République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de L'informatique
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par

BECHICHE Belkacem

Sujet

Interpolation non linéaire dans les espaces de Besov

Date de soutenance :29/05/2017

Devant le jury :

Mr. DRIHEM Douadi	Prof. Univ. de M'sila	Président
Mr. MOUSSAI Madani	Prof. Univ. de M'sila	Rapporteur
Mme. BISSAR Samira	MAA.Univ. de M'sila	Examinatrice

Promotion : 2016 / 2017

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation.

Je tiens à remercier sincèrement **Prof. M.Moussai**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour ses conseils.

Mes remerciements vont également aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé à réaliser ce travail.

Table des matières

Notations

- S : L'espace de schwartz.
- $S_\infty = \{\varphi \in S :< p, \varphi >= 0, \forall p \in \mathcal{P}_\infty, < x^\alpha, \varphi > = 0, \forall \alpha \ \}$.
- $\mathcal{P}_\infty$: espace de tous les polynômes.
- $S^{'}$: espace des distributions tempérées.
- $S^{'}_\infty(\mathbb{R}^n)$: L'espace des distributions tompérés modulo les polynômes $\mathcal{P}_\infty$.
- $[f] = \{f + p, \forall p \in \mathcal{P}_\infty\}$ est la classe équivalence.
- $Q_j, S_k, \triangle_k$ sont des applications linéaires continue sur $L_p(\mathbb{R}^n)$.
- H^s : L'espace de Sobolev.et même H_0^1, H_0^k est espace de Sobolev.
- $\dot{H}^s$: L'espace de Sobolev homoène.
- H : espace de Hilbert.
- H_p^s : L'espace de potentiel de Bessel , $1 < p < \infty$.
- $\dot{H}_p^s$: L'espace de potentiel de Bessel homogène.
- C^s : L'espace de Hölder.
- $\dot{C}^s$: L'espace de Hölder homogène.
- $L_p(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions mesurables.

- $(\hookrightarrow)$:L'injection $\{E \hookrightarrow F : 1)\ E \subset F,\ x \in E \Rightarrow x \in F$ et $2)\ id : E \longrightarrow F$ continue ; $\| id(x) \|_F = \| x \|_F \leq c \| x \|_E \}$
- W_∞^m : espace de Sobolev.
- $\dot{W}_\infty^m$: l'espace de Sobolev homogène.
- $L(A, B)$: l'ensemble de tous les opérateures bornés de A dans B.
- $\mathcal{L}(A, B)$: l'ensemble des applications linéaire continues.
- H^{-1} : l'inverse de l'espace de Hilbert.

Introduction

Nous allons commoncer par exposer les thèmes abordés dans cette thèse ; nous détaillerons ensuite chaque partie ; en présentant les travaux déjà effectués.

De façon générale, ce travail est divisé en trois chapitres.

Dans le première chapitre, nous rappelons les espaces de Besov homogènes et non homogènes. Nous obtenons des résultats concernant des propriétés et des exemples de l'espace de Besov.

Dans un deuxième chapitre, nous parlons d'une entrée complète l'interpolation linéaire, et à travers elle d'aller plus profond à l'interpolation non linéaire. Nous obtenons des résultats concernant l'interpolation non linéaire. Pour compléter ce chapitre on a besion d'un petit rappel sur l'interpolation non linéaire.

Dans le troisième chapitre , nous donnons quelques exemples.

Chapitre 1

Rappel sur les espaces de Besov homogènes et non homogènes

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les notions essentielles, dans un cadre général les espaces de Besov homogènes et non homogènes , les propriétés et les outils que nous allons utiliser.

1.1 Séries de Littlewood-Paley

Les séries de Littlewood-Paley jouent un rôle important dans la définition des espaces de Besov homogènes et non homogènes. Nous allons rappeler la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution temperée.

Définition 1.1.1 ***(Fonction Cut-off)*** *Une fonction ρ est dit Cut-off si elle est*

$\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), 0 \leq \rho \leq 1$, *paire. Autrement dit ρ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, positive, radiale sur $\mathbb{R}^n$.*

i.e: $\rho(\xi) = \phi(|\xi|)$, avec $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1 & si \quad |\xi| \leq 1. \\ 0 & si \quad |\xi| \geq 0. \end{cases}$$

On définit

$$\gamma(\xi) = \rho(\xi) - \rho(2\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

La fonction $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est telle que

1. $supp\gamma \subset \left\{\xi : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}\right\}$.

2. $\gamma(\xi) \geq 0$ pour $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}$.

3. $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

On a : $\rho(\xi) = 1 - \sum_{j\geq 1} \gamma(2^{-j}\xi)$, et on obtient que la fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est telle que

$$\text{supp}\rho \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \frac{3}{2}\right\}, \tag{1.1.1}$$

donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a la partition de l'unité non homogène suivante :

$$\rho(\xi) + \sum_{j\geq 1} \gamma\left(2^{-j}\xi\right) = 1.$$

Si $\xi \neq 0$, alors $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1$ est appelée partition de l'unité homogène. A la partition (1.1.1) on associe une suite d'opérateurs de convolutions notés

$$\begin{array}{rcccl} Q_j & : & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \\ S_k & : & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \end{array}$$

définis par

$$\begin{array}{rcl} Q_j f(x) & = & \mathcal{F}^{-1}(\gamma(2^{-j}.)) * f(x) \quad j \geq 1, \\ S_k f(x) & = & \mathcal{F}^{-1}\left(\rho\left(2^{-k}.\right)\right) * f(x) \quad k \geq 0, \end{array}$$

ou bien

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(Q_j f)(\xi) & = & \gamma(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi) \quad j \geq 1, \\ \mathcal{F}(S_k f)(\xi) & = & \rho\left(2^{-k}\xi\right)\hat{f}(\xi) \quad k \geq 0, \end{array}$$

avec la notation: $Q_0 = S_0$.

Si dans la relation (1.1.1) on change ξ par $2^{-j}\xi$ et on multiplie par $\hat{f}(\xi)$ on obtient

$$\hat{f}(\xi)\rho\left(2^{-k}\xi\right) + \hat{f}(\xi)\sum_{j\geq k+1} \gamma\left(2^{-j}\xi\right) = \hat{f}(\xi). \tag{1.1.2}$$

En appliquant l'application $\mathcal{F}^{-1}$sur (1.1.2) on obtien

$$S_k f + \sum_{j\geq k+1} Q_j f = f. \tag{1.1.3}$$

Pour $k=0$ on trouve

$$S_0 f + \sum_{j\geq 1} Q_j f = f,$$

pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ la décomposition de Littlewood-Paley de f est alors l'identité

$$f = \sum_{j\geq 0} Q_j f. \tag{1.1.4}$$

La série (1.1.4) converge au sens des distributions tempérées.

de (1.1.3) et (1.1.4) alors

$$S_k f + \sum_{j\geq k+1} Q_j f = \sum_{j=0}^{k} Q_j f + \sum_{j\geq k+1} Q_j f,$$

donc

$$S_k f = \sum_{j=0}^{k} Q_j f.$$

Définition 1.1.2 *Pour toute $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ alors la décomposition de Littelwood-Paley de f est donné par*

$$f = Q_k f + \sum_{j\geq k+1} Q_j f. \tag{1.1.5}$$

La série (1.1.5) converge au sens des distributions tempérées.

Remarque 1.1.1 *La série (1.1.5) peut s'écrire aussi sous la forme*

$$f = Q_k f + \sum_{j\geq k+1} Q_j f,$$

valable pour toute $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

Grâce à l'inégalité de Young, les opérateurs Q_k et S_k sont bornés uniformément sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

1.2 Les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Nous donnons dans cette partie les définitions des espaces de Besov et quelques propriétés de ces espaces.

Définition 1.2.1 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, alors l'espace de Besov noté $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est définit par $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tels que*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \begin{cases} \left(\sum_{j\geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \sup_{j\geq 0} 2^{js} \|Q_j f\|_p < \infty, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

1.2.1 Inégalités principales

Théorème 1.2.1 ***(Inégalité de Hölder)***

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$ alors

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \text{pour} \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = \tfrac{1}{r}.$$

Théorème 1.2.2 ***(Inégalité de Young)***

Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, avec $r \geq p$ et $r \geq q$, alors pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on a

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème 1.2.3 ***(Inégalité de Bernstein)***

Soient $1 \leq p \leq r \leq \infty$, il existe $c > 0$, telle que $\forall R > 0$ et toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, avec $supp \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$, on a

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_r \leq c R^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)+|\alpha|} \|f\|_p, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

1.2.2 Quleques propriétés

Les propriétés suivantes sont vérifées

* $\left(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n); \|.\|_{B^s_{p,q}}\right)$ est un espace de Banach.

* $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = C^s(\mathbb{R}^n)$ si $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.

* $B^s_{2,2}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

* $B^s_{p,2}(\mathbb{R}^n) = H^s_p(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \mathbb{R}$ et $1 < p < \infty$.

Preuve. Voir [5, 7, 8]. ■

Proposition 1.2.1 *Soit $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, alors*

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
- $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \quad si \quad s > 0.$

Preuve. Voir [4, 5]. ■

Théorème 1.2.4 *Soit $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, alors*

$$\overline{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.2.2 *L'opération de dérivation ∂^α, envoie l'espace $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^{s-|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.*

De plus : pour tout $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\| \partial^\alpha f \|_{B^{s-|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \| f \|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} . \tag{1.2.1}$$

Preuve. Par l'inégalité de Bernstein on a

$$\| Q_j(\partial^\alpha f) \|_p \leq c 2^{j|\alpha|} \| Q_j f \|_p .$$

En passant à la norme dans $B^{s-|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$(\sum_{j\geq 0}(2^{j(s-|\alpha|)}) \| Q_j(\partial^\alpha f) \|_p^q)^{\frac{1}{q}} \leq c_0(\sum_{j\geq 0}(2^{sj} \| Q_j f \|_p)^q)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où l'inégalité (1.2.1). ■

Théorème 1.2.5 *Soit $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, alors*

$$Si \quad f \in B^s_{p,q} \quad alors \quad f' \in B^{s-1}_{p,q},$$

avec

$$\left\| f' \right\|_{B^{s-1}_{p,q}} \leq c \left\| f \right\|_{B^s_{p,q}} .$$

Preuve. d'après l'inégalité de Bernstein on a

$$\|g^{\alpha}\|_r \leq cR^{\alpha+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|g\|_p, \quad r>p.$$

$\operatorname{supp} g \subset \{\xi : |\xi| \leq R\}$.
On pose: $g = Q_j f$, donc $\operatorname{supp}\widehat{Q_j f} \subset \{\xi : |\xi| \leq c2^j\}$.

$$\left\|(Q_j f)'\right\|_r \leq c2^{j\left(1+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\right)}\|Q_j f\|_p.$$

Si $r = p$ on a

$$\left\|(Q_j f)'\right\|_p \leq c2^{j}\|Q_j f\|_p.$$

En multipliant les parties par $2^{j(s-1)}$ on a

$$2^{j(s-1)}\left\|(Q_j f)'\right\|_p \leq c2^{js}\|Q_j f\|_p,$$

de plus

$$\left(\sum_{j\geq 0} 2^{j(s-1)q}\left\|(Q_j f)'\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\sum_{j\geq 0} 2^{jsq}\|Q_j f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

alors

$$\|f\|_{B_{p,q}^{s-1}} \leq c\|f\|_{B_{p,q}^{s}}.$$

■

Exemple 1.2.1 *On a*

- *Si* $f = H' = \delta \in B_{p,q}^{s}$ *alors* $H \in B_{p,q}^{s+1}$.
- *Si* $f = \delta \in B_{p,q}^{s}$ *alors* $\delta^{(m)} \in B_{p,q}^{s-m}$.

Théorème 1.2.6 *Soient* $1 \leq p,q,r \leq \infty$ *et* $s \in \mathbb{R}$.
Si $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ *ou* $\left(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}\right) - s = 0$ *et* $q = 1$ *On a*

$$B_{p,q}^{s} \hookrightarrow L_r.$$

Preuve. Soit $f \in L_r \Longrightarrow f = \sum\limits_{j\geq 0} Q_j f$ on a

$$\| f \|_r \leq \sum_{j\geq 0} \| Q_j f \|_r \quad \text{car } r \geq 1,$$

d'après l'inégalité de Bernstein, on obtient

$$\sum_{j\geq 0} \| Q_j f \|_r \leq c \sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r})} \| Q_j f \|_p,$$

par simplification on a

$$c \sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r})} \| Q_j f \|_p = c (\sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)})(2^{js} \| Q_j f \|_p),$$

par l'inégalité de Hölder, on a

$$c (\sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)})(2^{js} \| Q_j f \|_p) \leq c (\sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)q'})^{\frac{1}{q'}} (2^{js} \| Q_j f \|_p^q)^{\frac{1}{q}},$$

par conséquent

$$c (\sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)q'})^{\frac{1}{q'}} (2^{js} \| Q_j f \|_p^q)^{\frac{1}{q}} \leq c (\sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)q'})^{\frac{1}{q'}} \| f \|_{B^s_{p,q}},$$

car $(\sum\limits_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)q'})^{\frac{1}{q'}}$ converge si $(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}) - s < 0 \; alors \; s > \frac{n}{p}-\frac{n}{r}$ ou $(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}) - s = 0$ et $q = 1$.

donc

$$\| f \|_r \leq c \| f \|_{B^s_{p,q}} .$$

■

Proposition 1.2.3 *On a*

1. *Si $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 > s_2$ et $1 \leq p, q \leq \infty$, alors*

$$B^{s_1}_{p,q} \hookrightarrow B^{s_2}_{p,q}.$$

2. *Si $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_2 > s_1$ et $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$, alors*

$$B^{s_1}_{p_1,q_1} \hookrightarrow B^{s_2}_{p_2,q_2}.$$

3. *Si* $s_1, s_2 \in \mathbb{R},\ s_1 > s_2$, $1 \leq q \leq \infty,\ 1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ *et* $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$, *alors*

$$B^{s_1}_{p_1,q} \hookrightarrow B^{s_2}_{p_2,q}.$$

4. *Si* $s \in \mathbb{R}$, *et* $1 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q \leq \infty,\ \frac{n}{p} - s < 0,$ *alors*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_\infty.$$

Preuve. On va montrer que

1. Soit $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\left(\sum_{j\geq 0}\left(2^{sjq}\|Q_jf\|_p^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}$ converge .

   On a $s_1 > s_2$, alors $2^{s_2 j} < 2^{s_1 j}$, donc

$$\begin{array}{ccc}\left(\sum_{j\geq 0}\left(2^{s_2jq}\|Q_jf\|_p^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} & \leq & \left(\sum_{j\geq 0}\left(2^{s_1jq}\|Q_jf\|_p^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\ \|f\|_{B^{s_2}_{p,q}} & \leq & \|f\|_{B^{s_1}_{p,q}}, \end{array}$$

   $\|f\|_{B^{s_1}_{p,q}} < \infty$ ce qui donne $f \in B^{s_2}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, donc

$$\|f\|_{B^{s_2}_{p,q}} \leq \|f\|_{B^{s_1}_{p,q}}.$$

2. D'après l'inégalite de Bernstien on a

$$\|Q_jf\|_r \leq cR^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|Q_jf\|_p, \quad r \geq p.$$

   On pose $r = p_2$, $p = p_1$ donc

$$\|Q_jf\|_{p_2} \leq cR^{n\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}\|Q_jf\|_{p_1},$$

   alors

$$2^{js_2}\|Q_jf\|_{p_2} \leq c2^{jn\left(s_2+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-s_1\right)}2^{js_1}\|Q_jf\|_{p_1},$$

   d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$2^{js_2}\|Q_jf\|_{p_2} \leq c2^{jn\left(s_2+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-s_1\right)}\left(\sum_{j\geq 0}2^{js_1q_1}\|Q_jf\|_{p_1}^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}},$$

par conséquent on a

$$\left(\sum_{j\geq 0} 2^{js_2q_2}\left\|Q_jf\right\|_{p_2}^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \left(\sum_{j\geq 0} 2^{jn\left(s_2+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-s_1\right)q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \|f\|_{B^{s_1}_{p_1,q_1}}.$$

$\left(\sum_{j\geq 0} 2^{jn\left(s_2+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-s_1\right)q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}$ converge si $s_2+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-s_1=0$, alors

$$\|f\|_{B^{s_2}_{p_2,q_2}} \leq c\,\|f\|_{B^{s_1}_{p_1,q_1}}.$$

3. D'après l'inégalité de Bernstien , on a

$$\left\|Q_jf\right\|_r \leq cR^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\left\|Q_jf\right\|_p, \quad r\geq p.$$

supp$\left(\widehat{Q_jf}\right) \subset \left\{\xi : |\xi| \leq c2^j\right\}$.

On pose $r=p_2$ *et* $p=p_1$, alors

$$\left\|Q_jf\right\|_{p_2} \leq c2^{j\left(\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}\right)}\left\|Q_jf\right\|_{p_1}.$$

En multipliant les parties par 2^{js_2}

$$2^{js_2}\left\|Q_jf\right\|_{p_2} \leq c2^{j\left(s_2+\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}-s_1\right)}2^{js_1}\left\|Q_jf\right\|_{p_1},$$

pour $1<q<\infty$, on a

$$\left(\sum_{j\geq 0} 2^{js_2q}\left\|Q_jf\right\|_{p_2}^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq c2^{j\left(s_2+\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}-s_1\right)}\left(\sum_{j\geq 0} 2^{js_1q}\left\|Q_jf\right\|_{p_1}^{q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

alors

$$\|f\|_{B^{s_2}_{p_2,q}} \leq c\,\|f\|_{B^{s_1}_{p_1,q}}.$$

Car $2^{j\left(s_2+\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}-s_1\right)}$ converge, si $s_2+\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p_2}-s_1=0$ *alors* $s_2-\frac{n}{p_2}=s_1-\frac{n}{p_1}$.

4. $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $f = \sum_{j\geq 0} Q_j f,$

donc

$$\|f\|_\infty \leq \sum_{j\geq 0} \|Q_j f\|_\infty ,$$

d'après l'inégalité de Bernstien on a

$$\sum_{j\geq 0} \|Q_j f\|_\infty \leq c \sum_{j\geq 0} 2^{j\frac{n}{p}} \|Q_j f\|_p ,$$

de plus

$$c \sum_{j\geq 0} 2^{j\frac{n}{p}} \|Q_j f\|_p \leq c \sum_{j\geq 0} 2^{j\left(\frac{n}{p}-s\right)} \left(2^{js} \|Q_j f\|_p\right),$$

d'après l'inégalité de Hölder on a

$$c \sum_{j\geq 0} 2^{j\left(\frac{n}{p}-s\right)} \left(2^{js} \|Q_j f\|_p\right) \leq c \left(\sum_{j\geq 0} 2^{j\left(\frac{n}{p}-s\right)q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{j\geq 0} 2^{qjs} \|Q_j f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

par conséquent on a

$$\|f\|_\infty \leq c \left(\sum_{j\geq 0} 2^{j\left(\frac{n}{p}-s\right)q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \|f\|_{\mathcal{B}^s_{p,q}} .$$

Car $\left(\sum_{j\geq 0} 2^{j\left(\frac{n}{p}-s\right)q'}\right)^{\frac{1}{q'}}$ converge, si $\frac{n}{p} - s < 0 \Longrightarrow \frac{n}{p} < s,$

donc

$$\|f\|_\infty \leq c \|f\|_{B^s_{p,q}} .$$

■

Théorème 1.2.7 *(Inégalité de Gaglirdo-Nirenberg)*

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $0 < \theta < 1$. *On a*

$$B^{\frac{s}{\theta}}_{p\theta,\theta q} \cap L_\infty \hookrightarrow B^s_{p,q},$$

avec

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq c \|f\|_\infty^{1-\theta} \|f\|^\theta_{B^{\frac{s}{\theta}}_{p\theta,\theta q}} .$$

Preuve. On a

- L'espace de Besov

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \left(\sum_{j\geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

.

- et : $L_{\theta p} \cap L_\infty \hookrightarrow L_p$ avec

$$\| f \|_p \leq \| f \|_\infty^{1-\theta} \| f \|_{\theta p}^\theta . \tag{1.2.2}$$

D'après l'inégalité(1.2.2) on a

$$\| Q_j f \|_p \leq \| Q_j f \|_\infty^{1-\theta} \| Q_j f \|_{\theta p}^\theta,$$

par l'hypothése $\| Q_j f \|_\infty \leq c \|f\|_\infty$, on a

$$\| Q_j f \|_p \leq \| f \|_\infty^{1-\theta} \| Q_j f \|_{\theta p}^\theta, \tag{1.2.3}$$

en remplacement $\|Q_j f\|_p^q$ par $\| f \|_\infty^{1-\theta} \| Q_j f \|_{\theta p}^\theta$ dans l'ingalité (1.2.3), on obtient

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \leq \left(\sum_{j\geq 0} 2^{jsq} \left(\| f \|_\infty^{1-\theta} \| Q_j f \|_{\theta p}^\theta\right)^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

par simplification on a

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \leq \| f \|_\infty^{1-\theta} \left(\sum_{j\geq 0} \left(2^{j\frac{s}{\theta}} \| Q_j f \|_{\theta p}\right)^{q\theta}\right)^{\frac{\theta}{q\theta}},$$

par conséquent on a

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \leq \| f \|_\infty^{1-\theta} \|f\|^\theta_{B^{\frac{s}{\theta}}_{p\theta,q\theta}} .$$

■

1.3 Les espaces de Besov homogènes $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.3.1 *Soit $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. L'espace de Besov homogène noté $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ tels que*

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \begin{cases} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sjq} \|Q_j f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, & \textit{pour } q \neq \infty. \\ \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sj} \|Q_j f\|_p < \infty, & \textit{pour } q = \infty. \end{cases}$$

1.3.1 Quelques propérités

Les propriétés suivantes sont vérifiées

* $\left(\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) ; \|.\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\right)$ est un espace de Banach.
* $\dot{B}^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = \dot{C}^s(\mathbb{R}^n)$ si $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.
* $\dot{B}^m_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \dot{\mathcal{W}}^m_p(\mathbb{R}^n)$, $\forall m \in \mathbb{R}$

Preuve. Voir [1] ■

Proposition 1.3.1 *On a*

1. *Soit* $s \in \mathbb{R}$,$1 \leq p \leq \infty$ *et* $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$, *alors*
$$\dot{B}^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^s_{p,q_2}(\mathbb{R}^n).$$
2. *Soit* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, *tels que* $s_1 < s_2$ *et* $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$, *alors*
$$\dot{B}^s_{p_1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^s_{p_2,q}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir (proposition 1.2.3) ■

Proposition 1.3.2 *Soit* $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ *et* $1 \leq q \leq \infty$ *alors*
$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [1] ■

Théorème 1.3.1 *(Nikol'skii) Soit $0 < a < b$ et $(U_j)_{j\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{S}'_\infty$, telle que*

- $\sup \hat{U}_j \subset \{\xi : a2^j \leq \mid \xi \mid \leq b2^j\}$.
- $A := (\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sjq} \parallel U_j \parallel_p^q)^{\frac{1}{q}} < \infty$.

Alors $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} U_j$ converge dans $\mathcal{S}'_\infty$ et

$$\parallel \sum_{j\in\mathbb{Z}} U_j \parallel_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq cA.$$

Proposition 1.3.3 *Il existe deux constantes $0 < c_1 < c_2$ tel que pour toute $f \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et tout $\lambda > 0$, alors*

$$c_1 \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq \lambda^{\frac{n}{p}-s} \|f(\lambda(.))\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq c_2 \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}.$$

1.4 Les espaces de Besov non homogènes $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.4.1 ***(définition de l'espace de Besov non homogéne)*** *Soit $s \geq 0$, l'espace de Besov non homogéne noté $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telle que $[f] \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, et*

$$\parallel f \parallel_{B^s_{p,q}} := \parallel f \parallel_p + \parallel f \parallel_{\dot{B}^s_{p,q}}.$$

1.5 Exemple de fonctions dans l'espace de Besov

Exemple 1.5.1 *Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $\|Q_j f\|_p \leq c2^{-jNn}$, pour $j \geq 0$.*

Soit $f(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ donc

$$\begin{array}{rcll}
\|Q_j f\|_p & \leq & c2^{-njN} & \forall N \in \mathbb{N}, j \geq 0. \\
2^{js}\left\|Q_j e^{-x^2}\right\|_p & \leq & c2^{-nj(N-s)} & \\
\left(\sum\limits_{j\geq 0}\left(2^{js}\left\|Q_j e^{-x^2}\right\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} & \leq & \left(\sum\limits_{j\geq 0}\left(c2^{-nj(N-s)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} & \\
\left\|e^{-x^2}\right\|_{B^s_{p,q}} & \leq & \left(\sum\limits_{j\geq 0}\left(c2^{-nj(N-s)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}. &
\end{array}$$

$\left(\sum\limits_{j\geq 0}\left(c2^{-nj(N-s)}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$ *converge si* $N-s>0,$ *alors* $e^{-x^{2}}\in B_{p,q}^{s}\left(\mathbb{R}^{n}\right).$

Exemple 1.5.2 $f=\delta\in\mathcal{S}^{'}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$*(la masse de Dirac)*

$$Q_{j}f \;=\; \left\langle f,\mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^{j}\left(x-.\right)\right)\right\rangle ,$$

alors

$$\begin{aligned} Q_{j}\delta &= \left\langle \delta,\mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^{j}\left(x-.\right)\right)\right\rangle \\ &= \mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^{j}\left(x-0\right)\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^{j}x\right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left\Vert Q_{j}\delta\right\Vert_{p} &= 2^{nj}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathcal{F}^{-1}\gamma\left(2^{j}x\right)\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{nj\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathcal{F}^{-1}\gamma\left(y\right)\right|^{p}dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{nj\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left\Vert \mathcal{F}^{-1}\gamma\right\Vert_{p}, \end{aligned}$$

alors

$$\left\Vert Q_{j}\delta\right\Vert_{p}=c2^{nj\left(1-\frac{1}{p}\right)},\quad 0<p\leq\infty.$$

On a

$$\begin{aligned} \left\Vert Q_{j}\delta\right\Vert_{p} &= c2^{nj\left(1-\frac{1}{p}\right)} \\ 2^{sj}\left\Vert Q_{j}\delta\right\Vert_{p} &= c2^{\left(s+n\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)j} \\ \left(\sum_{j\geq 0}\left(2^{sj}\left\Vert Q_{j}\delta\right\Vert_{p}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} &= c\left(\sum_{j\geq 0}2^{\left(s+n\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)qj}\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

$\left(\sum\limits_{j\geq 0}2^{\left(s+n\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)qj}\right)^{\frac{1}{q}}$ *converge*

1. *Si* $s+n\left(1-\frac{1}{p}\right)<0$ *alors* $s<n\left(\frac{1}{p}-1\right)$*,alors* $\delta\in B_{p,q}^{s}\left(\mathbb{R}^{n}\right).$
2. *Si* $s+n\left(1-\frac{1}{p}\right)=0$ *alors* $s=n\left(\frac{1}{p}-1\right),$ *alors*

$$\begin{aligned} 2^{sj}\left\Vert Q_{j}\delta\right\Vert_{p} &= c \qquad \forall j\geq 0. \\ &= \sup_{j\geq 0}2^{sj}\left\Vert Q_{j}\delta\right\Vert_{p} \\ &= \left\Vert \delta\right\Vert_{B_{p,q}^{s}}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} \delta \in B^s_{p,q} \quad si \qquad s < n\left(\frac{1}{p}-1\right), 1 \leq p, q \leq \infty. \\ \delta \in B^s_{p,q} \quad si \quad s = n\left(\frac{1}{p}-1\right), 1 \leq p \leq \infty, q = \infty. \end{cases}$$

Chapitre 2

L'interpolation non linéaire

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'interpolation linéaire.

2.1 Interpolation

Au cours des trente dernières années la théorie de l'intrpolation est devenue la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaire.

2.1.1 La méthode réelle

Par $(A_{0,}A_1)_{\theta,q}$ on désigne le résultat du foncteur d'interpolation réelle appliqué à A_0 et A_1.

Définition 2.1.1 *Notons* $\mathcal{L}(A,B)$ *l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de* A *dans* B*. Ce qui signifie que si* $T \in \mathcal{L}(A_i, B_i)$*, tel que* $i = [0,1]$.

On a T est une application linéaire borné de $(A_0, B_0)_{\theta,q}$ dans $(A_1, B_1)_{\theta,q}$ et

$$\| T \|_{(A_0,B_0)_{\theta,q} \longrightarrow (A_1,B_1)_{\theta,q}} \leq c \| T \|^{1-\theta}_{A_0 \longrightarrow B_0} \| T \|^{\theta}_{A_1 \longrightarrow B_1} .$$

avec c indépendant de T.

Proposition 2.1.1 *Soit* $0 < \theta < 1$ *et* $q \neq q_0 \neq q_1$.

Supposons que $s_0 \neq s_1$ *et* $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$*, alors*

$$(B^{s_0}_{p,q_0}, B^{s_1}_{p,q_1})_{\theta,q} = (F^{s_0}_{p,q_0}, F^{s_1}_{p,q_1})_{\theta,q} = B^s_{p,q}.$$

Preuve. Voir [7] ■

Remarque 2.1.1 *La méthode d'interpolation réelle possède la propriété dite d'interpolation.*

2.2 Rappel sur l'interpolation linéaire

Définition 2.2.1 *Si A_0 et A_1 sont deux espaces de Banach inclus dans un espace localement convexe A on note pour tout élément a de A_0+ A_1.*

$$K(t,a) = \inf\{a_0 \in A_0, a_1 \in A_1, a_0 + a_1 = a \mid \parallel a_0 \parallel_{A_0} + t \parallel a_1 \parallel_{A_1}\}. \tag{2.2.1}$$

Si $0 < p_0, p_1 < +\infty$ on note pour tout a de A_0+ A_1

$$K(p_0,p_1;t,a) = \inf\{a_0 \in A_0, a_1 \in A_1, a_0 + a_1 = a \mid \parallel a_0 \parallel_{A_0}^{p_0} + t \parallel a_1 \parallel_{A_1}^{p_1}\}. \tag{2.2.2}$$

Définition 2.2.2 *Si $0 < \theta < 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note*

$$(A_0, A_1)_{\theta,p} = \{a \in A_0 + A_1 \mid t^{-\theta}\ K(t,a) \in L_*^p(0,\infty)\}. \tag{2.2.3}$$

Où $L_*^p(\mathbb{R}^+) = L^p(\mathbb{R}^+; dt|t)$; on le munit de la norme

$$\parallel a \parallel_{(A_0,A_1)_{\theta,p}} = \parallel t^{-\theta} K(t,a) \parallel_{L_*^p(0,\infty)}. \tag{2.2.4}$$

Proposition 2.2.1 *$(A_0, A_1)_{\theta,p}$ muni de la norme (2.2.4) est un Banach. Les espaces définis ainsi vérifient la "propriété d'interpolation linéaire".*

De plus : si B_0, B_1 est un autre couple et si T est une application linéaire de A_0+ A_1 dans $B_0 + B_1$ alors

$$T \in \mathcal{L}(A_0, B_0) \cap \mathcal{L}(A_1, B_1) \Longrightarrow T \in \mathcal{L}((A_0, A_1)_{\theta,p}, (B_0, B_1)_{\theta,p}.$$

Proposition 2.2.2 *Si $0 < \theta < 1$ et $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, alors*

$$(A_0, A_1)_{\theta,p} \subset (A_0, A_1)_{\theta,q}.$$

Si $1 \leq p \leq +\infty$ alors $A_0 \cap A_1$ est dense dans $(A_0, A_1)_{\theta,p}$.

Proposition 2.2.3 *Si* $a \in A_0 + A_1$ *avec* $a = v_0(t) + v_1(t), \forall t > 0.$

tel que

$$t^{-\theta} v_0(t) \in L_*^{p_0}(A_0),$$

et

$$t^{1-\theta} v_1(t) \in L_*^{p_1}(A_1),$$

où

$$a \in (A_0, A_1)_{\theta,p},$$

où $0 < \theta < 1$ *et* $0 < p_0, p_1 < +\infty,$ *alors*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

et

$$\| a \|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}} \leq C \| t^{-\theta} v_0(t) \|^{\theta}_{L_*^{p_0}(A_0)} \| t^{1-\theta} v_1(t) \|^{1-\theta}_{L_*^{p_1}(A_1)} .$$

2.3 L'interpolation non linéaire

2.3.1 Cas des majorations locales

Soient $A_0 \subset A_1, B_0 \subset B_1$ des espaces de Banach. Soit U un ouvert non vide de A_1 et T une application de U dans B_1, tel que on a les hypothèses suivantes :

$$T \text{ envoie } A_0 \cap U \text{ dans } B_0, \tag{2.3.1}$$

$$\exists \alpha, \beta : 0 < \alpha \leq 1; 0 < \beta,$$

tels que

$$\forall \alpha \in U, \exists V \text{ voisinage de } \alpha \text{ dans } U \text{ et } \exists c > 0;$$

$$b \in V \Longrightarrow \| Ta - Tb \|_{B_1} \leq c \| a - b \|^{\alpha}_{A_1},$$

$$b \in A_0 \cap V \Longrightarrow \| Tb \|_{B_0} \leq c(\| b \|^{\beta}_{A_0} + 1). \tag{2.3.2}$$

Théorème 2.3.1 *[6, Thm.1, p.472] Sous les hypothèse* (2.3.1), (2.3.2).

Si $0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq +\infty$ *et* $a \in (A_0, A_1)_{\theta,p} \cap U,$ *alors* $Ta \in (B_0, B_1)_{\eta,q}$ *où*

$$\frac{1-\eta}{\eta} = \frac{1-\theta}{\theta}\frac{\alpha}{\beta}, \tag{2.3.3}$$

$$q = \max(1, \frac{p}{(1-\eta)\beta + \eta\alpha}) = \max(1, (\frac{1-\theta}{\beta} + \frac{\theta}{\alpha})p).$$

Théorème 2.3.2 *[6, Thm.2, p.474] Si* $0 < \theta < 1$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$, *on a*

$$\| Ta \|_{(B_0,B_1)_{\eta,q}} \leq Ch(\| a \|_{A_1}) \| a \|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}}^{(1-\eta)+\eta\alpha} . \tag{2.3.4}$$

Où η, q *sont donnés par* (2.3.3) , (2.3.4) *et* h *par*

$$h(t) = g(2t)^{1-\eta} f(t, 2t)^{\eta}. \tag{2.3.5}$$

Preuve. Soient $a \in (A_0, A_1)_{\theta,p}$, $\epsilon > 0$ et $a = a_0(t) + a_1(t)$,

avec

$$\| a_0(t) \|_{A_0} + t \| a_1(t) \|_{A_1} \leq (1+\epsilon)K(t,a).$$

Comme $a = 0 + a$ on a

$$K(t,a) \leq t \| a \|_{A_1},$$

donc

$$\| a_1(t) \|_{A_1} \leq (1+\epsilon) \| a \|_{A_1},$$

et

$$\| a_0(t) \|_{A_0} \leq (2+\epsilon) \| a \|_{A_1},$$

on rappelle que (d'après le théorème 2.3.1) on a

$$\lambda = \frac{\eta}{\theta\beta} = \frac{1-\eta}{(1-\theta)\alpha}.$$

On pose

$$Ta = b_0(t) + b_1(t),$$

avec

$$b_0(t) = Ta_0(t^{\lambda}) \quad \text{pour } t > 0,$$

alors

$$\begin{aligned}
\| b_0(t) \|_{B_0} &\leq g((2+\epsilon) \| a \|_{A_1}) \| a_0(t^{\lambda}) \|_{A_0}^{\beta}, \\
\| b_1(t) \|_{B_{1v}} &= \| Ta - Ta_0(t^{\lambda}) \|_{B_1}, \\
&\leq f(\| a \|_{A_1}, (2+\epsilon) \| a \|_{A_1}) \| a_1(t^{\lambda}) \|_{A_1}^{\alpha},
\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\infty \parallel s^{-\eta} b_0(s) \parallel_{B_0}^{\frac{p}{\beta}} \frac{ds}{s} \leq \frac{g((2+\epsilon) \parallel a \parallel)_{A_1}^{\frac{p}{\beta}}}{\lambda} \int_0^\infty \mid t^{-\theta} K(t,a) \mid^p \frac{dt}{t}.(1+\epsilon)^p,$$
$$\int_0^\infty \parallel s^{1-\eta} b_1(s) \parallel_{B_1}^{\frac{p}{\alpha}} \frac{ds}{s} \leq \frac{f(\parallel a \parallel_{A_1}, (2+\epsilon) \parallel a \parallel_{A_1}) \parallel)^{\frac{p}{\alpha}}}{\lambda} \int_0^\infty \mid t^{-\theta} K(t,a) \mid^p \frac{dt}{t}.(1+\epsilon)^p.$$

D'après la Proposition 2.2.3 on a

$$\parallel Ta \parallel_{(B_0,B_1)_{\eta,q}} \leq c \parallel s^{-\eta} b_0 \parallel_{L_*^p(B_0)}^{1-\frac{\eta}{\beta}} \parallel s^{1-\eta} b_1 \parallel_{L_*^{\frac{p}{\alpha}}(B_1)}^{\eta} .$$

On fait ensuite ϵ tendre vers 0 , on a (2.3.5) et (2.3.6). ■

2.3.2 Cas des majorations uniformes

Dans le théorème précédent, si f et g sont des constantes, on obtient pour (2.3.5) une majoration uniforme.

On va voir qu'on peut obtenir la même majoration dans des cas où l'on n'a plus $A_0 \subset A_1$.

Soit T une application définie sur $A_0 + A_1$ à valeurs dans $B_0 + B_1$ vérifiant

$$T : A_0 \longrightarrow B_0.$$

Si $a, b \in A_0 + A_1$ et $a - b \in A_1$, alors

$$Ta - Tb \in B_1,$$

$\forall a \in A_0$ on a

$$\parallel Ta \parallel_{B_0} \leq c \parallel a \parallel_{A_0}^{\beta}, \tag{2.3.6}$$

$\forall a, b \in A_0 + A_1; a - b \in A_1$ on a

$$\parallel Ta - Tb \parallel_{B_1} \leq c \parallel a - b \parallel_{A_1}^{\alpha} .$$

Théorème 2.3.3 *[6, Thm.3, p.475]*

Si $0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq +\infty$ *et* T *envoie* $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ *dans* $(B_0, B_1)_{\eta,q}$, *avec* η, q *vérifiant (2.3.3), (2.3.4) et on a*

$$\| Ta \|_{(B_0,B_1)_{\eta,q}} \leq c \| a \|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}}^{(1-\eta)\beta+\eta\alpha} . \tag{2.3.7}$$

Preuve. Soit $a \in (A_0, A_1)_{\theta,p}$ tel que $a = a_0(t) + a_1(t), pour\ t > 0.$

avec

$$\| a_0(t) \|_{A_0} + t \| a_1(t) \|_{A_1} \leq 2K(t, a),$$

posons

$$Ta = b_0(t) + b_1(t),$$

avec

$$b_0(t) = Ta_0(t^\lambda),$$

avec

$$\lambda = \frac{\eta}{\theta\beta} = \frac{1-\eta}{(1-\theta)\alpha},$$

on a

$$\| b_0(t) \|_{B_0} \leq c \| a_0(t^\lambda) \|_{A_0}^{\beta} .$$

On a a , $a_0(t) \in A_0 + A_1$ et $a - a_0(t) = a_1(t) \in A_1$, donc d'après (2.3.7) on a

$$Ta - Ta_0(t) \in B_1,$$

et donc

$$b_1(t) \in B_1,$$

de plus

$$\| b_1(t) \|_{B_1} = \| Ta - Ta_0(t^\lambda) \|_{B_1} \leq c \| a_1(t^\lambda) \|_{A_1}^{\alpha} .$$

On termine comme au théorèmes précédents 2.3.1 et 2.3.2. ∎

Théorème 2.3.4 *[6, Thm.4, p.476]*

On suppose qu'on a (2.3.7) *avec l'hypothèse supplémentaire*

$$\begin{aligned} \| Ta - Tb \|_{B_0} &\leq c_0 \| a - b \|_{A_0}^{\beta} && \forall a, b \in A_0, \\ \| Ta - Tb \|_{B_1} &\leq c_1 \| a - b \|_{A_1}^{\alpha} && \forall a, b \in A_0 + A_1; a - b \in A_1. \end{aligned}$$

Alors si $0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq +\infty$ *on a*

$$\| Ta - Tb \|_{(B_0,B_1)_{\eta,q}} \leq c.C_0^{1-\eta} C_1^{\eta} \| a - b \|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}}^{(1-\eta)\beta+\eta\alpha}, \tag{2.3.8}$$

$\forall a, b \in (A_0, A_1)_{\theta,p}$.

2.4 L'interpolation non linéaire dans l'espace de Besov

pour compléter ce chapitre , on a besoin d'un petit rappel sur l'interpolation non linéaire.

Proposition 2.4.1 *[5, Prop.1, p.84] Soient* $0 < \theta < 1$ *et* $0 < q < +\infty$.

Soient (A_0, A_1) *et* (B_0, B_1) *des couples d'interpolation.*

on suppose que

$$A_0 \hookrightarrow A_1.$$

Soit T *un opérateur non linéaire tel que* $T(0) = 0$, *et*

$$\| T(f) - T(g) \|_{A_1} \leq c \| f - g \|_{A_0},$$

pour tout $f \in A_0$ *et tout* $g \in A_0$.

Alors T *est un opérateur borné de* $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ *dans* $(B_0, B_1)_{\theta,q}$.

De plus

$$\| T(f) \|_{(B_0,B_1)_{\theta,q}} \leq c \| f \|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}},$$

pour tout $f \in (A_0, A_1)_{\theta,q}$.

Proposition 2.4.2 *[5, Prop.2, p.84-85] Soient* $0 < \theta < 1$, $0 < q < +\infty$ *et* T *un opérateur tel que* $T(0) = 0$. *On suppose que pour* $s_1 > s_0$, $(s = (1-\theta)s_0 + \theta_{s_1})$ *on a*

$$\| T(f) - T(g) \|_{B^{s_0}_{p,q_2}} \leq h_0(\| f \|_{L_\infty}, \| g \|_{L_\infty}) \| f - g \|_{B^{s_0}_{p,q_0}},$$

pour tout $f, g \in B^{s_0}_{p,q_0} \cap L_\infty$,

et

$$\| T(f) \|_{B^{s_1}_{p,q_3}} \leq h_1(\| f \|_{L_\infty}) \| f \|_{B^{s_1}_{p,q_1}},$$

pour tout $f \in B^{s_1}_{p,q_1} \cap L_\infty$,

où h_0, h_1 *sont deux fonctions positives croissantes.*

Alors, T *est un opérateur borné de* $B^s_{p,q} \cap L_\infty$ *dans* $B^s_{p,q}$.

De plus ,il existe deux constantes a, c *telles que*

$$\| T(f) \|_{B^s_{p,q}} \leq c h_0^{1-\theta}(a \| f \|_{L_\infty}, a \| f \|_{L_\infty}) h_1^{\theta}(a \| f \|_{L_\infty}) \| f \|_{B^s_{p,q}},$$

pour tout $f \in B^s_{p,q} \cap L_\infty$.

Nous allons voir le théorème principale de ce mémoire :

Théorème 2.4.1 *Soit* $0 < \theta < 1$ *et* $0 < q < +\infty$.

On suppose que pour $s_1 > s_0$, $(s = (1-\theta)s_0 + \theta_{s_1})$,

un opérateur T *tel que* $T(0) = 0$, *on a*

$$\| T(f) - T(g) \|_{B^{s_0}_{p,q_2}} \leq h_0(\| f \|_{\dot{W}^m_\infty}, \| g \|_{\dot{W}^m_\infty}) \| f - g \|_{B^{s_0}_{p,q_0}},$$

pour tout $f, g \in B^{s_0}_{p,q_0} \cap \dot{W}^m_\infty$,

et

$$\| T(f) \|_{B^{s_1}_{p,q_3}} \leq h_1(\| f \|_{\dot{W}^m_\infty}) \| f \|_{B^{s_1}_{p,q_1}},$$

pour tout $f \in B^{s_1}_{p,q_1} \cap \dot{W}^m_\infty$,

où h_0, h_1 *sont deux fonctions positives croissantes.*

Alors, T *est un opérateur borné de* $B^s_{p,q} \cap \dot{W}^m_\infty$ *dans* $B^s_{p,q}$.

De plus ,il existe deux constantes a, c *telles que*

$$\| T(f) \|_{B^s_{p,q}} \leq c h_0^{1-\theta}(a \| f \|_{\dot{W}^m_\infty}, a \| f \|_{\dot{W}^m_\infty}) h_1^\theta(a \| f \|_{\dot{W}^m_\infty}) \| f \|_{B^s_{p,q}} .$$

pour tout $f \in B^s_{p,q} \cap \dot{W}^m_\infty$.

Preuve. D'après le Théorème de Peetre's K-Fonctional on a

$$K(t, f, B^{s_0}_{p,q_0}, B^{s_1}_{p,q_1}) = \inf\{\| f - g \|_{B^{s_0}_{p,q_0}} + t \| g \|_{B^{s_1}_{p,q_1}} : \ g \in B^{s_1}_{p,q_1}\}.$$

On a g définie par

$$g_k = \sum_{j=0}^{k} \mathcal{F}^{-1}\psi_j * f = \mathcal{F}^{-1}\psi_k * f \qquad \text{avec } \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

tel que

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(.) + \sum_{j=0}^{k} \mathcal{F}^{-1}\varphi(2^j.) = 1,$$

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(2^{-k}.) = \sum_{j=0}^{k} \mathcal{F}^{-1}\varphi(2^{-j}.),$$

alors

$$g_k = \sum_{j=0}^{k} \mathcal{F}^{-1}[\varphi_j \mathcal{F} f](.) = \mathcal{F}^{-1}[\psi(2^{-k}.)\mathcal{F} f](.), \quad k = 0, 1, 2, ...$$

donc

$$\| g_k \|_\infty \leq \| \psi_k * f \|_\infty \leq \| \psi_k \|_1 \| f \|_\infty,$$

de plus

$$\partial^m g_k = \psi_k * \partial^m f,$$

par l'inégalité de Young on a

$$\| g_k \|_{\dot{W}^m_\infty} = \| g_k^{(m)} \|_\infty \leq \| \psi_k \|_1 \| f \|_{\dot{W}^m_\infty} .$$

Mais

$$\sup \| g_k \|_{\dot{W}^m_\infty} = \sup \| g_k^{(m)} \|_\infty \leq (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \| \mathcal{F}^{-1}\psi \|_1 \| f \|_{\dot{W}^m_\infty} = a \| f \|_{\dot{W}^m_\infty},$$

tel que $a \in \mathbb{R}$.

On suppose que $h_0(a \| f \|_{\dot{W}^m_\infty}, a \| f \|_{\dot{W}^m_\infty}) = h_0$ et $h_1(a \| f \|_{\dot{W}^m_\infty}) = h_1$,

on a

$$K(t, T_f, B^{s_0}_{p,q_2}, B^{s_1}_{p,q_3}) \leq \| T_f \|_{B^{s_0}_{p,q_2}} \leq h_0(\| f \|_{\dot{W}^m_\infty}, 0) \| f \|_{\dot{W}^m_\infty} .$$

Ce qui se traduit par

$$\left(\int_{\frac{h_0}{h_1}}^\infty t^{-\theta q} K(t, T_f, B^{s_0}_{p,q_2}, B^{s_1}_{p,q_3})^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq c h_0^{1-\theta} h_1^\theta \| f \|_{B^s_{p,q}} .$$

Pour certains c indépendante de f, h_0 et h_1.

Soit $0 < t < \frac{h_0}{h_1}$,

on choisit $g = g_k$ telles que

$$2^{-(k+1)(s_1-s_0)} h_0 h_1^{-1} \leq t \leq 2^{-k(s_1-s_0)} h_0 h_1^{-1},$$

alors

$$\int_0^{\frac{h_0}{h_1}} t^{-\theta q} K(t, T_f, B^{s_0}_{p,q_2}, B^{s_1}_{p,q_3})^q \frac{dt}{t}$$

$$\leq c \sum_{j=0}^k 2^{k(s_1-s_0)\theta q} h_0^{-\theta} h_1^\theta (h_0 \| f - g_k \|_{B^{s_0}_{p,q_0}} + 2^{-k(s_1-s_0)} h_0 \| g_k \|_{B^{s_1}_{p,q_1}})^q$$

$$\leq c h_0^{(1-\theta)q} h_1^{\theta q} \left[\sum_{k=0}^\infty 2^{k(s_1-s_0)\theta q} \left(\sum_{j=k-1}^\infty 2^{j s_0 d} \| \mathcal{F}^{-1} \left[\varphi_j \mathcal{F} f\right](.) \|_p^d \right)^{\frac{q}{d}} \right]$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(s_1-s_0)\theta q}\left(\sum_{j=0}^{k+1} 2^{js_1 d} 2^{-k(s_1-s_0)d} \parallel \mathcal{F}^{-1}\left[\varphi_j \mathcal{F} f\right](.) \parallel_p^d\right)^{\frac{q}{d}},$$
$$\leq c h_0^{(1-\theta)q} h_1^{\theta q} \parallel f \parallel_{B_{p,q}^s}^d .$$

avec $d = \min(p, q, q_0, q_1)$ *car*

$$\parallel f \parallel_{(B_{p,q_0}^{s_0}, B_{p,q_1}^{s_1})_{\theta,q}}^q = \int_0^\infty t^{-\theta q} K(t, f, B_{p,q_0}^{s_0}, B_{p,q_1}^{s_1})^q \frac{dt}{t}.$$

■

Exemple 2.4.1 *On a* $f, g \in B_{p,q}^{s_0} \cap \dot{W}_\infty^m$, $f \in \dot{W}_\infty^m \Longrightarrow f^{(m)} \in L_\infty$.

- *on pose :* $f(x) = x + \sin x$.

  Si $f \in \dot{W}_\infty^2$ *Alors* $f''(x) = -\cos x \in L_\infty$.

Chapitre 3

Applications

Les exembles suivants se trouvent dans le livre de L.Tartar [481-488][Voir [6]] dans le cas général $(n \geq 1)$.

Exemple 3.0.2 *(Applications D'EDP Linéaires)[Voir [6]]*

Pour $n = 1$ et $a_{ij} = a_2$, $a_i = a_1$ et $b_i = b_1$.

Exemple 1

- Soit $V = H_0^1(\Omega)$ espace de Sobolev , $\Omega =]a, b[$ est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}$.

$$a(u, v) = \int_\Omega a_2 u^{'} v^{'} dx + \int_\Omega (a_1 u v^{'} + b_1 u^{'} v) dx + \int_\Omega a_0 uvdx.$$

Solution

On suppose que $a_1, a_{2,} b_1, a_0 \in L^\infty(\Omega)$ de sorte que $a(u, v) = \langle Au, v\rangle$ avec $A \in \mathcal{L}(v, v^{'})$ on fait l'hypothèse qu'il existe $\alpha > 0$

$$a(u, u) \geq \alpha \parallel u \parallel^2, \quad \forall u \in V.$$

Alors A est un isomorphisme de V sur $V^{'}$ et

$$\parallel A^{-1} \parallel_{\mathcal{L}(v', v)} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Si les $a_1, a_{2,} b_1, a_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ (fonctions lipschiziennes sur $\bar{\Omega}$), alors A est un isomorphisme de $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$. De plus, comme dans l'exemple 1 on a

$$\| u \|_{H^2} \leq \frac{C}{\alpha} \| Au \|_{L^2} + C \left(\left\| \frac{\partial a_2}{\partial \chi_k} \right\| + \left\| \frac{\partial a_1}{\partial x_k} \right\|_{L^\infty} + \left\| \frac{\partial b_1}{\partial x_k} \right\|_{L^\infty} \right) \| u \|_{H_0^1} .$$

Conclusion en général on a

Si $a(u,u) \geq \alpha \| u \|_{H_0^1}^2$ et si les coefficients vérifient

$a_{i,j}, a_i, b_i, a_0 \in (W^{1,\infty}(\Omega); L^\infty(\Omega))_{\theta,p}$, avec $0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq +\infty$,

alors A est un isomorphisme de

$$(H^2 \cap H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))_{\theta,p} \quad sur \quad (L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))_{\theta,p}.$$

Exemple 2

- Soient V et H deux espaces de Hilbert.V inclus et dense dans H.Soit $A \in L^\infty(0,\infty; \mathcal{L}(v,v'))$ vérifiant

$$(A(t)u,u) \geq \alpha \| u \|^2, \qquad \alpha > 0, \forall t \geq 0, \forall u \in V.$$

On considère le problème

$$\frac{du}{dt} + Au = f, \qquad u(0) = 0. \tag{3.0.1}$$

Solution

Sous ces hypothèses $\frac{d}{dt} + A$ est un isomorphisme de

$$L^2(\mathbb{R}^+; V) \cap H_0^1(\mathbb{R}^+; V') \quad sur \quad L^2(\mathbb{R}^+; V').$$

On a aussi le théorème de régularité suivant

Si $A \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^+; \mathcal{L}(v,v'))$ alors $\frac{d}{dt} + A$ est un isomorphisme de

$$H_0^k(\mathbb{R}^+; V) \cap H_0^{k+1}(\mathbb{R}^+; V') \quad sur \quad H_0^k(\mathbb{R}^+; V').$$

tel que k *entier* ≥ 1.

En dérivant k fois *l'équation* (3.2.1) on obtient

$$\| u^{(k)} \|_{L^2(V)} \leq \frac{1}{\alpha} \| f^{(k)} \|_{L^2(V')} + C \| A \|_{W^{k,\infty}(\mathcal{L}(V,V'))} \| u \|_{L^2(V)} .$$

On considère alors

$$\begin{aligned} A_1 &= H_0^k(\mathbb{R}^+;V') * W^{k,\infty}(\mathbb{R}^+;\mathcal{L}(V,V')), \\ B_1 &= H_0^k(\mathbb{R}^+;V) * H_0^{k+1}(\mathbb{R}^+;V'). \end{aligned}$$

A_0 et B_0 obtenus en remplaçant k par $k+1$.

Conclusion en général

Alors compte tenu de ce qui précède on a

Si

$$A \in (W^{k+1,\infty}(\mathbb{R}^+;\mathcal{L}(V,V')), W^{k,\infty}(\mathbb{R}^+;\mathcal{L}(V,V')))_{\theta,p}.$$

Tel que $0 < \theta < 1; 1 \leq p \leq +\infty$.

Et si $(A(t)u,u) \geq \alpha \parallel u \parallel^2$ alors $\frac{d}{dt} + A$ est un isomorphisme de

$$\begin{aligned} &(H_0^{k+1}(\mathbb{R}^+;V), H_0^k(\mathbb{R}^+;V))_{\theta,p} \cap (H_0^{k+2}(\mathbb{R}^+;V'), H_0^{k+1}(\mathbb{R}^+;V'))_{\theta,p}, \\ &sur \qquad (H_0^{k+1}(\mathbb{R}^+;V'), H_0^k(\mathbb{R}^+;V'))_{\theta,p}. \end{aligned}$$

Exemple 3.0.3 *(Applications D'EDP Non Linéares)[Voir [6]].*

On considére dans ce paragraphe des équations non linéaires $Au = f$,

mais on considère l'application $f \longrightarrow u$.

Exemple 1

- Soient a_2 ,$a_0 \in L^\infty(\Omega), \Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}$, vérifiant

$$a_2(x)\xi_1\xi_2 \geq a\xi_1^2; \qquad\qquad 0 < \alpha \leq a_0(x).$$

Solution

Soit β un graphe maximal monotone sur $\mathbb{R}$ tel que $\beta(0) = 0$.

Soit B la fonction convexe sur $\mathbb{R}$ de sous-gradient β et telle que $B(0) = 0$.

On pose

$$a(u,u) = \int_\Omega a_2 u' v' dx + \int_\Omega a_0 uv \, dx \qquad pour \quad u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Pour $f \in H^{-1}(\Omega)$ il existe u unique tel que

$$a(u, v-u) + B(v) - B(u) \geq (f, v-u), \qquad \forall v \in H_0^1.$$

La solution vérifie

$$-\left(a_2 u''\right) + a_0 u + \beta(u) \ni f, \qquad \text{si } \ f \in L^2(\Omega) \text{ par exemple.}$$

On a aisément

$$\| u_1 - u_2 \|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\alpha} \| f_1 - f_2 \|_{H^{-1}} .$$

Si $f \in L^2(\Omega)$ on a $\beta(u) \in L^2(\Omega)$ et

$$| \beta(u) |_{L^2(\Omega)} \leq | f |_{L^2(\Omega)},$$

donc si on pose $\langle Au, v\rangle = a(u, v)$.

Conclusion en général, on a

Si $f \in (L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))_{\theta,p}$ on a $Au \in (L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))_{\theta,p}$.

Si $f \in L^p(\Omega), 1 \leq p \leq +\infty$ on a $\beta(u) \in L^p(\Omega)$ et $\| \beta(u) \|_{L^p(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)}$.

On peut donc interpoler entre $L^p(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.

telle que $a_2 = a_{ij}$ et $a_1 = a_i$ et $b_1 = b_i$.

Exemple 2

- Même exemple avec $\beta(u) = | u |^{p-2} u$, $p > 1$.

Le cas intéressant est le cas $p \geq 2$ on a $(\beta(u) - \beta(v),\, u - v) \geq C \mid u - v \mid^p$ .On a donc

$$\| u_1 - u_2 \|_{L^p(\Omega)} \leq C \| f_1 - f_2 \|_{H^{-1}(\Omega)}^{\frac{2}{p}} .$$

Exemple 3

- A est comme dans l'exemple 1. On veut résoudre

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au + |u|^{p-2}\, u &= f. \\ u(0) &= 0. \end{aligned}$$

On suppose que $p > 2$ par exemple.

On a alors

$$\| u_1 - u_2 \|_{L^2(H_0^1) \cap L^\infty(L^2)} \leq C \| f_1 - f_2 \|_{L^2(H^{-1})},$$

et

$$\| u_1 - u_2 \|_{L^p(L^p)} \leq C \| f_1 - f_2 \|_{L^2(H^{-1})}^{\frac{\cdot}{p}} .$$

De plus si $f \in L^2(L^2(\Omega))$ on a

$$\| | u |^{p-2}\, u \|_{L^2(L^2(\Omega))} \leq C \| f \|_{L^2(L^2(\Omega))} .$$

Bibliographie

[1] G.BOURDAUD, Ce qu'il fout savoir sur . les espaces de Besov , Préprint, Paris , 2009.

[2] G.BOURDAUD & Y. MEYER, Le calcul fonctionnel sous-linéaire dans les espaces de Besov homogènes, Rev. Mat. Iberoamericana 22 (2006), no. 2, 725–746.

[3] B.JAWERTH, Some Observations on Besov and Triebel-Lizorkin spaces, Math. Scand . 40 (1977), p 94-104.

[4] J.PEETRE, New thoughts on Besov spaces, Duke, Université. Math. séries 1, Durham, 1976.

[5] T.RUNST & W.SICKEL, Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytzkij Operators and Nonlinear Partial Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, 1996.

[6] L.TARTAR, Interolation non linéaire et régularité, Paris , France, Journal of Functional Analysis 9, 469-489 (1972).

[7] H.TRIEBEL, Theory of Function Spaces, Birkhäuser, Basel,1983.

[8] H.TRIEBEL, Theory of Function Spaces II , Birkhävser, Basel , 1992.

Résumé

On s'intéresse à etudier l'interpolation non linéair sur certains espace du type de Besov homogènes et non homogènes.

Nous arrivons à généraliser, dans un sens un résultat de Runst et Sickel .

Mots-clés : les espaces de Besov -les espaces de Besov homogènes et non homogènes-L'interpolation-L'interpolation linéaire-L'interpolation non linéaire.

Abstract

We are interested in studying the nonlinear interpolation on certain homogeneous and non homogeneous Besov spaces.

We come to generalize, in a sense, a result of Runst and Sickel

Key words : The spaces of Besov – The homogeneous and non homogeneous Besov spaces – Interpolation – Interpolation linear – Interpolation nonlinear.

ملخص

قمنا بدراسة الاستيفاء الغير الخطي على فضاء بيزوف بنوعيه المتجانس و الغير المتجانس.

و بعد ذلك نقوم بتعميم تلك الدراسة لكي نتحصل على بعض النتائج الموجودة في كتاب ران و سيكل.

الكلمات المفتاحية فضاء بيزوف-فضاء بيزوف المتجانس و الغير متجانس – الاستيفاء-الاستيفاء الخطي – الاستيفاء الغير خطي.