REBUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF M'SILA

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE

Dèpartement de Mathèmatiques

Mémoire de master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Application multivaluée compacte dans un espace de Banach

---

présenté par :
HERIZI Ibtihal

Devant le jury composé de :

Mr ABDELAZIZ Hellal	Université Mohamed Boudiaf M'sila	**Président**
Mme DELOUM Wahiba	Université Mohamed Boudiaf M'sila	**Examinatrice**
Mr TALLAB Abdelhamid	Université Mohamed Boudiaf M'sila	**Co-superviseur**
Mr MAZOUZ Ahmed	Université Mohamed Boudiaf M'sila	**Rapporteur**.

Promotion 2023/2024

Remerciements

Avant tout, je remercie ***Allah*** *le tout puissant qui m'a donné la force, le courage, la volonté et la patience pour accomplir ce modeste travail durant toutes les longues années d'études afin que je puisses arriver là.*

Mes plus vifs remerciement à mon encadreur : ***MAZOUZ Ahmed****, et à mon co-superviseur,* ***TALLAB Abdelhamid****, Qui ont proposé le sujet et accepté de me diriger avec beaucoup de rigueur et de patience, aussi bien pour ses conseils précieux, ses encouragements que pour les corrections et la relecture de ce manuscrit. Cela a été honneur pour moi d'avoir travaillé avec eux. Merci .*

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ***Mr ABDELAZIZ Hellal****, pour avoir accepté la présidence de ce comité, et j'espère que cela témoigne de mon profond respect.*

Je remercie ***Mme DELOUM Wahiba*** *, qui a accepté d'examiner et d'évaluer mon travail, et je lui exprime mes sincères remerciements. Je remerciement également toute ma famille qui se sont consacrée à leur tâche avec dévouement et patience et ceci tout le long de mon étude.*

Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

Mes sincère remerciement vont également tous ceux qui ont participé de loin ou de prés à la réalisation de ce travail. Que tous, trouvent ici mes parfaites salutations. ***Merci***

H.Ibtihal,

Dédicace

Un rêve qui se réalise grâce à Dieu le tout puissant, ce mémoire est enfin achevé, je le dédie aux personnes qui me sont très chères :

À l'âme de mon cher père, qui a toujours été à mes côtés dans mon voyage académique. Tu étais le pilier sur lequel je m'appuyais, et la lumière qui éclairait mon chemin. Je prie Dieu qu'Il te pardonne et qu'Il inscrive ta contribution dans ma vie dans mon cœur pour l'éternité. À ma chère mère, qui m'a mis sur le chemin de la vie et m'a élevé jusqu'à ce que je grandisse. Merci à vous deux pour votre soutien et vos encouragements constants.

Ce travail est le tien.

Pour mes chers frères, ce travail est également le leur grâce à leur encouragement, leur aide et leur disponibilité à tout moment. Je vous souhaite bonheur, santé et réussite dans la vie.

À mon mari : Je dédie cette recherche comme une expression sincère de ma gratitude et de mon appréciation pour tes efforts pendant ma période d'études. Tu as été un mari formidable et un soutien précieux. Merci d'avoir créé les conditions nécessaires pour m'aider dans mes études. Je t'offre cette recherche.

Table des matières

Introduction

La théorie des relations multivoques est une théorie très importante dans le domaine de l'analyse fonctionnelle. Elle a été étudiée par plusieurs auteurs, dont Cross [16] , Wilcox [25] et d'autres.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé la théorie des opérateurs compacts dans les espaces de Banach, qui constitue la partie opérateurs d'une relation multivoque.

Dans le deuxième chapitre, nous avons abordé d'autres aspects tels que (Opérateurs Linéaires et Relations Linéaires,Relations Semi-Continues, Continuité et la Norme des Relations Linéaires, Quelques notions d' Espaces Vectoriels, Quotients, Sous-Espaces et Projections, Continuité et Fonction de Norme pour les Relations Linéaires,Relations Ouvertes et Modules Minimaux,Sélections Linéaires,Relations Linéaires Fermées et Fermées,L'adjoint d'une Relation Linéaire,Nullité,Déficience,et l'indice des relations multivoque).

Ensuite, dans le troisième chapitre, nous avons appliqué cette théorie aux relations multivoques, en nous concentrant notamment sur les relations demi-compactes relatives aux opérateurs compacts. Nous avons également exploré quelques notions liées à ces relations demi-compactes. Pour plus de détails, je vous invite à consulter les articles de référence sur ce sujet[1] [3] [2].

Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\langle\cdot,\cdot\rangle$: Produit scalaire.

$L(E,F)$: L'espace vectoriel des applications linéaires continues.

E' : L'espace dual de E.

$\sigma(T)$: Spectre de T.

$r(T)$: Le rayon spectral de T.

$\sigma_p(T)$: Spectre ponctuel de T.

$\sigma_c(T)$: Spectre continu de T.

$R_\lambda(T)$: La résolvante de T, où λ n'appartient pas au spectre de T.

$K(E,F)$: L'ensemble des opérateurs compacts.

$\mathrm{Ind}(T)$: L'indice de T.

$B(X,Y)$: Espace des opérateurs linéaires et bornés de X vers Y.

$B(X)$: Algèbre des opérateurs linéaires et bornés de l'espace X.

B_X : La boule unité fermée de l'espace métrique X.

$\mathbb{C}$: Les nombres complexes.

$\mathbb{R}$: Les nombres réels.

$\mathbb{N}$: Les nombres naturels.

$\mathbb{Z}$: Les nombres entiers.

Ker : Noyau.

dim : Dimension.

$d(.,.)$: Application de distance.

$LR(X,Y)$: Ensemble des relations linéaires de l'espace X dans l'espace Y.

I_E : Application identité de l'ensemble. E

$\mathbb{K}$: Corps quelconque.

$|.|$: Module complexe / valeur absolue.

X/M : Le quotient de l'espace X par le sous-espace M.

$\mathcal{P}(Y)$: L'ensemble des partitions.

$i.e$: C'est à dire.

Chapitre 1

Préliminaires sur les opérateurs compacts en espace de Banach

Soit E un espace vectoriel normé, on note $B_E(0,r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ et $\overline{B_E(0,r)}$ la boule fermée.

Dans le cas où $r = 1$ on note pour simplifier $B_E = B_E(0,1)$ et $\overline{B_E} = \overline{B_E(0,1)}$, tout au long de ce chapitre on entend par E,F des espaces de Banach.

1.1 Définitions et Exemples

Définition 1.1.1. *Un opérateur linéaire T de E dans F est dit compact si $T(\overline{B_E})$ est relativement compact dans F, où B_E désigne la boule unité fermée de E.*

L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est noté $K(E,F)$.

Si $E = F$, alors on note $K(E)$.

Proposition 1.1.1. *Un élément T de $L(E,F)$ est un opérateur compact si et seulement si l'image par T de toute partie bornée M de E est relativement compacte dans F.*

Définition 1.1.2. *En d'autres termes, T est un opérateur compact si, pour toute suite bornée $(x_n)_n$ dans E, la suite $(T(x_n))$ contient une sous-suite convergente.*

Démonstration. On suppose que T soit compact et on considère une suite bornée quelconque $(x_n)_n$. Si on pose $\alpha = \sup \|T(x_n)\|$ alors la suite $(T(x_n))$ est contenue dans l'ensemble

$T(B_E(0,\alpha))$ où $T(B_E(0,\alpha))$ est relativement compact, on peut alors extraire de $(T(x_n))$, une sous-suite convergente.

Soient maintenant M une partie bornée de E et (y_n) une suite d'éléments de $T(M)$. Il existe alors une suite $(z_n)_n$ d'éléments de $\overline{T(M)}$ telle que :

$$\|z_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Par hypothèse, la suite $(z_n)_n$ admet une sous-suite convergente, la suite y_n)aussi. Il en suit que $T(M)$ est relativement compact. D'où, T est compact. □

Remarque 1. *Un opérateur compact n'est pas nécessairement continu, car sinon il existerait une suite $(x_n)_n$ bornée telle que $\|Tx_n\| \to +\infty$, ce qui contredirait la compacité.*

1.2 Propriétés fondamentales des opérateurs compacts

On commence par rappeler le théorème de Riesz sous forme de lemme.

Lemme 1.2.1. *(Théorème de Riesz) Soit E un espace vectoriel normé. Alors, la boule unité fermée de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Remarque 2. *Le théorème de Riesz peut s'exprimer sous la forme suivante :*

L'identité sur E est un opérateur compact si et seulement si E est de dimension finie.

Théorème 1.2.1. *L'ensemble $K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E,F)$.*

Démonstration. Soient T et S deux opérateurs compacts de E dans F, et λ, μ des éléments de $\mathbb{K}$ alors

$$(\lambda T + \mu S)(\overline{B}(E)) \subset \lambda\overline{T(\overline{B}(E))} + \mu\overline{S(\overline{B}(E))}.$$

Or, si K_1 et K_2 sont deux compacts de F alors $\lambda K_1 + \mu K_2$ qui est l'image compacte de $K_1 \times K_2$ par l'application continue $(x,y) \to \lambda x + \mu y$ est compact. □

Théorème 1.2.2. *Si E ou F est de dimension finie, alors $K(E,F) = L(E,F)$.*

Démonstration. Si E est de dimension finie, alors B_E sera compacte,d'ou $T(B_E)$ est compacte pour tout $T \in L(E, F)$ car T continu. On Suppose que F est de dimemsion finie, alors $T(B_E)$ est bornée donc relativement compacte (car F est de dimension finie). □

Remarque 3. *On a :*

— *Tout opérateur compact est borné, c'est-à-dire que l'on a l'inclusion* $K(E) \subset L(E)$.

— *Toute fonctionnelle linéaire* $f \in E'$ *est compacte (Il suffit de remarquer que dim*$(\mathbb{K}) = 1$*).*

Théorème 1.2.3. *L'ensemble des opérateurs compacts est :*

(a) un sous-espace vectoriel fermé de $L(E)$.

(b) un idéal bilatère de $L(E)$*, c'est-à-dire que si* $T \in K(E)$ *et* $S \in L(E)$*, alors* TB *et* BT *sont dans* $K(E)$.

Démonstration. (a) voir [21].

(b) Si T est compact, alors, pour tout borné $M \subset E$, $\overline{T(M)}$ est compact. Or, l'image d'un compact par une application continue est compacte, donc, $B(\overline{T(M)})$ est compact. Il résulte que $B \circ T(M) \subset B(\overline{T(M)})$ est relativement compacte. Si B est compact, alors, pour tout borné $M \subset E$, $T(M)$ est aussi borné et donc $B \circ T(M)$ est relativement compacte.

□

1.2.1 Opérateur de rang fini

Définition 1.2.1. *Soit* $T \in L(E, F)$*. On dit que* T *est un opérateur de rang fini si Im*(T) *est de dimension finie. Le rang de* T *est la dimension de son image.*

Exemple 1.2.1. *Soit* E *un espace de Hilbert séparable et soit* (e_n) *une base hilbertienne de* E*. Pour tout entier* n*, on désigne par* P_n *l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace engendré par* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$*.* P_n *est un opérateur de rang fini égal à* n.

Théorème 1.2.4. *Un opérateur borné* T *est de rang fini si, et seulement si, son adjoint* T^* *l'est aussi. Dans ce cas,* T *et* T^* *ont même rang.*

Démonstration. On suppose T de rang fini soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une base orthonormée de $\mathrm{Im}(T)$ et soit P l'opérateur de projection orthogonale sur l'image de T. On a $T = PT$ et donc $T^* = P^*T$ (car P est auto-adjoint). On en déduit que pour tout $x \in E$,

$$T^*x = T^*\left(\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle T^*e_i$$

L'image de T^* est donc engendrée par les vecteurs $(T^*e_i)_{i=1}^{n}$, et le rang de T^* est inférieur ou égal à celui de T. Comme $(T^*)^* = T$, on en déduit que T et son adjoint ont même rang. □

Proposition 1.2.1. *Tout opérateur borné de rang fini est compact.*

Démonstration. Soit $T \in L(E, F)$ un opérateur de rang fini. L'opérateur T est continu donc, pour tout $x \in B_E$: $\|T(x)\| \leq \|T\|$. Alors, $T(B_E)$ est borné dans F et, par conséquent, $\overline{T(B_E)}$ aussi. De plus, $\mathrm{Im}(T)$ est fermé car c'est un espace vectoriel de dimension finie, donc, $\overline{T(B_E)} \subset \overline{\mathrm{Im}(T)} = \mathrm{Im}(T)$. Enfin, $\overline{T(B_E)}$ est fermé borné de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{Im}(T)$, il est compact de $\mathrm{Im}(T)$. D'où il résulte que $T \in K(E, F)$. L'espace $K(E, F)$ est fermé et tout opérateur borné de rang fini est compact. □

Corollaire 1.2.1. *Tout limite dans $L(E, F)$ d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.*

Proposition 1.2.2. *Soit $T \in K(E, F)$. Alors, Im(T) est fermée si et seulement si T est de rang fini.*

Pour montrer cette proposition, on rappelle d'abord le théorème suivant :

Théorème 1.2.5. *(théorème de l'application ouverte)*
Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$ surjective. Alors, T est ouverte, i.e., T transforme tout ouvert de E en un ouvert de F.

Démonstration. de la Proposition (1.2.2) On suppose que $\mathrm{Im}(T)$ est fermée dans l'espace de Banach F alors, $\mathrm{Im}(T)$ est aussi un espace de Banach. L'opérateur T est continu et surjectif de l'espace de Banach E sur l'espace de Banach $\mathrm{Im}(T)$. Alors, T est ouverte (d'après le théorème de l'application ouverte). Comme la boule fermée B_E est un voisinage de 0 dans

E et T est ouverte, alors $T(B_E)$ est un voisinage de $T(0) = 0$ dans $\mathrm{Im}(T)$. D'où, il existe $r > 0$ tel que

$$B_{\mathrm{Im}(T)}(0, r) = \{y \in \mathrm{Im}(T).\|y\| < r\} \subset T(B_E) :$$

L'adhérence $\overline{B_{\mathrm{Im}(T)}(0, r)}^F$ de $B_{\mathrm{Im}(T)}(0, r)$ dans F est un fermé dans le compact $T(B_E)$,elle est donc un compact de F. De plus, on a

$$\overline{B_{\mathrm{Im}(T)}(0, r)}^F \subset \overline{T(B_E)}^F \subset \mathrm{Im}(T)^F = \mathrm{Im}(T);$$

donc $\overline{B_{\mathrm{Im}(T)}(0, r)}^F$ est un compact de $\mathrm{Im}(T)$. On en déduit que la boule unité de $\mathrm{Im}(T)$ est un compact de $\mathrm{Im}(T)$. D'où, $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie. □

1.2.2 Opérateur compact dans un espace de Hilbert

Théorème 1.2.6. *Soit H un espace de Hilbert et $T \in K(E, H)$. Alors, il existe une suite $(T_n)_n$ de $L(E, H)$ d'opérateurs de rang fini, qui converge vers T dans $L(E, H)$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Comme $\overline{T(B_E)}$ est compact de H, il existe $k_n \in \mathbb{N}$ et $y_1, \ldots, y_{k_n} \in H$ tels que

$$T(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B_H(y_i, \frac{1}{n+1}) \tag{1.1}$$

où $B_H(y, r) = \{x \in H : \|x - y\| < r\}$ et $F_n = \mathrm{vect}\{y_1, \ldots, y_{k_n}\}$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc un fermé de l'espace de Hilbert H, d'où $H = F_n \oplus F_n^{\perp}$.

Soit $P_n \in L(H)$ la projection orthogonale de H sur F_n. Alors, $T_n = P_nT \in L(E; H)$ est un opérateur de rang fini car

$$\dim(Im(T_n)) = \dim(Im(P_nT)) \leq \dim(F_n) \leq k_n.$$

D'autre part, pour tout $x \in B_E$, d'après (1.1) , il existe $i_0 \in \{1, \ldots, k_n\}$ tel que

$$\|T(x) - y_{i_0}\| < \frac{1}{n+1}$$

Soit y_{i_0} dans F_n et $P_nT(x)$ est la projection orthogonale de $T(x)$ sur F_n donc

$$\|T(x) - P_nT(x)\| = d(T(x), F_n) \leq \|T(x) - y_{i_0}\| < \frac{1}{n+1}$$

Il résulte que

$$\forall x \in B_E : \|T(x) - x\| < \frac{1}{n+1}$$

En revenant à la définition de la norme d'opérateurs, on trouve

$\|T - T_n\| < \frac{1}{n+1}$ □

Remarque 4. *Soit $T \in L(H)$. De ce qui précède, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur T est adhérent (en norme d'opérateur) à l'espace des opérateurs linéaires bornés de rang fini.*
2. *L'opérateur T est compact de H dans H.*

1.3 Quelque exemple

1.3.1 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Définition 1.3.1. *Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $(x_k)_k$ une base hilbertienne de H. Un opérateur linéaire $T : H \to H$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt (ou simplement HS) si*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Tx_k\|^2 < +\infty :$$

Le réel $\|T\|_{HS} = (\sum_{k=1}^{\infty} \|Tx_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$, est appelé la norme de Hilbert-Schmidt de T.

Exemple 1.3.1. *(Opérateurs à noyau)*

Soient $L^2(\Omega; \mathbb{C})$ (où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$) et $k(\cdot, \cdot) \in L^2(\Omega \times \Omega; \mathbb{C})$. Alors,L'opérateur

$f \mapsto Tf(x) = \int_\Omega k(x,t)f(t)\,dt$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Remarque 5. *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\Omega; \mathbb{C})$ se représente de manière unique à l'aide d'une fonction $k(\cdot, \cdot) \in L^2(\Omega \times \Omega; \mathbb{C})$.*

Théorème 1.3.1. *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.*

Théorème 1.3.2. *On considère un espace de Hilbert séparable H et un opérateur T. Soit (e_n) une base orthonormée de H. Alors, la suite (Te_n) tend vers 0.*

Démonstration. On suppose que (Te_n) ne tende pas vers 0. Sinon, pour un certain $\epsilon > 0$, on pourrait extraire de (e_n) une sous-suite $(e_{k(n)})$ telle que

$$\|Te_{k(n)}\| > \epsilon$$

pour tout n. Comme T est compact, on peut extraire de $(Te_{k(n)})$ une sous-suite (notée $(Te_{k(n)})$) convergente. Si on note x sa limite, on a

$$\|x\| \geq \epsilon.$$

Or, pour tout $y \in H$, on a

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle Te_{k(n)}, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle e_{k(n)}, T^* y\rangle = 0.$$

La dernière égalité découle du fait que pour tout vecteur $z \in H$, la série

$$\sum_n |\langle e_n, z\rangle|^2$$

converge alors, son terme général tend vers 0. En choisissant $y = x$, on obtient $x = 0$, ce qui est une contradiction. $\square$

1.3.2 Alternative de Fredholm

Définition 1.3.2. *Soit $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel (non supposé fermé). On appelle codimension de F la dimension de E/F. On note codim$F = \dim(E/F)$, où E/F est l'espace vectoriel quotient, qui est une notion algébrique. Lorsque F est fermé, on a la somme directe $E = F \oplus F^\perp$, donc E/F est isomorphe à $F^\perp$ et codim$F = \dim(F^\perp)$.*

Définition 1.3.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On dit que T est un opérateur de Fredholm, si les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- *a) l'image de T est fermée,*
- *b) le noyau de T est de dimension finie,*
- *c) l'image de T est de codimension finie.*

On note alors,

$$Ind(T) = \dim(\ker(T))$$

Exemple 1.3.2. *L'opérateur* $f \mapsto f''$ *est un opérateur de Fredholm de* $C^2([0,1];\mathbb{R})$ *dans* $C([0,1];\mathbb{R})$. *Il est clair qu'il est surjectif et son noyau est de dimension 2 (fonctions affines).*

Théorème 1.3.3. *(Théorème de Fredholm)*

Soient $T \in \mathcal{K}(E)$ *et* $B = Id_E - T$*.alors,* B *est un opérateur de Fredholm et*

$$Ind(B) = 0$$

Autrement dit ,si $T \in K(E)$ *alors,on a*

1. $\ker(Id_E - T)$ *est de dimension finie et* $Im(Id_E - T) = \ker(Id_E - T^*)^{\perp}$.
2. *l'opérateur* $Id_E - T$ *est injectif si et seulement s'il est surjectif.*
3. $\dim(\ker(Id_E - T)) = \dim(\ker(Id_E - T^*))$.

Démonstration. voir[22] □

Corollaire 1.3.1. *(Alternative de Fredholm) Soit* $T \in K(E)$ *et* $A \subset E$*, avec* $0 \notin A$*. On considère l'équation de Fredholm : pour* $y \in E$*, trouver* $x \in E$ *tel que*

$$Ax - Tx = y. \tag{1.2}$$

Alors, on distingue deux cas :

1. *Soit, pour tout* $y \in E$*, il existe une solution unique* x *de l'équation* (1.2).
2. *Soit, l'équation homogène* $Ax - Tx = 0$ *admet une solution non triviale* $x \neq 0$*. Dans le deuxième cas, l'équation* (1.2) *admet une solution (non unique) si et seulement si* $y \in Im(AI_{dE} - T)$.

1.4 Opérateurs compacts auto-adjoints

1.4.1 Décomposition spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints

On commence par rappeler le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints en dimension finie.

Théorème 1.4.1. *Soit $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint. Si H est de dimension finie n, alors :*

1. *Les sous-espaces propres* $\ker(\lambda I_{dH} - T)$.
2. *T est diagonalisable dans une base orthonormée et $H = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} \ker(\lambda I_{dH} - T)$.*
3. *T admet la décomposition spectrale suivante :*

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda P_\lambda$$

où P_λ est la projection orthogonale de H sur $\ker(\lambda I_{dH} - T)$. *Dans ce lemme, nous caractérisons la norme d'un opérateur auto-adjoint compact.*

Lemme 1.4.1. *Soit $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors,*

$$\|T\| = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_p(T)\}$$

Démonstration. La condition $H \neq \{0\}$ est nécessaire pour assurer l'existence d'une valeur propre. Soit $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors, il existe $y \in H$ tel que $\|y\| = 1$ et $Ty = \lambda y$. D'où,

$$|\lambda| = |\langle \lambda y, y\rangle| = |\langle Ty, y\rangle| \leq \|Ty\|\|y\| \leq \|T\|\|y\|^2 = \|T\|$$

De plus, comme l'opérateur T est auto-adjoint, d'après le théorème, il existe $\lambda_0 \in \sigma(T)$ telle que $|\lambda_0| = \|T\|$. Si $\lambda_0 = 0$, alors, $T = 0$, d'où $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ (car H est non réduit à $\{0\}$). Si $\lambda \neq 0$, comme T est compact, on a

$$\lambda_0 \in \sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$$

D'où, $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$. On en déduit

$$\|T\| = |\lambda_0| \leq \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_p(T)\} \leq \|T\|$$

□

Théorème 1.4.2. *(Décomposition spectrale) Soit $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Si H est séparable, alors, il admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T. Autrement dit, T est diagonalisable dans une base hilbertienne.*

Démonstration. Comme T est compact, alors, son spectre est constitué de 0 et d'une suite finie ou non de valeurs propres non nulles. Comme T est auto-adjoint, ses valeurs propres sont réelles. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres distinctes de T ($\lambda_0 = 0$). On pose $F_n = \ker(\lambda_n I_{dH} - T)$ et $F_0 = \ker(T)$. D'après le théorème de Fredholm, les espaces F_n sont de dimension finie pour tout $n \geq 1$. De plus, les sous-espaces F_n sont deux à deux orthogonaux. Soit F l'espace vectoriel engendré par les $(F_n)_{n\geq 0}$. On va montrer que F est dense dans H. On remarque d'abord que $T(F) \subseteq F$ de sorte que $T(F^\perp) \subseteq F^\perp$. En effet, pour tout $x \in F^\perp$ et tout $y \in F$, on a $\langle Tx, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = 0$. Soit B la restriction de T à $F^\perp$. D'après ce qui précède, B est un opérateur de $F^\perp$ dans $F^\perp$. L'opérateur $B = T_{|F^\perp}$ est auto-adjoint compact et $\sigma(B) = \{0\}$.En effet, si $\sigma(B) \setminus \{0\}$ est constitué des valeurs propres de B, qui seraient alors aussi des valeurs propres de T. Les vecteurs propres associés appartiendraient donc à F et à $F^\perp$, ce qui est absurde. D'après le corollaire..., $B = 0$ et on a

$$F^\perp \subseteq \ker(T) \subseteq F$$

ce qui entraîne que $F^\perp = \{0\}$. Autrement dit, F est dense dans H. Il reste à la fin de choisir dans chaque F_n une base hilbertienne. La réunion de ces bases est une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T.

Ainsi, le résultat obtenu en dimension finie se généralise en dimension infinie comme suit. □

Théorème 1.4.3 (Théorème 2.4.3)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors on a :*

$$T = \sum_{\lambda\in\sigma_p(T)} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}} \lambda P_\lambda$$

où P_λ est la projection orthogonale de H sur $\ker(\lambda I_{dH} - T)$.

Chapitre 2

Relations linéaires entre espaces de Banach

2.1 Opérateurs Linéaires et Relations Linéaires

La plupart des préliminaires dans cette section se trouvent dans Cross [16].

Définition 2.1.1. *Soient X, Y des ensembles non-vides. Une **relation** T de X dans Y est une application définie sur un sous-ensemble non-vide $\mathcal{D}(T)$ de X, appelé le **domaine** de T, qui prend des valeurs dans $\mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$. Nous notons la classe des relations de X dans Y par $R(X, Y)$.*

Définition 2.1.2. *(**Graphe**) Pour $T \in R(X, Y)$ nous définissons formellement son **graphe** $G(T)$, un sous-ensemble de $X \times Y$, comme suit :*

$$G(T) := \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in \mathcal{D}(T), y \in T(x)\}.$$

Remarque 6. *Si T envoie les points de son domaine à des singletons, alors T est dite une relation univoque ou une **fonction**.*

Définition 2.1.3. *(**Rang**) Le **rang** $R(T)$ de T est défini par*

$$R(T) := \bigcup_{x \in \mathcal{D}(T)} T(x).$$

Remarque 7. *Si $R(T) = Y$, alors nous disons que T est* ***surjectif****, et si $A \subset X$, alors l'image de A sous T est*

$$T(A) := \bigcup_{a \in A \cap \mathcal{D}(T)} Ta.$$

Définition 2.1.4. *(**L'inverse**) L'**inverse** de la relation T^{-1} est donné par le graphe*

$$G(T^{-1}) := \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in G(T)\}.$$

Proposition 2.1.1. *Une relation est dite* ***injective*** *si T^{-1} est univoque.*

Définition 2.1.5. *(**L'image inverse**) Si $B \subset Y$, alors l'**image inverse** de B sous T est définie comme l'ensemble*

$$T^{-1}(B) := \{x \in \mathcal{D}(T) \mid Tx \cap B \neq \emptyset\}.$$

Définition 2.1.6. *(**Noyau**) Le **noyau** de T est défini comme l'ensemble*

$$T^{-1}(B) := \{x \in \mathcal{D}(T) \mid T(x) \subset B\}.$$

Définition 2.1.7. *(**Composition**) Soient $S, T \in \mathcal{R}(X,Z)$. La **composition** ou **produit** ST de T et S est définie par*

$$ST(x) := S(Tx), \quad \forall x \in X.$$

Définition 2.1.8. *(**Restriction**) Si $A \subset X$, alors la **restriction** de T à A, notée $T|_A$, est définie par*

$$G(T|_A) := \{(x,y) \in G(T) \mid x \in A\}.$$

Définition 2.1.9. *(**Extension**) Supposons $S \in \mathcal{R}(X,Y)$. Alors S est dite une **extension** de T si*

$$S|_{\mathcal{D}(T)} = T.$$

Notation 1. *On désigne par $LR(X,Y)$ l'ensemble des relations linéaires de X dans Y. Si $X = Y$ on note $LR(X,X) = LR(X)$.*

Proposition 2.1.2. *Soit $T \in R(X,Y)$. Alors*

(a) $T^{-1}(y) = \{x \in \mathcal{D}(T) \mid y \in Tx\}$ *pour* $y \in R(T)$, *et donc,* $\mathcal{D}(T^{-1}) = R(T)$ *et* $R(T^{-1}) = \mathcal{D}(T)$.

(b) *Si* T *est injective alors* $Tx_1 = Tx_2$ *implique* $x_1 = x_2$ *pour* $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$.

(c) *Si* T *est univoque, alors* $T^{-1}(B) = T^{+1}(B)$ *pour* $B \subset Y$.

(d) *Pour* $B \in \mathcal{R}(Y,Z)$, *le domaine et le graphe de* ST *sont donnés par*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(ST) &= \{x \in X \mid STx \neq \emptyset\} \\
&= \{x \in X \mid Tx \cap \mathcal{D}(S) \neq \emptyset\} \\
&= T^{-1}(\mathcal{D}(S)), \\
G(ST) &= \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x,y) \in G(S)\}.
\end{aligned}$$

(e) *Pour les sous-ensembles non vides* A_1 *et* A_2 *de* X *on a*

$$\begin{aligned}
T(A_1 \cup A_2) &= T(A_1) \cup T(A_2), \\
T(A_1 \cap A_2) &= T(A_1) \cap T(A_2), \\
T(X \setminus A_1) &\supset R(T) \setminus T(A_1), \quad \text{et} \\
A_1 \subset A_2 &\Rightarrow T(A_1) \subset T(A_2).
\end{aligned}$$

Définition 2.1.10. *Soient* X *et* Y *des espaces vectoriels sur un corps* $\mathbb{K}$, *et soient* $x_1, x_2 \in X$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$. *L'***opérateur linéaire** $T : X \to Y$ *est une application linéaire de* X *dans* Y *telle que*

$$\begin{aligned}
T(x_1 + x_2) &= T(x_1) + T(x_2), \\
T(\alpha x_1) &= \alpha T(x_1).
\end{aligned}$$

Nous désignons la classe des opérateurs linéaires de l'espace X *dans* Y *par* $L(X,Y)$. *Un* ***opérateur linéaire multivoque*** *ou* ***relation linéaire*** $T : X \to Y$ *est une relation dont le graphe est un sous-espace vectoriel de* $X \times Y$. *La classe des relations linéaires de* X *dans* Y *est notée par* $LR(X,Y)$.

Remarque 8. T *est une relation linéaire si et seulement si* T^{-1} *est une relation linéaire.*

Proposition 2.1.3. *Soit $T \in R(X,Y)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est une relation linéaire.*

(ii) *Pour $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ et chaque scalaire non-nul $\alpha \in \mathbb{K}$ on a*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} T(x_1) + T(x_2) & = & T(x_1 + x_2), \\ \alpha T(x_1) & = & T(\alpha x_1). \end{array} \right.$$

Corollaire 2.1.1. *Soit $T \in R(X,Y)$. Alors T est une relation linéaire si et seulement si*

$$\alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

pour tous $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$.

Proposition 2.1.4. *Soit $T \in R(X,Y)$ on a l'équivalence entre les assertions suivantes :*

(i) *T est une relation linéaire.*

(ii) *$G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $X \times Y$.*

(iii) *T^{-1} est une relation linéaire.*

(iv) *$G(T^{-1})$ est un sous-espace vectoriel de $Y \times X$.*

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ On a $(0,0) \in G(T)$ car on a $\mathcal{D}(T)$ est un sous espace vectoriel donc $0 \in \mathcal{D}(T)$ et pour tout $x, y \in \mathcal{D}(T)$ on a $0 \in 0Tx + 0Ty \subset T(0x + 0y) = T(0)$. Soient maintenant $(x,y) \in G(T), (a,b) \in G(T), \alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$(x,y) + \alpha(a,b) = (x + \alpha a, y + \alpha b).$$

D'une part, on a $x + \alpha a \in \mathcal{D}(T)$ (car $x, a \in \mathcal{D}(T)$). D'autre part, si $\alpha \neq 0$ on a

$$T(x + \alpha a) = Tx + \alpha Ta.$$

Or $y \in Tx$ et $b \in Ta$, donc

$$y + \alpha b \in Tx + \alpha Ta = T(x + \alpha a)$$

et par suite $(x + \alpha a, y + \alpha b) \in G(T)$. Si $\alpha = 0$ évident.

$(ii) \Rightarrow (i)$ En première partie on montre que $\mathcal{D}(T)$ est un sous espace vectoriel. Soit

$$\begin{array}{rcl} P : X \times Y & \longrightarrow & X \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$$

on a $\mathcal{D}(T) = P(G(T))$ avec $G(T)$ est un sous espace vectoriel et P linéaire. Donc $\mathcal{D}(T)$ est un sous espace vectoriel. En deuxième partie soit $x, y \in \mathcal{D}(T)$, montrons que

$$T(x+y) = Tx + Ty.$$

Soit $z \in T(x+y)$, alors $(x+y, z) \in G(T)$ et on a $x, y \in \mathcal{D}(T)$ donc $Tx \neq \emptyset$ et $Ty \neq \emptyset$. Soient $a \in Tx, b \in Ty$, donc $(x+y, a+b) \in G(T)$ et on a $(x+y, z) \in G(T)$, d'où $(0, z-a-b) \in G(T)$. Donc $z - a - b \in T(0)$ et par suite $z \in a + b + T(0)$. D'où $z \in Tx + Ty + T(0)$ et on a $Ty + T(0) = Ty$ (car $(0,0) \in G(T)$) donc $0 \in T(0)$ et $Ty \subset Ty + T(0)$, soit $z \in Ty + T(0)$ donc

$$z = a + b,\ \ a \in Ty,\ \ b \in T(0) \text{ et } (y, a),\ \ (0, b) \in G(T)$$

et par suite $(y, a+b) \in G(T)$, donc $(y, z) \in G(T)$ et $z \in Ty$). Inversement soit $z \in Tx + Ty$, donc

$$z = a + b, a \in Tx, b \in Ty$$

et par suite $(x, a), (y, b) \in G(T)$. Alors,

$$(x+y, a+b) \in G(T) \text{ et } (x+y, z) \in G(T),$$

donc $z \in T(x+y)$. Finalement soit $x \in \mathcal{D}(T), \alpha \in \mathbb{K}$ montrons que $T(\alpha x) = \alpha Tx$. On a

$$\begin{aligned}
z \in T(\alpha x) &\iff (\alpha x, z) \in G(T) \\
&\iff \alpha\left(x, \left(\frac{1}{\alpha}\right) z\right) \in G(T) \\
&\iff \left(x, \left(\frac{1}{\alpha}\right) z\right) \in G(T) \\
&\iff \left(\frac{1}{\alpha}\right) z \in Tx \\
&\iff z \in \alpha Tx,
\end{aligned}$$

donc T est linéaire.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ il suffit d'appliquer $(i) \Rightarrow (ii)$ à T^{-1}.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ par symétrie. $\square$

Corollaire 2.1.2. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors $T(0)$ et $T^{-1}(0)$ sont des sous-espaces vectoriels de Y et X, respectivement.*

Corollaire 2.1.3. *Soit $T \in LR(X,Y)$ et soit M un sous-espace vectoriel de X. Alors $T|_M \in LR(X,Y)$.*

Définition 2.1.11. *Le sous-espace $T^{-1}(0)$ est appelée l'**espace nul** ou **Noyau** de T et est noté $N(T)$.*

Proposition 2.1.5. *Soit $T \in LR(X,Y)$,*

(a) *Soit $x \in \mathcal{D}(T)$. On a l'équivalence suivante :*

$$y \in Tx \Leftrightarrow Tx = y + T(0).$$

En particulier,

$$0 \in Tx \Leftrightarrow Tx = T(0).$$

(b) *Pour $x_1, x_2 \in D(T)$ on a l'équivalence suivante :*

$$Tx_1 \cap Tx_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow Tx_1 = Tx_2.$$

Corollaire 2.1.4. *Soit $T \in LR(X,Y)$, on a*

(a) $TT^{-1}(0) = T(0)$.

(b) $T^{-1}T(0) = T^{-1}(0)$.

Démonstration. On a T relation linéaire. Alors $T(0)$ et $T^{-1}(0)$ sont des sous-espaces vectoriels, donc $0 \in TT^{-1}(0)$. D'où $T(0) = TT^{-1}(0)$. Substituant T^{-1} par T nous donne la deuxième égalité. □

Corollaire 2.1.5. *Soit $T \in LR(X,Y)$, on a*

(a) *Si $y \in R(T)$, alors $TT^{-1}y = y + T(0)$.*

(b) *Si $x \in D(T)$, alors $TT^{-1}x = x + T^{-1}(0)$.*

Corollaire 2.1.6. *Supposons $T, S \in LR(X,Y)$ et $G(S) \subset G(T)$. Alors T est une extension de S si et seulement si $S(0) = T(0)$.*

Proposition 2.1.6. *Soient $\alpha \in \mathbb{K}^*$, et $A, B \subset X$, $C \subset Y$, soit $T \in LR(X,Y)$, alors*

(a) $T(\alpha A) = \alpha T(A)$.

(b) $T(A) + T(B) \subset T(A+B)$.

(c) *Si $A \subset D(T)$ ou $B \subset D(T)$, alors $T(A+B) = T(A) + T(B)$.*

(d) *Si $A \subset D(T)$ ou $B \subset D(T)$ et $A \cap B = \{0\}$,*
alors $T(A+B) = T(A) + T(B)$ et $T(A) \cap T(B) = T(0)$.

(e) $TT^{-1}C = C \cap R(T) + T(0)$.

(f) $T^{-1}T(A) = A \cap D(T) + T^{-1}(0)$.

(g) $T^{-1}(0) \times \{0\} = G(T) \cap (X \times \{0\})$.

(h) $\{0\} \times T(0) = G(T) \cap (\{0\} \times Y)$.

(i) $X \times R(T) = G(T) + (X \times \{0\})$.

(j) $D(T) \times Y = G(T) + (\{0\} \times Y)$

L'égalité ne tient pas nécessairement dans (b) - on peut considérer le cas $A = \{a\}, B = \{b\}$ telle que $a + b \in D(T)$ alors que $a \notin D(T)$ et $b \notin D(T)$.

Démonstration. Soit $T \in LR(X,Y)$,

(a)

$$\begin{aligned} T(\alpha a) &= \cup\{(T(\alpha A)) : a \in A \cap D(T)\} \\ &= \cup\{\alpha(Ta) : a \in A \cap D(T)\} \\ &= \alpha \cup \{Ta : a \in A \cap D(T)\} \\ &= \alpha T(a). \end{aligned}$$

(c) Soit $a \in A$, $b \in B \subset \mathcal{D}(T)$. Si $a + b \notin \mathcal{D}(T)$, alors $\emptyset = T(a+b) \subset Ta + Tb$ trivialement. On d'autre parte si $a + b \in \mathcal{D}(T)$, alors $a \in \mathcal{D}(T)$ et $T(a+b) = Ta + Tb \subset TA + TB$.

(d) Immédiate.

(e), (f) suivre immédiatement dans le Corollaire (2.1.5).

(j), (g) sont des conséquences simples de la définition.

□

2.2 Relations Semi-Continues, Continuité et la Norme des Relations Linéaires

Dans cette section, X et Y désignent des espaces normées.

Définition 2.2.1. *Soit $\epsilon > 0$, et $M \subset X$. Alors les ensembles $B(M,\epsilon), B_X, U(M,\epsilon), U_X$ et S_X sont définis par :*

$$\begin{aligned} B(M,\epsilon) &:= \{x \in X \mid d(x,M) \leq \epsilon\}, \\ B_X &:= \{x \in X \mid d(x,0) \leq 1\}, \\ U(M,\epsilon) &:= \{x \in X \mid d(x,M) < \epsilon\}, \\ U_X &:= \{x \in X \mid d(x,0) < 1\}, \\ S_X &:= \{x \in X \mid d(x,0) = 1\}. \end{aligned}$$

Définition 2.2.2. *Un sous-ensemble U de X est un ensemble au* ***voisinage*** *de point $x \in X$ si U contient un ensemble ouvert contenant x.*

Définition 2.2.3. *Une relation $T \in R(X,Y)$ est dite* ***supérieur semi-continue (s.s.c)*** *au point $x \in \mathcal{D}(T)$ si pour tout voisinage U de $T(x)$ il existe $\epsilon > 0$ telle que pour tout $z \in B(x,\epsilon)$ on a $T(z) \subset U$. T est dite un* ***supérieur semi-continue*** *si il est supérieur semi-continue à chaque x dans son domaine $\mathcal{D}(T)$.*

Il résulte de la Définition précédente que T est s.s.c à $x \in \mathcal{D}(T)$ si et seulement si le noyau de tout ensemble ouvert est ouverte.

Définition 2.2.4. *Une relation $T \in R(X,Y)$ est dite un* ***inférieur semi-continue (i.s.c)*** *au point $x \in D(T)$ si pour tout $y \in T(x)$ et pour tout suite $x_n \subset D(T)$ telle que $x_n \to x$ il existe $y_n \in T(x_n)$ telle que $y_n \to y$. T est dite un* ***inférieur semi-continue*** *si il est inférieur semi-continue à chaque x dans son domaine $\mathcal{D}(T)$.*

Il résulte que T est i.s.c à $x \in \mathcal{D}(T)$ si et seulement si l'image inverse de tout ensemble ouvert qui intersecte $T(x)$ est un voisinage de x. Ainsi T est i.s.c si et seulement si l'image inverse de tout ensemble ouvert est ouverte.

Remarque 9. *Les Définitions de la semi-continuité supérieure et inférieure sont équivalentes pour les applications univoques. De plus, il est bien connu que la continuité d'un (univoque) opérateur linéaire peut caractériser en terme de l'opérateur normé.*

Définition 2.2.5. *Soient X et Y des espaces normés, et $T \in L(X, Y)$. La **norme** de T est définie comme suit :*

$$\|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Théorème 2.2.1. *Soit $T \in L(X, Y)$. Alors les éléments suivants sont équivalents :*

(i) *T est continue au point,*

(ii) *T est uniformément continu sur son domaine,*

(iii) *Il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que $\|Tx\| \leq M \|x\|$ pour tout x dans la domaine de T,*

(iv) *$\|T\| < \infty$.*

Remarque 10. *La Définition de la quantité d'opérateur normé peut être étendue aux relations linéaires. En outre, il peut montrer que la propriété de inférieur semi-continuité d'opérateurs multivoques est équivalente à la propriété d'une norme finie .*
Pour cette raison nous choisissons la notion de semi-continuité inférieur pour servir à la définition de la continuité d'un opérateur linéaire multivoques. Nous fournissons des Définitions dans le chapitre suivant. Le terme "est continue" aussi plus pratique à utiliser fréquemment, l'expression plus précise semi-continuité inférieur. Notez que dans la littérature de l'analyse convexe, l'application est dite continue si et seulement si elle est à la fois semi-continue supérieure et inférieure .

Notation 2. *Soit $B(X, Y)$ désigne la classe d'opérateurs linéaires continues au univoque de l'espace normé X dans Y et $B(X)$ indique cette classe pour le cas $X = Y$.*

Définition 2.2.6. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Si T et l'application inverse T^{-1} sont univoque, continues et partout définie, puis T est dit un **isomorphisme**. T est dite un **isométrie** si $\|Tx\| = \|x\|$.*

Théorème 2.2.2. *Soit $T \in L(X, Y)$. Alors T^{-1} est continue et univoque si et seulement si il existe $m > 0$ telle que*

$$\|Tx\| \geq m \|x\|, x \in D(T).$$

2.3 Quelques notions d' Espaces Vectoriels

Dans Cette section nous allons introduire les propriétés qui sont utilisées dans la suite de ce memoire.

Définition 2.3.1. *Deux espaces normés sont dite isomorphes (isométrique) s'il existe un isomorphisme (isométrie) qui applique un espace sur l'autre.*
Un espace normé peut être classé en termes de isomorphismes et isométries de l'espace dans lui-même, ou de son sous-ensemble, dans un sous-ensemble des espaces classique. Caractérisation des propriétés d'espace normés peuvent être topologiques, par exemple , faible compacité de la boule unitaire, ou giométrique. Les espaces sont également étudiés via leurs propriétés locales, i.e. construite à partir de sous-espaces de dimension fini. Plus généralement nous avons les identifications suivantes.

Théorème 2.3.1. *Si K et H sont des espaces métriques compacts, alors K est homémorphe à H si et seulement si $C(K)$ est isométrie à $C(H)$.*

Théorème 2.3.2. *Si K et H sont des espaces métriques compacts non dénombrables, alors $C(K)$ est isomorphe à $C(H)$.*

Le Théorème (2.3.1) au départ, a été prolongé par M.H.Stone aux espaces de Hausdorff compacts. Cependant, $C(K)$ peut être isomorphe à $C(H)$ sans K est un espace métrique compact non dénombrable, il suffit de considérer $K = [0, 1]$. D'autre part que K varie sur des espaces métriques compacts dénombrables, il existe un nombre non dénombrable de classes pour $C(K)$.

Théorème 2.3.3. *Si X est un espace normé de dimension n sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$), alors X est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ (respectivement, $\mathbb{C}^n$).*

Lemme 2.3.1. *Si X est isomorphe à un espace de Banach, alors X est aussi un espace de Banach.*

Corollaire 2.3.1. *Si X est un espace normé de dimension fini, alors X est complet.*

Corollaire 2.3.2. *Si B est un ensemble fermé borné dans un espace normé de dimension finie X, alors B est compact.*

L'inverse est aussi vrai, i.e. la propriété de la boule unité donnée dans le Corollaire (2.3.2) caractérise les espaces vectoriels de dimension finie. Le lemme de Riesz est généralement utilisé pour prouver cela.

Théorème 2.3.4. ***(Lemme de Riesz)*** *Soit M un sous-ensemble de l'espace normé X, telle que M n'est pas dense . Alors il existe une suite $\{x_n\} \subset S_X$ telle que $d(x_n, M) \to 1$.*

Théorème 2.3.5. *Si X est un espace normé telle que B_X est totalement borné, alors X est de dimension finie.*

2.4 Quotients, Sous-Espaces et Projections

Définition 2.4.1. *Soit M un sous-espace vectoriel de X, dénote par $[x]$ l'ensemble de tous les éléments équivalente à x sous la relation d'équivalente*

$$yRx \Leftrightarrow y - x \in M.$$

L'espace quotient X/M est défini par :

$$X/M := \{[x] \, | x \in X\}.$$

Si M est le sous espace fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$, alors X/M est un espace normé de norme $\|.\|$ défini par :

$$\|[x]\| := d(x, M) = \inf_{m \in M} \|x - m\|.$$

Remarque 11. *Le fait que la norme sur X/M est bien définie résulte du fait que si yRx alors*

$$\begin{aligned}
\|[y]\| &= \inf_{m\in M} \|y - m\| \\
&= \inf_{m\in M} \|x - ((y - x) + m)\| \\
&= \inf_{m\in M} \|x - m\| \\
&= \|[x]\|.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\|[x]\| = \inf_{y \in [x]} \|y\|.$$

Définition 2.4.2. *L'opérateur* $Q_M^X : X \to X/M$ *Défini par* $Q_M^X x = [x]$ *est appelé l'application quotient naturel avec domaine* X *et espace nul* M *.*

Théorème 2.4.1. *Soit* X *un espace de Banach. Si* M *est un sous-espace fermé de* X *alors* X/M *est l'espace de Banach .*

Proposition 2.4.1. *Soit* M *est un sous-espace fermé de* X*, et soit* $N \subset X$ *est un sous-espace telle que* $M \subset N$*. Alors* N *est fermé si et seulement si* N/M *est fermé dans* X/M*.*

Démonstration. Supposons que N/M est fermé, et $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset N$ et une suite convergent vers $x \in X$, alors $\{[x_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \subset N/M$, et

$$\begin{aligned} & \lim_{n\in\mathbb{N}} \inf\nolimits_{m\in M} \|(x_n - x) - m\| = 0 \\ \Rightarrow\ & \lim_{n\in\mathbb{N}} \|[x_n - x]\| = 0 \\ \Rightarrow\ & \lim_{n\in\mathbb{N}} \|[x_n] - [x]\| = 0 \end{aligned}$$

Puisque N/M est fermé, $[x] \in N/M$ et $\exists y \in N$ telle que $[y] = [x]$. Puisque $y - x \in M$ il suit que $x \in N$.

L'implication inverse esr similaire. □

Proposition 2.4.2. *Soit* $T \in LR(X, Y)$*, et soit* $M \subset X$*. Alors*

$$\dim R(T)/T(M) \leq \dim D(T)/D(T) \cap M \leq X/M.$$

En particulier, si M *est codimensionnel fini de* $R(T)$ *.*

Démonstration. Voir Cross [16] □

Définition 2.4.3. *Soit* X *un espace vectoriel, et soit* $M \subset X$*. Alors, nous définissons ce que l'on appelle parfois annilateur* $M^{\perp}$ *de* M *par :*

$$M^{\perp} := \{x' \in X' \quad | \quad x'x = 0 \forall \quad x \in M\}$$

De même, si $N \in X'$ *alors* $N^{\top}$ *est définie par :*

$$N^{\top} := \{x \in X \quad | \quad x'x = 0 \quad \forall x' \in N\}$$

Remarque 12. *$M^{\perp}$ et $N^{\top}$ sont des sous-espaces fermés de X' et X respectivement. De plus, $M^{\perp\top} = \overline{M}$, et $N^{\top\perp}$ est la fermeture $*$-faible de N.*

Proposition 2.4.3. *Soit M un sous-espace d'un espace normé X. Alors*

(a) *$X'/M^{\perp}$ est isomorphe isométriquement à M' sous l'application U définie par :*

$$U\left[x'\right] := x'_M$$

où $[x'] \in X/M'$ et x'_M est la restriction de x' à M.

(b) *Si M est fermé , alors $(X/M)'$ est isomorphe isométriquement à $M^{\perp}$ sous l'application V définie par :*

$$\left(Vz'\right) x := z'\left[x\right],$$

où $z' \in (X/M)'$.

Définition 2.4.4. *Soit M est un sous-espace d'un espace vectoriel X, alors un (univoque)* ***projection linéaire*** *de X sur M est un (univoque) opérateur linéaire qui satisfait à la condition $P^2 = P$.*
Si M et N sont des sous-ensemble d'un espace vectoriel X, alors la somme $M + N$ disigne l'ensemble

$$\{m + n \mid m \in M \text{ et } n \in N\}.$$

Si M et N sont des sous-espaces vectoriels de X qui satisfait $X = M + N$ et $M \cap N = \{0\}$, alors N est appelé un ***complément*** *de M. Si en autre, il y a une projection linéaire continue de X sur M, alors N est appelé* ***complément topologique*** *de M. Dans ce cas nous écrivons $X = M \oplus N$.*

Proposition 2.4.4. *Soient M et N sont des sous-espaces linéaires de X. Si N est un complément de M, alors N est isomorphe à l'espace quotient X/M.*

Théorème 2.4.2. *Soit M sous-espace fermé de l'espace de Banach X. Il y a une projection linéaire continue de X sur M si et seulement si il existe un sous-espace fermé N telle que $X = M + N$ et $M \cap N = \{0\}$.*

Théorème 2.4.3. *Si M un sous-espace de dimension finie de l'espace linéaire normé, alors M est complété topologiquement.*

Définition 2.4.5. *Un sous-espace fermé M d'un espace de Banach X est dit quasi-complétions s'il existe un sous-espace fermé N telle que $M \cap N = \{0\}$ et $M + N$ est dense dans X.*

Théorème 2.4.4. *Chaque sous-espace fermé d'un espace de Banach séparable ou réflexif est quasi-complété.*

2.5 Continuité et Fonction de Norme pour les Relations Linéaires

Notation 3. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Nous soient Q_T, ou simplement Q, lorsque T quand est-il compris, dénoter l'application du quotient naturelle, $Q^Y_{\overline{T(0)}}$ de Y sur $Y/\overline{T(0)}$.*

L'approche de la factorisation des partie à valeurs d'ensemble $T(0)$ d'une relation linéaire T, en utilisant une application de quotient associée, est au cœur de nombreuses preuves des la théorie de relations linéaire. En particulier, dans cette section, l'application de quotient est utilisée pour étendre la définition de norme des l'opérateur aux relations linéaires. Quelques propriétés élémentaire sont passées en revue, nous fournissons une caractérisation géométrique de la norme et montrons que la continuité d'une relation linéaire équivalent à la finitude de sa norme.

Proposition 2.5.1. *QT est une univoque*

Démonstration. Soit $x \in D(T)$, et soient $y_1, y_2 \in QTx$. Alors $y_1 - y_2 \in QTx - QTx = QT(0) \subset Q\overline{T(0)} = 0$. □

Proposition 2.5.2. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors*

$$N(T) \subset N(QT)$$

avec égalité si $T(0)$ est relativement fermé dans $R(T)$.

Démonstration. Nous appliquons Proposition (2.1.5) :

$$\begin{aligned} N(T) = \{x \in X | Tx = T(0)\} &\subset \{x \in X | Tx \subset \overline{T(0)}\} \\ &= \{x \in X | QTx = 0\} = N(QT). \end{aligned}$$

Si $T(0)$ est relativement fermé dans $R(T)$, alors l'égalité tient.

L'exemple suivant montre que l'égalité ne tient généralement pas dans la proposition (2.5.2).

□

Proposition 2.5.3. *Soit $T \in LR(X,Y)$. Si $R(T)$ est fermé, alors $R(QT)$ est fermé. Inversement, si $R(QT)$ est fermé et $\overline{T(0)} \subset R(T)$, alors $R(QT)$ est fermé.*

Démonstration. C'est une juste un cas particulier de la proposition (2.4.1). □

Définition 2.5.1. *Soit $T \in LR(X,Y)$. Alors T est dit* ***continu en un point*** *$x \in D(T)$ si l'image inverse de tout voisinages des Tx est un voisinage de x. T est dit continu s'il est* ***continus*** *en tout point de son domaine.*

Pour $x \in D(T)$ nous définition $\|Tx\|$ par

$$\|Tx\| := \|QTx\|$$

et la quantité $\|T\|$, qui est appelée la ***norme*** *de T, est définie par*

$$\|T\| := \|QT\|.$$

On note que $\|T\|$ n'est pas une vraie fonction "norme" puisque $\|T\| = 0$ n'implique pas $T = 0$.

Proposition 2.5.4. *Soit $T \in LR(X,Y)$.*

(a) *Pour $x \in D(T)$*

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= d(y, T(0)) \quad \text{pour tout } y \in Tx \\ &= \inf_{y \in Tx} \|y\| \\ &= d(y + T(0), 0) \quad \text{pour tout } y \in Tx \\ &= d(Tx, 0) = d(Tx, T(0)) \end{aligned}$$

(b) $\|T\| = \sup_{x \in B_{D(T)}} \|Tx\|$

Démonstration. **(a)** La première égalité découle de la définition de $\|Tx\|$ et Proposition (2.1.5) et la deuxième égalité découle de la définition et des propriétés de la norme sur $X/\overline{T(0)}$. Le reste est évident.

(b) Nous avons $\|T\| = \|QT\| = \sup_{x\in B_{D(T)}} \|QTx\| = \sup_{x\in B_{D(T)}} \|Tx\|$.

Nous avons $\|T\| < \infty$ si et seulement si T est continue. Mais d'abord, nous illustrons l'extension de certains résultats bien connus sur la norme de la somme et les multiples scalaires des opérateurs linéaires. □

Proposition 2.5.5. *On a*

(a) *Pour $S, T \in LR(X, Y)$ et $x \in D(S+T)$ on a*

$$\|Sx + Tx\| \leq \|Sx\| + \|Tx\|.$$

Si de plus $S(0) \in \overline{T(0)}$ alors

$$\|Tx\| - \|Sx\| \leq \|Tx - Sx\|.$$

(b) *Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in D(T)$ on a*

$$\|\alpha Tx\| = |\alpha|\|Tx\|.$$

Démonstration. **(a)** Soit $s \in Sx$ et $t \in Tx$. Alors $s + t \in Sx + Tx = (S+T)x$. Donc :

$$\begin{aligned} \|Sx + Tx\| &= d(s+t, (S+T)(0)) \\ &\leq d(s, S(0) + T(0)) + d(t, S(0) + T(0)) \\ &\leq d(s, S(0)) + d(t, T(0)) \\ &= \|Sx\| + \|Tx\|. \end{aligned}$$

Si $S(0) \in \overline{T(0)}$, alors par ce que nous venons de montrer,

$$\|Tx\| = \|Tx + Sx - Sx\| \leq \|Tx - Sx\| + \|Sx\|$$

.

(b) On a $\|\alpha Tx\| = \|Q(\alpha T)(x)\| = \|\alpha QTx\| = |\alpha|\|QTx\| = |\alpha|\|Tx\|$.

L'exemple suivant montre qu'il n'est pas vrai en général que $\|Tx\| - \|Sx\| \leq \|Tx - Sx\|$ pour les relations linéaires. □

Proposition 2.5.6. *Soient $S, T \in LR(X, Y)$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors*

(a) $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

(b) *Si $S(0) \in \overline{T(0)}$ alors $\|T\| - \|S\| \leq \|T - S\|$.*

(c) $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$.

Démonstration. **(a)** On appliquons la Proposition (2.5.5) :

$$\begin{aligned}
\|S + T\| &= \sup\{\|Sx + Tx\| | x \in B_X \cap D(S) \cap D(T)\} \\
&\leq \sup\{\|Sx\| + \|Tx\| | x \in B_X \cap D(S) \cap D(T)\} \\
&\leq \sup\{\|Sx\| | x \in B_X \cap D(S) \cap D(T)\} \\
&\quad + \sup\{\|Tx\| | x \in B_X \cap D(S) \cap D(T)\} \\
&\leq \sup\{\|Sx\| | x \in B_{D(S)}\} + \sup\{\|Tx\| | x \in B_{D(T)}\} \\
&= \|S\| + \|T\|.
\end{aligned}$$

(b) Suit des Propositions (2.5.5) et (a) , et (c) suit des propositions (2.5.4) et (2.5.5).

$\square$

Proposition 2.5.7. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors*

(a) $\|T\| < \infty \Leftrightarrow$ *il existe $\lambda > 0$ telle que*

$$TB_{D(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0). \tag{2.1}$$

(b) *Si $\|T\| < \infty$ alors*

$$\|T\| = \inf_{\lambda > 0}\{\lambda | TB_{D(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0)\}. \tag{2.2}$$

Démonstration. **(a)** supposons que $\|T\| < \infty$. On applique la proposition (2.5.4) : pour $x \in B_{D(T)}$ et$y \in Tx$ il existe $k \in T(0)$ tel que étant donné $\epsilon > 0$,

$$\|y - k\| < \|T\| + \epsilon,$$

i.e. $y - k \in (\|T\| + \epsilon)B_{R(T)}$. Donc

$$y \in (\|T\| + \epsilon)B_{R(T)} + T(0) \tag{2.3}$$

Comme requise.

Inversement, supposons que (2.1) détient. Soit $x \in B_{D(T)}$ et choisir $y \in Tx$. Alors $y = \lambda y_1 + k$ où $\|y_1\| \leq 1$ et $k \in T(0)$. Ainsi $\|y - k\| \leq \lambda$, en particulier,$d(y, T(0)) \leq \lambda$. Il découle de la proposition 2.2.7 que $\|T\| \leq \lambda < \infty$.

(b) Supposons que $\|T\| < \infty$. Si $\|T\| = 0$, alors $TB_{D(T)} \subset \overline{T(0)}$ et (2.2) est valable. Supposons que $\|T\| > 0$. Ensuite, il découle de (2.3) que

$$\|T\| \geq \inf_{\lambda > 0} \{\lambda | TB_{D(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0)\}$$

Soit α a tel que $0 < \alpha < \|T\|$, et choisir $x \in B_{D(T)}, y \in Tx$ telle que

$$\alpha < d(y, T(0)) \tag{2.4}$$

Si $TB_{D(T)} \subset \alpha B_{R(T)} + T(0)$ alors il existe $y_1 \in B_{R(T)}$, et $K \in T(0)$ telle que $y = \alpha y_1 + k$. Mais alors

$$\|y - k\| \leq \alpha,$$

Ce qui contredit (2.4). Ainsi,

$$\alpha < \inf_{\lambda > 0} \{\lambda | TB_{D(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0)\}$$

et le résultat suit.

□

Proposition 2.5.8. *Soit $T \in LR(X, Y)$*

(a) *T est continue si seulement si $\|T\| < \infty$.*

(b) *Si $\dim D(T) < \infty$, alors T est continue.*

Démonstration. **(a)** supposons que T est continu. Puisque $T(0) + B_Y$ est un voisinage de $T(0)$, s'ensuite que $T^{-1}(T(0) + B_Y) = T^{-1}B_{R(T)}$ est un voisinage de 0. Ainsi $\exists \lambda > 0$ t.q.

$$\lambda B_{D(T)} \subset T^{-1}B_{R(T)}$$

et, par conséquent,

$$\lambda TB_{D(T)} \subset B_{R(T)} + T(0) \subset TT^{-1}B_{R(T)}.$$

D'après la proposition (2.5.7), cela implique que $\|T\| < \infty$.

Inversement, supposons que $\|T\| < \infty$. Soit $x \in D(T)$, et soit V une boule fermée non trivial dans $R(T)$ de centre y où $y \in Tx$. Alors $V_0 = V - \{y\} = \alpha B_{R(T)}$ pour certains $\alpha > 0$. En appliquant la proposition (2.5.7), il existe $\lambda > 0$ telle que

$$TB_{D(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0).$$

Il s'ensuite que

$$B_{D(T)} + T^{-1}(0) \subset \lambda T^{-1} B_{R(T)} = \alpha^{-1} \lambda T^{-1} V_0$$

Ou, équivalent,

$$\lambda^{-1} \alpha B_{D(T)} + T^{-1}(0) \subset T^{-1} V_0 = T^{-1}(V - y).$$

Par conséquent,

$$\lambda^{-1} \alpha B_{D(T)} + T^{-1} y \subset T^{-1} V - T^{-1} y + T^{-1} y = T^{-1} V,$$

Et $\lambda^{-1} \alpha B_{D(T)} + T^{-1} y$ est un voisinage de x dans $D(T)$. Supposons maintenant que W soit un voisinage de Tx, soit $U \subset W$ un ensemble ouvert contenant $y \in Tx$, et soit $V \subset U$ une boule fermée non triviale de centre y. De ce qui a déjà été montré, il s'ensuite que $T^{-1} W$ est voisinage de x. Donc T est continu.

(b) si $\dim D(T) < \infty$. Alors QT est un opérateur continu a une seule valeur, i.e. $\|QT\| < \infty$. Puisque $\|T\| = \|QT\|$, le résultat découle de (a) .

$\square$

2.6 Relations Ouvertes et Modules Minimaux

Dans cette section, nous définissons ce que signifie qu'une relation linéaire est ouverte. Ensuite, nous introduisons le module minimaux $\gamma(T)$ d'une relation linéaire T, et donnons des caractérisations équivalentes de cette quantité (Propositions (2.6.1) et (2.6.2)) . On montre alors que $\gamma(T) = \|T^{-1}\|^{-1}$, et en déduire que la relation linéaire T est ouverte si et seulement si $\gamma(T) > 0$. Dans la Proposition (2.6.5) nous considérons la relation entre $\gamma(T)$

et $\gamma(QT)$, et dans la Proposition (2.6.6) nous donnons des critères pour $T(0)$ soit fermé dans $R(T)$, et pour l'égalité $N(T) = N(QT)$. Nous concluons cette section en donnant des inégalités pour le module minimaux et la norme de la composition des relations linéaires.

Définition 2.6.1. *Une relation linéaire $T \in LR(X,Y)$ est dite **ouverte** si son inverse T^{-1} est une relation linéaire continue.*
*Le **module minimum** de T est la quantité*

$$\gamma(T) := \sup\{\lambda | \|Tx\| \geq \lambda d(x, N(T)) pour x \in D(T)\}.$$

La proposition suivante fournit une définition équivalente pour $\gamma(T)$.

Proposition 2.6.1. *Soit $T \in LR(X,Y)$.*

$$\gamma(T) = \begin{cases} \infty \quad si \quad D(T) \subset \overline{N(T)} \\ \inf\left\{\dfrac{\|Tx\|}{d(x,N(T))} | x \in D(T) \backslash \overline{N(T)}\right\} sinon \end{cases} \tag{2.5}$$

Démonstration. Soit $\gamma_1(T)$ dénote l'expression dans (2.5) et pour tout $x \in D(T)$ soit $\lambda \geq 0$ satisfait

$$\|Tx\| \geq \lambda d(x, N(T)). \tag{2.6}$$

Si $D(T) \subset \overline{N(T)}$, Alors $\lambda < \gamma_1(T) = \infty$. Si $D(T) \nsubseteq \overline{N(T)}$, alors par (2.6) nous avons $\dfrac{\|Tx\|}{d(x,N(T))} \geq \lambda$ pour $x \in D(T)\backslash\overline{N(T)}$. Ainsi $\lambda \leq \gamma_1(T)$. Prendre le suprême en λ dans (2.6) rendements $\gamma(T) \leq \gamma_1(T)$.
Supposons $\gamma(T) < \gamma_1(T)$. Alors $\gamma(T) < \infty$, et donc de la définition de $\gamma(T)$ il s'ensuite que $D(T) \nsubseteq \overline{N(T)}$. Il s'ensuite également qu'il existe $xD(T)$ telle que $\|Tx\| < \gamma_1(T) d(x, N(T))$, qui contredit (2.5). donc $\gamma(T) \geq \gamma_1(T)$. □

Proposition 2.6.2.

$$\gamma(T) = \sup\{\lambda | TB_{D(T)} \supset \lambda B_{R(T)}\} \tag{2.7}$$

Démonstration. Soit γ_1 l'expression en (2.7). Supposons $\gamma_1 \neq \infty$ et $\gamma_1 > \gamma(T)$, et choisissez $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\gamma_1 > (1+2\epsilon)\gamma(T)$. Depuis $\|Tx\| = \inf_{y\in Tx} \|y\|$ et $\gamma(T) = \inf_{x\in D(T)\backslash\overline{N(T)}} \dfrac{\|Tx\|}{d(x,N(T))}$, On peut choisir $(x,y) \in G(T)$ Telle que

$$\gamma(T) \leq \frac{\|y\|}{d(x,N(T))} < \gamma_1(1+2\epsilon)^{-1}.$$

Maintenant, si $\eta > 0$, alors $\dfrac{\|\eta y\|}{d(\eta x, N(T))} = \dfrac{\|y\|}{d(x, N(T))}$. Donc, soient $x_1 = \eta x, y_1 = \eta y$ et $\eta = \dfrac{1}{\|y\|}$, nous avons

$$1 = \|y_1\| < \gamma_1 d(x_1, N(T)).(1+2\epsilon)^{-1} \tag{2.8}$$

De (2.7), $TB_{D(T)} \supset \gamma_1(1+\epsilon)^{-1}B_{R(T)}$. Donc, $y_1 \in \gamma_1^{-1}(1+\epsilon)TB_{D(T)}$ et $x_2 \in \gamma_1^{-1}(1+\epsilon)B_{D(T)}$ peut-être choisi pour que $y_1 \in Tx_2$. Puisque $x_2 - x_1 \in N(T)$, sa suit de (2.8) que

$$1 + 2\epsilon < \gamma_1 d(x_1, N(T)) = \gamma_1 d(x_2, N(T)) \leq \gamma_1 \|x_2\| \leq 1 + \epsilon$$

une contradiction. Donc $\gamma_1 \leq \gamma(T)$.

Pour l'inégalité opposée, nous pouvons clairement supposer que $\gamma_1 < \infty$. Supposons $\gamma_1 < \alpha < \gamma(T)$. Alors $TB_{D(T)} \not\supseteq \alpha B_{R(T)}$ et il existe $y \in R(T)$ telle que $\|y\| = 1$ et $y \notin \alpha^{-1}TB_{D(T)}$ et, d'où,

$$\|x\| = \alpha^{-1} \Rightarrow y \notin Tx. \tag{2.9}$$

Soit $x_0 \in D(T)$ satisfait $y \in Tx_0$ et fixé β telle que $\alpha < \beta < \gamma(T)$. Alors

$$1 = \|y\| \geq \|Tx_0\| \geq \beta d(x_0, N(T)).$$

Choisir $x_1 \in N(T)$ de sorte que $\|Tx_0\| \geq \alpha\|x_0 + x_1\|$. Soit $x := x_0 + x_1$, nous avons ca $Tx_0 = Tx$ et, par conséquent, $y \in Tx$ où $1 = \|y\| \geq \|Tx\| \geq \alpha\|x\|$, qui contredit (2.9). Donc $\gamma_1 \geq \gamma(T)$.

Pour le cas $\gamma_1 = \infty$ on a

$$TB_{D(T)} \supset \cup_{n\in\mathbb{N}}\{nB_{R(T)}\} = R(T).$$

Prendre des rendements inverses

$$B_{D(T)} + T^{-1}(0) \supset D(T).$$

Par conséquent, pour chaque $\epsilon > 0$ on a

$$\epsilon B_{D(T)} + T^{-1}(0) \supset D(T).$$

Prendre l'intersection $\epsilon > 0$ rendements $\overline{N(T)} \supset D(T)$ qui par proposition (2.6.1) implique $\gamma(T) = \infty$. $\square$

Proposition 2.6.3. *Soit $T \in LR(X,Y)$. Alors*

$$\gamma(T) = \|T^{-1}\|^{-1}. \tag{2.10}$$

Démonstration. Soit $\lambda \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} T^{-1}B_{R(T)} \supset \lambda B_{D(T)} &\Rightarrow B_{R(T)} + T(0) \supset \lambda T B_{D(T)} \\ &\Rightarrow T^{-1}B_{R(T)} + T^{-1}(0) \supset \lambda B_{D(T)} + T^{-1}(0) \\ &\Rightarrow T^{-1}B_{R(T)} \supset \lambda B_{D(T)}. \end{aligned}$$

En particulier

$$\lambda T B_{D(T)} \subset B_{R(T)} + T(0) \Leftrightarrow \lambda B_{D(T)} \subset T^{-1}B_{R(T)}. \tag{2.11}$$

Nous considérons deux cas

— le cas 1 : $\|T\| < \infty$

Des Propositions (2.5.7) et (2.6.2), les caractérisations géométrique de la norme et des modules minimaux respectivement, et en appliquant l'équivalence (2.11) nous avons

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf\{\lambda > 0 | \lambda^{-1} T B_{D(T)} \subset B_{R(T)} + T(0)\} \\ &= (\sup\{\lambda > 0 | \lambda T B_{D(T)} \subset B_{R(T)} + T(0)\})^{-1} \\ &= (\sup\{\lambda > 0 | T^{-1}B_{R(T)} \supset \lambda B_{D(T)}\})^{-1} \\ &= \gamma(T^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

— le cas 2 : $\|T\| = \infty$

Encore une fois, nous appliquons la Propositions (2.5.7). Dans cette cas on a :

$$\forall \lambda > 0, T B_{D(T)} \nsubseteq \lambda B_{R(T)} + T(0).$$

Donc,

$$\forall \lambda > 0, \lambda^{-1} T B_{D(T)} \nsubseteq B_{R(T)} + T(0).$$

Par conséquent, en appliquant l'équivalence (2.11)

$$\forall \lambda > 0, \lambda B_{D(T)} \nsubseteq T^{-1}B_{R(T)}.$$

En appliquant la Propositions (2.6.2), $\gamma(T^{-1}) = 0$, et l'égalité souhaitée tient.

□

Proposition 2.6.4. *Soit $T \in LR\,(X,Y)$.*

(a) *T est ouvert si et seulement si $\gamma(T) > 0$.*

(b) *Si $\dim R(T) < \infty$, alors T est ouvert.*

Démonstration. **(a)** Appliquer la Proposition (2.6.3) à la Proposition (2.5.8).

(b) Cela suite de substituer T^{-1} pour T dans la Proposition (2.5.8).

Nous examinons la relation entre $\gamma(T)$ et $\gamma(QT)$. □

Proposition 2.6.5. *Soit $T \in LR\,(X,Y)$. Alors*

$$\gamma(T) \leq \gamma(QT)$$

avec l'égalité si $T(0)$ est relativement fermée dans $R(T)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\gamma(T) &= \sup\{\lambda | \|Tx\| \geq \lambda d(x, N(T)) \forall x \in D(T)\} \\
&\leq \sup\{\lambda | \|Tx\| \geq \lambda d(x, N(QT)) \forall x \in D(T)\} \\
&= \sup\{\lambda | \|QTx\| \geq \lambda d(x, N(T)) \forall x \in D(T)\} \\
&= \gamma(QT).
\end{aligned}$$

Par la Proposition (2.5.2), l'égalité est tient quand $T(0)$ est fermé dans $R(T)$. Proposition (2.6.5) preuve que T est ouvert, alors QT l'est aussi. La réciproque est fausse et l'égalité ne doit pas contenir. Ceci est illustré dans l'exemple suivant : □

Le résultat suivant fournit des critères pour $T(0)$ que soit fermé dans $R(T)$. Cela peut aussi appliqué à Proposition 1.7.5.

Proposition 2.6.6. *Soit $T \in LR(X,Y)$ ouvert. Alors*

$$R(T) \cap \overline{T(0)} \subset T\overline{T^{-1}(0)},$$

avec l'égalité si $N(T)$ est relativement fermé dans $D(T)$.

Démonstration. Nous établissons d'abord le résultat pour la cas quand où T est injectif. Supposons que $\{y_n\}$ est une séquence dans $T(0)$ telle que $y_n \to y \in R(T)$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \|T^{-1}(y_n - y)\| \leq \|T^{-1}\| \lim_n \|y_n - y\| = 0$$

puisque T^{-1} est continue. Ainsi $\|T^{-1}y\| = 0$. Donc $T^{-1}y = 0$ et, puisque T^{-1} est valeur-unique, $y \in N(T^{-1}) = T(0) = TT^{-1}(0) \subset T\overline{T^{-1}(0)}$. Si $N(T)$ est fermé dans $D(T)$, alors $TT^{-1}(0) = T\overline{T^{-1}(0)}$.

Maintenant soit $Q := Q_{T^{-1}}$. Alors

$$TQ^{-1}(B_{X/\overline{T^{-1}(0)}}) = T(B_X + \overline{T^{-1}(0)}) \supset TB_X \supset \lambda B_{R(T)}$$

pour certains $\lambda > 0$ puisque T est ouvert. Donc TQ^{-1} est ouverte. En appliquant la première partie de la preuve, nous avons que $D(QT^{-1}) \cap \overline{N(QT^{-1})} = R(TQ^{-1}) \cap \overline{TQ^{-1}(0)} \subset TQ^{-1}(\overline{QT^{-1}(0)})$. D'où

$$\begin{aligned} R(T) \cap \overline{T(0)} &= D(T^{-1}) \cap \overline{N(T^{-1})} \\ &\subset D(QT^{-1}) \cap \overline{N(QT^{-1})} \\ &\subset TQ^{-1}(\overline{QT^{-1}(0)}) = TQ^{-1}(0) = T\overline{T^{-1}(0)}. \end{aligned}$$

Si $N(T)$ est relativement fermé dans $D(T)$, alors

$$R(T) \cap \overline{T(0)} \supset T(0) = TT^{-1}(0) = T\overline{T^{-1}(0)},$$

et l'égalité détient. □

Corollaire 2.6.1. *Si $T \in LR(X,Y)$ est ouvert et $N(T)$ est fermé alors*

(a) $N(T) = N(QT)$.

(b) $\gamma(T) = \gamma(QT)$.

Démonstration. **(a)** Puisque $T^{-1}(0)$ est fermé, $R(T) \cap \overline{T(0)} = T(0)$. Le résultat suit de la Proposition (2.5.2).

(b) Comme dans (a), Le résultat suit de la Proposition (2.6.5).

□

Proposition 2.6.7. *Soit M sous ensemble non-vide de $R(T)$, et soit $\gamma(T) < \infty$. Alors pour $N \subset D(T)$ on a*

$$d(TN, M) \geq \gamma(T) d(N, T^{-1}M).$$

Démonstration. Si $TN \cap M \neq \emptyset$, alors $\emptyset \neq T^{-1}(TN \cap M) = (N + N(T)) \cap (T^{-1}M)$, donc, $d(N, T^{-1}M) = 0$.

Supposons que $TN \cap M = \emptyset$, soit $\epsilon > 0$, et choisissez $m \in M$ et $n \in N$ telle que

$$d(TN, M) > d(Tn - m, 0) - \epsilon. \tag{2.12}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
d(Tn - m, 0) &= d(Tn - m - T(0), 0) = d(Tn, m + T(0)) \quad = \quad d(Tn, TT^{-1}m) \\
&= \inf_{h \in T^{-1}m} d(Tn, Th) = \inf_{h \in T^{-1}m} d(T(n-h), 0) = \inf_{h \in T^{-1}m} \|T(n-h)\| \\
&\geq \gamma(T) \inf_{h \in T^{-1}m} d(n - h, T^{-1}(0)) = \gamma(T) \inf_{h \in T^{-1}m} d(n, h + T^{-1}(0)) \\
&= \gamma(T) d(n, T^{-1}m) \geq \gamma(T) d(n, T^{-1}M) \geq \gamma(T) d(N, T^{-1}M).
\end{aligned}$$

Puisque ϵ a été choisi arbitrairement, il découle de (2.12) que

$$d(TN, M) \geq \gamma(T) d(N, T^{-1}M).$$

$\square$

Proposition 2.6.8. *Soient $T \in LR(X, Y)$ et $S \in LR(Y, Z)$. Alors*

$$\gamma(ST) \geq \gamma(S|_{R(T)})\gamma(T) \quad (\infty.0 exclure). \tag{2.13}$$

avec $\gamma(ST) = \infty$ quand $\gamma(T) = \infty$ (pair si $\gamma(S|_{R(T)}) = 0$). En autre

$$S^{-1}(0) \subset R(T) \Rightarrow \gamma(ST) \geq \gamma(S)\gamma(T). \tag{2.14}$$

Démonstration. Soit $x \in D(ST)$. Nous considérons d'abord le cas quand $\gamma(S), \gamma(T) < \infty$. Puisque $ST = (S|_{R(T)})T$, nous supposons que $S = S|_{R(T)}$. Alors $S^{-1}ST(0) = T(0) + S^{-1}(0) \subset R(T)$ et $T^{-1}(0) \subset T^{-1}S^{-1}(0)$. Il découle de la Proposition (2.6.7) que

$$\begin{aligned}
\|STx\| = d(STx, ST(0)) &\geq \gamma(S) d(Tx, S^{-1}ST(0)) \\
&\geq \gamma(S)\gamma(T) d(x, T^{-1}S^{-1}ST(0)) \\
&= \gamma(S)\gamma(T) d(x, T^{-1}S^{-1}(0)).
\end{aligned}$$

Donc, en appliquant la Proposition (2.6.1), inégalité (2.13) tient. Supposons maintenant $S^{-1}(0) \subset R(T)$ et que ce n'est pas nécessairement le cas que $S = S|_{R(T)}$. Alors

$$\begin{aligned}
d(Tx, S^{-1}ST(0)) &\geq \gamma(T) d(x, T^{-1}S^{-1}ST(0)) \\
&= \gamma(T) d(x, T^{-1}((T(0) \cap D(S)) + S^{-1}(0))) \\
&= \gamma(T) d(x, T^{-1}S^{-1}(0)).
\end{aligned}$$

Ainsi, comme avant,

$$\|STx\| \geq \gamma(S)\gamma(T)d(x, T^{-1}S^{-1}(0)),$$

et l'implication (2.14) de la façon suivante.

Ensuite, nous considérons le cas $\gamma(T) = \infty$, et supposons $S = S|_{R(T)}$. Par la Proposition (2.6.1), $\overline{N(T)} = D(T)$. Puisque $N(T) \subset N(ST)$ et $D(T) \supset D(ST)$, il s'ensuite que $N(ST)$ est dense dans $d(ST)$. Donc $\gamma(ST) = \infty$, et l'inégalité souhaitée dans (2.13) tient. Si $S^{-1}(0) \subset R(T)$, alors la preuve de l'inégalité (2.14) est similaire.

Enfin suppose que $\gamma(S) = \infty$ et $0 < \gamma(T) < \infty$, et supposons que $S = S|_{R(T)}$. Puisque $S^{-1}(0)$ est dense dans $D(S)$ il s'ensuite que $d(Tx, S^{-1}(0)) = 0$. Par conséquent, $\gamma(T)d(x, T^{-1}S^{-1}(0)) = 0$ (appliquant la Proposition (2.6.7)), i.e. $N(ST)$ est dense dans $D(ST)$. Donc $\gamma(ST) = \infty$, et encore et le désiré l'inégalité dans (2.13) suivante. Si $S^{-1}(0) \subset R(T)$, alors la preuve de l'inégalité (2.14) est similaire. □

Remarque 13. *Si ue $\gamma(S) = \infty$ et $\gamma(T) = 0$, alors l'inégalité (2.13) peut manquer de tenir envisager $S := f$ et $T := f^{-1}$ où f est une fonction linéaire discontinu sur un espace de dimension infinie. Alors $\gamma(ST) = \gamma(ff^{-1}) = \gamma(I) = 1$ tandis que $\gamma(S) = \infty$ (puisque $\overline{N(f)} = X$) , et gamma$(T) = \|f\|^{-1} = 0$.*

Corollaire 2.6.2. *Soient $T \in LR(X, Y)$ et $S \in LR(Y, Z)$. Alors*

$$\|ST\| \leq \|S\|\|I_{d(S)}T\| \quad (\infty.0 \quad \textit{exclue}). \tag{2.15}$$

avec $\|ST\| = 0$ quand $\|S\| = 0$ (pair si $I_{d(T)} = \infty$) . En outre,

$$T(0) \subset D(S) \Rightarrow \|ST\| \leq \|S\|\|T\|. \tag{2.16}$$

Démonstration. Appliquant de la Proposition (2.6.3), l'inégalité (2.15) découle de (2.13) du Proposition (2.6.8).

Si $T(0) \subset D(S)$, alors pour $x \in D(ST)$ et $y \in Tx$ ont que $Tx \subset D(S) + T(0) = D(S)$ (puisque $x \in T^{-1}(D(S))$) . Donc $I_{d(S)}Tx = Tx \cap D(S) = Tx$, et

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T|_{D(ST)}\|,$$

à partir duquel (2.16) suivante. □

Remarque 14. *Le cas où* $\infty.0$ *apparait sur le coté droit de* (2.15) *correspond au cas analogue dans Proposition* (2.6.8) *(appliquant la Proposition* (2.6.3)*) . Dans ce cas aucune conclusion ne peut être tirée de l'hypothèse (voir les remarques suivant la Proposition* (2.6.8)*) .*

Proposition 2.6.9. *Supposons que* $T \in LR(X,Y)$*, et* $S \in LR(Y,Z)$ *est continu avec* $D(S) \supset \overline{T(0)}$*. Alors*

$$Q_{ST}ST = Q_{ST}SQ_T^{-1}Q_TT.$$

Démonstration. Soit Q notée Q_T, et soit $y \in Tx$. Alors $SQ^{-1}Q_Y = S(y + \overline{T(0)})$, et puisque S est continu avec $D(S) \supset \overline{T(0)}$,

$$S\overline{T(0)} \subset \overline{ST(0)}.$$

et, d'où,

$$SQ^{-1}Q_Y \subset Sy + \overline{ST(0)}.$$

Il s'ensuite que

$$Q_{ST}SQ^{-1}Q_y \subset Q_{ST}S_y \subset Q_{ST}(SQ^{-1}Q_y),$$

et, d'où,

$$Q_{ST}SQ^{-1}Q_y = Q_{ST}S_y.$$

Donc

$$Q_{ST}SQ^{-1}QT_x = Q_{ST}ST_x,$$

et le résultat suivante. □

2.7 Sélections Linéaires

Les sélections ou les parties à valeur unique des applications à ensembles-valeurs sont été considérées dans les Problèmes d'extension en topologie (voir par exemple Michael [23]) , et font encore l'objet d'une enquête aujourd'hui. Sélections jouent un rôle important dans l'analyse convexe, et il existe une théorie bien développée sur les sélections de applications à ensembles-valeurs qui satisfont divers propriétés (voir par exemple Aubin et Cellina [6] ou Aubin et Frankowska [7]) . Dans cette section, nous donnons en revue brève des sélections linéaires de relations linéaire et considérons certaines conditions de continuité.

Définition 2.7.1. *Un opérateur linéaire à valeur unique A est appelé* ***sélection linéaire*** *(ou* ***partie à valeur unique****) d'une relation linéaire T si*

$$T = A + T - T. \tag{2.17}$$

Si A est une sélection de T alors pour tout $x \in D(T)$ on a

$$Tx = Ax + T(0). \tag{2.18}$$

Il résulte de (2.18) que $R(T) = R(A) + T(0)$. Cependant, cette somme peut ne pas toujours directe. Le résultat Suivant fournit une méthode pour construire des sélections.

Proposition 2.7.1. *Si P est une projection linéaire à valeur unique avec le domaine $R(T)$ et le noyau $T(0)$, alors PT est une sélection de T. Inversement, si A est une sélection de T et $R(A) \cap T(0) = \{0\}$, alors la projection à valeur unique définie sur $R(T)$ avec l'intervalle $R(A)$ et le noyau $T(0)$ satisfait $A = PT$.*

Démonstration. Soit P comme décrit. Alors $PT(0) = \{0\}$, et pour $y \in Tx$ on a

$$Tx = y + T(0) = Py + (I - P)y + T(0) = PTx + T(0).$$

Inversement, soit A une sélection de T et soit P une projection linéaire définie sur $R(T)$ avec l'intervalle $R(A)$ et le noyau $T(0)$. Alors pour $x \in D(T)$ on a $Tx = Ax + T(0)$, d'où $PTx = PAx = Ax - (I - P)Ax = Ax$. □

Proposition 2.7.2. *Soit $T \in LR(X, Y)$.*

(a) *Si T a une sélection continue A, alors T est continu et*

$$\|T\| \leq \|A\|.$$

(b) *Si $T(0)$ est topologiquement complétée dans $R(T)$, alors T est continu si et seulement si T a une sélection continue.*

Démonstration. **(a)** Supposons que A est une sélection continue de T. Alors pour $x \in D(T)$, on a $Tx = Ax + T(0)$, i.e. $Ax \in Tx$. Depuis

$$\|Tx\| = \inf_{y \in Tx} \|y\| \leq \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

Le résultat suit.

(b) Soit P une projection continue définie sur $R(T)$ avec le noyau $T(0)$. Si T est continue, alors PT est une sélection continu de T. L'implication inverse est contenue dans (a).

$\square$

2.8 Relations Linéaires Fermées et Fermées

Dans cette section, nous donnons les propriétés de base des relations fermées et nous considérons la relation entre une relation linéaire T et sa fermeture. Nous Considérons aussi la connexion entre les propriétés de continuité et de fermeture.

Définition 2.8.1. *La **fermeture** d'une relation $T \in LR\,(X, Y)$ est la relation $\overline{T}$ définie*

$$G(\overline{T}) := \overline{G(T)}. \tag{2.19}$$

*Une relation est dite **fermée** si son graphe $G(T)$ est fermé en $X \times Y$ ou, de manière équivalente, si $T = \overline{T}$.*

Proposition 2.8.1. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors*

(a) $\overline{T} \in LR\,(X, Y)$.

(b) *T est fermé si et seulement si T^{-1} est fermé. De plus, $(\overline{T})^{1} = \overline{T^{-1}}$.*

(c) *Si T est fermé alors $T(0)$ est fermé.*

(d) *Si T est continu et $D(T)$ et $T(0)$ sont fermés, alors T est fermé.*

Démonstration. **(a)** et (b) découlent de la définition de $\overline{T}$ et du fait que $\overline{G(T)}$ est un sous-espace linéaire de $X \times Y$.

(c) Si $\{y_n\}$ est une séquence dans $T(0)$ telle que $y_n \to y$, alors $(0, y) \in G(T)$ puisque T est fermé.

(d) Supposons que $\{(x_n, y_n)\}$ est une suite dans $G(T)$ telle que $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Alors $x \in D(T)$ puisque $D(T)$ est fermé. En laissant $z \in Tx$, il découle de la continuité de T que $\exists z_n \in Tx_n$ telle que $z_n \to z$. Puisque $z_n - y_n \in T(0)$ et $z_n - y_n \to z - y \in T(0)$, il s'ensuite que $y \in z + T(0) = Tx$.

$\square$

Définition 2.8.2. *Une relation linéaire est dite fermentable si $\overline{T}$ est une extension de T.*

Nous donnons un exemple de relation continue qui n'est fermée ni fermentable, et donnons un exemple de relation fermé qui n'est pas continue. On note que $\overline{T}$ n'a pas besoin une extension de T. On n'a seulement que $G(T) \subset G(\overline{T})$ et $Tx \subset \overline{T}x$ pour tout $x \in D(T)$. De plus, $\overline{T(0)} \subset \overline{T}(0)$, et l'égalité n'a pas besoin vérifiée, comme on le voit dans la troisième des exemples ci-dessous.

Exemple 2.8.1. *On a Soit T une relation linéaire telle que $T(0) \neq \overline{T(0)}$. Soit F tout sous-espace de dimension finie de $D(T)$. Alors $T|_F$ est continu. Cependant, $\overline{T|_F(0)} = \overline{T(0)} \neq T(0)$. Ainsi $T|_F(0)$ n'est pas fermé, et $T|_F$ n'est pas fermentable.*

Remarque 15. *Clairement T est fermable si et seulement si $T(0) = \overline{T}(0)$, et T^{-1} est fermable si et seulement $N(T) = N(\overline{T})$. Cependant, il existe un manque malheureux de symétrie en ce que T fermable n'implique pas que T^{-1} est fermable. L'exemple suivant illustre ceci.*

Proposition 2.8.2. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors*

$$Q_T\overline{T} = \overline{Q_T T}.$$

Démonstration. Soit $Q := Q_T = Q^{Y}_{\overline{T(0)}}$, et soit $(x, z) \in G(Q\overline{T})$. Alors $\exists y \in R(\overline{T})$ telle que $(x, y) \in G(\overline{T})$ et $Qy = z$. Soit (x_n, y_n) une suite dans $G(T)$ convergent vers (x, y). Maintenant Qy_n converge vers $Qy = z$. Donc $(x_n, QTx_n) = (x_n, Qy_n) \to (x, z)$, i.e. $(x, z) \in G(\overline{QT})$. Inversement, soit $(x, z) \in G(\overline{QT})$. Alors $\exists (x_n, z_n) \in G(QT)$ telle que $(x_n, z_n) \to (x, z)$. Ainsi, $\exists y_n \in R(T)$ telle que $(x_n, y_n) \in G(T)$ et $Qy_n = z_n \to z \in Qy \in Y/\overline{T(0)}$ pour certains $y \in Y$. Donc $\exists k \in \overline{T(0)}$ telle que $y_n \to y - k$. Puisque $\overline{T(0)} \subset \overline{T}(0)$, il s'ensuite que $(x, y - k) \in G(Q\overline{T})$. Puisque $Q(y - k) = Qy = z$ nous avons que $(x, z) \in G(Q\overline{T})$. $\square$

Proposition 2.8.3. *Soit $T \in LR(X,Y)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est fermé.*

(ii) *QT est fermé et $T(0)$ est fermé.*

Démonstration. **(i)** $\Rightarrow$ (ii) Cela découle de la proposition (2.8.2) et de la Proposition (2.8.1) (c).

(ii) $\Rightarrow$ (i) En appliquant la Proposition (2.8.2),

$$D(T) = D(QT) = D(\overline{QT}) = D(Q\overline{T}) = D(\overline{T}).$$

De plus, pour $x \in D(T)$ on a $Q\overline{T}x = QTx$. Ainsi, $\overline{T}x + T(0) = Tx + T(0)$, i.e. $\overline{T}x = Tx$. Il s'ensuite que $T = \overline{T}$

□

Proposition 2.8.4. *Soit $T \in LR(X,Y)$.*

$$\|\overline{T}\| \leq \|T\|$$

avec égalité valable si $\overline{T}(0) = \overline{T(0)}$.

Démonstration. Nous pouvons clairement supposons que $\|T\| < \infty$. Nous prouvons par contradiction. Supposons que $\|\overline{T}\| > \|T\|$. Choisir $\epsilon > 0$ et $(x_0, y_0) \in G(\overline{T})$ telle que $\|x_0\| \leq 1$ et

$$d(y_0, \overline{T}(0)) > \|T\| + 2\epsilon. \tag{2.20}$$

Maintenant choisir $(x,z) \in G(T)$ telle que $\|x\| \leq 1$ et $\|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \epsilon$. Puisque $|d(y_0, T(0)) - d(y, T(0))| \leq \|y_0 - y\| < \epsilon$, il résulte de (2.20) que

$\|T\| + 2\epsilon < d(y_0, \overline{T}(0)) \leq d(y_0, T(0)) \leq d(y, T(0)) + \epsilon \leq \|T\| + \epsilon,$

Ce qui est une contradiction. Ainsi $\|\overline{T}\| \leq \|T\|$.

Supposons maintenant que $\overline{T}(0) = \overline{T(0)}$. Alors pour $x \in D(T)$ et $y \in Tx \subset \overline{T}x$ on a $\|Tx\| = d(Tx, \overline{T}(0)) = d(\overline{T}x, \overline{T}(0)) = \|\overline{T}x\|$, et l'égalité souhaitée suit. □

Corollaire 2.8.1. *Soit $T \in LR(X,Y)$, Alors*

$$\gamma(\overline{T}) \geq \gamma(T)$$

Avec la tenue d'égalité si $N(\overline{T}) = \overline{N(T)}$.

Proposition 2.8.5. *Soit $T \in LR(X,Y)$ fermé et soit Y complet, Si $S \in LR(X,Y)$ est continue avec $S(0) \subset \overline{T(0)}$ et $D(S) \supset \overline{D(T)}$, alors $T+S \in LR(X,Y)$ est fermé.*

Démonstration. Supposons que T et S sont une valeur unique, et soit (x_n) une suite dans $D(T)$ telle que $(T+S)x_n \to y \in Y$ et $x_n \to x$. Alors

$$\|T(x_n - x_m)\| \leq \|(T+S)(x_n - x_m)\| + \|S\|\|x_n - x_m\|, \tag{2.21}$$

Et, puisque S est continu, le membre droit de (2.21) converge vers zéro lorsque $m, n \to \infty$. Ainsi, $\{Tx_n\}$ est une suite de Cauchy, et $\exists z \in Y$ telle que $Tx_n \to z$. Puisque T est fermé, il résulte que $x \in D(T) = D(T+S) \subset D(S)$ et $Tx = z$. Puisque S est continu, $Sx_n \to Sx$. Ainsi, $(T+S)x_n \to (T+S)x = y$, i.e. $T+S$ est fermé.
En passant au cas général, il découle de la Proposition (2.8.3) que $(T+S)(0) = T(0)$ est fermé, et $Q_T T$ est fermé. De plus, $Q_T S$ est à valeur unique et continue (par la proposition (2.6.9)). Par ce que a déjà été montré, $Q_{T+S}(T+S) = Q_T T + Q_T S$ est fermé. En appliquant la Proposition (2.8.3), $T+S$ est fermé. □

2.9 L'adjoint d'une Relation Linéaire

Définition 2.9.1. *L'**adjoint** ou **conjugué** T' d'une relation linéaire $T \in LR(X,Y)$ est défini par*

$$G(T') := G(-T^{-1})^{\perp} \subset Y' \times X'.$$

Où

$$[(y,x),(y',x')] := [x,x'] + [y,y'] = x'x + y'y.$$

Remarque 16. *Nous notons que les termes adjoint et conjugué sont utilisés de manière interchangeable partout.*
Si $(y',x') \in G(T')$ alors $y'y = x'x$ pour tout $y \in Tx, x \in D(T)$, i.e $x' \in T'y' \Leftrightarrow x'x = y'Tx$ pour tout $x \in D(T)$, i.e.

$$x'|_{D(T)} = y'T.$$

Si T est densément défini, alors $y'T$, qui est une valeur unique, a une unique extension de X, rendant T' à valeur unique. Ainsi, nous pouvons faire les affirmations suivantes.

Proposition 2.9.1. *$T' \in LR(Y', X')$ est une relation fermée avec*

$$D(T') = \{y' \in Y' | y'T \textit{est continue et à une seule valeur}\}$$

Et $T'y'x = y'Tx \in \mathbb{K}$ pour $x \in D(T)$ et $y' \in D(T')$.

Proposition 2.9.2. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors*

(a) $(\overline{T})' = T'$

(b) $(T')^{-1} = (T^{-1})'$

(c) $(\lambda T)' = \lambda T'$

Démonstration. Il suffit de vérifier (c) : Soit $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} G((\lambda T)') &= \{(y', x') | y'y = x'x \text{pour} (x, y) \in G(\lambda T)\} \\ &= \{(y', \lambda x') | y'(\lambda y) = (\lambda x')x \text{pour} (x, y) \in G(T)\} \\ &= G(\lambda T'). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.9.3. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors*

(a) $N(T') = R(T)^{\perp}$

(b) $T'(0) = D(T)^{\perp}$

(c) $N(\overline{T}) = R(T')^{\top}$

(d) $\overline{T}(0) = D(T')^{\top}$

Démonstration. Les déclarations en (b) et (d) découlent de (a) et (c), respectivement, en remplaçant T par T^{-1}. Ainsi nous montrons seulement que les deux derniers sont valables.

(a)

$$\begin{aligned} y' \in N(T') &\Leftrightarrow (y', 0) \in G(T') \\ &\Leftrightarrow y'y = 0 \forall y \in R(T) \\ &\Leftrightarrow y' \in R(T)^{\perp}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x \in N(\overline{T}) &\Leftrightarrow (x,0) \in G(\overline{T}) = G(T)^{\perp\top} = G((-T^{-1})')^{\top} = G(-(T')^{-1})^{\top} \\ &\Leftrightarrow x'x = 0 \forall x' \in R(T') \\ &\Leftrightarrow x \in R(T')^{\top}. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.9.4. *Soient $s, T \in LR(X,Y)$. Alors*

(a) $G(S'+T') \subset G((s+T)')$.

(b) $(S+T)'$ *est Une extension de* $S'+T'$ *si et seulement si* $(D(S)\cap D(T))^{\perp} = D(S)^{\perp} + D(T)^{\perp}$.

(c) *Si* $D(T) \subset D(S)$ *et* S *est continus, alors* $s'+T' = (S+T)'$.

Démonstration. **(a)** Soit $(y',x') \in G(S'+T')$. Alors $(y',x'_1) \in G(S')$ et $(y',x'_2) \in G(T')$ où $x'_1 \in S'y'$ et $x'_2 \in T'y'$,$x' = x'_1 + x'_2$. Soit $(x, s+t) \in G(S+T), s \in Sx, t \in Tx$. Alors

$$y'(s+t) - x'x = y's + y't - x'_1x - x'_2x = 0,$$

i.e. $(y',x') \in G((S+T)')$.

(b) Puisque $(S+T)'$ est une extension de $S'+T'$ si et seulement si $(S+T)'(0) = S'(0) + T'(0)$, le résultat Découle de Proposition (2.9.3) (b).

(c) Nous montrons d'abord que les domaines sont égaux. Supposons $y' \in D((S+T)')$.Alors $y'S'(0)+y'T'(0) = y'(S+T)(0) = 0$ et donc, $y'S'(0) = y'T'(0) = 0$. Puisque S est continu, ainsi est $y'S$, et aussi $y'T$ puisque $y'Tx = y'(S+T)x - y'Sx$ pour tout $x \in D(T) \subset D(S)$. Ainsi, $y' \in D(T') \cap D(S') = D(S'+T')$. Puisqu'il résulte de (a) que $D(S'+T') \subset D((S+T)')$, les domaines sont égal. Maintenant $D(S) \supset D(T)$ implique $(D(S)\cap D(T))^{\perp}$, et donc (b) est vrai. Il s'ensuite que $S'+T' = (S+T)'$.

□

Proposition 2.9.5. *Soient $T \in LR(X,Y)$ et $S \in LR(Y,Z)$. Alors*

(a) $G(T'S') \subset G((ST)')$.

(b) *Si soit*

$$\begin{array}{lll} & (1) & R(T') = X' \quad et \quad D(S) \subset R(T) \\ ou & (2) & D(S') = Z' \quad et \quad R(T) \subset D(S) \end{array}$$

alors $(ST)' = T'S'$.

Démonstration. **(a)** Supposons $(z', x') \in G(T'S')$. Alors il existe $y' \in Y'$ telle que $(z', y') \in G(S')$ et $(y', x') \in G(T')$. D'où $z'z = y'y = x'x$ pour tout $(x, z) \in G(ST)$, i.e. $(z', x') \in G((ST)')$.

(b) Supposons que (1) vrai, et soit $(z', x') \in G((ST)')$. Puisque $x' \in X' = R(T')$, il existe $y' \in Y'$ telle que $(y', x') \in G(T')$. Soit $(y, z) \in G(S)$. Alors $y \in D(S) \subset R(T)$, et il existe $x \in D(T)$ telle que $(x, y) \in G(T)$. Ainsi $y'y = x'x$, et puisque $(x, z) \in G(ST), z'z = x'x = y'y$, i.e. $(z', y') \in G(S')$. Il en découle que $(z', x') \in G(T'S')$, et l'égalité découle de (a).

Supposons maintenant que (2) soit vérifiée. Par Proposition (2.9.2) (b) , nous avons que $R((S^{-1})') = Z'$, et $D(T^{-1}) \subset R(S^{-1})$. Ainsi, d'après ce qui a été montré,

$$(T^{-1}S^{-1})' = (S^{-1})'(T^{-1})'.$$

Une autre application de la Proposition (2.9.2) (b) donne le résultat.

$\square$

Notation 4. *Soit E un sous-espace d'un espace linéaire normé X. Soit on note J_E^X l'application d'**injection naturelle** de E dans X, i.e. pour $x \in E, J_E^X x = x \in X$.*

Proposition 2.9.6. *Soit E un sous-espace de X. Alors*

(a) $(J_E^X)' = Q_{E^\perp}^{X'}$.

(b) *Si E est fermé, alors* $(Q_E^X)' = J_{E^\perp}^{X'}$.

Démonstration. **(a)** En appliquant la Proposition (2.4.3), $Q_{E^\perp}^{X'} : X' \to E'$ avec

$$(Q_{E^\perp}^{X'} x')(e) = x'e \tag{2.22}$$

pour $x' \in X'$ et $e \in E$.

De même $(J_E^X)' : X' \to E'$ et

$$((J_E^X)'x')(e) = x'(J_E^X)e = x'e \tag{2.23}$$

Pour $x' \in X'$ et $e \in E$. L'égalité s'ensuite en combinant (2.22) et (2.23).

(b) En appliquant à nouveau la proposition (2.4.3), $(Q_E^X)' : E^{\perp} \to X'$ avec

$$((Q_E^X)'e')(x) = e'(Q_E^X)x = e'x \tag{2.24}$$

pour $x \in X$ et $e' \in E^{\perp}$.

De même $J_{E^{\perp}}^{X'} : E^{\perp} \to X'$ avec

$$(J_{E^{\perp}}^{X'}e')(x) = e'x \tag{2.25}$$

pour $x \in X$ e $e' \in E^{\perp}$. L'égalité s'ensuite en combinant (2.24) et (2.25).

□

Proposition 2.9.7. *Soit $T \in LR(X,Y)$. Alors*

(a) $(Q_T T)' = T' J_{T(0)^{\perp}}^{Y'}$.

(b) $(T J_{D(T)})' = Q_{T'} T'$.

(c) $(Q_T T J_{D(T)})' = Q_{T'} T' J_{T(0)^{\perp}}$.

Démonstration. Ces égalités découlent des applications directes de Propositions (2.9.5) et (2.9.6). □

Corollaire 2.9.1. *Soit $T \in LR(X,Y)$, Alors $D(T') = D((QT)')$. De plus, $T'y' = (QT)'y'$ pour $y \in D(T')$.*

Proposition 2.9.8. *Soit $T \in LR(X,Y)$. Alors*

$$\|T'\| \leq \|T\|.$$

Démonstration. On peut Clairement supposer que $\|T\| < \infty$. Soit $J := J_{D(T)}$ on a de la Proposition (2.9.7) que

$$(QTJ)' = Q_{T'} T' J_{T(0)^{\perp}}. \tag{2.26}$$

D'après la Proposition (2.9.3), le domaine De la relation ci-dessus contient $D(T')$ et donc pour $y' \in D(T')$ On a $(QTJ)'y' = Q_{T'}T'J_{T(0)^\perp}y'$. De plus, $(QTJ)'$ est à valeur Unique puisque QTJ est défini Partout. Ainsi

$$\begin{aligned}\|T'\| = \|Q_{T'}T'J_{T(0)^\perp}\| &= \sup_{y' \in B_{D(T')}} \|(QTJ)'y'\| \\ &\leq \sup_{y' \in B_{D(T')}} \sup_{x \in B_{D(T)}} \|y'(QTJ)x\| \\ &\leq \sup_{y' \in B_{D(T')}} \sup_{x \in B_{D(T)}} \|y'\|\|QTJ\|\|x\| \\ &\leq \|QTJ\| = \|T\|.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.9.9. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors*

$$\gamma(T') \geq \gamma(T).$$

Démonstration. Cela découle de la Proposition (2.9.8) combinée à la Proposition (2.6.3). □

Proposition 2.9.10. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors*

- **(a)** *Si T est continue, alors $D(T') = T(0)^\perp$.*
- **(b)** *Si T est ouvert, alors $R(T') = N(T)^\perp$.*
- **(c)** *Si T est continu, alors $\|T'\| = \|T\|$.*
- **(d)** *Si T est ouvert, alors $\gamma(T') = \gamma(T) > 0$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que (a) et (c) sont valables.

- **(a)** Supposons que T est continue. Alors d'après la Proposition (2.9.8), $(QTJ)'$ est continue, et, par Proposition (2.9.1), son domaine est l'espace entier i.e. $T(0)^\perp$. Ainsi, d'après la Proposition (2.9.7), l'égalité souhaitée est vraie.
- **(c)**

$$\begin{aligned}\|T'\| &= \sup_{y' \in B_{D(T')}} \|(QTJ)'y'\| \\ &= \sup_{y' \in B_{D(T')}} \sup_{x \in B_{D(T)}} \|y'(QTJ)x\| \\ &= \sup_{y' \in B_{T(0)^\perp}} \sup_{x \in B_{D(T)}} \|y'(QTJ)x\| \\ &= \sup_{x \in B_{D(T)}} \|(QTJ)x\| \\ &= \|QTJ\| = \|T\|.\end{aligned}$$

□

2.10 Nullité,Déficience,et l'indice des relations multivoque

Dans cette section, nous montrons que le théorème fondamental de l'algèbre linéaire est valable pour Opérateurs à valeurs multiples (Proposition (2.10.1)) . Nous donnons ensuite une preuve algébrique d'un théorème d'indice pour la composition d'opérateurs à valeurs multiples dans la Proposition (2.10.2).

Nous donnons les relations de dualité entre les dimensions des noyaux et les codimensions des ranges de T et T' dans la Proposition (2.10.3). Ces quantités satisfont également des inégalités importantes lorsqu'une relation ouverte T est perturbée par une autre relation de petite norme convenablement . C'est donné dans une généralisation multivaluée du théorème de petite perturbation classique pour les opérateurs linéaires et ses corollaires au chapitre 3. Ces résultats de perturbation sont central des preuves des différents résultats de stabilité pour les opérateurs de type Fredholm qui sont considérés de plus tard. Nous commençons par quelques définitions.

Définition 2.10.1. *La **nullité** et la **déficience** d'une relation linéaire $T \in LR(X,Y)$ Sont définies respectivement comme suit :*

$$\begin{aligned} \alpha(T) &:= \dim N(T), \quad et \\ \beta(T) &:= codim R(T) := \dim Y/R(T). \end{aligned}$$

La quantité $\overline{\beta}(T)$ est définie comme suit :

$$\beta(T) \quad := \quad codim\overline{R(T)} := \dim Y/\overline{R(T)}.$$

*Si $\alpha(T) < \infty$ ou $\beta(T) < \infty$, alors nous définissons l'**indice** d'une relation linéaire comme suit :*

$$\kappa(T) := \alpha(T) - \beta(T),$$

Où la valeur des différences est considéré comme $\kappa(T) := \infty$ si $\alpha(T)$ est infini et $\beta(T) < \infty$ et $\kappa(T) := -\infty$ si $\beta(T)$ est infini et $\alpha(T) < \infty$.

*L'**indice réduit** $\overline{\kappa}(T)$ d'une relation linéaire est défini de manière analogue :*

$$\overline{\kappa}(T) := \alpha(T) - \overline{\beta}(T).$$

a condition que $\alpha(T) < \infty$ *ou* $\overline{\beta}(T) < \infty$*, et où* $\overline{\kappa}(T) := \infty$ *si* $\alpha(T)$ *est infini et* $\overline{\beta}(T) < \infty$*,* $\overline{\kappa}(T) := -\infty$ *si* $\overline{\beta}(T)$ *est infini et* $\alpha(T) < \infty$*.*

Proposition 2.10.1. *Soit* $T \in LR(X, Y)$*. Alors*

$$\dim D(T) + \dim T(0) = \dim R(T) + \dim N(T).$$

Démonstration. Pour les opérateurs de valeur unique on a l'égalité

$$\dim D(T) = \dim R(T) + \dim N(T) \tag{2.27}$$

Soit $q : Y \to Y/T(0)$ l'application de quotient a de Y sur $Y/T(0)$. Alors qT a une valeur unique avec $D(qT) = D(T)$ et $N(qT) = N(T)$. De plus, qT satisfait l'égalité (2.27). Maintenant

$$\dim R(T) = \dim R(qT) + \dim T(0). \tag{2.28}$$

Ainsi, en combinant (2.27) et (2.28), on a

$$\begin{aligned}
\dim D(T) + \dim T(0) &= \dim D(qT) + \dim T(0) \\
&= \dim R(qT) + \dim N(T) + \dim T(0) \\
&= \dim R(T) + \dim N(T).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.10.2. *Soient* $T \in LR(X, Y)$ *et* $S \in LR(Y, Z)$*. Supposons que* $D(S) = Y$*. Alors*

$$\alpha(ST) + \beta(T) + \beta(S) + \dim(T(0) \cap N(S)) = \beta(ST) + \alpha(T) + \alpha(S). \tag{2.29}$$

Démonstration. Nous supposons d'abord que S est à valeur unique. L'application

$$\begin{aligned}
\eta &: N(ST)/N(T) \to R(T) \cap N(S) \\
\eta[x] &:= Tx \cap N(S)
\end{aligned}$$

est sur et a un inverse à une seule valeur. Ainsi, d'après la Proposition (2.10.1), $\dim N(ST)/N(T) + \dim \eta[0] = \dim(R(T) \cap N(S))$, et donc

$$\dim N(ST) + \dim \eta[0] = \dim(R(T) \cap N(S)) + \dim N(T). \tag{2.30}$$

Soit $A := R(T) \cap N(S)$, et choisissez un sous-espace B telle que $N(S) = A + B, A \cap B = \{0\}$. Ainsi on a que

$$\dim N(S) = \dim A + \dim B. \tag{2.31}$$

De plus $R(T) \cap B = \{0\}$, et on peut choisir un sous-espace C telle que $Y = R(T) + B + C$ et $(R(T) + B) \cap C = \{0\}$. Alors

$$codim R(T) = \dim B + \dim C. \tag{2.32}$$

Maintenant S est une application sur C puisque $N(S) = A + B \subset R(T) + B$. Ainsi $\dim S(C) = \dim C$ et $R(S) = S(R(T) + C) = R(ST) + S(C)$ avec $R(ST) \cap S(C) = S(0) = \{0\}$. Il s'ensuite que $\dim Y/R(S) = \dim Y/(R(ST) + S(C))$ et ainsi,

$$codim R(S) + \dim C = \dim Y/R(ST). \tag{2.33}$$

Par l'égalités (2.30), (2.31), (2.32) et (2.33), on a

$$\begin{aligned} & \alpha(ST) + \dim(T(0) \cap N(S)) + \beta(T) + \beta(S) \dim C \\ = & \dim A + \alpha(T) + \dim B + \dim C + \beta(ST) \\ = & \alpha(S) + \alpha(T) + \beta(ST) + \dim C \end{aligned} \tag{2.34}$$

Maintenant si $\dim C = \infty$, alors $\beta(T) = \infty$ par (2.32) et (2.33) implique que $\beta(ST) = \infty$ et l'égalité, donc, l'équation (2.29) est vrai . Si $\dim C < \infty$, alors soustraire $\dim C$ de l'équation (2.34) donne l'égalité souhaitée.

Pour le cas où S est à valeurs multiples, nous considérons l'opérateur à valeur unique $q_S S : Y \to Z/S(0)$, où $q_S : Z \to Z/S(0)$ est l'application de quotient naturel. Soit D un sous-espace de Z telle que $Z = R(ST) + D$ et $R(ST) \cap D = \{0\}$. Alors $\beta(ST) = \dim D$, et $q_S(Z) = q_S(R(ST)) + q_S(D)$ avec $q_S(R(ST)) \cap q_S(D) = \{0\}$. Maintenant q_S est une application une-une sur D puisque $S(0) \subset R(ST)$. Donc $\dim q_S(D) = \dim D$, et

$$\beta(q_S ST) = \beta(ST).$$

Puisque $N(ST) \subset N(q_S ST) \subset N(q_{ST} ST) = N(ST)$, où $q_{ST} : Z \to Z/ST(0)$ est l'application de quotient naturel, il s'ensuite que

$$\alpha(q_S ST) = \alpha(ST).$$

Il s'ensuite de même que

$$\alpha(qsS) = \alpha(S)$$

et

$$\beta(qsS) = \beta(S).$$

Ainsi, en substituant qsS à S, le résultat découle du cas où S est supposé être à valeur unique. $\square$

Corollaire 2.10.1. *Soient $T \in LR(X, Y)$ et $S \in LR(Y, Z)$. Supposons que $D(S) = Y$ et supposons que T et S sont des indices finis. Alors*

$$\kappa(ST) = \kappa(T) + \kappa(S) - \dim(T(0) \cap N(S)).$$

Lemme 2.10.1. *Soient $S, T \in LR(X, Y)$ et soit S une extension de T telle que* $\dim D(S)/D(T) = n < \infty$.

- **(a)** *Si T est fermé, alors S l'est aussi.*
- **(b)** *Si $T(0)$ est fermé et $R(T)$ est fermé, alors $R(S)$ est fermé.*
- **(c)** *Si T a un indice, alors $\kappa(S) = n + \kappa(T)$.*

Démonstration. **(a)** Par l'hypothèse, $D(S) = D(T) \oplus N$ où $\dim N = n$. Soit $x \in D(T)$, $s \in N$. Si $(x + s, y) \in G(S)$, alors, puisque $S(0) = T(0)$, il en résulte que $y = y_1 + y_2$ où $y_1 \in Sx = Tx$ et $y_2 \in Ss$. Ainsi $(x, y_1) \in G(T)$, $(s, y_2) \in G(S|_N)$ et $(x + s, y) = (x, y_1) + (s, y_2)$. Ainsi, $G(S) = G(T) + G(S|_N)$. De plus, puisque $S(0) = T(0)$, il s'ensuite que

$$G(QS) = G(QT) + G(QS|_N) \tag{2.35}$$

Puisque QS est à valeur unique, $\dim G(QS|_N) \leq \dim N < \infty$. Par conséquent, puisque $G(QT)$ est un sous-espace Fermé, $G(QS)$ est fermé.

(b) Si $R(T)$ et $T(0)$ sont fermés, alors $R(QT)$ est fermé et par (2.35)

$$R(QS) = R(QT) + QS(N) \tag{2.36}$$

Ainsi, puisque $QS(N)$ est de dimension finie, $R(QS)$ est fermé. il s'ensuite que $R(S)$ est fermé.

(c) Si q désigne l'application de quotient définie sur Y avec noyau $T(0)$, alors $\kappa(S) = \kappa(qS)$ et $\kappa(T) = \kappa(qT)$. Il suffit alors de prouver Il énoncé pour le cas où T, et donc S, sont valeur unique, et $n = 1$.

Supposons $N = sp\{x\}$ pour certains $x \in D(S), x \neq 0$, Si $Sx \notin R(T)$, alors $R(S) = R(T) + sp\{w\}$, où $w = Sx$, $N(S) = N(T)$ et, par conséquent, $\beta(T) = \beta(T) + 1$ et $\alpha(T) = \alpha(S)$. Donc $\kappa(S) = \kappa(T) + 1$.

Si $Sx \in R(T)$, alors $R(S) = R(T)$. Ainsi, il existe un non nul $z \in D(T)$ telle que $Sx = Tx = Sz$. Puisque $S(z - x) = 0$ et $z - x \notin D(T)$, il s'ensuite que $N(S) = N(T) + sp\{z - x\}$, i.e. $\alpha(S) = \alpha(T) + 1$. Ainsi $\kappa(S) = \kappa(T) + 1$.

□

Proposition 2.10.3. *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors*

(a) $\alpha(T') = \overline{\beta}(T)$.

(b) $\alpha(T) \leq \overline{\beta}(T')$.

Chapitre 3

Relation linéaire demicompact

3.1 Relations de Fredholm

3.1.1 Généralités et définitions

Définition 3.1.1. *Soit* (X, d_X) *un espace métrique quelconque. Alors, il existe un unique espace métrique complet* $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$ *qui contien* X *comme sous espace dense.* $\widetilde{X}$ *est le* ***complété*** *de* X.

Définition 3.1.2. *Soient* $\widetilde{X}$ *le complété de l'espace normé* X, $T \in LR(X,Y)$. *La relation linéaire* $\widetilde{T}$ *définie sur* $LR(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ *dant son graphe est le complété de* $G(T)$, *est appelée le complété de* T.

Définition 3.1.3. *Soient* $T \in LR(X,Y)$, X_T *l'espace vectoriel normé de* $\mathcal{D}(T)$ *de norme*

$$\|x\|_T = \|x\| + \|Tx\| \ (x \in \mathcal{D}(T)).$$

Soit $G_T \in LR(X_T, X)$ *l'injection de* X_T *dans* X, *c'est-à-dire,* $\mathcal{D}(G_T) = X_T$, $G_T x = x$ $(x \in X_T)$.

Proposition 3.1.1. (i) *Si* $T = 0$, *alors* $\gamma(T) = \gamma(TG_T) = \infty$.
(ii) *Si* $T \neq 0$, *alors*

$$\gamma(TG_T) = \frac{\gamma(T)}{1+\gamma(T)} \quad (\text{où} \frac{\infty}{\infty} := 1).$$

Démonstration. (i) Le résultat découle du définition de $\gamma(T)$.

(ii) Dans ce cas $N(TG_T)$ est un sous espace fermé propre de X_T. Pour tout $x \in X_T$ on a,

$$\begin{aligned} d\,(x, N(TG_T)) &= \inf_{G_T z \in N(T)} \{\|G_T x - G_T z\| + \|TG_T x - TG_T z\|\} \\ &= \inf_{G_T z \in N(T)} \{\|G_T x - G_T z\| + \|TG_T x\|\}\,. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$d(x, N(TG_T)) = d(G_T x, N(TG_T)) + \|TG_T x\|.$$

Maintenant, on montre que

$$\gamma(TG_T) \leq \frac{\gamma(T)}{1+\gamma(T)}.$$

Si $\gamma(TG_T) = 0$, alors on a le résultat. Supposons que $\gamma(TG_T) > 0$ et on choisi λ dans l'intervalle $[0, \gamma(TG_T)]$. Alors, d'après la définition de $\gamma(TG_T)$ on a,

$$\|TG_T x\| \geq \lambda(d(G_T x, N(T)) + \|TG_T x\|),$$

d'où

$$\|TG_T x\| \geq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(G_T x, N(T)) \quad (G_T x \notin N(T)).$$

Puisque, $\lambda \in [0, \gamma(TG_T)]$ a été choisi arbitrairement il s'ensuit que,

$$\gamma(T) \geq \frac{\gamma(TG_T)}{1-\gamma(TG_T)}.$$

Il ne reste plus qu'à prouver l'inégalité inverse. Si $\gamma(T) = 0$, on a le résultat. Supposons que $\gamma(TG_T) > 0$ et on choisi une suite croissante $(\delta_n)_n \subset [0, 1]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n}{1-\delta_n} = \gamma(T).$$

Puisque $\gamma(T) > \dfrac{\delta_n}{1-\delta_n} > 0$ on a,

$$\|TG_T x\| \geq \frac{\delta_n}{1-\delta_n} d(G_T x, N(T))$$

pour chaque $x \in X_T$ et chaque $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\|TG_T x\| \geq \delta_n(d(G_T x, N(T)) + \|TG_T x\|)$$

pour chaque $x \in X_T$ et chaque $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que, $\gamma(TG_T) \geq \delta_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Ansi,

$$\gamma(TG_T) \geq \delta_n = \frac{\dfrac{\delta_n}{1-\delta_n}}{1+\dfrac{\delta_n}{1-\delta_n}}.$$

On fait tendre $n \to \infty$, on trouve le résultat. $\square$

Définition 3.1.4. (i) *La dimension du noyau d'une relation linéaire T est appelé **nullité** de T et est notée par :*

$$\alpha(T) = \dim N(T).$$

(ii) *La codimension de l'image d'une relation linéaire T est appelé **déficience** de T et est notée par :*

$$\beta(T) = codimR(T) = \dim Y/R(T).$$

*Si $\alpha(T)$ est finie ou/et $\beta(T)$ est finie, alors on appelle **indice** de T le nombre :*

$$ill\ i(T) = \alpha(T) - \beta(T) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}.ill$$

Remarque 17. *Pour un sous espace vectoriel fermé E de X donné, on a $i(Q_E^X) = dimE$. En effet, il est claire que $N(Q_E^X) = dimE$ et $R(Q_E^X) = X/E$. Par conséquent, $\alpha(Q_E^X) = dimE$ et $\beta(Q_E^X) = 0$.*

Définition 3.1.5. *Soit $T \in LR(X,Y)$.*

(i) *On dit T est **sur-semi-Fredholm**, s'il existe un sous espace fermé M de X de codimension finie tel que l'inverse de la restriction $T|_M$ est continue et uni-valeur.*

On note par $F_+(X,Y)$ ou simplement F_+ l'ensemble des relations sur-semi-Fredholm.

(ii) *On dit que T est **sous-semi-Fredholm**, si l'adjoint $T^{'}$ est une relation sur-semi-Fredholm. On note par $F_-(X,Y)$ ou simplement F_- l'ensemble des relations sous-semi-Fredholm.*

(iii)*On note $F(X,Y) = F_+(X,Y) \cap F_-(X,Y)$ l'ensemble des **relations de Fredholm**.*

(iv) *Dans le cas où X et Y sont des espaces de Banach, nous étendons les classes d'opérateurs fermés de type Fredholm à valeur unique fermés précédemment afin d'inclure les opérateurs fermés à valeurs multiples, et notons que les définitions des classes $F_+(X,Y)$,*

$F_-(X,Y)$ et $F(X,Y)$ sont respectivement compatibles avec

$\Phi_+(X,Y) = \{T \in CR(X,Y) : \alpha(T) < \infty$ *et* $R(T)$ *est fermé dans* $Y\}$,

$\Phi_-(X,Y) = \{T \in CR(X,Y) : \beta(T) < \infty$ *et* $R(T)$ *est fermé dans* $Y\}$, *et*

$\Phi\ (X,Y)\ = \Phi_+(X,Y) \cap \Phi_-(X,Y)$.

Si $X = Y$, alors $\Phi_+(X,Y), \Phi_-(X,Y)$ et $\Phi(X,Y)$ sont respectivement remplacée par $\Phi_+(X), \Phi_-(X)$ et $\Phi(X)$.

Remarque 18. *(i) $T \in F_+(X,Y) \iff Q_T T \in F_+(X,Y)$. En effet, si T admet un sous espace fermé M de X de codimension finie tel que l'inverse de la restriction $T|_M$ est continue et uni-valeur, alors d'après Proposition (**??**), $Q_T T$ vérifie les même propriétés.*
(ii) $T \in F_-(X,Y) \iff Q_T T \in F_-(X,Y)$. En effet, $(Q_T T)'$ vérifie les même propriétés de T'.

3.1.2 Propriétés

Proposition 3.1.2. *Soit $T \in F_+(X,Y)$. Alors, toute suite borné $(x_n)_n$ dans $\mathcal{D}(T)$ tel que Tx_n est de Cauchy, admet une sous suite de Cauchy.*

Démonstration. On remplace T par $Q_T T$ s'il est nécessaire, on peut supposer que T est uni-valeur. Il existe une projecton borné P définie sur $\mathcal{D}(T)$ avec $R(I-P) < \infty$ et $T|_{R(P)}$ est injective et ouverte. Soit $(x_n)_n$ un suite qui satisfait $\|T(x_n - x_m)\| = f(n,m)$ où $f(n,m) \underset{n,m\to+\infty}{\rightarrow} 0$. Puisque $T|_{R(I-P)}$ est continue, la suite $T(I-P)x_n$ est borné dans l'espace de dimension finie $R(T(I-P))$. On choisi une sous suite $(x_{k_n})_n$ de $(x_n)_n$ tel que $(I-P)x_{k_n}$ est de Cauchy. Alors,

$$\|TP(x_{k_n} - x_{k_m})\| \leq \|T(x_{k_n} - x_{k_m})\| + \|T(I-P)(x_{k_n} - x_{k_m})\| \underset{n,m\to+\infty}{\rightarrow} 0.$$

Par conséquent $(TPx_{k_n})_n$ est de Cauchy. On a,

$$\|TP(x_{k_n} - x_{k_m})\| \geq \gamma(T|_{R(P)})\|P(x_{k_n} - x_{k_m})\|$$

puisque, $T|_{R(P)}$ est injective. Donc, $P(x_{k_n})$ est de Cauchy. On choisi une sous suite $(w_n)_n$ de $(x_{k_n})_n$ tel que $(I-P)w_n$ est de Cauchy. Alors, $(w_n)_n = (Pw_n + (I-P)w_n)_n$ est de Cauchy. $\square$

Théorème 3.1.1. *Les propriétées suivantes sont équivalente :*
(i) $T \notin F_+(X,Y)$.
(ii) *Il existe un sous-ensemble borné non-précompact W de $\mathcal{D}(T)$ tel que $Q_T(W)$ est précompact.*
(iii) *T admet une suite singulier c'est-à-dire, la suite $(x_n)_n$ de norme un élément de $\mathcal{D}(T)$ tel que $(x_n)_n$ n'a pas de sous suite de Cauchy et $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| = 0$.*

Démonstration. $(iii) \Rightarrow (ii)$ On a $(x_n)_n$ est une suite de norme un élément de $\mathcal{D}(T)$ tel que $(x_n)_n$ n'a pas de sous suite de Cauchy. Donc, il existe un sous-ensemble borné non-précompact W de $\mathcal{D}(T)$. Or on a $\lim_{n\to\infty} \|Q_T T x_n\| = \|Tx_n\| = 0$. D'où, $Q_T(W)$ est précompact.
$(ii) \Rightarrow (i)$ D'après Proposition (3.1.2), on trouve le résultat.
$(i) \Rightarrow (iii)$ D'après Remarque (18) (i), on peut supposer que T est uni-valeur. On considère le cas où T est borné. Dans ce cas $\widetilde{T}$ est borné et uni-valeur, et le noyau de $\widetilde{T}$ est de dimension finie et son image est fermé. En première partie on montre l'existence d'une suite singulier de $\widetilde{T}$. D'après Théorème V.1.6 cross[16], il existe un sous espace de dimension infinie de $\widetilde{X}$ noté M tel que $\widetilde{T}|_M$ est compact. En autre on peut supposer que M est fermé (comme $\widetilde{T}$ est continue). Si $M \cap N(\widetilde{T})$ est de dimension infinie, alors $\widetilde{T}$ admet une suite singulier. D'autre part, il existe un sous espace de dimension infinie N de M avec $N \cap N(\widetilde{T}) = \{0\}$. Soit $(x_n)_n$ une suite de N de norme 1 tel que $\|\widetilde{T}x_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Alors, $(x_n)_n$ n'admet pas une sous suite de Cauchy. Passant à T, on choisi $(z_n)_n \subset \mathcal{D}(T)$ de $\|z_n\| = 1$ et $\|z_n - x_n\| < \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On observe dans ce cas que $(x_n)_n$ est une suite singulier de $\widetilde{T}$ si, et seulement si, $(z_n)_n$ est une suite singulier de T. Ainsi, $(i) \Rightarrow (iii)$ si T est borné. Finalement d'après Proposition (3.1.1), on observe que $T \notin F_+(X,Y)$ si, et seulement si, $TG_T \notin F_+(X,Y)$ et danc TG_T admet une suite singulier $(z_n)_n$ par ce que nous venons de vérifier. Puisque $TG_T z_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ il est claire que si $(z_n)_n$ n'admet pas une sous suite de Cauchy (par rapport à $\|.\|_T$), alors on a la même chose est vraie pour $G_T z_n$, avec en plus $\|G_T z_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Alors, puisque $(\|G_T z_n\|^{-1}) T G_T z_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, il s'ensuit que $(\|G_T z_n\|^{-1} G_T z_n)_n$ est une suite singulier de T. $\square$

Théorème 3.1.2. *Soient X un espace de Banach, Y un espace normé et $T \in LR(X,Y)$. Alors, les propriétées suivantes sont équivalentes :*
(i) T est sur semi-Fredholm.
(ii) Il existe un opérateur borné A et l'opérateur de projection borné de rang finie P tel que $AT = I_{\mathcal{D}(T)} - P$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ On remplace T par $Q_T T$ s'il est nécessaire on peut supposer que T est uni-valeur. Il existe un opérateur partiellement continue S de domaine $R(T)$ et un opérateur continue de rang finie F_1 tel que

$$ST = I_{\mathcal{D}(T)} + F_1.$$

Puisque X est complet, $S = C + F_2$ où C est borné et F_2 est de rang finie. On a

$$CT = I_{\mathcal{D}(T)} + F_3$$

où $F_3 = F_1 - F_2 T$. Soit P_1 une projection borné définie sur X, de noyau $R(F_3)$. Alors,

$$P_1 CT = I_{\mathcal{D}(T)} + (P_1 - I_X).$$

Par conséquent on pose $A = P_1 C, P = (P_1 - I_X)$, on a

$$AT = I_{\mathcal{D}(T)} + P.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soit M un sous espace de codimension finie de $R(T) = R(T) \cap \mathcal{D}(A)$ tel que $A|_M$ est continue. Puisque $AT \in F_+(X,Y)$, alors on a

$$\dim N(T) \leq \dim N(AT) < \infty.$$

Par conséquent $T^{-1}(M)$ est de codimension finie dans $\mathcal{D}(AT) = \mathcal{D}(T)$. En autre puisque $ATT^{-1}m = Am + AT(0) = Am$ $(m \in M)$, on a

$$AT|_{T^{-1}(M)} = (A|_M)(T|_{T^{-1}M})$$

où $A|_M$ est continue. On suppose que $T \notin F_+(X,Y)$. Alors, $T|_{T^{-1}(M)} \notin F_+(X,Y)$ $(T^{-1}(M)$ est de codimension finie). D'après Théorème (3.1.1), $T|_{T^{-1}(M)}$ admet une suite singulier $(x_n)_n$. D'après la contunuité de $A|_M$, $\|ATx_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, $(x_n)_n$ est une suite singulier de AT. Mais alors $AT \notin F_+(X,Y)$ (Théorème (3.1.1)). Cette contraduction montre que $T \in F_+(X,Y)$. □

Proposition 3.1.3. [25, Proposition 5.9.2] *Soit* $T \in F_+(X,Y)$. *Alors, toute suite bornée* $(x_n)_n$ *dans* $\mathcal{D}(T)$ *tel que* $(Q_T T x_n)_n$ *est une suite de Cauchy admet une sous suite de Cauchy.*

Démonstration. soit $(x_n)_n$ une suite borné de $\mathcal{D}(T)$ tel que $(Q_T T x_n)_n$ est de cauchy. On commence par montrer le résultat dans le cas où $\widetilde{T}$ est uni-valeur. D'après Proposition (3.1.2), il existe un opérateur de projection P continue avec $\mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(\widetilde{T})$, $R(P)$ est fermé de codimension finie $\dim N(P) < \infty$ et $\widetilde{T}|_{R(P)}$ est injective et ouverte. Puisque, $N(P) = R(I-P)$ est de dimension finie, $\widetilde{T}|R(I-P)$ est continue, et la suite $(\widetilde{T}(I-P)x_n)_n$ est borné dans l'espace de dimension finie $R(\widetilde{T}(I-P))$. On choisi une sous suite $(x_{k_n})_n$ de $(x_n)_n$ tel que $\widetilde{T}(I-P)x_{k_n}$ est de Cauchy. Alors,

$$\|\widetilde{T}P(x_{k_n} - x_{k_m})\| \leq \|\widetilde{T}(x_{k_n} - x_{k_m})\| + \|\widetilde{T}(I-P)(x_{k_n} - x_{k_m})\| \underset{n,m\to+\infty}{\to} 0.$$

Par conséquent, $(\widetilde{T}Px_{k_n})_n$ est de Cauchy. On a

$$\|\widetilde{T}P(x_{k_n} - x_{k_m})\| \geq \gamma(\widetilde{T}|_{R(P)})\|P(x_{k_n} - x_{k_m})\|$$

puisque $\widetilde{T}|_{R(P)}$ est injective. Donc, $P(x_{k_n})$ est de Cauchy. On choisi une sous suite $(w_n)_n$ de $(x_{k_n})_n$ tel que $(I-P)w_n$ est de Cauchy. Alors, $(w_n)_n = (Pw_n + (I-P)w_n)_n$ est de Cauchy. Puisque, $\|Q_T Tx\| \geq \|Q_{\widetilde{T}}\widetilde{T}x\|$, $x \in \mathcal{D}(T)$ il s'ensuit que, si $(Q_T T x_n)_n$ est de Cauchy, alors $(Q_{\widetilde{T}}\widetilde{T}x_n)_n$ est aussi de Cauchy. Par conséquent, on remplace $\widetilde{T}$ par $Q_{\widetilde{T}}\widetilde{T}x$, il résulte de ce qui précède que le résultat est valable pour le cas multivalué. □

3.2 Relations linéaires demicompactes

La notions fait dans ce travail se trouve dans les de articles[1] [3] [2]

Définition 3.2.1. *Soient* X *un espace de Banach et* $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to X$ *une relation linéaire. On dit que* T *est* ***demicompact*** *si pour tout suite borné* $(x_n)_n$ *dans* $\mathcal{D}(T)$ *tel que*

$$Q_{I-T}(I-T)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y \in X/\overline{(I-T)(0)},$$

alors $(Q_T x_n)_n$ *admet une sous suite convergente.*

Notation 5. *On note l'ensemble des relations linéaires demicompact sur* X *par :* $\mathcal{DKR}(X)$.

Remarque 19. *La relation* $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to X$ *est demicompact si et seulement si pour tout suite bornée* $(x_n)_n$ *dans* $\mathcal{D}(T)$ *tel que* $Q_T x_n - Q_T T x_n \to y \in X/_{\overline{T(0)}}$ *il existe une sous suite convergente de* $(Q_T x_n)_n$. *L'assertion ((3.1)) est équivalente à* $Q_T x_n - Q_T T x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y \in X/\overline{T(0)}$. *En effet, on a* $T(0)$ *est un sous espaces vectoriel de* X, *alors* $(I - T)(0) = -T(0) = T(0)$. *Donc,*

$$Q_{I-T}(I - T) = Q_T(I - T) = Q_T - Q_T(T).$$

$$(I - T)(0) = -T(0) = T(0)$$

$$Q_{I-T}(I - T) = Q_T(I - T) = Q_T - Q_T(T).$$

3.2.1 Propriétés des relations linéaires demicompactes

Proposition 3.2.1. *Soit* X *un espace de Banach. Si* $T \in LR(X)$ *tel que* $\overline{T(0)}$ *est compact, alors* T *est demicompact si, et seulement si, pour tout suite bornée* $(x_n)_n$ *dans* $\mathcal{D}(T)$ *tel que* $Q_T(x_n - Tx_n) \underset{n\to+\infty}{\to} y \in X/\overline{T(0)}$, $(x_n)_n$ *admet une sous suite convergente.*

Démonstration. " $\Rightarrow$ " T est demicompact, alors pour tout suite bornée $(x_n)_n$ dans $\mathcal{D}(T)$ tel que $Q_T(x_n - Tx_n) \underset{n\to+\infty}{\to} y \in X/\overline{T(0)}$, on a $(Q_T x_n)_n$ admet une une sous suite convergente $((Q_T x_{\varphi(n)})_n)_n$. (ii), on a $(Q_{\overline{T(0)}} x_{\varphi(n)})_n = (Q_T x_{\varphi(n)})_n$ et $\overline{T(0)}$ est compact, donc $(x_{\varphi(n)})_n$ admet une sous suite convergente. Par suite $(x_n)_n$ admet une sous suite convergente.
" $\Leftarrow$ " Si pour tout suite bornée $(x_n)_n$ dans $\mathcal{D}(T)$ tel que $Q_T(x_n - Tx_n) \underset{n\to+\infty}{\to} y \in X/\overline{T(0)}$, $(x_n)_n$ admet une sous suite convergente $(x_{\varphi(n)})_n$. On a $(x_{\varphi(n)})_n$ est convergente et $\overline{T(0)}$ est fermé, (i), $(Q_{\overline{T(0)}} x_{\varphi(n)})_n = (Q_T x_{\varphi(n)})_n$ est convergente. D'où, T est demicompact. $\square$

Théorème 3.2.1 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *Un espace métrisable X est compact (au sens de l'axiome de Borel-Lebesgue) si, et seulement si, toute suite d'éléments de X admet une valeur d'adhérence dans X ou, de manière équivalente, admet une sous-suite qui converge vers un élément de X.*

Théorème 3.2.2. *Si $T \in \mathcal{K}R(X)$ alors $T \in D\mathcal{K}R(X)$.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de $\mathcal{D}(T)$ tel que

$$Q_T(x_n - Tx_n) \quad = \quad (Q_T(x_n) - Q_T Tx_n) \underset{n \to +\infty}{\to} y_0.$$

On a $(x_n)_n$ est bornée, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\|x_n\| \leq M$. Alors, on a $\frac{1}{M}\|x_n\| \leq 1$, et par suite $\frac{1}{M}x_n \in B_X$ où $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Par conséquent $\frac{1}{M}Q_T x_n \in Q_T B_X$. Or T est compact, c'est-à-dire, $\overline{Q_T B_X}$ est compact. Donc d'après Théorèm de Bolzano-Weierstrass, $(\frac{1}{M}Q_T x_n)_n$ admet une une sous suite $((\frac{1}{M}Q_T x_{\varphi(n)})_n)_n$ qui converge vers y_1. Donc $(Q_T x_{\varphi(n)})_n$ converge vers $y_0 + My_1$. □

Démonstration. On a,

$$\|F\| = \|K + F - F\| \leq \|K\| + \|F - F\| = \|K\| \leq \infty,$$

donc F est continue et on a $\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(K) = X$. D'où, F est borné. D'autre part,

$$Q_F F = Q_F(K + F - F) = Q_F K$$

et on a K compact, donc $Q_F F$ est compact. D'où, F est compact. Puisque K fermé et $\dim F(0) < \infty$, alors, $Q_{F(0)}K = Q_F K = Q_F F$ est fermé. Or $F(0)$ est fermé. Alors, F est fermé. □

Remarque 20. *La réciproque du Théorème* (3.2.2) *n'est pas toujours vrai. En effet, $-I$ est un opérateur demicompact mais n'est pas compacte en dimension infini.*

Lemme 3.2.1. *Soit D un sous espace vectoriel fermé de X . Si $(x_n)_n$ est une suite convergente dans X alors $Q_D x_n$ est aussi une suite convergente.*

Démonstration. Soit D un sous espace fermé de X et soit $(x_n)_n$ une suite convergente vers x donc d'après la continuité de Q_D on a $(Q_D x_n)_n$ converge vers $Q_D x$. □

Lemme 3.2.2. *Soit D un sous espace vectoriel compact de X. Soit $(x_n)_n$ une suite de X tel que $(Q_D x_n)_n$ est une suite convergente alors $(x_n)_n$ admet une sous suite convergente.*

Démonstration. Soit D un sous espace vectoriel compact de X et soit $(x_n)_n$ une suite dans X tel que $(Q_D x_n)_n$ converge vers $Q_D x \in X/_D$, $x \in X$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \ \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N_1$,

$$\|Q_D x_n - Q_D x\| \;=\; \|Q_D(x_n - x)\| \leq \varepsilon/2$$

i.e , $d(x_n - x, D) \leq \varepsilon/2$ or D est compact alors il existe $(d_n)_n \in D$ tel que

$$d(x_n - x, D) \;=\; \|x_n - x - d_n\|$$

en autre d'après la compacité de D, $(d_n)_n$ admet une sous suite $(d_{\varphi(n)})_n$ convergente vers $d \in D$. Donc pour $\varepsilon/2 > 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \geq N_2$ $\|d_{\varphi(n)} - d\| \leq \varepsilon/2$, finalement pour $n \geq \sup(N_1, N_2)$ on obtien

$$\begin{aligned}\|x_{\varphi(n)} - x - d\| &\leq \|x_{\varphi(n)} - x - d_{\varphi(n)}\| + \|d_{\varphi(n)} - d\| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

alors $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers $x + d$. $\square$

Théorème 3.2.3. *Soit $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \longrightarrow X$ une relation linéaire. Si $I - Q_T$ est compact, alors T est demicompact si, et seulement si, $Q_T T$ est demicompact.*

Démonstration. " $\Rightarrow$ " Soit $(x_n)_n$ une suite borné de $\mathcal{D}(T)$ tel que $x_n - Q_T T x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$. On a

$$x_n - Q_T T x_n = (I - Q_T)x_n + Q_T x_n - Q_T T x_n.$$

Or $I - Q_T$ est compact et $(x_n - Q_T T x_n)_n$ est une suite convergente, donc d'après (3.1), on a $(Q_T x_n - Q_T T x_n)_n$ admet une sous suite convergente. On ajoute que T est demicompact a ce qui précède on obtien que $(Q_T x_n)_n$ admet une sous suite convergente. En autre on a

$$x_n = x_n - Q_T x_n + Q_T x_n = (I - Q_T)x_n + Q_T x_n.$$

Puisque $I - Q_T$ est et $(Q_T x_n)_n$ admet une sous suite convergente, ainsi $(x_n)_n$ admet une sous suite convergente.

" $\Leftarrow$ " Soit $(x_n)_n$ une suite borné de $\mathcal{D}(T)$ tel que $Q_T x_n - Q_T T x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$. On a

$$Q_T x_n - Q_T T x_n = -(I - Q_T)x_n + x_n - Q_T T x_n.$$

On ajoute a l'équation (3.1) que Q_TT est demicompact et que $(Q_Tx_n - Q_TTx_n)_n$ est une suite convergente on trouve que $(x_n - Q_TTx_n)_n$ admet une sous suite convergente. Or Q_TT est demicompact et $(x_n - Q_TTx_n)_n$ admet une sous suite convergente, donc $(x_n)_n$ admet une sous suite convergente. En plus on a

$$Q_Tx_n = Q_Tx_n - x_n + x_n = -(I - Q_T)x_n + x_n,$$

et on a $I - Q_T$ est compact, ainsi $(Q_Tx_n)_n$ admet une sous suite convergente. □

Proposition 3.2.2. *Soient $\mu \in \mathbb{C}^*$ et $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \longrightarrow X$ une relation linéaire a domaine dense tel que $\|Tx\| \leq |\mu|\|Q_Tx\|$ pour tout $x \in \mathcal{D}(T)$. Si $|\mu| < 1$, alors T est une relation linéaire demicompact.*

Démonstration. Puisque

$$\begin{array}{rcl} \|Tx\| & \leq & |\mu|\|Q_Tx\| \\ -\|Tx\| & \geq & -|\mu|\|Q_Tx\| \\ \|Q_Tx\| - \|Tx\| & \geq & (1 - |\mu|)\|Q_Tx\| \end{array}$$

$$\|Q_Tx\| \leq \frac{\|Q_T(I-T)x\|}{1-|\mu|}.$$

Soit $(x_n)_n$ une suite borné de $\mathcal{D}(T)$ tel que $Q_T(I-T)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$. On applique (3.1) on obtien $\|Q_T(x_n - y)\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc $(Q_T(x_n))_n$ admet une sous suite convergente. □

Théorème 3.2.4. *Soit $T \in LR(X)$ tel que $N(I-T)$ est compact, $R(I-T)$ est fermé et $I - T$ est ouverte, alors T est demicompact.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de $\mathcal{D}(T)$ tel que $Q_T(I-T)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} Q_Tx_0$. on a $Q_T(I-T)$ est ouverte et $N(Q_T(I-T)) = N(I-T)$ (car on a $I-T$ ouverte et $(I-T)^{-1}(0) = N(I-T)$ fermé). Alors, $Q_{N(I-T)}(Q_T(I-T))^{-1}$ est une relation uni-valeur (c'est un opérateur). En effet,

$$\begin{array}{rcl} Q_{N(I-T)}(Q_T(I-T))^{-1}(0) & = & Q_{N(I-T)}N(Q_T(I-T)) \\ & = & Q_{N(I-T)}N(I-T) \\ & = & \{0\}. \end{array}$$

On a,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(Q_{N(I-T)}(Q_T(I-T))^{-1}) &= \{y \in X/\overline{T(0)} : (Q_T(I-T))^{-1}(y) \cap D(Q_{N(I-T)}) \neq \emptyset\} \\
&= \{y \in X/\overline{T(0)} : (Q_T(I-T))^{-1}(y) \cap X \neq \emptyset\} \\
&= \{y \in X/\overline{T(0)} : (Q_T(I-T))^{-1}(y) \neq \emptyset\} \\
&= \mathcal{D}((Q_T(I-T))^{-1}) \\
&= R(Q_T(I-T)) \\
&= R(I-T)/\overline{T(0)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{N(I-T)}(Q_T(I-T))^{-1}(Q_T(I-T))x_n &= Q_{N(I-T)}((Q_T(I-T))^{-1}(0) + x_n) \\
&= Q_{N(I-T)}(N(Q_T(I-T)) + x_n) \\
&= Q_{N(I-T)}(N(I-T) + x_n) \\
&= Q_{N(I-T)}(x_n).
\end{aligned}$$

$$Q_{N(I-T)}(Q_T(I-T))^{-1}(Q_T x_0) = Q_{N(I-T)}((I-T)^{-1}Q_T^{-1}(Q_T x_0)),$$

$$\begin{aligned}
Q_{N(I-T)}((I-T)^{-1}Q_T^{-1}(Q_T x_0)) &= Q_{N(I-T)}((I-T)^{-1}(Q_T^{-1}(0) + x_0) \\
&= Q_{N(I-T)}((I-T)^{-1}(x_0) + (I-T)^{-1}(Q_T^{-1}(0)))
\end{aligned}$$

puis d'après Remarque (17), on a

$$\begin{aligned}
Q_{N(I-T)}((I-T)^{-1}(x_0) + (I-T)^{-1}(Q_T^{-1}(0))) &= Q_{N(I-T)}((I-T)^{-1}(x_0) + Q_T((I-T)^{-1}(0))) \\
&= Q_{N(I-T)}((I-T)^{-1}(x_0) + N(Q_T(I-T))) \\
&= Q_{N(I-T)}((I-T)^{-1}(x_0) + N(I-T)) \\
&= Q_{N(I-T)}((I-T)^{-1}(x_0)).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.2.1. *Soient X est un espace complet, $T \in CR(X)$. Si $1 \in \rho(T)$ alors T est demicompact.*

Démonstration. $1 \in \rho(T)$, $(I-T)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné de X. Donc $(I-T)^{-1}$ est continue et par suite $I-T$ est ouverte. (ii), on a $R(I-T)$ est fermé. $(I-T)^{-1}(0) = 0 = N(I-T)$ est compact. Alors, T est demicompact. $\square$

Théorème 3.2.5. *Soit $T \in LR(X)$ tel que $\overline{T(0)}$ est compact. Si T est demicompact, alors $I-T \in F_+(X,Y)$.*

Démonstration. Supposons que $I-T \notin F_+(X,Y)$. D'après Théorème (3.1.1), $I-T$ admet une suite singulier c'est-à-dire, la suite $(x_n)_n$ de norme un élément de $\mathcal{D}(T)$ tel que $(x_n)_n$ n'a pas de sous suite de cauchy et $\lim\limits_{n\to\infty} \|(I-T)x_n\| = 0$. Mais

$$\|(I-T)x_n\| = \|Q_{I-T}(I-T)x_n\| = \|Q_T(I-T)x_n\|,$$

alors $(Q_T(I-T)x_n)_n$ converge vers 0. Puisque T est demicompact, alors $(Q_T x_n)_n$ admet une sous suite convergente. D'après Lemme (3.2.2), $(x_n)_n$ admet une sous suite convergente ceci contredit le fait que $(x_n)_n$ n'admet pas une sous suite de Cauchy. Alors, $I-T \in F_+(X,Y)$. $\square$

Théorème 3.2.6. *Soient X un espace de Banach, $T \in LR(X)$. Si $I-T \in F_+(X,Y)$, alors T est demicompact.*

Démonstration. Supposons que $I-T \in F_+(X,Y)$. D'après Remarque (18),

$$Q_{I-T}(I-T) = Q_T(I-T) \in F_+(X,Y).$$

Alors, en utilisons Théorème (3.1.2), il existe un opérateur linéaire borné A et l'opérateur de projection borné de rang finie P tel que

$$AQ_T(I-T) = I_{\mathcal{D}(T)} - P.$$

Si $(x_n)_n$ dans $\mathcal{D}(T)$ une suite borné tel que

$$Q_T(I-T)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y \in X/\overline{T(0)},$$

alors $AQ_T(I-T)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} Ay$. Par conséquent,

$$x_n - Px_n \underset{n\to+\infty}{\to} Ay.$$

Puisque P est compact, alors d'après Théorème (3.2.2), P est demicompact. Donc $(x_n)_n$ admet une sous suite convergente. $\square$

Remarque 21. *On peut montrer Théorème* (3.2.6) *d'une autre manière. Effectivement supposons que* $I - T \in F_+(X,Y)$ *et* $(x_n)_n$ *dans* $\mathcal{D}(T)$ *est une suite bornée telle que* $Q_T(I - T)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y \in X/\overline{T(0)}$. *on obtient que* $(x_n)_n$ *admet une sous suite de cauchy. Puisque* X *est complet,* $(x_n)_n$ *admet une sous suite convergente.*

Corollaire 3.2.2. *Soient* X *est un espace de Banach,* $T \in LR(X)$ *tel que* $\overline{T(0)}$ *est compact.* T *est demicompact si, et seulement si,* $I - T \in F_+(X,Y)$.

Démonstration. " $\Rightarrow$ " Si T est demicompact, alors d'après Théorème (3.2.5), on a $I - T \in F_+(X,Y)$. " $\Leftarrow$ " Si $I - T \in F_+(X,Y)$, alors d'après Théorème (3.2.6), on a T est demicompact. □

3.3 Relations linéaires relativement demicompactes

Définition 3.3.1. *Soient* X *et* Y *deux espace de Banach. Si* $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \longrightarrow Y$ *et* $S : \mathcal{D}(S) \subseteq X \longrightarrow Y$ *sont deux relations linéaires de domaine dense avec* $S(0) \subseteq T(0)$ *et* $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$, *alors* T *est dit* ***S-demicompact*** (*ou* ***relativement demicompact*** *par rapport à* S), *si pour toute suite bornée* $(x_n)_n$ *dans* $\mathcal{D}(T)$ *tel que*

$$Q_{S-T}(S-T)x_n = Q_T(S-T)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y \in X/\overline{T(0)},$$

alors $(Q_T S x_n)_n$ *admet une sous suite convergente.*

Notation 6. *On note l'ensemle des relations linéaires relativement demicompact par rapport à* S *de* X *dans* Y *par :* $DKR_S(X)$.

Remarques 3.3.1. (*i*) *Pour* $S = I$, *on revient au définition de demicompact.*
(*ii*) *Dans le cas où* $\mathcal{D}(T)$ *est inclu dans un sous espace de dimension fini de* X *la condition de relativement demicompact est automatiquement satisfaite. En efftet,* (*iii*) T *est continue. Donc,* $Q_T T$ *est continue. Par conséquent, pour toute suite bornée* $(x_n)_n$ *dans* $\mathcal{D}(T)$ $Q_T T(x_n)$ *est borné.*

Lemme 3.3.1. *Soient* $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \longrightarrow Y$ *une relation linéaire et* $S : \mathcal{D}(S) \subseteq X \longrightarrow Y$ *une relation linéaire continue. Si* $Q_S - Q_T$ *est compact, alors* T *est* S*-demicompact si, et seulement si,* $Q_T T$ *est* $Q_S S$*-demicompact si, et seulement si,* $Q_T T$ *est* $Q_T S$*-demicompact.*

Démonstration. " $\Rightarrow$ " Soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(Q_T T)$ tel que $Q_T S(x_n) - Q_T T(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} x \in X$ □

Proposition 3.3.1. *Soient $T, T_1 : \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T_1) \subseteq X \longrightarrow Y$ deux relations linéaires a domaine dense et $S : \mathcal{D}(S) \subseteq X \longrightarrow Y$ une relation linéaire fermée a domaine dense avec $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$ et $S(0) \subseteq T_1(0) \subseteq T(0)$. On suppose que T_1 est S-demicompact et il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$ et pour tout $x \in \mathcal{D}(T)$*

$$\|Tx - T_1x + Sx - Sx\| \leq |a|\|Sx - Tx\| + |b|\|Sx - T_1x\|.$$

Alors, T est une relation linéaire S-demicompact.

Démonstration. Puisque,

$$\begin{aligned}
\|Sx - T_1x\| - \|Sx - Tx\| &\leq \|Tx - T_1x + Sx - Sx\| \\
\|Sx - T_1x\| - \|Sx - Tx\| &\leq |a|\|Sx - Tx\| + |b|\|Sx - T_1x\| \\
(1 - |b|)\|Sx - T_1x\| &\leq (1 + |a|)\|Sx - Tx\|
\end{aligned}$$

$$\|Sx - T_1x\| \leq (\frac{1 + |a|}{1 - |b|})\|Sx - Tx\|.$$

On prend une suite bornée $(x_n)_n$ de $\mathcal{D}(T)$ tel que $Q_T(S-T)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$. On applique ((3.1)) on obtien, $\|Q_{T_1}(S - T_1)(x_n - y)\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc, $Q_{T_1}(S - T_1)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$, et on utilise le fait que T_1 est S-demicompact. Par conséquent $(Q_{T_1}Sx_n)_n$ admet une sous suite convergente. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\|Q_T Sx_n\| &= d(T(0), Sx_n) \\
&\leq d(T_1(0), Sx_n) \\
&= \|Q_{T_1}Sx_n\|.
\end{aligned}$$

Alors, on a $(Q_T Sx_n)_n$ admet une sous suite convergente. □

Proposition 3.3.2. *Soient $T, T_1 : \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T_1) \subseteq X \longrightarrow Y$ deux relations linéaires a domaine dense et $S : \mathcal{D}(S) \subseteq X \longrightarrow Y$ une relation linéaire continue, fermée et a domaine dense avec $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$ et $S(0) \subseteq T_1(0) \subseteq T(0)$. On suppose que T est continue et T_1 est S-demicompact et il existe a, b, c et $d \in \mathbb{C}$ tel que $|a| > 1$ et pour tout $x \in \mathcal{D}(T)$*

$$|a|\|Sx - T_1x\| - |b|\|Sx - Tx\| \leq \|Tx - T_1x + Sx - Sx\|.$$

Alors, T est une relation linéaire S-demicompact.

Démonstration. Puisque,

$$\begin{array}{rcl} \|Tx - T_1x + Sx - Sx\| & \leq & \|Sx - T_1x\| + \|Sx - Tx\| \\ |c|\|Sx - T_1x\| - |d|\|Sx - T_1x\| & \leq & \|Sx - Tx\| + \|Sx - Tx\| \\ (|c| - 1)\|Sx - T_1x\| & \leq & (1 + |d|)\|Sx - Tx\| \end{array}$$

$$\|Sx - T_1x\| \leq (\frac{1 + |d|}{|c| - 1})\|Sx - Tx\|.$$

On prend une suite bornée $(x_n)_n$ de $\mathcal{D}(T)$ tel que $Q_T(S-T)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$. On applique ((3.1)) on obtien $\|Q_{T_1}(S - T_1)(x_n - y)\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc $Q_{T_1}(S - T_1)x_n \underset{n\to+\infty}{\to} y$, et on utilise le fait que T_1 est S-demicompact. On obtient que $(Q_{T_1}Sx_n)_n$ admet une sous suite convergente. Or on a

$$\begin{array}{rcl} \|Q_TSx_n\| & = & d(T(0), Sx_n) \\ & \leq & d(T_1(0), Sx_n) \\ & = & \|Q_{T_1}Sx_n\|. \end{array}$$

Alors, on a $(Q_TSx_n)_n$ admet une sous suite convergente. $\square$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons appris beaucoup de notions sur la théorie des opérateurs et leur extension aux cas des relations multivoques. Nous avons également exploré les différentes propriétés existantes entre ces deux notions. En perspective, il reste à étudier cette théorie dans d'autres espaces, autres que les espaces de Banach, par exemple.

Bibliographie

[1] A. Ammar, A. Jeribi and H. Daoud, Demicompact and k-D-set-contractive multivalued linear operators. Mediterr. J. Math. 15 (2018).

[2] A. Ammar, S. Fakhfakh and A. Jeribi, Demicompact of Fredholm's theory and block matrix of linear relations. Preprint (2018).

[3] A. Ammar, S. Fakhfakh and A. Jeribi, Shechter spectra and relatively demicompact linear relations. Preprint (2018).

[4] N.I. Akhiezer and I.M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Volume I.* translated from Russian by M. Nestell, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1961.

[5] R. Arens, *Operational Calculus of linear relations,* Pacific J. Math., 11, 9-23(1961).

[6] J.P. Aubin, and A. Cellina, *Differential Inclusions,* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 264, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[7] J.P. Aubin. *Analyse fonctionnelle appliquée*, Tome 2, Presses universitaire de France, 1987.

[8] S.Banach, *Théorie des opérationes linéaires,* Warsaw, 1932.

[9] S. Banach and S. Mazur, *Zur theorie der lineare Dimension,* Studia Math., 4, 100-112(1933).

[10] F. Bayen, C. Margaria. *Espace de Hilbert et opérateurs problèmes de mathématiques appliquées.* Tome 2, Ellipses, 1986.

[11] C. Bessaga and A *Pelczyński, Spaces of Continuous functions (IV),* Studia Math., 19, 53-62 (1960).

[12] H.Brezis. *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Collection Mathématiques appliquées pour le maîtrise, Masson, Paris, 1993.

[13] J. Charles, M. Mbekhta, H. Queffélec. *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs*, Dunod, Paris, 2010.

[14] E.A. Coddington and H.S.V. De Snoo, *Positive Self-adjoint extensions of positive symmetric subspaces,* Math. Z., 159, 203-214 (1978).

[15] E.A. Coddington and A. Dijksma, *Adjoint subspaces in Banach spaces with applications to ordinary differential subspaces,* Ann. Mat. Pura Appl. (IV), CXVII, 1-118 (1978).

[16] R.W. Cross, *Multivalued Linear Operators,* Marcel-Dekker, New York, 1998.

[17] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach spaces,* Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[18] N. Dunford and J.T. *Schwartz, Linear Operators, Parts I and II,* Interscience Publishers, New York, 1958 and 1963, respectively.

[19] E.Fricain, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs : cours et exercices (Master en Mathematiques pures)*, 2009-2010.

[20] F.Hirsch, G.Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle*, Cours et exercices avec réponses. Masson, Paris, 1997, pour la première édition, Dunod, Paris, 1999, pour la nouvelle présentation.

[21] chebil houcine, *Analyse Hilbertienne.* Centre de Publication Universitaire Tunis, 2001.

[22] A.Kolmogorov, S.Fomin. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Mir Moscou, 1977.

[23] E. Michael, *Continuous Selections I, II, III,* Annals of Math., 63 361-381 ; 64 562-580 ; 65 375-390.

[24] V.Trongtirre, B.Poussinovski, T.Sobolev. *Problèmes et exercises d'analyse fonctionnelle*,Mir Moscou, 1987.

[25] D. Wilcox, Multivalued semi-Fredholm operators in normed linear spaces, Ph.D.Diss. Thesis.University of Cape Town (2002).

ملخص:

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة تطبيقات متعددة القيم في الفضاء الباناخي. وايضا تطرقنا الى علاقات الخطية شبه مدمجة مع اعطاء امثلة.

الكلمات المفتاحية: (العلاقات الخطية،العلاقات الفريدهولمية،العلاقات الخطية شبه المدمجة.)

Abstract:

In this note, we studied multivalued applications in Banach spaces, as well as demi-compact linear relations, providing examples.

keywords: (Linear Relations,Fredholm relations,demi-compact linear relations.)

Resumé:

Dans cette note, nous avons étudié les applications multivaluées dans l'espace de Banach, ainsi que les relations linéaires démi-compactes, en donnant des exemples.

Mots-clés: (les Relations linéaires,Relations de Fredholm,Relations linéaires demi-compact.)