



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et Applications

Thème

*Étude d'existence de solutions auto-similaires pour une équation aux dérivées
partielles non-linéaire*

Présenté par :
SILINI Khaoula

Devant le jury composé de :

<i>M^r</i> BENHAMIDOUCE Nouredine	Prof.,	Université de M'sila	Président.
<i>M^r</i> BASTI Bilal	MCB,	Université de Djelfa	Encadreur.
<i>M^r</i> ARIOUA Yacine	MCA,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2020/2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

"وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَبَّحُوا اللَّهَ عَمَلَكُمْ وَرَسُولَهُ
وَالْمُؤْمِنُونَ وَسُجَّدُوا إِلَىٰ عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ
فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ" [التوبة: 105]

ديقول العباد الأصفهاني

(إني رأيت أنه لا يَلْتَبُ أحد كتابا في يومه إلا قال
فيه عنه : لو غير هذا لكان أحسن ، ولو زيد لكان
بسنحسن ، ولو قدم هذا لكان أفضل ، ولو ترك هذا
لكان أجمل ، وهذا من أعظم العبر ، وهو دليل على
استيلاء النفس على جملة البشر).

Remerciements

Je tiens à remercier tout premièrement **ALLAH** le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donnée durant toutes ces longues années.

Deuxième remerciements vont à docteur **Bilal BASTI**, qui a dirigé mes travaux de recherches avec beaucoup de patience et de gentillesse.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury le professeur **Noureddine BEN-HAMIDOUCHE** et le docteur **Yacine ARIOUA**, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Également, un remerciement à tous mes collègues de promotion 2021 pour les bons moments qui nous avons passé ensemble.

Dédicace

♡ À mon Père et Mère, à qui je dois tout et qui m'ont soutenu jusqu'au bout.

♡ À mes Frères et mes Sœurs, à qui je souhaite beaucoup de réussite dans leurs vies.

♡ À toute ma grande famille.

♡ À tous mes amis qui ont une place spéciale dans ma vie et à qui je souhaite beaucoup de bonheur et de réussite.

♡ À tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à ce travail.

Notation

ODE	Équation différentielle ordinaire.
EDP	Équation aux dérivées partielles.
PME	Équation de milieu poreux : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}$.
NDE	Équation de diffusion non linéaire pas sous forme de divergence.
HE	Équation de la chaleur.
$\mathcal{B}_{(\cdot)}$	Le solution de Barenblatt.
\mathbb{R}	Nombres réels $(-\infty, \infty)$.
\mathbb{R}_+	Nombres réels positifs $(0, \infty)$.
\mathbb{R}^n	Espace euclidien de dimension n , n un nombres naturel non nuls.
\mathbb{k}	Désigne le corps \mathbb{R} ou bien \mathbb{C} .
$C(\Omega, \mathbb{R})$	Espace de toutes les applications continues sur Ω dans \mathbb{R} .
$C^n(\Omega, \mathbb{R})$	L'espace des applications (avec ses dérivées d'ordre n) continues sur Ω dans \mathbb{R} .

Table des matières

Introduction	1
1 Quelques notions de base préliminaires	3
1.1 Équation aux dérivées partielles	3
1.2 Solutions auto-similaires	5
1.2.1 L'invariances d'échelles	5
1.2.2 Règles de dérivation (condition d'invariances d'échelles)	5
1.2.3 Forme de solution auto-similaire	6
1.3 Solutions auto-similaires générales	8
1.3.1 Détermination des paramètres $c(t)$ et $a(t)$	8
1.4 Présentation du problème de l'équation NDE	10
2 Étude de l'existence et l'unicité de solution de l'équation (NDE)	11
2.1 Préliminaires, lemmes et définitions nécessaires	11
2.2 Théorèmes et résultats principaux	24
3 Quelques solutions explicites de l'équation (NDE)	29
3.1 Différentes solutions de forme auto-similaire	29
3.2 Solutions explicites (cas particuliers)	30
3.2.1 Solution d'explosion	30
3.2.2 Solutions globales et d'explosions	31
3.2.3 Solution globale	33
Conclusion	35
Bibliographie	35

Introduction

Les équations différentielles et les systèmes différentiels ont une importance fondamentale dans les problèmes pratiques. Ceci est dû au fait qu'un grand nombre de lois et de relations physiques se traduisent mathématiquement sous forme d'équations différentielles. Les équations différentielles constituent une des branches les plus fertiles des mathématiques, l'étude de ce type d'équations différentielles est liée à l'étude des phénomènes naturels.

Le développement des équations aux dérivées partielles linéaires a connu grande progrès, mais il a rapidement été observé que la plupart des équations de modélisation des phénomènes physiques ne sont pas linéaires. Jusqu'au 20^{ème} siècle, il était impossible de faire beaucoup de progrès significatif dans les équations aux dérivées partielles (EDPs) non linéaires en général et en particulier dans le domaine des équations paraboliques. Comme l'équation de diffusion non linéaire pas sous forme de divergence (noté par (NDE)) s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad m \in [0, 1) \cup (1, \infty), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

est une équation parabolique non linéaire qui touchent quelques domaines de pratique. Ce modèle a été proposé par **B. Basti** et **N. Benhamidouche** [5].

En général, n'existe pas des méthodes générales pour trouver des solutions exactes, surtout à conditions initiales. Mais quelquefois, pour quelques EDPs qui possèdent la caractérisation de la symétrie, on peut déterminer leurs solutions exactes avec quelques transformations, l'EDP devient une équation différentielle ordinaire (EDOs), dans ce cas les solutions sont appelées "**solutions auto-similaires**".

Les solutions auto-similaire sont très important en physique car elles modélisent des phénomènes qui sont indépendants de l'échelle de mesure, De même on peut classer les solutions auto-similaires en plusieurs catégories.

Le théorème du point fixe de Banach représente d'importants outils mathématiques de base pour montrer l'existence et l'unicité de solutions pour divers types d'équations.

Ainsi, la théorie du point fixe est au cœur de l'analyse non linéaire appliquée aux équations différentielles.

Ce mémoire contient trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous donnons les différentes définitions de l'équation de diffusion non linéaire pas sous forme de divergence (**NDE**), en particulier, on donne les critères d'auto-similaire présentant de cette équation et le principe d'auto-similaire général.

Dans le deuxième chapitre on développe les travaux établis par **B. Basti** et **N. Benhamidouche** [5], pour étudier l'existence et l'unicité d'une solution positive sous la forme auto-similaire générale de l'équation (**NDE**).

Finalement, dans le dernier chapitre, on donne quelques solutions explicites pour l'équation (**NDE**), et les formes des solutions auto-similaires.

Chapitre 1

Quelques notions de base préliminaires

Dans ce chapitre nous allons présenter premièrement l'équation appelée "**Équation de diffusion non linéaire pas sous forme de divergence**" noté par (NDE). Ensuite le principe d'auto-similaire générale.

L'équation de diffusion non linéaire pas sous forme de divergence, est une équation parabolique dégénérée crier sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad m \in [0, 1) \cup (1, \infty). \quad (\text{NDE})$$

Où $u = u(x, t)$ est une fonction scalaire non négative des variables spatiales $x \in \mathbb{R}$ et le temps $t > 0$.

1.1 Équation aux dérivées partielles

Définition 1.1 (Dérivée partielle) Une dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables est la dérivée par rapport à une seule de ses variables, les autres étant gardées constantes.

Définition 1.2 (Équation aux dérivées partielles) Une équation aux dérivées partielles (EDP) pour la fonction u est une relation entre u , les variables indépendantes $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme :

$$F \left(u, x_1, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n}, \dots \right) = 0.$$

Définition 1.3 (Équation aux dérivées partielles non linéaires) On rencontre des EDPs non linéaires c'est-à-dire que la relation entre les dérivées partielles est non linéaire. Par exemple elle fait intervenir le carré d'une dérivée ou bien on multiplie par une fonction qui dépend elle-même de la solution.

Définition 1.4 (Solution faible) Une fonction u dite une solution faible ou généralisée de (NDE) si elle vérifie l'équation au sens des distributions.

Définition 1.5 (Solution classique) On dit que u est une solution classique de l'équation (NDE) dans un domaine ouvert Ω de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, si c 'est une fonction \mathbb{C}^2 de x , et \mathbb{C}^1 de t dans Ω , et si elle satisfait (NDE) point par point dans Ω .

Théorème 1.1 (Accroissements finis) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, et dérivable sur (a, b) . Alors il existe c appartenant à (a, b) tel que :

$$f'(c)(b-a) = f(b) - f(a).$$

Définition 1.6 L'équation de milieu poreux (**porous media**) est une équation parabolique non linéaire crier sous forme ([2, 8, 13, 19]) :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2(w^p)}{\partial x^2}, & p > 1, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{PME})$$

L'équation du milieu poreux (PME) est une équation qui admet les propriétés de similarité. Il y a plusieurs familles fondamentales connues de solutions auto-similaires, peut-être la plus importante est-elle formée par les solutions de Barenblatt $\mathcal{B}_{(\cdot)}$, découvert indépendamment par Barenblatt dans [2] et par Zeldovich et Kompaneets en [21], qui sont écrits sous la forme suivante :

$$\mathcal{B}_C(x, t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p+1}} \left(\frac{p-1}{2p(p+1)} \left(C^2 - x^2 t^{-\frac{2}{p+1}} \right) \right)^{\frac{1}{p-1}}, & \text{pour } |x| < C t^{\frac{1}{p+1}}, C > 0, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Remarque 1.1 L'équation (PME) implique que peut être écrire l'équation des milieux poreux formellement sous la forme de non divergence (NDE) avec $m \in (0, 1)$, par le changement de variable suivante :

$$w = p^{\frac{1}{p-1}} w^{\frac{1}{p}}, \text{ tel que } p = \frac{1}{1-m}, m \in (0, 1). \quad (1.2)$$

D'après le changement (1.2) on a :

$$m = \frac{p-1}{p}, w^p = p^{\frac{p}{p-1}} u.$$

Alors

$$\frac{\partial w}{\partial t} = p^{\frac{1}{1-p}} \frac{\partial u}{\partial t} u^{\frac{1}{p}-1} = p^{\frac{p}{1-p}} \frac{\partial u}{\partial t} u^{\frac{1-p}{p}},$$

et

$$\frac{\partial^2(w^m)}{\partial x^2} = p^{\frac{p}{p-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Donc

$$p^{\frac{p}{1-p}} \frac{\partial u}{\partial t} u^{\frac{1-p}{p}} = p^{\frac{p}{p-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

ce qui implique

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^{\frac{p-1}{p}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1.2 Solutions auto-similaires

Les solutions auto-similaire jouent un grand rôle dans les équations aux dérivées partielles d'évolution, elles permettent surtout de déterminer le comportement en temps des solutions au voisinage de l'infinie où zéro. Nous suggérons de trouver la solution de l'équation (NDE) sous forme "**auto-similaire**" suivante :

$$u(x, t) = \lambda^\alpha (\lambda^\beta x, \lambda t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Remarque 1.2 *Le principe de la recherche des solutions auto-similaires consiste à remplacer la forme (1) dans l'équation (NDE), ce qui permet de transformer l'équation aux dérivées partielles (NDE) en une équation différentielle ordinaire EDO non linéaire.*

1.2.1 L'invariances d'échelles

Soit $P(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots) = 0$, une équation aux dérivées partielles alors, P admet une solution auto-similaire si et seulement si elle invariante (par échelle) sous l'action de dilatation, c'est-à-dire si on fait le changement de variables suivant :

$$\tilde{u} = Hu, \quad \tilde{x} = Kx, \quad \tilde{t} = Lt, \quad (1.3)$$

avec H, K et L sont des paramètres positives, et $u(x, t)$ est une solution de l'équation P alors :

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = Hu\left(\frac{\tilde{x}}{K}, \frac{\tilde{t}}{L}\right), \quad (1.4)$$

est aussi une solution de l'équation P .

1.2.2 Règles de dérivation (condition d'invariances d'échelles)

On remplace la forme (1.4) de équation (NDE) on trouve :

$$\frac{\partial \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial Hu(x, t)}{\partial Lt} = \frac{H}{L} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

et

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial^2 H u(x, t)}{\partial K^2 x^2} = \frac{H}{K^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Alors l'équation (NDE) équivalent à :

$$\frac{H}{L} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{H^{m+1}}{K^2} u^m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

D'où, (1.4) sera une solution de (NDE) si et seulement si :

$$\frac{H}{L} = \frac{H^{m+1}}{K^2} \Rightarrow H^m = \frac{K^2}{L}. \quad (1.5)$$

La condition (1.5) qui s'appelle la condition de similarité où bien "**condition d'invariance d'échelle**" pour l'équation (NDE).

Exemple 1.1 Dans le cas $m = 0$ alors équation (NDE) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{HE})$$

Qui s'appelle problème de Cauchy pour l'équation de la Chaleur avec la donnée initiale $u_0 \in \mathbb{R}$.

Cette équation admet une solution auto similaire si elle vérifie la condition de similarité, on remplacer $m = 0$ dans la condition de similarité (1.5) on obtient :

$$K^2 = L. \quad (1.6)$$

Donc (1.6) qui s'appelle la condition d'invariance d'échelle pour l'équation de la chaleur.

1.2.3 Forme de solution auto-similaire

Dans le cas général pour $m > 0$, la condition (1.5) devient :

$$H = \left(\frac{K^2}{L} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Alors la formule (1.4) devient comme suit :

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \left(\frac{K^2}{L} \right)^{\frac{1}{m}} u(x, t).$$

Pour cette raison, on peut donner une formule générale pour la formule (1.4), si on pose :

$$\tilde{u} = \tau u \text{ tel que } \omega > 0.$$

Alors :

$$\tau u(x, t) = \left(\frac{K^2}{L} \right)^{\frac{1}{m}} u\left(\frac{x}{K}, \frac{t}{L}\right). \quad (1.7)$$

Remarque 1.3 En pratique, on peut utiliser un seul paramètre pour classifier la famille des solutions de l'équation (NDE). L'idée là, si on pose une nouvelle relation entre les deux paramètres H et K , alors on obtient la transformation (1.7) à un seul paramètre L . Si on prend :

$$H = K^{-\delta}, \text{ tel que } \delta \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

D'après la condition (1.5) on obtient :

$$K^{-\delta m} = \frac{K^2}{L} \Rightarrow K = L^{\frac{1}{\delta m + 2}}.$$

D'autre part, on a :

$$H = L^{\frac{-\delta}{\delta m + 2}}.$$

Si on pose $\alpha = \frac{-\delta}{\delta m + 2}$ et $\beta = \frac{1}{\delta m + 2}$ alors :

$$K = L^\beta \text{ et } H = L^{-\alpha}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

On trouve les exposants α et β comme suit :

$$\alpha(m, \delta) = \frac{-\delta}{\delta m + 2}, \beta(m, \delta) = \frac{1}{\delta m + 2}.$$

D'après (1.8) et (1.9) on trouve :

$$L^{-\delta} = L^{\frac{-\alpha}{\beta}}.$$

Donc :

$$\delta = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ tel que } \alpha, \beta \text{ et } \delta \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

On peut donc conclure une relation entre α et β , on a :

$$\beta = \frac{1}{\delta m + 2}.$$

En prenant en compte la formule (1.10) on obtient :

$$\alpha m + \frac{2\alpha}{\delta} = 1.$$

Ce qui implique :

$$\alpha m + 2\beta = 1.$$

De même, la transformation (1.7) devient :

$$\tau u(x, t) = L^{-\alpha} u\left(\frac{x}{L^\beta}, \frac{t}{L}\right).$$

Si on pose $\lambda = \frac{1}{L} > 0$, alors la solution :

$$u_\lambda(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta, \lambda t), \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

L'équation (1.11) est appelée la solution auto-similaire de l'équation (NDE) pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

1.3 Solutions auto-similaires générales

Ce type de solution représente la forme générale des solutions de type classique.

Soit l'équation de diffusion non linéaire pas sous forme de divergence :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad m \in [0, 1) \cup (1, \infty), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (\text{NDE})$$

Définition 1.7 La solution sous forme auto-similaire générale de l'équation (NDE) s'écrit sous la forme :

$$u(x, t) = c(t)f(\eta), \quad \text{avec } \eta = \frac{x}{a(t)}, \quad \text{et } x \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

Où $c(t)$ et $a(t)$ sont des fonctions non nulles qu'on pourra déterminer, et f est le profil de base.

Définition 1.8 (Solution globale) Une solution globale sous la forme auto-similaire générale est définie pour tout $t > 0$.

Définition 1.9 (Solution d'explosion) Une solution explosion (**blows up**) sous le forme auto-similaire générale est définie pour tout $t \in (0, T)$, où T représente le temps d'explosion du solution telle que :

$$\lim_{t \rightarrow T} u(x, t) = +\infty, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1.3.1 Détermination des paramètres $c(t)$ et $a(t)$

Pour déterminer les paramètres $c(t)$ et $a(t)$ de l'équation (NDE) il ya deux cas :

Cas 1 pour $m = 0$: L'équation (NDE) devient l'équation de la Chaleur (HE).

Pour calculer la solution auto-similaire générale de l'équation de la Chaleur, il suffit de remplacer la formule (1.12) dans l'équation (HE) et on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (c(t) f(\eta)) \\ &= \dot{c}(t) f(\eta) - c(t) \frac{\dot{a}(t)}{a^2(t)} f'(\eta), \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{c(t)}{a^2(t)} f''(\eta),$$

alors

$$\dot{c}(t) f(\eta) - c(t) \frac{\dot{a}(t)}{a^2(t)} x f'(\eta) = \frac{c(t)}{a^2(t)} f''(\eta).$$

On remplace x par $\eta a(t)$ et en divisant par $c(t)$ on trouve :

$$\frac{\dot{c}}{c} f(\eta) - \frac{\dot{a}}{a} \eta f'(\eta) = \frac{1}{a^2} f''(\eta), \text{ avec } a, c \neq 0.$$

En utilisant le théorème de séparation des variables, on peut déterminer les coefficients $c(t)$, $a(t)$ par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{a^2} \alpha, \\ \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{1}{a^2} \beta. \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.13)$$

Pour résoudre le système différentiel (1.13), on suppose que :

$$a(0) = 1, \quad c(0) = 1.$$

D'après le système (1.13) on obtient :

$$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow c(t) = a(t)^{-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

On remplace $c(t)$ à système (1.13) alors :

$$a(t) = (1 - 2\beta t)_+^{\frac{1}{2}}, \quad c(t) = (1 - 2\beta t)_+^{-\frac{\alpha}{2\beta}},$$

tel que :

$$(N)_+ = \begin{cases} N, & \text{si } N > 0, \\ 0, & \text{si } N \leq 0. \end{cases}$$

avec $0 < t < T$, et T le temps d'explosion de la solution.

Cas 2 pour $m \in (0, 1) \cup (1, \infty)$: On calcule les dérivées et on remplace dans (NDE) on obtient [17] :

$$\dot{c}(t) f(\eta) - c(t) \frac{\dot{a}(t)}{a^2(t)} x f'(\eta) = \frac{c^{m+1}(t)}{a^2(t)} f^m(\eta) f''_{\eta\eta}(\eta).$$

On remplace x par $\eta a(t)$ et en divisant par $c(t)$ on trouve :

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} f(\eta) - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \eta f'(\eta) = \frac{c^m(t)}{a^2(t)} f^m(\eta) f''_{\eta\eta}(\eta), \text{ avec } a, c \neq 0.$$

Alors, d'après le théorème de séparation des variables, on obtient ([6], [7], [17]) :

$$\begin{cases} \frac{\dot{c}}{c} = \frac{c^m}{a^2} \alpha, \\ \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{c^m}{a^2} \beta, \\ f^m f''_{\eta\eta} = \alpha f + \beta \eta f'_{\eta}, \end{cases} \quad (1.14)$$

avec α et β constants réelles.

Le système (1.14) a été résolu et bien étudié dans les chapitres 2 et 3.

1.4 Présentation du problème de l'équation NDE

Dans cette partie, nous essayons d'abord de trouver l'équivalent approximatif du problème de l'équation de diffusion non linéaire pas sous forme de divergence :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \geq 0, m \in (0, 1) \cup (1, \infty), \\ u(0, t) = c(t) U, & U \geq 0, t > 0, \\ \frac{\partial u(\lambda a(t), t)}{\partial x} = \frac{\lambda \beta c^m(t)}{(1-m)a(t)} \lim_{x \rightarrow \lambda a(t)} [u(x, t)]^{1-m}, & \lambda > 0, \\ \int_x^{\lambda a(t)} \left(\frac{u(x, t)}{u(s, t)} \right)^{m-1} ds \leq \frac{\lambda}{2} a(t), & \forall m > 1, \forall x \in [0, \lambda a(t)]. \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Sous la forme auto-similaire générale qui est :

$$u(x, t) = c(t) f(\eta), \text{ avec } \eta = \frac{x}{a(t)} \text{ et } a, c \in \mathbb{R}_+. \quad (1.16)$$

D'après la partie précédente, le système (1.14), on considère ce problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f^m f'' = \alpha f + \beta \eta f', & \eta \geq 0, m \in (0, 1) \cup (1, \infty), \\ f(0) = U, & u \geq 0, \\ f'(\lambda) = \frac{\lambda \beta}{1-m} \lim_{\eta \rightarrow \gamma^-} f^{1-m}(\eta), & \lambda > 0, \\ \int_{\eta}^{\lambda} f^{1-m}(\xi) \leq \frac{\lambda}{2} f^{1-m}(\eta), & \forall m > 1, \forall \eta \in (0, \lambda), \end{array} \right.$$

avec α et β sont des constantes réelles.

Chapitre 2

Étude de l'existence et l'unicité de solution de l'équation (NDE)

Dans ce chapitre, notre travail concerne sur les analyses et les preuves des théorèmes, qui démontrent l'existence et l'unicité d'une solution positive sous la forme auto-similaire générale de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad m \in (0, 1) \cup (1, \infty), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Soit le système (qui nous avons trouvé dans le dernier du chapitre 1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f^m f'' = \alpha f + \beta \eta f', \quad \eta \geq 0, \quad m \in (0, 1) \cup (1, \infty), \\ f(0) = U, \quad U \geq 0, \\ f'(\lambda) = \frac{\lambda \beta}{1-m} \lim_{\eta \rightarrow \gamma^-} f^{1-m}(\eta), \quad \lambda > 0, \\ \int_{\eta}^{\lambda} f^{1-m}(\xi) \leq \frac{\lambda}{2} f^{1-m}(\eta), \quad \forall m > 1, \forall \eta \in (0, \lambda), \end{array} \right. \quad (2.1)$$

avec α et β constants réelles.

2.1 Préliminaires, lemmes et définitions nécessaires

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions auto-similaires positives sous la forme générale pour le problème de l'équation de diffusion non linéaire pas sous forme de divergence.

Définition 2.1 (Solution faible [5]) Soit f une fonction est appelé une solution faible a support compact de problème (2.1) si et seulement si :

a) f est une fonction continue, bornée et non négative sur $[0, \infty)$.

b) f a une dérivée continue dans un voisinage gauche de $\eta = \lambda$.

c) f satisfait l'identité :

$$\int_0^\infty \left(f'(\xi) + \frac{\beta}{m+1} \xi f^{1-m}(\xi) \right) \varphi'(\xi) d\xi + \left(\alpha + \frac{\beta}{m-1} \right) \int_0^\infty f^{1-m}(\xi) \varphi(\xi) d\xi = 0,$$

tel que $\varphi \in C_0^1((0, \infty), \mathbb{R})$.

Nous discutons de l'existence du profil de base f des solutions faibles avec support compact, f est positive dans un voisinage à droite de $\eta = 0$, plus spécifiquement pour certains $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\varepsilon < \lambda < \infty$ tel que :

$$f > 0, \text{ sur } (0, \lambda),$$

et

$$f \equiv 0, \text{ sur } (\lambda, \infty).$$

Supposons que f est une solution faible du problème (2.1) avec support compact et λ positif nombre, nous intéresserons principalement à prouver l'existence et l'unicité d'une solution positive de problème (2.1) sur un intervalle $(0, \lambda)$.

Soit l'équation différentielle non linéaire d'ordre m suivante :

$$f^m(\eta) f''(\eta) = \alpha f(\eta) + \beta \eta f'(\eta), \quad (2.2)$$

avec les conditions aux bords :

$$f(0) = U, \quad f(\lambda) = 0 \quad \text{et } \lambda > 0. \quad (2.3)$$

On va étudier l'existence et l'unicité d'une solution positive du problème (2.1) sur l'intervalle $(0, \lambda)$, d'abord nous donnons les conditions nécessaires des paramètres α et β pour l'existence d'une solution faible non triviale avec un support compact du problème (2.1).

Lemme 2.1 ([5]) Soit la fonction f une solution faible non triviale avec un support compact de problème (2.1)–(2.3), si et seulement si :

1. $\beta < 0$ pour $m \in (0, 1)$.
2. $\beta > 0$ pour $m > 1$.
3. $\beta = 0$ et α prend une valeur strictement positive.

Preuve. Supposons que f une solution faible non triviale du problème (2.1) avec un support compact. Alors pour $\varepsilon > 0$, on a :

$$f \begin{cases} > 0, & \text{sur } (\lambda - \varepsilon, \lambda), \\ = 0, & \text{sur } (\lambda, \infty), \end{cases} \quad \lambda > 0.$$

Pour f est une solution faible de (2.1) qui satisfaites (2.3) dans le voisinage gauche de $\lambda = \eta$. L'intégration de (2.2) commençant par η à λ , où $\lambda - \varepsilon < \eta < \lambda$ on obtient :

$$(1 - m) f'(\eta) = \beta \eta f^{1-m}(\eta) + [\alpha(m - 1) + \beta] \int_{\eta}^{\lambda} f^{1-m}(\xi) d\xi. \quad (2.4)$$

On a f et f' continue sur λ , alors $\exists \eta^* \in (\lambda - \varepsilon, \lambda)$, tel que $f(\eta^*) < 0$. On applique le théorème des accroissements finis sur $(\lambda - \varepsilon, \lambda)$ on a :

$$\exists \eta^* \in (\lambda - \varepsilon, \lambda), \text{ tel que } f'(\eta^*) = \frac{f(\lambda) - f(\lambda - \varepsilon)}{\lambda - (\lambda - \varepsilon)} = -\frac{f(\lambda - \varepsilon)}{\varepsilon} < 0.$$

Alors le nombre à gauche de (2.4) au point $\eta^* = \eta$ est négatif pour $m \in (0, 1)$ et positif pour $m > 1$. Donc β et $\alpha(m - 1) + \beta$ supérieurs à zéro pour $m \in (0, 1)$, β et $\alpha(m - 1) + \beta$ inférieur à zéro pour $m > 1$, $\beta = 0$ implique que $\alpha > 0$ (d'où l'estimation (3)).

Car la fonction f est positive et tend vers zéro si $\eta \rightarrow \lambda$, le théorème des accroissements finis permet de prouver qu'il existe $\lambda - \varepsilon \leq \lambda_0 < \lambda$ tel que $f'(\eta) < 0, \forall \eta \in (\lambda_0, \lambda)$, il y a deux cas :

1. Pour $m \in (0, 1)$, nous imposons $\beta > 0 : \forall \eta \in (\lambda_0, \lambda)$, cela implique que $\alpha(m - 1) + \beta < 0$, alors :

$$(1 - m) f'(\eta) > f^{1-m}(\eta) (\beta \eta + [\alpha(m - 1) + \beta] (\lambda - \eta)),$$

équivalent

$$(1 - m) f'(\eta) f^{m-1}(\eta) - \beta \eta > [\alpha(m - 1) + \beta] (\lambda - \eta). \quad (2.5)$$

On a $\forall \eta \in [\lambda_0, \lambda)$ et $\forall \xi \in (\eta, \lambda)$, nous avons :

$$f(\eta) > f(\xi).$$

Pour tout $m \in (0, 1)$, cette :

$$f^{1-m}(\eta) > f^{1-m}(\xi), \text{ et } f^{m-1}(\eta) f^{1-m}(\xi) < 1,$$

également

$$\int_{\eta}^{\lambda} f^{m-1}(\eta) f^{1-m}(\xi) d\xi < (\lambda - \eta).$$

Si $\eta \rightarrow \lambda$ dans (2.5), la partie gauche est négative et la partie droite tend vers zéro, contradiction, ce qui implique que $\beta < 0$ pour $m \in (0, 1)$.

2. Pour $m > 1$, considérons $\beta < 0$:

$\forall \eta \in (\lambda_0, \lambda)$, cela implique que $\alpha(m-1) + \beta > 0$, en conséquence $\alpha > 0$, il résulte de (2.4) que :

$$(1-m)f'(\eta) - \beta\eta f^{1-m}(\eta) < \alpha(m-1) \int_{\eta}^{\lambda} f^{1-m}(\xi) d\xi. \quad (2.6)$$

Si $\eta \rightarrow \lambda$ dans (2.6), la partie gauche est positive et la partie droite tend vers zéro, contradiction.

Alors, nous avons déjà prouvé que les coefficients :

$$\beta < 0 \text{ pour } m \in (0, 1), \text{ où } \beta > 0 \text{ pour } m > 1, \text{ où } \beta = 0 \text{ et } \alpha > 0.$$

Sont les seuls cas pour lesquels la solution faible non triviale avec un support compact du problème de la valeur aux limites (2.1)–(2.3) existe.

La preuve est complète. ■

Solution explicite $\beta = 0$ et $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$

Soit λ un nombre positif, les conditions nécessaire de l'existence d'une solution positive du problème (2.1)–(2.3) dans un voisinage gauche de $\eta = \lambda$ est soit $\beta > 0$ pour $m > 1$, $\beta < 0$ pour $m \in (0, 1)$ où $\beta = 0$ et $\alpha > 0$. Dans cette partie est de montrer que cette condition est également suffisante.

1) Pour $\beta = 0$ et $\alpha > 0$: Nous pouvons alors résoudre le problème (2.1)–(2.3) de manière unique. Après un calcul élémentaire que la fonction :

$$f(\eta, \lambda) = \left(\frac{\alpha m^2}{2(2-m)} (\lambda - \eta)^2 \right)^{\frac{1}{m}}, m \in (0, 1) \cup (1, 2), 0 \leq \eta < \lambda, \quad (2.7)$$

est une solution unique du problème (2.1)–(2.3).

Par $\beta = 0$, et $\alpha > 0$ l'équation (2.2) devient comme suit :

$$f^m(\eta) f''(\eta) = \alpha f(\eta).$$

En multipliant par f^{-m} , on trouve :

$$f''(\eta) = \alpha f^{1-m}(\eta),$$

équivalent

$$f''(\eta) f'(\eta) = \alpha f^{1-m}(\eta) f'(\eta). \quad (2.8)$$

Pour $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ on a de (2.1) $f'(\lambda) = 0$, par l'intégrale de η à λ avec $f'(\lambda) = 0$ on obtien :

$$\frac{1}{2} [f'(\eta)]^2 = \frac{\alpha}{2-m} f^{2-m}(\eta).$$

Aussi, après une simple intégration de η à λ , nous avons la fonction $f(\eta; \lambda)$ qui est donne dans (2.7).

Car $f(0, \lambda)$ est une fonction continue et monotone croissante de λ , tel que :

$$f(0, 0) = 0, \text{ et } f(0, \infty) = \infty.$$

L'équation $f(0, \lambda) = U$ est résoluble de manière unique pour tout $U > 0$.

Soit $\lambda(U)$ sa solution, alors $f = f(\eta, \lambda(U))$ est l'unique solution du problème (2.1)–(2.3), avec support compact définit pour tout $0 \leq \eta < \lambda$ et satisfait :

$$f(0, \lambda) = U \text{ et } f(\lambda, \lambda) = 0,$$

où

$$f(0, \lambda) = \left(\frac{\alpha m^2}{2(2-m)} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{m}} = U \Rightarrow \lambda(U) = \sqrt{\frac{2(2-m)}{\alpha m^2} U^m}.$$

De plus, f est une fonction décroissante continue et monotone.

2) Pour $\beta \neq 0$:

Remarque 2.1 Dans ce cas, nous donnons quelques lemmes élémentaires pour les deux cas suivants $\beta < 0$ pour $m \in (0, 1)$ et $\beta > 0$ pour $m > 1$.

Lemme 2.2 ([5]) f est une solution positif de problème (2.1)–(2.3) on (λ_1, λ) avec $0 < \lambda_1 < \lambda$ alors :

1. $f'(\eta) < 0$ sur (λ_1, λ) , si et seulement si $\alpha > \frac{\beta}{1-m}$.
2. Si $\alpha < \frac{\beta}{1-m}$ et $f'(\eta_0) = 0$, on pose $\eta_0 \in [\lambda_1, \lambda)$. Alors f a un maximum à η_0 tel que :

$$\eta_0 \leq \frac{\lambda [\alpha(m-1) + \beta]}{\alpha(m-1)}, \text{ pour } m \in (0, 1),$$

et

$$\eta_0 \geq \frac{\lambda [\alpha(m-1) + \beta]}{\alpha(m-1)}, \text{ pour } m \in (1, \infty).$$

3. Suppose que f un solution positif de (2.1) sur $[0, \lambda)$, alors :

$$f'(0) < 0, \text{ pour } \alpha > \frac{\beta}{1-m}.$$

4. Si

$$\alpha = \frac{\beta}{1-m}$$

on a :

$$f'(0) = 0, \text{ et } f'(\eta) < 0, \forall \eta \in (0, \lambda), \text{ c-à-d } f(\eta) \leq f(0) = U, \forall \eta \in [0, \lambda]. \quad (2.9)$$

Dans ce cas, nous trouvons une nouvelle solution explicite du problème (2.1)–(2.3) comme suit :

$$f(\eta, \lambda) = \left(\frac{\beta m}{2(m-1)} (\lambda^2 - \eta^2) \right)^{\frac{1}{m}}, \text{ et } m \in (0, 1) \cup (1, \infty), |\eta| < \lambda. \quad (2.10)$$

Preuve. Pour $\eta \in [\lambda_1, \lambda)$ l'équation intégrale (2.4) donne :

$$(1-m)f'(\eta) = \beta \eta f^{1-m}(\eta) + [\alpha(m-1) + \beta] \int_{\eta}^{\lambda} f^{1-m}(\xi) d\xi. \quad (2.11)$$

1. Parce que $\beta < 0$ pour $m \in (0, 1)$, le nombre droit dans (2.11) est toujours négatif c'est-à-dire $f'(\eta) < 0$ si et seulement si $\alpha(m-1) + \beta$ prend une valeur négative. De la même manière, on $\beta > 0$ pour $m \in (1, \infty)$, puis le membre gauche in (2.11) est toujours positif c'est-à-dire $f'(\eta) < 0$ si et seulement si $\alpha(m-1) + \beta$ prend une valeur positive, donc :

$$f'(\eta) < 0, \text{ sur } [\lambda_1, \lambda), \text{ pour } \alpha > \frac{\beta}{1-m}.$$

2. Si $\alpha < \frac{\beta}{1-m}$ alors $\alpha < 0$ pour tout $m \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, selon (2.2) on a :

$$f''(\eta_0) < 0, \text{ lorsque } f'(\eta_0) = 0.$$

Donc f a un maximum $\eta_0 = \eta$ et strictement décroissant sur (η_0, λ) , c'est-à-dire $f'(\eta) < 0$ sur (η_0, λ) . On met $\eta_0 = \eta$ dans (2.11), on obtient :

$$\beta \eta_0 f^{1-m}(\eta_0) + [\alpha(m-1) + \beta] \int_{\eta_0}^{\lambda} f^{1-m}(\xi) d\xi = 0.$$

Pour $m \in (0, 1)$, on a $\beta < 0$ et $\alpha(m-1) + \beta > 0$, ensuite :

$$\begin{aligned} & \beta \eta_0 f^{1-m}(\eta_0) + [\alpha(m-1) + \beta] (\lambda - \eta_0) f^{1-m}(\eta_0) \geq 0 \\ \Rightarrow & \beta \eta_0 + [\alpha(m-1) + \beta] (\lambda - \eta_0) \geq 0 \\ \Rightarrow & \beta \eta_0 - \eta_0 [\alpha(m-1) + \beta] \geq -\lambda [\alpha(m-1) + \beta] \\ \Rightarrow & \eta_0 \alpha(m-1) \leq \lambda [\alpha(m-1) + \beta]. \end{aligned}$$

Donc

$$\eta_0 \leq \frac{\lambda[\alpha(m-1) + \beta]}{\alpha(m-1)}.$$

De la même manière, pour $m \in (1, \infty)$ on a $\beta > 0$ et $\alpha(m-1) + \beta < 0$, puis on trouve :

$$\eta_0 \geq \frac{\lambda[\alpha(m-1) + \beta]}{\alpha(m-1)}.$$

3. Avec $\eta = 0$, (2.11) devient :

$$(1-m)f'(0) = [\alpha(m-1) + \beta] \int_0^\lambda f^{1-m}(\xi) d\xi. \quad (2.12)$$

Alors

$$[\alpha(m-1) + \beta] \int_0^\lambda f^{1-m}(\xi) d\xi < 0 \Rightarrow \alpha > \frac{\beta}{1-m}.$$

4. Si

$$\alpha(m-1) + \beta = 0, \forall m \in (0, 1) \cup (1, \infty).$$

On a de (2.11) :

$$(1-m)f'(\eta) = \beta\eta f^{1-m}(\eta). \quad (2.13)$$

Ce qui implique (2.9). L'intégration de (2.13) à partir de η à λ donne :

$$-\frac{1}{m}f^m(\eta) = \frac{\beta}{2(1-m)}(\lambda^2 - \eta^2).$$

Ce qui implique la fonction $f(\eta, \lambda)$ présente dans (2.10) par :

$$f(\eta, \lambda) = \left(\frac{\beta m}{2(m-1)}(\lambda^2 - \eta^2) \right)^{\frac{1}{m}}, \quad m \in (0, 1) \cup (1, \infty), \quad |\eta| < \lambda.$$

Soit $\lambda(U)$ sa solution.

Car $f(0, \lambda(U))$ est une fonction continue et monotone croissante de $\lambda(U)$, tel que :

$$f(0, 0) = 0 \text{ et } f(0, \infty) = \infty.$$

Alors l'équation $f(0, \lambda(U)) = U$ est résolu de manière unique pour tout $U \geq 0$ et $f = f(\eta, \lambda(U))$ est l'unique solution du problème (2.1)–(2.3) avec un support compact défini pour tout $|\eta| < \lambda$ satisfait :

$$f(0, \lambda) = U \text{ et } f(\lambda, \lambda) = 0,$$

où

$$f(0, \lambda) = \left(\frac{\beta m}{2(m-1)}\lambda^2 \right)^{\frac{1}{m}} = U \Rightarrow \lambda(U) = \sqrt{\frac{2(m-1)}{\beta m}U^m}.$$

De plus, f est une fonction décroissante continue et monotone.

La preuve est complète. ■

Dans l'étape suivante, nous passons maintenant à la question de l'existence.

Lemme 2.3 ([5]) Pour tout $m \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ et tout $\lambda > 0$, le problème (2.1) avec les conditions aux limites (2.3), a une solution positive unique dans le voisinage gauche de $\eta = \lambda$.

Théorème 2.1 (Point fixe de Banach [11]) Soit X un sous-ensemble fermé non vide d'un espace de Banach E , ensuite toute application M contractante de X en lui-même admet un point fixe unique.

Preuve. Supposons que la fonction f soit une solution faible non triviale du problème (2.1) avec un support compact. On a $f'(\eta) < 0$ pour $\eta \in (\lambda - \varepsilon, \lambda)$, pour certains $\varepsilon > 0$ (Par Lemme 2.2).

1. Pour $m \in (0, 1)$, on a $\beta < 0$. Dans ce cas, l'écriture de (2.11) est donnée comme suit :

$$f'(\eta) = \alpha \eta f^{1-m}(\eta) + [\alpha(1-m) - \beta] \int_{\eta}^{\lambda} \xi \frac{f'(\xi)}{f^m(\xi)} d\xi. \quad (2.14)$$

Avec $G(f) = \eta$ on a :

$$\frac{dG}{df} = \frac{1}{\alpha G f^{1-m} - [\alpha(1-m) - \beta] \int_0^f \frac{G(\varphi)}{\varphi^m} d\varphi}. \quad (2.15)$$

En intégrant l'équation différentielle (2.15) de 0 à f , on obtient :

$$G(f) - \lambda = \int_0^f \frac{d\varphi}{\alpha G \varphi^{1-m} - [\alpha(1-m) - \beta] \int_0^{\varphi} \frac{G(g)}{g^m} dg}. \quad (2.16)$$

On pose :

$$H(f) = 1 - \lambda^{-1} G(f) \Rightarrow G(f) = (1 - H(f)) \lambda.$$

Alors l'équation (2.16) devient :

$$H(f) = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^f \frac{d\varphi}{\alpha H \varphi^{1-m} - \frac{\beta}{1-m} \varphi^{1-m} - [\alpha(1-m) - \beta] \int_0^{\varphi} \frac{H(g)}{g^m} dg}. \quad (2.17)$$

En utilisant le principe de contraction du théorème de Banach, nous prouvons maintenant que l'équation (2.17) admet une solution positive à droite de $f = 0$. soit X l'ensemble des fonctions bornées $H(f)$ sur $[0, h]$, $h > 0$, satisfaisant :

$$0 \leq H(f) \leq \rho = -\frac{\beta m}{|\alpha|(1-m) + |\alpha(1-m) - \beta|}.$$

Soit $\|\cdot\|$ la norme définie sur X , alors X est un espace métrique complet. Sur X on définit l'opérateur :

$$M(H)(f) = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^f \frac{d\varphi}{\alpha H \varphi^{1-m} - \frac{\beta}{1-m} \varphi^{1-m} - [\alpha(1-m) - \beta] \int_0^{\varphi} \frac{H(g)}{g^m} dg}. \quad (2.18)$$

Premièrement, nous prouvons que M est un application de X à X . Soit $H \in X$. Il est clair que :

$$\begin{aligned} & \alpha H(\varphi) \varphi^{1-m} - \frac{\beta}{1-m} \varphi^{1-m} - [\alpha(1-m) - \beta] \int_0^\varphi \frac{H(g)}{g^m} dg \\ \geq & -\frac{\beta}{1-m} \varphi^{1-m} - |\alpha| H(\varphi) \varphi^{1-m} - |\alpha(1-m) - \beta| \|H\| \int_0^\varphi g^{-m} dg \\ \geq & -\frac{\beta}{1-m} \varphi^{1-m}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Par conséquent, à partir de (2.18), nous avons :

$$M(H)(f) \leq \frac{1}{\lambda^2} \int_0^f \frac{d\varphi}{-\frac{\beta}{1-m} \varphi^{1-m}} \leq \frac{(m-1)h^m}{\beta\lambda^2 m}. \quad (2.20)$$

Ainsi, $M(H)$ est bien défini sur X et $M(H) : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ est non négatif et continu. Le côté droit de (2.20) montre que nous pouvons trouver $h_0 > 0$, tel que $h \leq h_0$ et :

$$\|M(H)\| \leq \rho, \text{ pour tout } H \in X.$$

Donc M est un application de X à X pour quelques $h \leq h_0$. Dans l'étape suivante, nous montrons que M est une application contractuelle sur X . Soit $H_1, H_2 \in X$ et $h \leq h_0$, être un nombre réel positif, on met :

$$K(H) = \alpha H(\varphi) \varphi^{1-m} - \frac{\beta}{1-m} \varphi^{1-m} - [\alpha(1-m) - \beta] \int_0^\varphi \frac{H(g)}{g^m} dg.$$

Puis

$$\begin{aligned} \|K(H_2) - K(H_1)\| & \leq |\alpha| \|H_2(\varphi) - H_1(\varphi)\| \varphi^{1-m} \\ & \quad + \frac{|\alpha(1-m) - \beta|}{1-m} \|H_2(\varphi) - H_1(\varphi)\| \varphi^{1-m} \\ & \leq \left(|\alpha| + \frac{|\alpha(1-m) - \beta|}{1-m} \right) \|H_2(\varphi) - H_1(\varphi)\| \varphi^{1-m}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|M(H_1) - M(H_2)\| & = \left\| \frac{1}{\lambda^2} \int_0^f \frac{d\varphi}{K(H_1)} - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^f \frac{d\varphi}{K(H_2)} \right\| \\ & = \frac{1}{\lambda^2} \left\| \int_0^f \frac{K(H_2) - K(H_1)}{K(H_1)K(H_2)} d\varphi \right\| \\ & \leq \frac{(1-m)^2}{\lambda^2 \beta^2} \int_0^f \frac{\|K(H_2) - K(H_1)\|}{\varphi^{2(1-m)}} d\varphi \\ & \leq \frac{(1-m) [|\alpha|(1-m) + |\alpha(1-m) - \beta|]}{mh^{-m} \lambda^2 \beta^2} \|H_2(\varphi) - H_1(\varphi)\|. \end{aligned}$$

Il existe donc un $h_1 \in (0, h_0]$ tel que si $h \leq h_1$, M est une contraction sur X . Après le principe de contraction de Banach [11], M a un point unique fixe dans X , par conséquent, il existe une unique positive solution pour le problème (2.1) dans l'intervalle $(\lambda - \varepsilon, \lambda)$ pour certains $\varepsilon > 0$.

2. Après avoir utilisé certaines techniques, nous utilisons les mêmes étapes pour le cas $m \in (1, \infty)$, pour prouver l'existence de une seule solution positive au problème (2.1).

■

Remarque 2.2 *On continue maintenant f est une fonction positive de η . Il y a maintenant trois possibilités :*

1. $f(\eta) \rightarrow \infty$ comme $\eta \rightarrow \eta_1$ pour certains $\eta_1 \in [0, \lambda)$,
2. $f(\eta)$ peut être continué jusqu'à $\eta = 0$,
3. $f(\eta) \rightarrow 0$ comme $\eta \rightarrow \eta_2$ pour certains $\eta_2 \in [0, \lambda)$.

Nous commençons par étudier la possibilité 1.

Lemme 2.4 ([5]) *Soit $\mu \in [0, \lambda)$ être un nombre réel positif. Si f est une solution positive du problème (2.1) sur (μ, λ) , alors f est borné sur (μ, λ) et :*

$$\sup_{\mu < \eta < \lambda} f(\eta) \leq \left[\frac{\lambda^2 m}{2|m-1|} \max\{|\alpha(m-1) + 2\beta|, |\beta|\} \right]^{\frac{1}{m}}, \quad \forall m \in (0, 1) \cup (1, \infty).$$

Preuve. Supposons que f est une solution positive de (2.1) sur (μ, λ) . Nous prouvons ce lemme pour les deux cas suivants :

1. **Pour** $m \in (0, 1)$, $\beta < 0$:

- a) Si $\alpha(m-1) + \beta < 0$, dans ce cas $f'(\eta) < 0$, $\forall \eta \in (\mu, \lambda)$ (Lemme 2.2), c'est-à-dire :

$$f(\xi) < f(\eta), \quad \forall \xi \in (\eta, \lambda),$$

et de (2.11) :

$$(1-m)f'(\eta) \geq \beta\eta f^{1-m}(\eta) + [\alpha(m-1) + \beta] f^{1-m}(\eta) (\lambda - \eta), \quad \forall \eta \in (\mu, \lambda).$$

Donc, pour tout $\mu < \eta < \lambda$ on a :

$$\begin{aligned} (1-m)f^{m-1}(\eta) f'(\eta) &\geq \beta\eta + \alpha(m-1)(\lambda - \eta) + \beta(\lambda - \eta) \\ &\geq \lambda\beta + \alpha(m-1)(\lambda - \eta). \end{aligned} \tag{2.21}$$

L'intégration de (2.21) de η à λ donne :

$$\begin{aligned} -\frac{1-m}{m}f^m(\eta) &\geq \left[\lambda\beta + \frac{1}{2}\alpha(m-1)(\lambda-\eta)\right](\lambda-\eta) \\ f^m(\eta) &\leq \frac{m}{2(1-m)}[\alpha(1-m)(\lambda-\eta) - 2\lambda\beta](\lambda-\eta). \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{\mu < \eta < \lambda} f^m(\eta) \leq -\frac{\lambda^2 m}{2(1-m)}[\alpha(m-1) + 2\beta]. \quad (2.22)$$

b) Si $\alpha(m-1) + \beta \geq 0$, par l'équation (2.11), on a pour tout $\mu < \eta < \lambda$,

$$(1-m)f^{m-1}(\eta)f'(\eta) \geq \beta\eta. \quad (2.23)$$

L'intégration de (2.23) de η à λ donne :

$$-\frac{1-m}{m}f^m(\eta) \geq \frac{\beta}{2}(\lambda^2 - \eta^2).$$

Cela implique que :

$$\sup_{\mu < \eta < \lambda} f^m(\eta) \leq -\frac{\beta\lambda^2 m}{2(1-m)}. \quad (2.24)$$

2. Pour $m \in (1, \infty)$, $\beta > 0$:

a) Si $\alpha(m-1) + \beta < 0$, par l'équation (2.11), on a pour tout $\mu < \eta < \lambda$

$$(1-m)f^{m-1}(\eta)f'(\eta) \leq \beta\eta. \quad (2.25)$$

L'intégration de (2.25) de η à λ donne :

$$\sup_{\mu < \eta < \lambda} f^m(\eta) \leq \frac{\beta\lambda^2 m}{2(m-1)}. \quad (2.26)$$

b) Si $\alpha(m-1) + \beta \geq 0$, $\forall \eta \in (\mu, \lambda)$, on a :

$$\begin{aligned} (1-m)f'(\eta) &= \beta\eta f^{1-m}(\eta) + [\alpha(m-1) + \beta] \int_{\eta}^{\lambda} f^{1-m}(\xi) d\xi \\ &\leq \beta\eta f^{1-m}(\eta) + \frac{\lambda}{2}[\alpha(m-1) + \beta] f^{1-m}(\eta). \end{aligned}$$

Puis

$$(1-m)f^{m-1}(\eta)f'(\eta) \leq \beta\eta + \frac{\lambda}{2}[\alpha(m-1) + \beta]. \quad (2.27)$$

Après l'intégration (2.27) de η à λ donne :

$$\sup_{\mu < \eta < \lambda} f^m(\eta) \leq \frac{\lambda^2 m}{2(m-1)}[\alpha(m-1) + 2\beta]. \quad (2.28)$$

Note que les bornes de (2.22), (2.24), (2.26) et (2.28) sont indépendantes de μ et par conséquent, $f(\eta)$ ne peut pas être illimité $\eta \rightarrow \lambda$.

La preuve est complète. ■

Les lemmes suivants distinguent les possibilités 2 et 3.

D'abord, nous donnons un lemme élémentaire pour le cas $m \in (0, 1)$, $\beta < 0$:

Lemme 2.5 ([5]) *Supposons que f est une solution positive du problème (2.1)–(2.3) dans le voisinage gauche de $\eta = \lambda$. Alors :*

- (i) Si $\alpha(m-1) + 2\beta < 0$, alors $f(\eta) > 0$ sur $[0, \lambda)$.
- (ii) Si $\alpha(m-1) + 2\beta = 0$, alors $f(\eta) > 0$ sur $(0, \lambda)$ et $f(0) = 0$.
- (iii) Si $\alpha(m-1) + 2\beta > 0$, alors $\exists \bar{\eta} \in (0, \lambda)$ tel que $f(\eta) > 0$ sur $(\bar{\eta}, \lambda)$ et $f(\bar{\eta}) = 0$.

Preuve. Supposons que f est une solution positive du problème (2.1)–(2.3) sur $[0, \lambda)$, pour le cas $m \in (0, 1)$, $\beta < 0$.

Soit l'équation :

$$(1-m)f'(\eta) = \beta\eta f^{1-m}(\eta) + [\alpha(m-1) + \beta] \int_{\eta}^{\lambda} f^{1-m}(\xi) d\xi. \quad (2.29)$$

L'intégration de l'équation (2.29) de η à λ donne par :

$$f(\eta) = \frac{\beta\eta}{m-1} \int_{\eta}^{\lambda} \frac{d\xi}{f^{m-1}(\xi)} + \frac{\alpha(m-1) + 2\beta}{m-1} \int_{\eta}^{\lambda} \frac{\xi - \eta}{f^{m-1}(\xi)} d\xi. \quad (2.30)$$

- (i) Si $\alpha(m-1) + 2\beta < 0$, alors $f(\eta) > 0$ sur $[0, \lambda)$ et

$$f(0) = \frac{\alpha(m-1) + 2\beta}{m-1} \int_0^{\lambda} \frac{\xi}{f^{m-1}(\xi)} d\xi = U > 0.$$

- (ii) Si $\alpha(m-1) + 2\beta = 0$, de (2.30) nous trouvons :

$$f(\eta) = \frac{\beta\eta}{(m-1)} \int_{\eta}^{\lambda} \frac{d\xi}{f^{m-1}(\xi)} > 0, \text{ et } f(0) = 0.$$

- (iii) Si $\alpha(m-1) + 2\beta > 0$, alors $\exists \bar{\eta}$ tel que :

$$f(\eta) > 0, \text{ sur } (\bar{\eta}, \lambda),$$

et

$$f(\bar{\eta}) = 0.$$

La preuve est complète.

■

Maintenant, nous donnons un lemme élémentaire pour le cas $m \in (1, \infty)$, $\beta > 0$:

Lemme 2.6 ([5]) Supposons que f est une solution positive du problème (2.1)–(2.3) dans le voisinage gauche de $\eta = \lambda$. Puis :

- (i) Si $\alpha(m-1) + \beta \geq 0$, alors $f(\eta) > 0$ sur $[0, \lambda)$.
- (ii) Si $\alpha(m-1) + \beta \leq 0$, et $\alpha(m-1) + 2\beta > 0$, alors $f(\eta) > 0$ sur $[0, \lambda)$.
- (iii) Si $\alpha(m-1) + 2\beta \leq 0$, alors il existe un $\bar{\eta} \in (0, \lambda)$ tel que $f(\eta) > 0$ sur $(\bar{\eta}, \lambda)$ et $f(\bar{\eta}) = 0$.

Preuve. Supposons que f est une solution positive du problème (2.1)–(2.3) sur $[0, \lambda)$, pour le cas $m \in (1, \infty)$, $\beta > 0$.

- (i) Si $\alpha(m-1) + \beta \geq 0$, alors $\alpha(m-1) + 2\beta > 0$, aussi nous avons de (2.11) que :

$$(1-m)f'(\eta) \geq \beta\eta f^{1-m}(\eta). \quad (2.31)$$

L'intégration de (2.31) de η à λ on trouve :

$$f^m(\eta) \geq \frac{\beta m}{2(m-1)} (\lambda^2 - \eta^2). \quad (2.32)$$

Alors $f(\eta)$ est toujours positive sur $[0, \lambda)$, (d'après (2.32)).

- (ii) Si $\alpha(m-1) + \beta \leq 0$, on a de (2.11) que

$$(1-m)f'(\eta) \geq \beta\eta f^{1-m}(\eta) + \frac{\lambda}{2} [\alpha(m-1) + \beta] f^{1-m}(\eta).$$

Après l'intégration de η à λ on a :

$$f^m(\eta) \geq \frac{m}{2(m-1)} (\beta\eta + \lambda [\alpha(m-1) + 2\beta]) (\lambda - \eta).$$

On observe dans ce cas estimations (ii) et (iii). On peut $\bar{\eta}$ comme suit :

$$\bar{\eta} \geq -\frac{\lambda [\alpha(m-1) + 2\beta]}{\beta}, \text{ pour le cas } -\beta < \alpha(m-1) + 2\beta \leq 0.$$

La preuve est complète. ■

Nouvelles solutions explicites pour $\alpha(m-1) + 2\beta = 0$ et $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$

Soit λ un nombre positif.

Pour $m \in (0, 1)$, si $\alpha(m-1) + 2\beta = 0$, l'équation (2.30) donne par :

$$f(\eta) = \frac{\beta\eta}{m-1} \int_{\eta}^{\lambda} \frac{d\xi}{f^{m-1}(\xi)}. \quad (2.33)$$

On pose $g(\eta) = \int_{\eta}^{\lambda} f^{1-m}(\xi) d\xi$, donne :

$$g(\lambda) = 0, g'(\eta) = -f^{1-m}(\eta) < 0, \forall \eta \in (0, \lambda).$$

Alors l'équation (2.33) devient :

$$f(\eta) = [-g'(\eta)]^{\frac{1}{1-m}} = \frac{\beta}{m-1} \eta g(\eta). \quad (2.34)$$

En fait, à partir de la preuve du (Lemme 2.1) qu'une condition nécessaire à l'existence d'une solution positive de problème (2.1)–(2.3) dans un voisinage gauche de $\eta = \lambda$, est soit $\beta > 0$ pour $m > 1$, $\beta < 0$ pour $m \in (0, 1)$ où $\beta = 0$ et $\alpha > 0$.

La valeur $\frac{\beta}{m-1}$ est toujours positif. Dans ce cas, l'équation (2.34) donne :

$$-g'(\eta) = \left(\frac{\beta}{m-1} \right)^{1-m} \eta^{1-m} g^{1-m}(\eta).$$

Alors

$$-g'(\eta) g^{m-1}(\eta) = \left(\frac{\beta}{m-1} \right)^{1-m} \eta^{1-m}. \quad (2.35)$$

L'intégration de (2.35) de η à λ donne :

$$\frac{1}{m} g^m = \frac{1}{2-m} \left(\frac{\beta}{m-1} \right)^{1-m} (\lambda^{2-m} - \eta^{2-m}). \quad (2.36)$$

D'après (2.34) et (2.36), on a :

$$g(\eta) = \left[\frac{m}{2-m} \left(\frac{\beta}{m-1} \right)^{1-m} (\lambda^{2-m} - \eta^{2-m}) \right]^{\frac{1}{m}}. \quad (2.37)$$

On remplace (2.37) dans (2.34) on trouve :

$$f(\eta, \lambda) = \left(\frac{\beta m}{(m-1)(2-m)} \eta^m (\lambda^{2-m} - \eta^{2-m}) \right)^{\frac{1}{m}}, \text{ tel que } 0 < \eta < \lambda, \quad (2.38)$$

est une fonction continue, pour tout $\lambda > 0$, avec support compact et satisfait :

$$f(0, \lambda) = f(\lambda, \lambda) = 0.$$

2.2 Théorèmes et résultats principaux

Théorème 2.2 ([5]) Les énoncés (i) et (ii) suivants sont valables.

- (i) Supposons que $U = 0$. Alors pour tout $\lambda > 0$ il existe une solution $f(\eta, \lambda)$ du problème de la valeur limite (2.1)–(2.3) qui est positif dans $(0, \lambda)$ si et seulement si $\alpha(m-1) + 2\beta = 0$ et $\beta < 0$ pour $m \in (0, 1)$, ou si $\alpha(m-1) + 2\beta = 0$ et $\beta > 0$ pour $m > 1$.

(ii) Supposons que $U > 0$. Alors le problème de la valeur limite (2.1) admet une solution unique et là existe un unique $\lambda(U) > 0$ tel que $f(\eta, \lambda(U))$ soit positif sur $(0, \lambda)$ si et seulement si $\alpha(m-1) + 2\beta < 0$ et $\beta \leq 0$ pour $m \in (0, 1)$, ou si $\alpha(m-1) + 2\beta > 0$ et $\beta \geq 0$ pour $m > 1$.

Preuve. Une condition nécessaire à l'existence d'une solution est que $\beta \leq 0$ pour $m \in (0, 1)$, où $\beta \geq 0$ pour $m > 1$, (Lemme 2.1)

Pour $\beta = 0$, $\alpha > 0$ nous avons déjà donné la solution (2.7) de (2.11) pour $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ qui est :

$$f(\eta, \lambda) = \left(\frac{\alpha m^2}{2(2-m)} (\lambda - \eta)^2 \right)^{\frac{1}{m}}, \text{ et } 0 \leq \eta < \lambda,$$

Cette solution est continue et satisfait pour tout $U > 0$, que :

$$f(0, \lambda) = U \text{ et } f(\lambda, \lambda) = 0,$$

où

$$\lambda(U) = \sqrt{\frac{2(2-m)}{\alpha m^2} U^m}.$$

Dans ce qui suit, pour le cas $\beta \neq 0$ on met $\beta < 0$ pour $m \in (0, 1)$ et $\beta > 0$ pour $m > 1$.

Nous avons déjà prouvé dans le (Lemme 2.3), l'existence locale d'une solution positive dans le voisinage gauche de $\eta = \lambda$ du problème (2.1)–(2.3). Cette solution locale est unique et peut être poursuivie jusqu'à $\eta = 0$ en tant que solution positive avec $f(0) > 0$ si et seulement si $\beta < 0$ et $\alpha(m-1) + 2\beta < 0$ pour $m \in (0, 1)$, aussi si $\beta > 0$ et $\alpha(m-1) + 2\beta > 0$ pour $m > 1$ (par les Lemmes 2.5 et 2.6).

On a, la condition aux limites (2.3) à $\eta = 0$ est satisfaite si on peut trouver un $\lambda(U)$ tel que :

$$f(0, \lambda) = U. \tag{2.39}$$

S'il existe λ qu'un seul, la solution est unique. On distingue deux cas :

(i) pour $U = 0$. Par les Lemmes 2.5 et 2.6, l'équation (2.39) ne peut être satisfaite que si $\alpha(m-1) + 2\beta = 0$. De plus (2.39) est alors satisfait pour tout $\lambda > 0$. Alors il existe une solution faible non triviale f avec support compact de le problème (2.1)–(2.3) avec la propriété :

$$\begin{cases} f(\eta) > 0 & \text{sur } (0, \lambda), \\ f(\eta) = 0 & \text{sur } \{0\} \cup [\lambda, \infty). \end{cases}$$

(ii) Pour $U > 0$. Il résulte des Lemmes 2.5 et 2.6 que maintenant une condition nécessaire pour que (2.39) ait une solution est que $\beta < 0$ et $\alpha(m-1) + 2\beta < 0$ pour $m \in (0, 1)$ ou $\beta > 0$ et $\alpha(m-1) + 2\beta > 0$ pour $m > 1$.

Dans ce but, supposons que $f(\eta, \lambda)$ est une solution du problème (2.1)–(2.3) sur $(0, \lambda)$, Puis pour $\mu > 0$ la fonction $\mu^{-\frac{2}{m}} f(\mu\eta, \mu\lambda)$ est une solution de (2.1)–(2.3) sur $(0, \mu\lambda)$. Si $\mu = \lambda^{-1}$, ensuite :

$$\lambda^{\frac{2}{m}} f(0, 1) = U. \quad (2.40)$$

Parce que $f(0, 1) > 0$ dans les cas $\alpha(m-1) + 2\beta < 0$ pour $m \in (0, 1)$ où $\alpha(m-1) + 2\beta > 0$ pour $m > 1$. Nous obtenir une solution unique $\lambda = \lambda(U)$ de (2.40).

Ainsi, la fonction $f(\eta, \lambda(U))$ est l'unique solution de (2.1)–(2.3), avec la propriété :

$$\begin{cases} f(\eta) > 0 & \text{sur } [0, \lambda), \\ f(\eta) = 0 & \text{sur } [\lambda, \infty). \end{cases}$$

La preuve est complète. ■

Maintenant, nous donnons le théorème principal de ce travail.

Théorème 2.3 (Existence globale et d'explosion de solutions auto-similaires [5]) Soit $a(t)$, $c(t)$ être un réel positif fonctions de t , qui satisfont :

$$a(0) = c(0) = 1, \quad \dot{a}(0) = -\beta, \quad \dot{c}(0) = \alpha. \quad (2.41)$$

Alors, pour $f \in C([0, \lambda], \mathbb{R}^+)$, le problème (1.15) admet une solution exacte sous la forme générale :

$$u(x, t) = c(t) f(\eta), \quad \text{avec } \eta = \frac{x}{a(t)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (2.42)$$

Si le profil de base f est une solution du problème (2.1) sur $[0, \lambda]$ et satisfait à chaque point :

$$f^m(\eta) f''(\eta) = \alpha f(\eta) + \beta \eta f'_\eta(\eta).$$

Sur ce, nous séparons les cas suivants :

1. Si $\alpha m + 2\beta < 0$, les fonctions $a(t)$, $c(t)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} a(t) = (1 - (\alpha m + 2\beta) t)^{\frac{\beta}{\alpha m + 2\beta}}, & \forall t > 0. \\ c(t) = (1 - (\alpha m + 2\beta) t)^{-\frac{\alpha}{\alpha m + 2\beta}}, \end{cases} \quad (2.43)$$

2. Si $\alpha m + 2\beta = 0$, les fonctions $a(t)$, $c(t)$ dans ce cas sont donnés par :

$$\begin{cases} a(t) = e^{-\beta t}, & \forall t > 0. \\ c(t) = e^{\alpha t}, \end{cases} \quad (2.44)$$

Dans chaque cas (1) et (2). Le problème (1.15) admet une solution globale dans le temps sous la forme auto-similaire générale, cette solution définie pour tout $t > 0$. De plus, si $\alpha < 0$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

3. Si $\alpha m + 2\beta > 0$, les fonctions $a(t)$, $c(t)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} a(t) &= (1 - (\alpha m + 2\beta) t)_+^{\frac{\beta}{\alpha m + 2\beta}}, \\ c(t) &= (1 - (\alpha m + 2\beta) t)_+^{-\frac{\alpha}{\alpha m + 2\beta}}, \end{aligned} \quad 0 < t < T. \quad (2.45)$$

Le moment $T = \frac{1}{\alpha m + 2\beta}$ représente la valeur d'existence maximale des fonctions $a(t)$, $c(t)$. De plus, si $\alpha > 0$, le problème (1.15) admet une solution sous la forme auto-similaire générale, qui explose en une fois finie. La solution est définie pour tout $t \in (0, T)$, où T représente le temps d'explosion du solution telle que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow T^-} u(x, t) = +\infty, \quad T = \frac{1}{\alpha m + 2\beta} > 0.$$

Preuve. Nous avons déjà prouvé dans le Théorème 2.2 l'existence de la solution f de (2.1), qui est avec compact support $[0, \lambda]$ si et seulement si :

- (a) $\alpha(m - 1) + 2\beta = 0$ et $[\beta < 0$ pour $m \in (0, 1)$ où $\beta > 0$ pour $m > 1]$,
- (b) $\alpha(m - 1) + 2\beta < 0$ et $\beta \leq 0$ pour $m \in (0, 1)$,
- (c) $\alpha(m - 1) + 2\beta > 0$ et $\beta \geq 0$ pour $m > 1$.

Maintenant, pour déterminer les fonctions $a(t)$, $c(t)$, il suffit de résoudre le système (1.14) qui est :

$$\begin{cases} \dot{c} = \frac{c^m}{a^2} k_1, \\ \dot{a} = \frac{c^m}{a^2} k_2, \end{cases} \quad (2.46)$$

Les conditions (2.41) impliquent $k_1 = \alpha$ et $k_2 = -\beta$, puis le système (2.46) peut être résolu comme suit :

$$\begin{cases} \dot{c} = \frac{c^m}{a^2} \alpha, \\ \dot{a} = -\frac{c^m}{a^2} \beta, \end{cases} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{\dot{c}}{c},$$

après une intégration de 0 à t on déduit :

$$a(t) = c^{-\frac{\beta}{\alpha}}(t). \quad (2.47)$$

Si on remplace (2.47) dans (2.46), on obtient :

$$c^{-\frac{\alpha m + 2\beta}{\alpha} - 1} dc = \alpha dt. \quad (2.48)$$

Si $\alpha m + 2\beta \neq 0$ on obtient facilement la solution de (2.48) comme suit :

$$c(t) = (1 - (\alpha m + 2\beta) t)_+^{-\frac{\alpha}{\alpha m + 2\beta}},$$

de la même manière que nous constatons :

$$a(t) = (1 - (\alpha m + 2\beta) t)_+^{\frac{\beta}{\alpha m + 2\beta}}.$$

On en déduit que les fonctions $a(t)$, $c(t)$ sont définis globalement si $\alpha m + 2\beta < 0$, et $a(t)$, $c(t)$ sont maximales fonctions si $\alpha m + 2\beta > 0$, et bien défini si et seulement si :

$$0 < t < T = \frac{1}{\alpha m + 2\beta}.$$

Si $\alpha m + 2\beta = 0$, les fonctions $a(t)$, $c(t)$ sont définis globalement, on obtient dans ce cas :

$$\begin{cases} a(t) = e^{-\beta t}, \\ c(t) = e^{\alpha t}, \end{cases} \forall t > 0.$$

Nous remarquons à partir de ce théorème que nous avons deux comportements temporels des fonctions $a(t)$, $c(t)$, leurs comportements dépendent de paramètres de similarités α et β .

En **(a)** et **(b)**, c'est-à-dire $\alpha m + 2\beta \leq 0$, les fonctions $a(t)$, $c(t)$ sont définis globalement dans le temps. Maintenant, le profil f est une fonction positive bornée pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $\alpha < 0$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = 0,$$

dans chaque cas **(a)** et **(b)**. Ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) f\left(\frac{x}{a(t)}\right) = 0.$$

Dans le cas $\alpha m + 2\beta > 0$, (c'est-à-dire en **(c)**), nous avons un $a(t)$, $c(t)$ donné en (2.45), est bien défini si et seulement si :

$$0 < t < T = \frac{1}{\alpha m + 2\beta}.$$

On rappelle que la solution explose en temps fini s'il existe un temps $T < +\infty$, que nous appelons ça l'explosion temps, tel que la solution soit bien définie pour tout $0 < t < T$, tandis que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t)| \rightarrow +\infty \text{ quand } t \rightarrow T^-.$$

Si $\alpha > 0$ la valeur T représente le temps d'explosion de la solution, donc :

$$\lim_{t \rightarrow T^-} c(t) = +\infty,$$

et

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow T^-} c(t) f\left(\frac{x}{a(t)}\right) = +\infty.$$

La preuve est complète. ■

Chapitre 3

Quelques solutions explicites de l'équation (NDE)

Dans ce chapitre, on veut chercher des solutions particulières de l'équation (NDE) sous formes explicites, mais pour $m \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, et les formes des solutions auto-similaires.

3.1 Différentes solutions de forme auto-similaire

Il y a plusieurs formes des solutions auto-similaires, on peut classer ces solutions comme suit :

1. Solution auto-similaire classique (type 1) :

S'écrit sous la forme :

$$u(x, t) = t^{-\alpha} \varphi(xt^{-\beta}),$$

ou α, β sont constantes et φ est le profil de la solution auto similaire.

2. Solution d'explosion (type 2) :

C'est une solution qui explose en temps fini, s'écrit sous la forme :

$$u(x, t) = (t - T)^{-\alpha} \varphi\left(\frac{x}{(t - T)^\beta}\right), \text{ avec } T > 0.$$

Avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et φ est le profil de la solution auto similaire.

3. Solution auto-similaire générale (type 3) :

S'écrit sous la forme :

$$u(x, t) = c(t)\varphi\left(\frac{x}{a(t)}\right), \text{ et } t > 0,$$

où $a(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions non nulles dépendantes de t .

4. Solution auto-similaire de forme exponentielle (type4) :

$$u(x, t) = e^{\alpha t}\varphi\left(\frac{x}{e^{\beta t}}\right),$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et φ est le profil de la solution auto similaire.

3.2 Solutions explicites (cas particuliers)

3.2.1 Solution d'explosion

Pour $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, on a du Théorème 2.3 que $\alpha m + 2\beta = \alpha m > 0$ et :

$$a(t) = 1, c(t) = (1 - \alpha m t)_+^{-\frac{1}{m}}, \text{ où } 0 < t < T = \frac{1}{\alpha m}.$$

Dans ce cas, la forme auto-similaire est une solution de séparation des variables $u(x, t) = c(t)f(x)$, où f est donné en (2.7), par :

$$f(x) = \left(\frac{\alpha m^2}{2(2-m)}(\lambda - x)^2\right)^{\frac{1}{m}}, m \in (0, 1) \cup (1, 2), 0 \leq x < \lambda.$$

Ensuite, la solution de (NDE) sous la forme auto-similaire général :

$$u(x, t) = c(t)f(\eta), \text{ avec } \eta = \frac{x}{a(t)}, x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (3.1)$$

pour $\beta = 0$ et $\alpha > 0$ est donné par :

$$u(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha m^2}{2(2-m)(1-\alpha m t)}(\lambda - x)^2\right)^{\frac{1}{m}}, & 0 \leq x < \lambda, m \in (0, 1) \cup (1, 2), \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

Cette solution explose quand $t \rightarrow \frac{1}{\alpha m}$. Dans ce cas :

$$\lambda(U) = \sqrt{\frac{2(2-m)}{\alpha m^2}U^m}, \text{ pour tout } U > 0.$$

3.2.2 Solutions globales et d'explosions

Maintenant, nous présentons les nouvelles solutions explicites sur la forme auto-similaire général de l'équation (NDE). Parce que le profile f est borné par un support compact, alors il est une fonction intégrable sur \mathbb{R} , où :

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi) d\xi = M, \text{ pour certains } M > 0.$$

Par conséquent, pour $m \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ et :

$$\int_{\mathbb{R}} u(s, t) ds = c^m(t).$$

On peut trouver explicitement une nouvelle solution exacte de (NDE). En effet :

$$\int_{\mathbb{R}} u(s, t) ds = \int_{\mathbb{R}} c(t) f\left(\frac{s}{a(t)}\right) ds = a(t) c(t) \int_{\mathbb{R}} f(\xi) d\xi = c^m(t).$$

Cela implique que

$$\frac{c^{m-1}(t)}{a(t)} = M. \quad (3.2)$$

D'après les formules $a(t)$ et $c(t)$ dans (2.43) et (2.44), l'égalité (3.2) implique que :

$$\beta = \alpha(1 - m).$$

Parce que $\beta < 0$ pour $m \in (0, 1)$ et $\beta > 0$ pour $m > 1$, puis $\alpha < 0$.

Pour $\alpha(m - 1) + \beta = 0$, nous avons déjà donné la solution (2.10) de (2.1) pour $m \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ qui est :

$$f(\eta, \lambda) = \left(\frac{\beta m}{2(m-1)} (\lambda^2 - \eta^2) \right)^{\frac{1}{m}}, \quad 0 \leq \eta < \lambda.$$

Maintenant, nous déterminons les fonctions $a(t)$ et $c(t)$. Nous avons du Théorème 2.3 :

$$\alpha m + 2\beta = \alpha m + 2\alpha(1 - m) = \alpha(2 - m).$$

Si

$$\alpha(2 - m) \neq 0, \text{ c-a-d } m \neq 2,$$

les fonctions $a(t)$ et $c(t)$ sont données par :

$$\begin{cases} a(t) = (1 - \alpha(2 - m)t)_{+}^{\frac{m-1}{m-2}}, \\ c(t) = (1 - \alpha(2 - m)t)_{+}^{\frac{1}{m-2}}, \end{cases} \quad m \neq 2, \quad 0 < t < T.$$

Où T représente la valeur d'existence maximale :

$$\begin{cases} T = \frac{1}{\alpha(2-m)}, & \text{si } m > 2, \\ T = +\infty, & \text{si } m < 2. \end{cases}$$

On obtient la solution exact de (NDE), pour $m \in (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$ comme suit :

$$u(x, t) = \begin{cases} c(t) \left(\frac{\beta m}{2(m-1)} \left(\lambda^2 - x^2 (1 - \alpha(2-m)t)_+^{\frac{2(1-m)}{m-2}} \right) \right)^{\frac{1}{m}}, & |x| < r_1, \\ 0, & \text{si non,} \end{cases} \quad (3.3)$$

où

$$r_1 = \lambda (1 - \alpha(2-m)t)_+^{\frac{m-1}{m-2}}.$$

Cette solution est définie globalement en temps si $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$, et explose quand :

$$t \rightarrow \frac{1}{\alpha(2-m)}, \text{ pour } m \in (2, \infty).$$

Dans ce cas

$$\lambda(U) = \sqrt{\frac{2(m-1)}{\beta m} U^m}, \text{ pour tout } U > 0.$$

Si $m = 2$, les fonctions $a(t)$ et $c(t)$ s'écrit (2.44), dans ce cas on obtient $\beta = -\alpha$ et :

$$u(x, t) = \begin{cases} e^{\alpha t} \sqrt{\beta (\lambda^2 - x^2 e^{2\beta t})}, & |x| < \lambda e^{-\beta t}, \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

Cette solution est définie globalement dans le temps. Dans ce cas

$$\lambda(U) = \frac{U}{\sqrt{\beta}}, \text{ pour tout } U > 0.$$

Pour les fonctions $a(t)$ et $c(t)$ qui satisfont les paramètres de la forme auto-similaire classique, c'est-à-dire :

$$c(t) = t^\alpha, \quad a(t) = t^{-\beta}.$$

La solution auto-similaire (3.1) de l'équation (NDE) s'écrit :

$$u(x, t) = t^\alpha f(\eta), \text{ avec } \eta = xt^\beta,$$

où α et β sont des exposants qui satisfont la condition de similarité ([14], [16], [17])

$$\alpha m + 2\beta + 1 = 0, \quad (3.4)$$

et la fonction f est le profil auto similaire qui doit être déterminé par la solution du différentiel suivant équation :

$$f^m(\eta) f''(\eta) = \alpha f(\eta) + \beta \eta f(\eta).$$

Si $\beta = \alpha(1 - m)$ condition de similarité (3.4) équivaut à :

$$\alpha m + 2\beta + 1 = \alpha(2 - m) + 1 = 0,$$

cela implique que

$$\alpha = \frac{1}{m-2} \text{ et } \beta = \frac{1-m}{m-2}.$$

On obtient pour $m \in (0, 1)$ que $\alpha, \beta < 0$. Donc la solution (3.3) pour $c(t) = t^\alpha$, $a(t) = t^{-\beta}$, s'écrit :

$$\mathcal{U}(x, t) = t^{\frac{1}{m-2}} \left(\frac{m}{2(2-m)} \left(\lambda^2 - x^2 t^{\frac{2(1-m)}{m-2}} \right) \right)^{\frac{1}{m}}, \text{ pour } |x| < \lambda t^{\frac{m-1}{m-2}}, m \in (0, 1).$$

Également

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-m} \right)^{\frac{1}{m}} \left(t^{\frac{1-m}{m-2}} \left(\frac{m(1-m)}{2(2-m)} \left(\lambda^2 - x^2 t^{\frac{2(1-m)}{m-2}} \right) \right)^{\frac{1-m}{m}} \right)^{\frac{1}{1-m}}, & |x| < \lambda t^{\frac{m-1}{m-2}}, \\ 0, & \text{si non.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Si on met pour $m \in (0, 1)$ le paramètre $p = \frac{1}{1-m} > 1$, puis la solution (3.5) de l'équation (NDE) dans la forme auto-similaire classique s'écrit :

$$\mathcal{U}(x, t) = p^{\frac{p}{p-1}} \mathcal{B}_\lambda^p(x, t), p > 1,$$

où $\mathcal{B}_{(\cdot)}$ est les solutions de Barenblatt de l'équation du milieu poreux (PME), qui sont données en (1.1) sous la forme suivante :

$$\mathcal{B}_\lambda(x, t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p+1}} \left(\frac{p-1}{2p(p+1)} \left(\lambda^2 - x^2 t^{-\frac{2}{p+1}} \right) \right)^{\frac{1}{m}}, & \text{pour } |x| < \lambda t^{\frac{1}{p+1}}, p > 1, \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

3.2.3 Solution globale

Nous présentons les deuxièmes nouvelles solutions explicites sur la forme auto-similaire générale de l'équation (NDE). Pour $0 < m \neq 1$ et

$$\int_{\mathbb{R}} u(s, t) ds = \frac{c^m(t)}{a(t)},$$

on peut trouver explicitement une nouvelle solution exacte de (NDE). En fait :

$$\int_{\mathbb{R}} u(s, t) ds = \int_{\mathbb{R}} c(t) f\left(\frac{s}{a(t)}\right) ds = a(t) c(t) \int_{\mathbb{R}} f(\xi) d\xi = \frac{c^m(t)}{a(t)},$$

cela implique que

$$\frac{c^{m-1}(t)}{a^2(t)} = M. \quad (3.6)$$

D'après les formules $a(t)$ et $c(t)$ dans (2.43) et (2.44), l'égalité (3.6) implique que :

$$\beta = \frac{\alpha(1-m)}{2}, \text{ puis } \alpha < 0.$$

Pour $\alpha(m-1) + 2\beta = 0$, nous avons donné la solution (2.38) de (2.1) pour $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ qui est :

$$f(\eta, \lambda) = \left(\frac{\beta m}{(m-1)(2-m)} \eta^m (\lambda^{2-m} - \eta^{2-m}) \right)^{\frac{1}{m}}, \text{ tel que } 0 < \eta < \lambda.$$

Maintenant, nous déterminons les fonctions $a(t)$ et $c(t)$. Nous avons du Théorème 2.3

$$\alpha m + 2\beta = \alpha m + \alpha(1-m) = \alpha < 0.$$

Les fonctions $a(t)$ et $c(t)$ sont données par :

$$\begin{cases} a(t) = (1 - \alpha t)^{\frac{1-m}{2}}, & \forall t > 0. \\ c(t) = \frac{1}{1 - \alpha t}, \end{cases}$$

On obtient la solution exacte de (NDE), pour $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$ comme suit :

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{1 - \alpha t} \left(\frac{\beta m x^m}{(m-1)(2-m)a^m(t)} \left(\lambda^{2-m} - x^{2-m} c^{\frac{(1-m)(2-m)}{2}}(t) \right) \right)^{\frac{1}{m}}, & x \in r_2, \\ 0, & \text{si non,} \end{cases}$$

où

$$r_2 = \left(0, \lambda (1 - \alpha t)^{\frac{1-m}{2}} \right).$$

Cette solution est définie globalement en temps pour tout $m \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Dans ce cas $\lambda > 0$.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons détaillé le travail de **B. Basti and N. Benhamidouche** [5]. Qu'ils proposent et commencent de rechercher des solutions positives sous la forme auto-similaire générale de l'équation de diffusion non linéaire pas sous forme de divergence. On transforme l'équation aux dérivées partielles (**EDP**) a une équation différentielle ordinaire (**EDO**) a puis démontré l'existence et l'unicité de la solution. En fin, nous avons donné quelques solutions particulières de l'équation (NDE) explicitement.

Bibliographie

- [1] W. Arendt et R. Chill, *Global existence for quasilinear diffusion equations in isotropic non-divergence form*, **9** (2010), 523-539.
- [2] G. I. Barenblatt, *On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium*, Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Meh, **16** (1952). 67–78.
- [3] G. I. Barenblatt, *On self-similar motions of compressible fluids in porous media*, Prikl.Mat.Mekh, **16** (1952) 679-698.
- [4] B. Basti, *Étude d'existence de solutions auto similaires pour une EDP non linéaire ; Mémoire de fin étude (Master)*, Université de M'sila, M'sila-Algérie, promotion 2014/2015.
- [5] B. Basti et N. Benhamidouche, *Global existence and blow-up of generalized self-similar solutions to nonlinear degenerate diffusion equation not in divergence form*, Appl. Math. E-Notes, **20** (2020), 367–387.
- [6] N. Benhamidouche, *Exact solutions to some nonlinear PDEs, traveling profiles method*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ, 2008, 7 pp.
- [7] N. Benhamidouche et Y. Arioua, *New method for constructing exact solutions to nonlinear PDEs*, Int. J. Nonlinear Sci, **7** (2009), 395–398.
- [8] L. Caffarelli et J. L. Vázquez, *Viscosity solutions for the porous medium equation*, Proc. Sympos. Pure Math., **65** (1999), 13–26.
- [9] P. Ferreira et S. M. Gallic, *Équation aux Dérivées Partielles*, 11 Décembre 2001, 20–21.
- [10] B. E. Gilting et L. A. Peletier, *On a class of similarity solution of the porous medium equation I*, J. Math. Anal. Appl, **55** (1976), 351–364.
- [11] A. Granas et J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York 2003.
- [12] J. Hulshof et J. L. Vázquez, *Self-similar solutions of the second kind for the modified porous medium equation*, European J. Appl. Math., **5** (1994), 391–403.
- [13] J. Hulshof et J. L. Vázquez, *Maximal viscosity solutions of the modified porous medium equation and their asymptotic behaviour*, European J. Appl. Math., **7** (1996), 453–471.

-
- [14] N. H. Ibragimov, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, Vol 1 Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws, CRS Press , Boca Raton, 1994.
- [15] F. Mihoub, *Solution auto-similaire pour une équation de réaction diffusion non linéaire*, Mémoire de fin étude (Master), Université de M'sila, M'sila-Algérie, promotion 2012/2013.
- [16] P. J. Olver, *Application of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [17] A. D. Polyanin et V. F. Zaitsev, *Handbook of Nonlinear Partial Equation*, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, 2004.
- [18] J. L. Vázquez, *Asymptotic behaviour for the porous medium equation posed in the whole space*, Birkhauser Verlag, Basel, 2002, 11-12.
- [19] J. L. Vázquez, *The Porous Medium Equation - Mathematical Theory*, Oxford, 2007.
- [20] C. Wang et J. Yin, *Shrinking self-similar solution of a nonlinear diffusion equation with nondivergence form*, J. Math. Anal. Appl, **289** (2004), 387–404.
- [21] Y. B. Zeldovich et A. S. Kompaneets, *Towards a theory of heat conduction with thermal conductivity depending on the temperature*, Collection of Papers Dedicated to the 70th Anniversary of A.F. Ioffe, Izd. Akad. Nauk SSMR, Moscow (1950), 61–72.

تَمَجُّدُ اللَّهِ

"الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي لَهُ مَا فِي السَّمَاوَاتِ وَمَا فِي
الْأَرْضِ وَلَهُ الْحَمْدُ فِي الْآخِرَةِ وَهُوَ الْحَلِيمُ
الْخَبِيرُ" [سبأ: 01]

الملخص:

الهدف من هذا العمل هو دراسة وجود ووحداية الحلول الإيجابية المتشابهة ذاتياً في الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية والتي تسمى "معادلة الانتشار غير الخطية التي ليست على شكل تباعد" والمكتوبة على النحو التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad m \in (0,1) \cup (1, \infty).$$

من خلال تطبيق خصائص نظرية النقطة الثابتة لبناخ، نجد العديد من النتائج للشكل العام للحلول المتشابهة الذاتية لهذه المعادلة سواء وجود عام أو محلي.

الكلمات المفتاحية: حل ذاتي عام، حلول دقيقة، انفجار، وجود عام للحل، وحادانية.

Résumé :

Le but de cette travail est d'étudier l'existence et l'unicité de solution auto-similaire générale pour une équation aux dérivées partielles non linéaire appelé : équation de diffusion non linéaire pas sous forme de divergence, qui est créée comme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad m \in (0,1) \cup (1, \infty).$$

En appliquant les propriétés du théorème de point fixe de Banach, nous établissons plusieurs résultats sur l'existence globale ou locale (aussi d'explosion) de la forme générale des solutions auto-similaires de cette équation.

Les mots clés: Solution auto-similaire générale, solutions exactes, explosion, existence globale, unicité.

Abstract:

The aim of this work is to study an existence and uniqueness of self-similar solution for a nonlinear partial differential equation called: nonlinear diffusion equation not in divergence form, which is written as follows:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad m \in (0,1) \cup (1, \infty).$$

By applying the properties of Banach's fixed point theorem, we establish several results on the global or local existence (also blow-up) of the general form of the self-similar solutions of this equation.

The Key words: General self-similar solution, exact solutions, blow-up, global existence, uniqueness.