L^q(D; \mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(D; \mathbb{R}^n)$ de noyau k soit bien défini et complètement continu et que f soit (p, q) -Carathéodory. En plus, supposons qu'il existe un ouvert borné O dans $L^p(D; \mathbb{R}^n)$ contenant la fonction nulle, tel que

$$u \in O$$

pour toute solution $u \in \bar{O}$ de l'équation

$$u(x) = \lambda \int_D k(x, y) f(y, u(y)) dy \quad p.p. \text{ sur } D, \quad (19)$$

pour chaque $\lambda \in]0, 1[$. Alors l'équation (19) admet une solution dans $L^p(D; \mathbb{R}^n)$ avec $u \in \bar{O}$.

Remark 84 *Si D est borné et (16) vérifiée pour k , alors l'opérateur intégral linéaire de Fredholm A de noyau k est bien défini et complètement continu de $L^q(D; \mathbb{R}^n)$ dans $L^p(D; \mathbb{R}^n)$; dans ce cas, pour $p = +\infty$, les solutions de l'équation (19) sont continues sur \bar{D} .*

Corollary 85 Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $k : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Supposons qu'il existe $p \in [1, +\infty]$, $q \in [1, +\infty[$ tel que $k \in L^p(D; L^r(D))$ ($1/q + 1/r = 1$), f soit (p, q) -Carathéodory et

(i) pour $1 \leq p < +\infty$ alors $\left(\|g\|_q + cR^{p/q} \right) \| \|k(x, \cdot)\|_r \|_p \leq R$;

(ii) pour $p = +\infty$ alors $\|g_R\|_q \| \|k(x, \cdot)\|_r \|_\infty \leq R$.

En plus, si $p = +\infty$ supposons que l'opérateur intégral linéaire de Fredholm $A : L^q(D; \mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(D; \mathbb{R}^n)$ de noyau k soit complètement continu. Alors l'équation (19) admet une solution $u \in L^p(D; \mathbb{R}^n)$ avec $\|u\|_p \leq R$.

3.6 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

3.7 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons durant ce travail, abordé l'étude de l'existence de solutions des équations intégrales non linéaires de type Hammerstein dans les espaces L^p

$$u(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (x \in \Omega)$$

où Ω est un compact de \mathbb{R}^N , en suivant la méthode qui suit,

- 1 Mettre l'équation intégrale de type Hammerstein sous la forme d'une équation d'opérateurs

$$u = (AN_f)u$$

où A est l'opérateur intégral linéaire de Fredholm

$$A(u)(x) = \int_{\Omega} k(x, y) u(y) dy \quad (x \in \Omega)$$

et où N_f est l'opérateur non linéaire de Nemytskij associé à f

$$N_f(u)(x) = f(x, u(x)).$$

- 2 Chercher des conditions pour que l'opérateur de Nemytskij N_f associé à f soit borné et continu.

- 3 Chercher des conditions pour la continuité et la complète continuité de l'opérateur intégral linéaire de Fredholm A .
- 4 Combiner les conditions trouvées en (2) et (3), afin d'obtenir des conditions suffisantes pour la continuité et la complète continuité de l'opérateur intégral d'Hammerstein T

$$T = AN_f.$$

- 5 Appliquer le principe de Leray-Schauder, pour montrer que l'opérateur intégral d'Hammerstein T a au moins un point fixe dans l'espace L^p , et par conséquent l'équation intégrale d'Hammerstein aura au moins une solution dans cet même espace L^p .

3.8 Perspectives

Le but de notre travail était l'étude de l'existence de solutions pour les équations intégrales non linéaires de type Hammerstein dans des espaces bien appropriés.

En Doctorat, si ALLAH grand puissant le veut, je souhaite étendre cette étude dans les espaces d'Orlickz, qui sont plus complqués.

Bibliographie

- [1] Krasnosel'skii, Zabreyko, Pustyl'nik, Sobolevski : Integral Operators in Spaces of Summable Functions ", Springe, 1975
- [2] APPEL ZABREIKO "nonlinear superposition operators" cambridge university press, Year : 1990..
- [3] Abdul-Majid Wazwaz. "Lineair and Non linear Integral Equations : Methods and Applications", Springer, 2011.
- [4] Bachir GAGUI : "Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz", Thèse de Doctorat en Ssciencs, Promotion 2014/2015.
- [5] Madani CHEMCHAM "Etude des Equations Intégrales Non Linéaires de type Hammerstein dans les espaces d'Orlickz", Thèse de Doctorat en Ssciencs, Univ. de Biskra.