

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE SCIENCES
DEPARTEMENT PHYSIQUE
N° : Ph/TH/05/2020



DOMAINE : Sciences de la matière
FILIERE : Physique
OPTION : PHYSIQUE THEORIQUE

**Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique**

Par : BOUDISSA Oumbarka et BENDJOUDI Atika

Intitulé

**La solution de l'équation de Schrödinger dépendante
du temps pour un oscillateur harmonique à 2D dans
l'espace-phase non commutative**

Soutenu le 16/09/2020 devant le jury composé de:

Président	MAIRECHE Abdelmadjid	Université M'sila
Rapporteur	MEDJBER Salim	Université M'sila
Examineur	GOUMAID Ali	Université M'sila

Année universitaire : 2019/2020

Remerciements

Tout d'abord remerciions Dieu tout puissant qui nous a éclairé vers le bon chemin.

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur de Mémoire professeur : M E D J B E R Salim

Je remercie les membres de jury qui ont accepté de juger ce travail.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants du département de physique et mes collègues de promotion 2020.

Je tiens à remercier mes parents qui sont fatigués à cause de moi ma famille et mes amies.

Dédicaces

J'ai l'honneur de dédier ce modeste travail à Ma famille Boudissa Et aux personnes les plus chères au monde mes chers parents :

A mon père : Ahmed

Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est fruit de tes sacrifices qui tu as consentis Pour mon éducation et ma formation.

A ma très chère mère : ASMA

Tu es l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de Prier pour moi. Et Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver t'accorder Santé, longue vie et bonheur.

Je grande dédie spécial a mes frères Lamin Amar salah sans oublier Mes sœurs Sihem. Ahlam .Yamina .Djoumana.

A ma 2ème famille mes amies

A mon binôme Atika

A mon encadreur : medjber salim

A Tous Mes Amies De La Promotion 2020 De Master En Physique théorique A toutes les personnes qui on contribué, de près ou de loin à la

Sans oublier mes amies et a Tous ce

Je grande dédie spécial a mes frères Lamin Amar salah Lamin Amar salah sans oublier Mes sœurs Sihem. Ahlam .Yamina .Djoumana.

A ma 2ème famille mes amies

A mon binôme Atika

A Tous Mes Amies De La Promotion 2020 De Master En Physique théorique A toutes les personnes qui on contribué, de près ou de loin à la

réalisation de ce travail ; je leurs dis «Merci pour tout votre amour et votre affection ».

Boudissa Oumbarka

TABLE DES MATIERES

Introduction Générale	1
Chapitre I : L'équation de Schrödinger dépendante du temps	
1-Introduction	3
2- Construction de l'équation de Schrödinger	3
3-Solution de l'équation de Schrödinger	6
3.1-La fonction d'onde	6
3.2-L'équation de Schrödinger indépendante du temps (stationnaire) :	7
3.2.1-L'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension.	8
3.2.2-L'équation de Schrödinger stationnaire à deux dimensions	9
3.3.3-L'équation de Schrödinger stationnaire à trois dimensions	9
a) La séparation des variables.....	10
3.3-l'équation de Schrödinger non stationnaire.....	11
3.3.1-Introduction :	11
3.3.2- Méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps :.....	11
3.3.2.1- Méthodes approximatives :.....	12
a-La théorie de perturbation :	12
b-La méthode variationnelle :.....	13
c-L'approximation soudaine :.....	13
d-L'approximation adiabatique :.....	13
3.3.2.2- Méthodes exactes :	14

a-Transformations unitaires :	14
b- Opérateur d'évolution :	15
c Changement de représentation :	16
d- La théorie des invariants :	17
1. Introduction.....	17
2. Les invariants.....	17
2.1-Propriétés de l'invariant.....	18
2.1.1 -Valeurs propres de l'invariant.....	19
2.1.2- Les vecteurs propres de l'invariant	21
2.1.3- Solution générale.....	23

Chapitre II

La structure quantique de l'espace-phase non Commutative

1-Introduction :	25
2-Rappelle sur la structure physique de la mécanique quantique ordinaire :	25
3-La structure quantique de l'espace-phase non-commutative	25
4- Le produit star :	26
4.1- Formule de Moyal-Weyl :	26
4.2-Propriétés du produit star	28
5 - La Méthode de Boopp's Shift(décalage de Boop) :	29

Chapitre III

La Solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un oscillateur harmonique à 2D dans l'espace- phase non commutative

1- Introduction :	34
-------------------------	----

2- L'oscillateur harmonique stationnaire à 2D dans l'espace phase non commutative :.....	34
3-L'oscillateur harmonique non stationnaire à 2D dans l'espace phase non commutative :.....	37
Conclusion.....	44

Introduction Générale

Introduction Générale

En mécanique quantique, les systèmes non conservatives sont généralement représentés par des hamiltoniens dépendants du temps, parmi ces systèmes les oscillateurs harmoniques dépendants du temps. Les oscillateurs harmoniques dépendants du temps ont suscité un intérêt considérable dans la littérature grâce à leur utilité pour décrire la dynamique de nombreux systèmes physiques tels que: l'optique quantique [1-4], la physique des plasmas [5-7], la fission de noyaux lourds [8], conductivité électrique [9,10], cavité résonnante optique [11-13], effet Hall quantique [14,15], problèmes de tunnel à travers les barrières du potentiel [16,17], courant Josephson [18-21] ou chaos quantique avec dissipation [22,23].

Entre-temps, les oscillateurs harmoniques bidimensionnels sont devenus d'outils puissants de modélisation et, par conséquent, sont fréquemment utilisés pour modéliser un large phénomènes physiques.

Parmi les différentes mathématiques de l'étude d'un tel système dépendant du temps, nous choisissons la théorie qui est établie par Lewis et Riesenfeld [24] et appelée méthode invariante dynamique de Lewis et Riesenfeld.

La géométrie non commutative est une géométrie où les coordonnées de l'espace-phase ne commutent pas, elle a été conçue à la fois pour répondre à des besoins en mathématiques et pour permettre d'aborder certains problèmes de physique théorique [25]. Ceci nous a motivé d'étudier (dans ce mémoire) l'oscillateur harmonique stationnaire et non stationnaire en 2D dans l'espace-phase non commutative. Nous écrivons l'hamiltonien du système en termes d'opérateurs de création et d'annihilation (a_i, a_i^+) , puis nous résolvons l'équation de Schrödinger indépendante du temps et dépendante du temps. Pour l'équation de Schrödinger non stationnaire, nous avons utilisé la théorie des invariants et la formulation de transformation unitaire associée. La théorie des invariants suggérée par Lewis et Riessenfeld peut résoudre exactement l'équation de Schrödinger dépendante du temps. C'est un outil puissant pour traiter l'équation de Schrödinger non stationnaire et le facteur de phase.

Ce mémoire a été structuré comme suit :

Le premier chapitre est consacré à l'équation de Schrödinger non stationnaire (dépendante du temps) avec ces méthodes de solution, dans le deuxième chapitre, on présente la structure quantique de l'espace-phase non-commutatif (la géométrie non-commutatif). Au dernier chapitre, on détaille la Solution de l'équation de Schrödinger indépendante et dépendante du temps pour un oscillateur harmonique à 2D dans l'espace-phase non commutative.

Chapitre I
L'équation de Schrödinger
dépendante du temps

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

1-Introduction

L'équation de Schrödinger est une équation qui décrit l'évolution temporelle et spatiale de l'état quantique d'un système physique, elle a été proposée de façon inductive par Erwin Schrödinger en 1925 [26], c'est une équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste. Elle contient toutes les informations du système physique étudié. Cette équation joue un rôle fondateur en mécanique quantique par analogue à l'équation de Newton en mécanique classique et les équations de Maxwell en électromagnétisme.

2- Construction de l'équation de Schrödinger

Le physicien autrichien Erwin Schrödinger [26] utilisa les résultats de De Broglie pour établir une équation régissant l'évolution spatiale et temporelle de la fonction d'onde d'un système physique. Pour obtenir l'équation de Schrödinger, en prenant la formule de l'onde plane de Broglie :

$$\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad (\text{I-1})$$

où ω : La pulsation et k : le nombre d'onde.

D'après les postulats de la mécanique quantique sont liés à la particule classique par la relation de Planck-Einstein :

$$E = \hbar\omega \quad (\text{I-2})$$

et la relation de L. De Broglie :

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (\text{I-3})$$

alors:

$$\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{p}\vec{r}-Et)/\hbar} \quad (\text{I-4})$$

on dérive l'onde par rapport au temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{i}{\hbar} E A e^{i(\vec{p}\vec{r}-Et)/\hbar} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I-5})$$

on obtient:

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$E \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I-6})$$

donc :

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{I-7})$$

\hat{E} : est l'opérateur d'énergie.

En dérivant l'onde par rapport à l'espace, il vient :

$$\vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{i}{\hbar} p A e^{i(\vec{p}\vec{r} - Et)/\hbar} = \frac{i}{\hbar} p \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I-8})$$

où :

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{I-9})$$

$\vec{\nabla}$ est l'opérateur gradient, alors :

$$\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (\text{I-10})$$

est l'opérateur d'impulsion.

On mécanique classique, l'énergie mécanique de particule libre est donné par :

$$E = E_c = T = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{I-11})$$

Cette quantité apparait dans la formulation hamiltonienne pour une particule libre ($V(\vec{r}) = 0$) de la mécanique classique.

En appliquant le principe de correspondance entre les valeurs classiques et quantiques, pour l'énergie, de l'équation (I-6) et (I-11) on obtient :

$$\frac{p^2}{2m} \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I-12})$$

où l'impulsion : $\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$

d'où

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$\frac{p^2}{2m} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla})^2 \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I-13})$$

où

$\vec{\nabla}^2 = \Delta$: est le Laplacien.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I-14})$$

l'opérateur hamiltonien du système pour une particule libre s'écrit :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad (\text{I-15})$$

en utilisant \hat{H} , on peut simplifier l'écriture de l'équation de Schrödinger, on obtient:

$$\hat{H} \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I-16})$$

Lorsque la particule est plongée dans un potentiel scalaire $V(\vec{r})$ (par exemple le potentiel d'un oscillateur harmonique) d'après la mécanique classique, l'énergie totale du système s'écrit comme suit:

$$E = T + V(\vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \quad (\text{I-17})$$

avec cette nouvelle valeur d'énergie et à partir de l'équation (I-7) et l'opérateur d'impulsion \hat{p} , l'équation de Schrödinger devient :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I-18})$$

l'énergie totale ce n'est que l'opérateur Hamiltonien du système :

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}) \quad (\text{I-19})$$

$$\hat{H} \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I-20})$$

3-Solution de l'équation de Schrödinger

Dans cette partie, nous allons présenter la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps. En mécanique classique, l'état d'un système est donné par la résolution des équations du mouvement du système, par contre, en mécanique quantique, l'état du système est déterminé par la résolution de l'équation de Schrödinger c'est-à-dire la fonction d'onde [27-31].

3.1-La fonction d'onde

La fonction d'onde représente une solution de l'équation de Schrödinger d'un système quantique, elle est un postulat quantique, qui décrit le mouvement des particules quantiques, et donne toutes les informations des états quantiques.

La fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$ doit satisfaire les conditions suivantes [27-31]:

- Elle doit être continue pour \vec{r} .

-La dérivé $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ doit être continue, ces contraintes sont appliquées sous condition de la limite sur les solutions.

-Elle doit être normalisée. Cela implique que la fonction d'onde en approche à zéro comme \vec{r} approche à l'infinité c'est-à-dire :

$$\int \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)d^3r = \int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = 1 \quad (\text{I-21})$$

avec $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ est la densité de probabilité.

Il y a deux types d'équations de Schrödinger : l'équation de Schrödinger stationnaire dont son Hamiltonien (le potentiel et la masse) est indépendant du temps et l'équation de Schrödinger non stationnaire dont son Hamiltonien (le potentiel et la masse) est dépendant explicitement du temps. Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'équation de Schrödinger non stationnaire (dépendante du temps).

3.2-L'équation de Schrödinger indépendante du temps (stationnaire)

L'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles, du premier ordre par rapport au temps et du second ordre par rapport aux coordonnées de l'espace ordinaire. Si l'Hamiltonien du système physique ne dépend pas explicitement du temps, l'équation de Schrödinger est dit stationnaire, dans ce cas l'énergie totale E est conservée, donc l'équation de Schrödinger s'écrit comme [27-31]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) \quad (I-22)$$

Dans ce cas on peut utiliser la méthode de séparation de variables ; on écrit la fonction d'onde comme :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) f(t) \quad (I-23)$$

on remplace dans l'équation de Schrödinger, on obtient :

$$\left(i\hbar\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right)\varphi(\vec{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})\varphi(\vec{r})\right)f(t) \quad (I-24)$$

par conséquence :

$$\frac{i\hbar}{f}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\varphi(\vec{r})}\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})\varphi(\vec{r})\right\} \quad (I-25)$$

Comme le membre de gauche de l'équation ne dépend que de t et que le membre de droite ne dépend que de \vec{r} , il ne pourra y avoir de solution de la forme que si l'équation est égale à une constante qui ne dépend donc ni de t ni de \vec{r} . Cette constante a la dimension d'une énergie appelons .alors :

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$\frac{i\hbar}{f} \frac{\partial f}{\partial t} = E \quad (I-26)$$

et par conséquent :

$$f(t) = Ae^{\frac{-iEt}{\hbar}} \quad (I-27)$$

tandis que :

$$\frac{1}{\varphi(\vec{r})} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) \right\} = E \quad (I-28)$$

donc :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r}) \quad (I-29)$$

c'est l'équation de Schrödinger stationnaire, d'où:

$$\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{\frac{-iEt}{\hbar}} \varphi(\vec{r}) \quad (I-30)$$

où A : est la constante de normalisation et $\varphi(\vec{r})$: est appelée la solution stationnaire de l'équation de Schrödinger :

$$\Delta \varphi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(\vec{r})) \varphi(\vec{r}) = 0 \quad (I-31)$$

3.2.1-L'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension

Si une particule de masse m se déplaçant sur l'axe x , soumise à un potentiel $V(x)$, pour déterminer les niveaux d'énergie, et les fonctions d'ondes associées nous devons résoudre l'équation de Schrödinger unidimensionnelle suivante:

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \varphi(x) = E\varphi(x) \quad (I-32)$$

où $-\infty < x < +\infty$.

3.2.2-L'équation de Schrödinger stationnaire à deux dimensions

Dans ce cas le potentiel dépend de deux dimensions, et l'équation de Schrödinger s'écrit comme suit :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + V(x, y) \right] \varphi(x, y) = E\varphi(x, y) \quad (I-33)$$

3.2.3-L'équation de Schrödinger stationnaire à trois dimensions

Dans ce cas la particule se déplaçant dans un potentiel qui dépend de \vec{r} ($V(\vec{r})$) qui soit central où non central. Il est préférable d'utiliser les coordonnées sphériques qui sont mieux adaptées à laplacien Δ qui s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \quad (I-34)$$

avec :

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (I-35)$$

où L : est l'opérateur du moment cinétique et $0 < r < +\infty$, et θ, φ sont les angles polaire $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

l'Hamiltoniens'écrit :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) \quad (I-36)$$

ce qui permet d'écrire l'équation Schrödinger pour un potentiel central $V(r)$ sous la forme :

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \right\} \Psi(r, \theta, \varphi) = E\Psi(r, \theta, \varphi) \quad (\text{I-37})$$

a) La séparation des variables

L'expression (I-35) montre que toute la dépendance en θ, φ est contenue dans l'opérateur L^2 et on a $[H, L^2] = 0$ et $[H, L_z] = 0$. Les trois observables H, L^2, L_z admettent un système complet de fonctions propres [27-31] ; de sorte que l'on a

$$H\Psi(r, \theta, \varphi) = E\Psi(r, \theta, \varphi) \quad (\text{I-38})$$

$$L^2\Psi(r, \theta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2\Psi(r, \theta, \varphi) \quad (\text{I-39})$$

$$L_z\Psi(r, \theta, \varphi) = m\hbar\Psi(r, \theta, \varphi) \quad (\text{I-40})$$

Les fonctions propres communes à L^2 et L_z correspondants aux valeurs de l et m fixées sont les harmonique sphérique $Y_l^m(\theta, \varphi)$. Les fonctions $\Psi(r, \theta, \varphi)$ sont donc forcément le produit d'une fonction radial $R(r)$ par les harmonique sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$, soit :

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{I-41})$$

en utilisant le fait que :

$$\begin{aligned} L^2\Psi(r, \theta, \varphi) &= L^2R(r) Y_l^m(\theta, \varphi) = R(r)L^2Y_l^m(\theta, \varphi) \\ &= l(l+1)\hbar^2R(r)Y_l^m(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (\text{I-42})$$

on aboutit à l'équation radiale suivante :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right\} R(r) = ER(r) \quad (\text{I-43})$$

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

où encore

$$\left\{ \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] \right\} R(r) = 0 \quad (\text{I-44})$$

avec l : est le nombre quantique orbital.

À cause de l'interprétation probabiliste due à M. Born en 1926 [32] des fonctions d'onde, les solutions de l'équation de Schrödinger doivent appartenir à l'espace de Hilbert. En plus de l'équation de Schrödinger, les solutions de cette dernière doivent vérifier l'équation de continuité suivante:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{I-45})$$

avec

$$\rho(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t)^* \psi(\vec{r}, t) \quad (\text{I-46})$$

représente la densité de probabilité et

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{i\hbar}{2m} [\psi^*(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi^*(\vec{r}, t)] \quad (\text{I-47})$$

est le vecteur de la densité de courant.

3.3-l'équation de Schrödinger non stationnaire

3.3.1-Introduction

Dans cette partie nous avons donné quelques méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Différentes méthodes existent pour résoudre l'équation de Schrödinger non stationnaire. Le choix d'une méthode particulière repose généralement sur la forme du potentiel et sur celle de la fonction d'onde recherchée. En pratique, il existe plusieurs techniques de résolutions. Le but est de trouver la solution $|\Psi(t)\rangle$ correspondant à la condition initiale $|\Psi(t_0)\rangle$.

3.3.2- Méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps

Il y a deux types de méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps : les méthodes approximatives et les méthodes exactes [33-35].

3.3.2.1- Méthodes approximatives

On peut citer :

a-La théorie de perturbation

L'idée générale de la méthode est de dégager les effets principaux qui rendent compte globalement du comportement du système, et ensuite de détailler certaines quantités qui découlent d'effets secondaires moins importants [33-35].

Donc l'Hamiltonien du système s'écrit :

$$H(t) = H_0(t) + \lambda W(t) \quad (\text{I-48})$$

où $H_0(t)$ est un Hamiltonien d'une équation de Schrödinger que l'on sait intégrer exactement et $W(t)$ une fonction quelconque et λ vérifie: $\lambda \ll 1$.

Il est montré que l'opérateur d'évolution vérifie l'équation suivante:

$$U(t, t_0) = U^{(0)}(t, t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t, t_0) \quad (\text{I-49})$$

avec : $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$, et $U^{(0)}(t, t_0)$ est la solution de l'équation non perturbée.

avec la condition initiale : $U^{(0)}(t, t_0) = 1$ et les $U^{(n)}(t, t_0), \forall n \geq 1$ sont donnés par :

$$U^{(n)}(t, t_0) = (i\hbar)^{-n} \lambda^n \int_{t_0 < t_1 < \dots < t_n < t} dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 U^0(t, t_n) W(t_n) U^0(t_n, t_{n-1}) W(t_{n-1}) \dots U^0(t_2, t_1) W(t_1) U^0(t_1, t_0) \quad (\text{I-50})$$

la théorie des perturbations dépendante du temps permet donc de calculer approximativement les fonctions d'ondes à partir des états stationnaires du système

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

non perturbé [35], et les différentes grandeurs physiques sont obtenues en calculant les valeurs moyennes des opérateurs correspondants.

b-La méthode variationnelle

Cette méthode s'appuie sur le théorème de Ritz, qui stipule que la valeur moyenne de l'Hamiltonien calculée par rapport à une fonction d'onde $|\Psi(t)\rangle$, c'est-à-dire :

$$\langle H(t) \rangle = \frac{\langle \Psi(t) | H(t) | \Psi(t) \rangle}{\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle} \quad (\text{I-51})$$

est stationnaire si elle avoisine l'une de ces valeurs propres. Alors, pour trouver les valeurs propres de l'Hamiltonien on choisit une fonction d'essai appropriée dépendante d'un certain paramètre, et en variant par rapport au paramètre les valeurs propres de l'Hamiltonien correspondent aux valeurs α_i pour lesquelles la valeur moyenne est extrémale [35].

c-L'approximation soudaine

Supposant que le système est soumis à un champ extérieur pendant un intervalle de temps T , on appelle approximation soudaine, l'approximation appliquée dans le cas limite $T \rightarrow 0$, elle s'énonce comme suit [33,34] :

« ... A la limite où $T \rightarrow 0$, c'est-à-dire dans le cas du passage infiniment rapide, l'état dynamique du système reste inchangé ... ».

$$\lim_{T \rightarrow 0} U(T + t_0, t_0) = 1 \quad (\text{I-52})$$

d-L'approximation adiabatique

Dans l'autre cas extrême où l'hamiltonien du système varie lentement avec le temps, c'est-à-dire $T \rightarrow \infty$; on parle de l'une des méthodes les plus puissantes en mécanique quantique : l'approximation adiabatique. Parmi l'une des résultats de ces applications dans la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps : la phase de Berry où phase géométrique. À travers ce dernier on peut donner aux

lecteurs une interprétation sur le rôle de l'approximation adiabatique dans la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps [35].

3.3.2.2- Méthodes exactes

a-Transformations unitaires

Il est important de se rappeler que pour décrire l'évolution du vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ dans l'espace de Hilbert, on doit choisir un système d'axes ou un référentiel. Le choix de référentiel n'a pas de raison d'être unique, c'est-à-dire que l'on est libre de passer à un autre système d'axes. Chaque fois que l'on change de référentiel, on change de point de vue et par conséquent on observe le système physique sous un angle différent. En pratique, pour passer d'un référentiel à un autre, on utilise des opérateurs unitaires U qui peuvent être indépendants ou dépendants du temps et qui satisfont à la condition [35] :

$$UU^+ = U^+U = 1 \quad (\text{I-53})$$

U^+ est l'opérateur adjoint de U . Généralement, pour un hamiltonien dépendant du temps, on utilise des opérateurs unitaires dépendants du temps qui transforment le vecteur d'état de la façon suivante :

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = U^{-1}|\Psi(t)\rangle \quad (\text{I-54})$$

dans le nouveau référentiel, le nouvel hamiltonien s'écrit :

$$|\tilde{H}(t)\rangle = U(t)^{-1}H(t)U(t) - i\hbar U(t)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} U(t) \quad (\text{I-55})$$

donc les transformations unitaires servent d'outils de recherche de nouvelles représentations. Par exemple, dans le nouveau référentiel, on aimerait être capable d'effectuer une séparation de variables entre la partie temporelle et la partie spatiale du vecteur d'état $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$. En d'autres termes, on cherche des opérateurs unitaires qui mettraient l'hamiltonien original $H(t)$ sous une forme factorisable, i.e. $\tilde{H}(t) = \sum_n h_n T_n$ ou $\tilde{H}(t) = g(t)k$, ou les T_n et k sont indépendants du temps. Dès lors, on pourrait intégrer analytiquement l'équation de Schrödinger

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

impliquant $\tilde{H}(t)$ pour obtenir l'opérateur d'évolution temporelle dans le nouveau référentiel. Dans cet esprit, de nombreuses études dans la littérature de physique mathématique ont porté sur la recherche ou l'identification de systèmes, surtout atomiques, qui admettent une solution exacte dans un certain type de référentiel. Efthimou et Spector ont ainsi identifié des classes de systèmes qui admettent une séparation exacte de variables espace/temps et ils ont donné aussi des transformations unitaires pour obtenir le nouveau référentiel dépendant du temps [35].

b- Opérateur d'évolution

Du fait de la correspondance linéaire entre $|\Psi(t_0)\rangle$ et $|\Psi(t)\rangle$, il existe un opérateur linéaire $U(t, t_0)$ tel que [35]:

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle \quad (\text{I-56})$$

Il est clair, d'après la formule ci-dessus, que le rôle de cet opérateur est de déterminer l'évolution de l'état à tout instant, pour cette raison il est appelé opérateur d'évolution. Dans le cas particulièrement simple où l'hamiltonien H du système ne dépend pas du temps, l'opérateur $U(t, t_0)$ a une forme simple:

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t, t_0)} \quad (\text{I-57})$$

effectivement, en prenant la dérivée partielle par rapport au temps de la fonction (I-57) on obtient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = HU(t, t_0) \quad (\text{I-58})$$

on note que l'équation (I-58) présente le même degré de difficulté que l'équation de Schrödinger, mais elle présente plus d'avantage lors de l'utilisation des méthodes d'approximation. L'opérateur d'évolution total peut être ainsi décomposé en un produit d'opérateurs d'évolutions temporelles infinitésimales :

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$U(t, t_0) = U(t, t_k)U(t_k, t_{k-1}) \dots \dots U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) \quad (\text{I-59})$$

on peut choisir $t_0, t_1 \dots \dots t_k$ de telle sorte que les intervalles entre eux soient égaux. Donc $U(t_1, t_0)$ peut s'écrire :

$$U(t_1, t_0) = \prod_{i=0}^N U_i(t_i, t_i - \Delta t) \quad (\text{I-60})$$

on arrive à conclure que le mouvement d'un ensemble quantique peut être assimilé à une succession de transformations unitaires.

Un cas particulier de la transformation (I-58), ayant de multiples applications dans la théorie de diffusion des particules, est celui où l'état initial est fixé non pas pour $t_0 = 0$; mais pour $t_0 = -\infty$; et l'état final $|\Psi(t)\rangle$ est considéré pour $t = +\infty$, l'éq. (I-56) s'écrit alors

$$|\Psi(+\infty)\rangle = U(-\infty, +\infty)|\Psi(-\infty)\rangle \quad (\text{I-61})$$

où il est explicitement indiqué que $t_0 = -\infty$, l'opérateur U étant défini par la formule :

$$U = U(-\infty, +\infty) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty, t \rightarrow +\infty} U(t, t_0) \quad (\text{I-62})$$

Cet opérateur porte le nom de matrice de diffusion.

c- Changement de représentation

Jusqu'à présent un mode de description a été généralement employé ; il s'agissait de la description de Schrödinger. En réalité, elle n'est pas la seule représentation possible. En fait, il n'est pas toujours nécessaire de trouver la solution de l'équation de Schrödinger qui contient souvent trop d'informations par rapport aux questions que l'on se pose et alors, l'intégration explicite de l'équation (I-59) [35] :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = HU(t, t_0) \quad (\text{I-63})$$

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

nécessite un effort inutile et excessif. Il est commode d'étudier ces phénomènes dépendants du temps dans des autres descriptions tels que la représentation de Heisenberg et la représentation d'interaction.

Dans la description de Heisenberg la dépendance par rapport au temps est transférée des vecteurs d'états aux observables. Bien entendu l'évolution du système ne peut plus être décrite à partir de la fonction d'onde, ce qui nous conduit à une équation d'évolution des opérateurs (A_H opérateur quelconque écrit en description de Heisenberg) :

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) = [A_H(t), H(t)] + i\hbar \left(\frac{d}{dt} A_S(t) \right)_H \quad (\text{I-64})$$

la représentation d'interaction semble être une description intermédiaire entre la description de Schrödinger et celle de Heisenberg. Ces représentations sont strictement équivalentes, mais leur utilité réside dans le fait que certaines propriétés quantiques sont plus immédiatement apparentes dans l'une que dans l'autre.

d- La théorie des invariants

1- Introduction

Parmi les méthodes les plus puissantes et qui donnent des solutions exactes de l'équation de Schrödinger dépendante du temps, nous avons la méthode des invariants. L'idée de base de la théorie des invariants est la dérivation de la relation entre les états propre de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger. On peut trouver une transformation de phase dépendante du temps pour chaque état propre d'un invariant telle que la fonction propre devient une solution de l'équation de Schrödinger, et la phase est déterminée en résolvant une simple équation différentielle du premier ordre [24].

2- Les invariants

On considère l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle \quad (\text{I-65})$$

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

où H est l'Hamiltonien du système.

La méthode des invariants est basé sur ce principe, elle consiste à introduire un opérateur hermitien I , I est dit invariant s'il vérifie les deux relations suivantes :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0 \quad (\text{I-66})$$

$$I^+(t) = I(t) \quad (\text{I-67})$$

en appliquant l'équation (I-66) sur $|\Psi(t)\rangle$ et en utilisant l'équation (I-65), nous obtenons :

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\Psi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar} [I, H] |\Psi(t)\rangle = 0 \quad (\text{I-68})$$

d'où

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\Psi(t)\rangle + IH(t) |\Psi(t)\rangle - H(t)I |\Psi(t)\rangle = 0 \quad (\text{I-69})$$

et encore

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\Psi(t)\rangle + Ii\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle - H(t)I |\Psi(t)\rangle = 0 \quad (\text{I-70})$$

et enfin

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I |\Psi(t)\rangle) = H(t)I |\Psi(t)\rangle \quad (\text{I-71})$$

cela veut dire que l'opérateur d'invariant vérifie une solution de l'équation de Schrödinger, sur une autre solution de cette même équation. Ce résultat est valide pour tout invariant.

2.1-Propriétés de l'invariant

2.1.1 -Valeurs propres de l'invariant

On suppose que l'invariant a un ensemble complet de fonctions propres, on note les valeurs propres de part, et les états propres orthonormés associés d'autre part, où on représente tous les autres nombres quantiques nécessaires pour spécifier les états propres de ce système. L'équation aux valeurs propres s'écrit comme suit [24] :

$$I(t)|\varphi_\lambda(\vec{r}, t)\rangle = \lambda|\varphi_\lambda(\vec{r}, t)\rangle \quad (\text{I-72})$$

on démontre dans la suite que λ : est une constante.

Avec le produit Hermitien sur l'espace des états :

$$\langle\varphi_\lambda|\varphi_{\lambda'}\rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\text{I-73})$$

en dérivant l'équation (I-72) par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(I(t)|\varphi_\lambda(\vec{r}, t)\rangle) = \frac{\partial}{\partial t}(\lambda|\varphi_\lambda(\vec{r}, t)\rangle) \quad (\text{I-74})$$

$$\frac{\partial I}{\partial t}|\varphi_\lambda\rangle + I\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_\lambda\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t}|\varphi_\lambda\rangle + \lambda\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_\lambda\rangle \quad (\text{I-75})$$

on applique l'équation (I-66) sur les états propres : $|\varphi_\lambda\rangle$

$$\frac{\partial I}{\partial t}|\varphi_\lambda\rangle + \frac{1}{i\hbar}[I, H]|\varphi_\lambda\rangle = 0 \quad (\text{I-76})$$

$$i\hbar\frac{\partial I}{\partial t}|\varphi_\lambda\rangle + IH|\varphi_\lambda\rangle - \lambda H|\varphi_\lambda\rangle = 0 \quad (\text{I-77})$$

le produit scalaire de l'équation (I-77) par $\langle\varphi_{\lambda'}|$ donne :

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$\langle \varphi_{\lambda'} | i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle + \langle \varphi_{\lambda'} | IH | \varphi_{\lambda} \rangle - \langle \varphi_{\lambda'} | \lambda H | \varphi_{\lambda} \rangle = 0 \quad (\text{I-78})$$

$$i\hbar \langle \varphi_{\lambda'} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle + \lambda' \langle \varphi_{\lambda'} | H | \varphi_{\lambda} \rangle - \lambda \langle \varphi_{\lambda'} | H | \varphi_{\lambda} \rangle = 0 \quad (\text{I-79})$$

$$i\hbar \langle \varphi_{\lambda'} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \varphi_{\lambda'} | H | \varphi_{\lambda} \rangle = 0 \quad (\text{I-80})$$

pour : $\lambda' = \lambda$

$$\langle \varphi_{\lambda'} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle = 0 \quad (\text{I-81})$$

en prenant le produit scalaire de l'équation (I-75) avec l'état propre $\langle \varphi_{\lambda} |$, on obtient :

$$\langle \varphi_{\lambda} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle + \langle \varphi_{\lambda} | I \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle = \langle \varphi_{\lambda} | \frac{\partial \lambda}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle + \lambda \langle \varphi_{\lambda} | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle \quad (\text{I-82})$$

$$\langle \varphi_{\lambda} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle + \lambda \langle \varphi_{\lambda} | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle = \langle \varphi_{\lambda} | \frac{\partial \lambda}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle + \lambda \langle \varphi_{\lambda} | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle \quad (\text{I-83})$$

$$\langle \varphi_{\lambda} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle = \langle \varphi_{\lambda} | \frac{\partial \lambda}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle \quad (\text{I-84})$$

$$\langle \varphi_{\lambda} | \frac{\partial I}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} \langle \varphi_{\lambda} | \varphi_{\lambda} \rangle \quad (\text{I-85})$$

on a :

$$\langle \varphi_{\lambda} | \varphi_{\lambda} \rangle = \delta_{\lambda\lambda} = 1 \quad (\text{I-86})$$

alors :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \left\langle \varphi_\lambda \left| \frac{\partial I}{\partial t} \right| \varphi_\lambda \right\rangle \quad (\text{I-87})$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \left\langle \varphi_\lambda \left| \frac{\partial I}{\partial t} \right| \varphi_\lambda \right\rangle = 0 \quad (\text{I-88})$$

donc λ : est une constante.

2.1.2- Les vecteurs propres de l'invariant

Pour trouver le rapport entre les vecteurs propres et la solution de l'équation de Schrödinger, on écrit d'abord l'équation du mouvement de $|\varphi_\lambda\rangle$. En commençant par l'équation (I-74) et en utilisant l'équation (I-88), on obtient :

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_\lambda\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_\lambda\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\varphi_\lambda\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_\lambda\rangle \quad (\text{I-89})$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_\lambda\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_\lambda\rangle = \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_\lambda\rangle \quad (\text{I-90})$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_\lambda\rangle = (\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_\lambda\rangle \quad (\text{I-91})$$

le produit scalaire de l'équation avec le vecteur propre $\langle \varphi_{\lambda'} |$:

$$\left\langle \varphi_{\lambda'} \left| \frac{\partial I}{\partial t} \right| \varphi_\lambda \right\rangle = \left\langle \varphi_{\lambda'} \left| (\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} \right| \varphi_\lambda \right\rangle \quad (\text{I-92})$$

$$\left\langle \varphi_{\lambda'} \left| \frac{\partial I}{\partial t} \right| \varphi_\lambda \right\rangle = (\lambda - \lambda') \left\langle \varphi_{\lambda'} \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \varphi_\lambda \right\rangle \quad (\text{I-93})$$

on déduit que :

$$i\hbar \left\langle \varphi_{\lambda'} \left| \frac{\partial I}{\partial t} \right| \varphi_\lambda \right\rangle + (\lambda - \lambda') \langle \varphi_{\lambda'} | H | \varphi_\lambda \rangle = 0 \quad (\text{I-94})$$

donc :

$$i\hbar(\lambda - \lambda') \left\langle \varphi_{\lambda'} \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \varphi_{\lambda} \right\rangle = (\lambda - \lambda') \langle \varphi_{\lambda'} | H | \varphi_{\lambda} \rangle \quad (\text{I-95})$$

Pour $\lambda \neq \lambda'$ on déduit :

$$i\hbar \left\langle \varphi_{\lambda'} \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \varphi_{\lambda} \right\rangle = \langle \varphi_{\lambda'} | H | \varphi_{\lambda} \rangle \quad (\text{I-96})$$

si l'équation (I-95) est valable pour $\lambda = \lambda'$ aussi bien que $\lambda \neq \lambda'$, alors on déduit immédiatement que $|\varphi_{\lambda}\rangle$ satisfait l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire, $|\varphi_{\lambda}\rangle$ est une solution particulière de l'équation de Schrödinger.

Lorsque les phases des états stationnaires ne sont pas fixées, on choisit un autre ensemble de vecteurs propres de I multiplié par un facteur de phase dépendant du temps. Alors :

$$|\varphi_{\lambda}\rangle_{\alpha} = e^{i\alpha_{\lambda}(t)} |\varphi_{\lambda}\rangle \quad (\text{I-97})$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda}\rangle_{\alpha} = H |\varphi_{\lambda}\rangle_{\alpha} \quad (\text{I-98})$$

où $\alpha_{\lambda}(t)$ est une fonction réelle du temps arbitrairement choisie. Ces $|\varphi_{\lambda}\rangle_{\alpha}$ sont des états propres orthonormés de $I(t)$ associés à λ , aussi bien que les $|\varphi_{\lambda}\rangle$. S'ils vérifient l'équation de Schrödinger, on obtient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (e^{i\alpha_{\lambda}(t)} |\varphi_{\lambda}\rangle) = H (e^{i\alpha_{\lambda}(t)} |\varphi_{\lambda}\rangle) \quad (\text{I-99})$$

$$-\hbar \frac{\partial e^{i\alpha_{\lambda}(t)}}{\partial t} |\varphi_{\lambda}\rangle + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda}\rangle e^{i\alpha_{\lambda}(t)} = H (e^{i\alpha_{\lambda}(t)} |\varphi_{\lambda}\rangle) \quad (\text{I-100})$$

$$-\hbar \frac{\partial \alpha_{\lambda}(t)}{\partial t} |\varphi_{\lambda}\rangle + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda}\rangle = H |\varphi_{\lambda}\rangle \quad (\text{I-101})$$

Chapitre I : l'équation de Schrödinger dépendante du temps

le produit scalaire par le vecteur d'état $\langle \varphi_{\lambda'} |$:

$$-\hbar \frac{\partial \alpha_{\lambda}}{\partial t} \langle \varphi_{\lambda'} | \varphi_{\lambda} \rangle + \langle \varphi_{\lambda'} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_{\lambda} \rangle = \langle \varphi_{\lambda'} | H | \varphi_{\lambda} \rangle \quad (\text{I-102})$$

$$\hbar \frac{d\alpha_{\lambda}}{dt} \langle \varphi_{\lambda'} | \varphi_{\lambda} \rangle = \langle \varphi_{\lambda'} | \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right] | \varphi_{\lambda} \rangle \quad (\text{I-103})$$

$$\hbar \frac{d\alpha_{\lambda}}{dt} \delta_{\lambda'\lambda} = \langle \varphi_{\lambda'} | \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right] | \varphi_{\lambda} \rangle \quad (\text{I-104})$$

donc on obtient :

$$\hbar \frac{d\alpha_{\lambda}}{dt} = \langle \varphi_{\lambda} | \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right] | \varphi_{\lambda} \rangle \quad (\text{I-105})$$

2.1.3- Solution générale

La solution générale de l'équation de Schrödinger est les états propres de l'invariant multiplié par un facteur de phase dépendant du temps [24] :

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{i\alpha_{\lambda}(t)} \varphi_{\lambda}(\vec{r}, t) \quad (\text{I-106})$$

Chapitre II
La structure quantique
de l'espace-phase non
commutative

1-Introduction

Dans ce chapitre on va traiter les postulats et les hypothèses caractérisant la structure quantique et la physique de l'espace-phase non-commutatif suivants :

- 1-Rappelle sur la structure quantique ordinaire.
- 2-Les nouveaux postulats de l'espace-phase non-commutatif.
- 3- Produit star et ces propriétés, la formule de Moyal-Weyl.
- 4-La méthode de Boopp's Shift et ces application pour un potentiel central général.

2-Rappelle sur la structure physique de la mécanique quantique ordinaire

La naissance de la physique quantique remonte à 1900, lorsque Planck introduit la notion d'énergie d'un quanta $E = h\nu$, c'est la première étape dans cette chemin de quantification, qui est caractérisée par la constante $h \approx 6.6262 \cdot 10^{-34}$ (j.s). Actuellement, la mécanique quantique ordinaire est formulée sur l'espace des coordonnées et des moments qui sont considérés comme des opérateurs hermétiques (x_i, p_j) suivants [36,37]:

$$\begin{cases} [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \\ [x_i, x_j] = 0 \\ [p_i, p_j] = 0 \end{cases} \quad (\text{II- 1})$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ et δ_{ij} sont la constant de Planck réduite et le symbole ordinaire de Kronecker, respectivement. La quantification satisfait les deux relations principales concernant l'énergie E et l'impulsion p_i :

$$\begin{cases} E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ p_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^i} \end{cases} \quad (\text{II-2})$$

3-La structure quantique de l'espace-phase non-commutative

L'idée de non commutativité de l'espace phase est introduite par H. Syndre en 1947 [38]. Elle satisfait la nouvelle structure algébrique, qui est connue par la règle de commutation de non commutative suivante [39-65] :

$$\begin{cases} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\theta_{ij} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\bar{\theta}_{ij} \end{cases} \quad (\text{II-3})$$

où $(i, j = \overline{1, D})$ et D la dimension de l'espace.

Les deux paramètres $(\theta^{\mu\nu}, \bar{\theta}^{\mu\nu}) \equiv -(\theta^{\nu\mu}, \bar{\theta}^{\nu\mu}) = \varepsilon^{\mu\nu}(\theta, \bar{\theta})$ sont deux tenseurs antisymétriques induits par la non commutativité position-position et impulsion-impulsion, respectivement. Il est très important de noter que les dimensions de $(\theta^{\mu\nu}, \bar{\theta}^{\mu\nu})$ sont $((length)^2, (impulsion)^2)$ respectivement.

L'espace -phase non commutatif est définie en terme d'un ensemble de générateurs (\hat{x}_i, \hat{p}_i) dits coordonnées et moments non commutatives [66,67]:

$$\begin{cases} x_i \rightarrow \hat{x}_i = f(x_i, p_i) \\ p_i \rightarrow \hat{p}_i = g(x_i, p_i) \end{cases} \quad (\text{II-4})$$

Dans ce mémoire de master on s'intéresse à l'espace a deux dimensions $N=2$, donc les indices prennent les valeurs $(i, j = \overline{1, 2})$. Dans ce cas particulière, les règles de commutations canoniques deviennent :

$$\begin{cases} [\hat{x}_1, \hat{p}_2] = 0, [\hat{x}_1, \hat{p}_1] = i\hbar \\ [\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\hbar\theta_{12} \\ [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i\hbar\bar{\theta}_{12} \end{cases} \quad (\text{II-5})$$

4- Le produit star

Le formalisme du produit star initié par Harman Weyl et Wigner, permet décrire la mécanique quantique en termes d'espace phases. Le but est de trouver un produit (noté produit star *) pour des fonctions (ordinaires) définies sur un espace de Minkowski qui permet au symbole de Weyl d'être un homomorphisme pour la multiplication [66].

4.1- Formule de Moyal-Weyl

La quantification de Weyl est une technique utilisée pour décrire la mécanique quantique à partir de l'espace - phase de la mécanique classique, qui nous permet d'associer un opérateur quantique à une fonction classique qui dépend des variable de l'espace - phase (variable canonique).

Soit $f(x)$ une fonction quelconque définie sur l'espace- phase, pour chaque fonction $f(x)$ on associe une autre fonction noté $\tilde{f}(k)$ qui est la transformation de Fourier[67] :

Chapitre II : La structure quantique de l'espace-phase non-commutative

$$\begin{cases} f(x) = (2\pi)^{-\frac{D}{2}} \int d^D k e^{ik_m x_m} \tilde{f}(k) \\ \tilde{f}(k) = (2\pi)^{-\frac{D}{2}} \int d^D l e^{il_m \tilde{x}_m} f(x) \end{cases} \quad (\text{II-6})$$

f devient un opérateur de Weyl :

$$\begin{aligned} w(f) &= (2\pi)^{-\frac{D}{2}} \int d^D k e^{ik_m x_m} \tilde{f}(k) \\ w(g) &= (2\pi)^{-\frac{D}{2}} \int d^D l e^{il_m \tilde{x}_m} \tilde{g}(l) \end{aligned} \quad (\text{II-7})$$

On peut démontrer que :

$$w(f).w(g) = w(f * g) \quad (\text{II-8})$$

on a

$$w(f).w(g) = (2\pi)^{-D} \int d^D k d^D l e^{ik_m x_m} e^{il_m \tilde{x}_m} \tilde{g}(l) \tilde{f}(k) \quad (\text{II-9})$$

en utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff [36,37] :

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[[A,B],B] - \frac{1}{12}[[A,B],A]} \quad (\text{II-10})$$

qui est valable pour les opérateurs A et B tel que : $[[A, B], B] = [[A, B], A] = 0$,

donc :

$$\begin{aligned} w(f).w(g) &= (2\pi)^{-D} \int d^D k d^D l e^{ik_m x_m} e^{il_m \tilde{x}_m} \tilde{g}(l) \tilde{f}(k) \\ &= w(f * g) \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

où $(f * g)$ c'est la fonction de Moyal – Weyl :

$$\begin{aligned} w(f * g) &= w \left[(2\pi)^{-D} \int d^D k d^D l \left[e^{\frac{i\theta^{mn}}{2} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n}} e^{ik_m \tilde{x}^m + il_n y^n} \right] \tilde{g}(l) \tilde{f}(k) \right] \\ &= w \left[e^{\frac{i\theta^{mn}}{2} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n}} f(x) g(y) \right] \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

$$(f * g) = \left[e^{\frac{i\theta^{mn}}{2} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n}} f(x)g(y) \Big|_{y \rightarrow x} \right] \quad (\text{II-13})$$

donc

$$(f * g)(x, p) = (fg)(x, p) + \frac{i}{2} \theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} f(x, p) \frac{\partial}{\partial x^n} + O(\theta^2) + \frac{i\hbar}{2} \bar{\theta}^{mn} \frac{\partial}{\partial p^m} f(x, p) \frac{\partial}{\partial p^n} g(x, p) + (\bar{\theta}^2) \quad (\text{II-14})$$

$(f(x, p) * g(x, p))$ représente le nouveau produit en mécanique non commutative. La quantité $e^{\theta^{ij}k_i l_j}$ est appelée le facteur de la phase non commutative. Une autre écriture du produit star est la suivante [68]:

$$(f * g)(x) = f(x) e^{\frac{i\hbar}{2} \bar{\theta}^{ij} \partial_i \bar{\partial}_j} g(x) \quad (\text{II-15})$$

Les flèches indiquent dans quelle direction agissent les dérivées.

4.2-Propriétés du produit star

Le produit star a les propriétés suivantes :

a)-lorsque $\theta = 0$

$$f(x, p) * g(x, p) = f(x, p) \cdot g(x, p) \quad (\text{II-16})$$

on retrouve donc le cas commutatif.

b)-Le produit star entre exponentiels

$$e^{ikx} * e^{iqx} = e^{i(k+q)x - \frac{i}{2} \theta^{ij} k_i q_j} \quad (\text{II-17})$$

c)-Non commutatif:

$$f(x, p) * g(x, p) \neq g(x, p) * f(x, p) \quad (\text{II-18})$$

d)-Associatif:

$$(f(x, p) * g(x, p)) * h(x, p) = f(x, p) (g(x, p) * h(x, p)) \quad (\text{II-19})$$

e)-La relation du complexe conjugué :

$$(f(x, p) * g(x, p))^* = g(x, p)^* * f(x, p)^* \quad (\text{II-20})$$

f)-La relation d'intégrale :

$$\begin{aligned} \int d^D x (f * g)(x, p) &= \int d^D x (g * f)(x, p) \\ &= \int d^D x f(x, p) g(x, p) \end{aligned} \quad (\text{II-21})$$

g)-Permutation cyclique :

$$\begin{aligned} \int d^D x (f * g * h)(x, p) &= \int d^D x (h * f * g) \\ &= \int d^D x (g * h * f) \end{aligned} \quad (\text{II-22})$$

h)-Satisfait la règle de Leibniz :

$$\partial_u (f * g) = (\partial_u f) * g + f * (\partial_u g) \quad (\text{II-23})$$

Remarque

Si on veut travailler avec un espace – phase non commutatif (pour coder le non commutativité de l'espace-phase) il existe deux manières différentes :

*Utiliser un produit ordinaire avec des operateurs de Weyl .

*Déformer le produit ordinaire en un produit star et utiliser les fonctions ordinaires définies sur un espace-phase commutatif.

5 - La Méthode de Boopp's Shift (décalage de Boop)

Pour écrire l'équation de Schrödinger dans l'espace-phase non commutatif, on applique les étapes suivantes [69,70]:

1-On remplace la fonction d'onde ordinaire $\Psi(\vec{r}, t)$ par les nouvelles fonction d'onde $\hat{\Psi}(\hat{r}, t)$.

2-On remplace l'operateur d' Hamiltonien ordinaire $H(p_i, x_i)$ par un nouvel operateur $\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$.

3-On remplace l'énergie ordinaire E par la nouvelle valeur E_{nc} .

4-On remplace le produit ordinaire par le produit star.

Dans ce cas l'équation de Schrödinger dans l'espace-phase non commutative devient :

$$\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) * \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}, t) = E_{nc} \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}, t) \quad (\text{II-24})$$

Chapitre II : La structure quantique de l'espace-phase non-commutative

La fonction d'onde $\widehat{\Psi}(\vec{r}, t)$ peut être écrite comme

$$\widehat{\Psi}(\vec{r}, t) = \widehat{\Psi}(\vec{r})f(t) \quad (\text{II-25})$$

on remplace l'équation (II-25) dans (II-24), on obtient :

$$\widehat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) * \widehat{\Psi}(\vec{r}) = E_{nc} \widehat{\Psi}(\vec{r}) \quad (\text{II-26})$$

La méthode de Boopp's Shift (décalage de Boop) permet de traiter l'équation de Schrödinger déformée (II-26) comme une équation ordinaire suivante :

$$\widehat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \widehat{\Psi}(\vec{r}) = E_{nc} \widehat{\Psi}(\vec{r}) \quad (\text{II-27})$$

avec l'operateur de Hamiltonien $H(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$ peut être écrite en trois façons [71,72]:

1-pour NC-ND-RSP

Non Commutative -N Dimensions -RealSpace Phase

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p} = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x} = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) \quad (\text{II-28})$$

2-pour _NC _ND _RS

Non Commutative -NDimensions -Real Space

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p} = p_i, \hat{x} = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) \quad (\text{II-29})$$

3- pour _NC _ND _RP

Non Commutative-NDimensions-Real Phase

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p} = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x} = x_i\right) \quad (\text{II-30})$$

Chapitre II : La structure quantique de l'espace-phase non-commutative

c'est – á-dire , on a les trois cas (II-28), (II-29) et (II-30) correspondent aux :

$$\begin{cases} p_i \rightarrow \hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j \\ x_i \rightarrow \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \end{cases} \quad (\text{II-31})$$

$$\begin{cases} p_i \rightarrow \hat{p}_i = p_i \\ x_i \rightarrow \hat{x}_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \end{cases} \quad (\text{II-32})$$

et

$$\begin{cases} p_i \rightarrow \hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j \\ x_i \rightarrow \hat{x}_i = x_i \end{cases} \quad (\text{II-33})$$

Pour notre travail qui est s'intéresse à l'espace-phase non commutatif à deux dimensions, on introduit les notations :

$$\begin{cases} i = 1 \quad \hat{x}_1 = \hat{x} \rightarrow p_1 = p_x \\ i = 2 \quad \hat{x}_2 = \hat{y} \rightarrow p_2 = p_y \end{cases} \quad (\text{II-34})$$

Nous avons choisit le deuxième cas (équation (II-31)) :

$$\begin{cases} \hat{x} = x - \frac{\theta}{2} p_y, \quad \hat{y} = y + \frac{\theta}{2} p_x \\ \hat{p}_x = p_x + \frac{\bar{\theta}}{2} y, \quad \hat{p}_y = p_y - \frac{\bar{\theta}}{2} x \end{cases} \quad (\text{II-35})$$

avec la carré de \hat{r}^2 et \hat{p}^2 sont donné par:

$$\begin{aligned} \hat{r}^2 &= \sum_{i=1}^2 \hat{x}_i^2 \\ \hat{p}^2 &= \sum_{i=1}^2 \hat{p}_i^2 \end{aligned} \quad (\text{II-36})$$

La méthode de Boopp's Shift est considéré comme une conséquence directe du produit star, elle permet de traiter l'équation de Schrödinger déformée comme une équation ordinaire de la façon suivante :

Chapitre II : La structure quantique de l'espace-phase non-commutative

$$\begin{aligned} \left(\frac{\vec{p}^2}{2m_0} + \hat{v}(\vec{r}) \right) * \hat{\Psi}(\vec{r}) &= E_{nc} \hat{\Psi}(\vec{r}) \rightarrow \left(\frac{\vec{p}^2}{2m_0} + v(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}) \\ &= E_{nc} \Psi(\vec{r}) \end{aligned} \quad (\text{II-37})$$

Selon les travaux de recherches scientifiques de [71], les deux opérateurs \hat{r}^2 et \hat{p}^2 peuvent s'écrire dans l'espace θ -phase non commutative à deux dimensions comme suit :

$$\begin{cases} \hat{r}^2 = r^2 - \vec{L}\vec{\theta} \\ \hat{p}^2 = p^2 + \vec{L}\vec{\theta} \end{cases} \quad (\text{II-38})$$

Avec \vec{L} : est le moment angulaire orbital .Le potentiel $\hat{v}(\vec{r})$ se transforme selon la forme de ce dernier.

Avec les notations :

$$\begin{cases} \vec{L}\vec{\theta} = L_z \theta_{12} \\ \vec{L}\bar{\theta} = L_z \bar{\theta}_{12} \end{cases} \quad (\text{II-39})$$

Il est possible physiquement (en trois dimensions) de remplacer les deux termes ($\vec{L}\vec{\theta}$ et $\vec{L}\bar{\theta}$) par ($\alpha\theta\vec{S}\vec{L}$ et $\alpha\bar{\theta}\vec{S}\vec{L}$) ,où $\vec{S}\vec{L}$ est l'interaction spin-orbite et α est une constante[71].

Chapitre III
La Solution de l'équation
de Schrödinger
dépendante du temps
pour un oscillateur
harmonique à 2D dans

Chapitre III: La solution l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un oscillateur harmonique à 2D dans l'espace-phase non commutative

1- Introduction

L'objectif de ce chapitre est la solution de l'équation de Schrödinger indépendante et dépendante du temps pour un oscillateur harmonique bidimensionnel dans l'espace-phase non commutative. Pour l'équation de Schrödinger stationnaire, on a écrit l'hamiltonien du système en fonction des opérateurs de création et d'annihilation, et on a trouvé facilement la solution de l'équation de Schrödinger ; pour l'équation de Schrödinger non stationnaire, on a utilisé la méthode des invariants et la transformation unitaire associée à cet invariant.

2- L'oscillateur harmonique stationnaire à 2D dans l'espace phase non commutative

L'Hamiltonian de notre système est :

$$H = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \quad (\text{III-1})$$

On utilise un système d'unités naturelles ($c = \hbar = 1$).

Les opérateurs dans l'espace phase non commutative $\hat{x}, \hat{y}, \hat{p}_x$ et \hat{p}_y et les opérateurs dans l'espace phase commutative x, y, p_x et p_y peuvent se transformer comme suit [73] :

$$\begin{cases} \hat{x} = x - \frac{\theta}{2} p_y, & \hat{y} = y + \frac{\theta}{2} p_x \\ \hat{p}_x = p_x + \frac{\bar{\theta}}{2} y, & \hat{p}_y = p_y - \frac{\bar{\theta}}{2} x \end{cases} \quad (\text{III-2})$$

on obtient:

$$H = \frac{1}{2M} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} M \Omega^2 (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\theta}}{m} + m \omega^2 \theta \right) L_z \quad (\text{III-3})$$

où

$$\begin{cases} L_z = x p_y - p_x y \\ M = \frac{m}{1 + \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4}} \\ \Omega = \omega \sqrt{\frac{m}{M} \left(1 + \frac{\bar{\theta}^2}{4 m^2 \omega^2} \right)} \end{cases} \quad (\text{III-4})$$

donc

$$H = \frac{1}{2M} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} M \Omega^2 (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\theta}}{m} + m \omega^2 \theta \right) L_z \quad (\text{III-5})$$

où encore

Chapitre III: La solution l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un oscillateur harmonique à 2D dans l'espace-phase non commutative

$$H = H_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\theta}}{m} + m\omega^2\theta \right) L_z \quad (\text{III-6})$$

avec

$$H_0 = \frac{1}{2M} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} M\Omega^2 (x^2 + y^2) \quad (\text{III-7})$$

On introduit les opérateurs de créations et d'annihilations suivants :

$$\begin{cases} a_x = \sqrt{\frac{M\Omega}{2}} \left(x + i \frac{p_x}{M\Omega} \right) \\ a_x^+ = \sqrt{\frac{M\Omega}{2}} \left(x - i \frac{p_x}{M\Omega} \right) \end{cases} \quad (\text{III-8})$$

$$\begin{cases} a_y = \sqrt{\frac{M\Omega}{2}} \left(y + i \frac{p_y}{M\Omega} \right) \\ a_y^+ = \sqrt{\frac{M\Omega}{2}} \left(y - i \frac{p_y}{M\Omega} \right) \end{cases} \quad (\text{III-9})$$

on obtient

$$\hat{H} = \Omega (a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\theta}}{m} + m\omega^2\theta \right) (a_x^+ a_y - a_y^+ a_x) \quad (\text{III-10})$$

On introduit les nouveaux opérateurs d'annihilations de quanta circulaires gauche et droite respectivement a_g et a_d comme suit [74] :

$$a_g = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - i a_y) \quad (\text{III-11})$$

$$a_d = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + i a_y) \quad (\text{III-12})$$

on réécrit l'hamiltonien

$$\hat{H} = \Omega (a_g^+ a_g + a_d^+ a_d + 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\theta}}{m} + m\omega^2\theta \right) (a_g^+ a_d - a_d^+ a_g) \quad (\text{III-13})$$

on pose:

$$N_g = a_g^+ a_g \quad (\text{III-14})$$

Chapitre III: La solution l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un oscillateur harmonique à 2D dans l'espace-phase non commutative

$$N_d = a_d^\dagger a_d \quad (\text{III-15})$$

où N_g et N_d sont appelés les opérateurs nombre de quanta circulaires gauche et droite respectivement [74].
on obtient

$$\hat{H} = \Omega(\hat{N}_g + \hat{N}_d + 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\theta}}{m} + m\omega^2\theta \right) (\hat{N}_g - \hat{N}_d) \quad (\text{III-16})$$

Le spectre d'énergie est obtenu à partir des valeurs propres de l'hamiltonien comme suit :

$$\hat{H}|n_g, n_d\rangle = E_{n_g, n_d, \theta, \bar{\theta}}|n_g, n_d\rangle \quad (\text{III-17})$$

avec

$$E_{n_g, n_d, \theta, \bar{\theta}} = \Omega(n_g + n_d + 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\theta}}{m} + m\omega^2\theta \right) (n_g - n_d) \quad (\text{III-18})$$

où n_g et n_d sont des nombres entiers positifs ($n_g, n_d = 0, 1, 2, \dots$).

En terme de m et ω l'énergie peut s'écrire comme:

$$E_{n_g, n_d, \theta, \bar{\theta}} = \frac{1}{4m} \sqrt{(4m^2\omega^2 + \bar{\theta}^2)(4 + m^2\omega^2\theta^2)}(n_g + n_d + 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\theta}}{m} + m\omega^2\theta \right) \quad (\text{III-19})$$

on note quand $\theta \rightarrow 0$ et $\bar{\theta} \rightarrow 0$ nous trouverons le cas commutatif:

$$E_{n_g, n_d, \theta, \bar{\theta}} = \omega(n_g + n_d + 1) \quad (\text{III-20})$$

Les vecteurs propres de notre système sont:

$$|n_g, n_d\rangle = \frac{(a_g^\dagger)^{n_g} (a_d^\dagger)^{n_d}}{\sqrt{n_g! n_d!}} |0, 0\rangle \quad (\text{III-21})$$

Où $|0, 0\rangle$ est l'état du vide de l'Hamiltonien \hat{H}

Chapitre III: La solution l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un oscillateur harmonique à 2D dans l'espace-phase non commutative

3-L'oscillateur harmonique non stationnaire à 2D dans l'espace phase non commutative

L'hamiltonian de notre système est donné par :

$$H = W_1(t)\widehat{N}_g + W_2(t)\widehat{N}_d + \Omega(t) \quad (\text{III-22})$$

où $W_1(t), W_2(t)$ and $\Omega(t)$ sont des coefficients dépendants du temps qui sont définis comme:

$$W_1(t) = \Omega(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\theta}(t)}{m(t)} + m(t)\omega^2(t)\theta(t) \right) \quad (\text{III-23})$$

$$W_2(t) = \Omega(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\theta}(t)}{m(t)} + m(t)\omega^2(t)\theta(t) \right) \quad (\text{III-24})$$

On peut réécrire notre Hamiltonian comme :

$$H(t) = H_1(t) + H_2(t) + \Omega(t) \quad (\text{III-25})$$

avec

$$H_1(t) = W_1(t)\widehat{N}_g, \quad H_2(t) = W_2(t)\widehat{N}_d \quad (\text{III-26})$$

On Remarque que $[H_1(t), H_2(t)] = 0$, donc la solution exacte de l'équation de Schrödinger dépendante du temps est [75]:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i \int_0^t \Omega(t') dt'} |\psi_1(t)\rangle |\psi_2(t)\rangle \quad (\text{III-27})$$

où $|\psi_1(t)\rangle$ et $|\psi_2(t)\rangle$ satisfont les deux équations suivantes :

$$H_1(t)|\psi_1(t)\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1(t)\rangle \quad (\text{III-28})$$

$$H_2(t)|\psi_2(t)\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_2(t)\rangle \quad (\text{III-29})$$

Les deux équations au dessus ont la même forme, donc il suffit de résoudre l'une des équations et de déduire la solution d'autre équation. On prend la première équation :

Chapitre III: La solution l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un oscillateur harmonique à 2D dans l'espace-phase non commutative

$$H_1(t)|\psi_1(t)\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1(t)\rangle \quad (\text{III-30})$$

Pour résoudre cette équation on utilise la méthode des invariants [24]. D'après cette méthode la solution est donnée par :

$$|\psi_1(t)\rangle = e^{i\theta_1(t)} |\varphi_1(t)\rangle \quad (\text{III-31})$$

avec

$$I_1(t)|\varphi_1(t)\rangle = \lambda_1 |\varphi_1(t)\rangle \quad (\text{III-32})$$

où λ_1 est un constant.

$$\theta_1(t) = \int_0^t \left\langle \varphi_1(t') \left| i \frac{\partial}{\partial t'} - H_1(t') \right| \varphi_1(t') \right\rangle dt \quad (\text{III-33})$$

et

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} + \frac{1}{i} [I_1, H_1] = 0 \quad (\text{III-34})$$

$$I_1^+ = I_1 \quad (\text{III-35})$$

Il découle de l'équation (III-34) que I_1 peut se construire à partir des opérateurs $\widehat{N}_g, a_g^+, a_g$ et les paramètres $\alpha_1(t), \beta_1(t), \gamma_1(t)$ et $\delta_1(t)$ comme suit:

$$I_1(t) = \alpha_1(t) \widehat{N}_g + \beta_1(t) a_g^+ + \gamma_1(t) a_g + \delta_1(t) \quad (\text{III-36})$$

On remplace l'équation (III-36) dans l'équation (III-34), on trouve

$$\alpha_1 = \alpha_{10} \quad (\text{III-37})$$

$$\dot{\beta}_1 + i\beta_1 W_1 = 0 \quad (\text{III-38})$$

$$\dot{\gamma}_1 - i\gamma_1 W_1 = 0 \quad (\text{III-39})$$

$$\delta_1 = \delta_{01} \quad (\text{III-40})$$

La solution des équations (III-38) et (III-39) est donnée par :

$$\beta_1 = \beta_{01} e^{-i \int_0^t W_1(t') dt'} \quad (\text{III-41})$$

Chapitre III: La solution l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un oscillateur harmonique à 2D dans l'espace-phase non commutative

$$\gamma_1 = \gamma_{01} e^{i \int_0^t W_1(t') dt'} \quad (\text{III-42})$$

où $\alpha_{01}, \beta_{01}, \gamma_{01}$ et δ_{01} sont des constants.

Il convient de noter que nous ne pouvons pas résoudre directement l'équation (III-32) pour la raison que les paramètres $\beta_1(t)$ et $\gamma_1(t)$ sont dépendants du temps. Si, par exemple, nous pouvons trouver (ou construire) un opérateur de transformation unitaire $V_1(t)$ pour que $V_1(t)^+ I(t) V_1(t)$ soit indépendant du temps, alors ce problème de l'équation des valeurs propres de l'invariant $I_1(t)$ est donc résolu. Nous avons donc:

$$I_{1V} |\varphi_{1v}\rangle = \lambda_1 |\varphi_{1v}\rangle \quad (\text{III-43})$$

où

$$I_{1V} = V_1(t)^+ I_1(t) V_1(t), |\varphi_{1v}\rangle = V_1(t)^+ |\varphi_1(t)\rangle \quad (\text{III-44})$$

En conséquence de notre expérience d'utilisation de la formulation de transformation unitaire liée à l'invariant, nous suggérons un opérateur de transformation unitaire suivant :

$$V_1(t) = e^{-G_1(t)}, V_1(t)^+ = e^{G_1(t)} \quad (\text{III-45})$$

où

$$G_1(t) = \rho_1(t) a_g^+ - \rho_1^*(t) a_g \quad (\text{III-46})$$

où $\rho_1(t)$ est une fonction du temps et $\rho_1^*(t)$ est le complexe conjugué de $\rho_1(t)$. Les deux fonctions peuvent déterminer dans ce qui suit par le calcul de

$$I_{1V} = V_1(t)^+ I_1(t) V_1(t) \quad (\text{III-47})$$

Pour calculer cette transformation, on utilise la formule de Baker-Hausdorff suivante [76] :

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (\text{III-48})$$

on trouve :

$$I_{1V} = \alpha_{01} \widehat{N}_g + (\beta_1 - \rho_1 \alpha_{01}) a_g^+ + (\gamma_1 - \rho_1^* \alpha_{01}) a_g + \delta_{01} - \gamma_1 \rho_1 - \beta_1 \rho_1^* + |\rho_1|^2 \alpha_{01} \quad (\text{III-49})$$

Chapitre III: La solution l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un oscillateur harmonique à 2D dans l'espace-phase non commutative

Si ρ_1 et ρ_1^* sont choisis pour être $\rho_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_{01}}, \rho_1^* = \frac{\gamma_1}{\alpha_{01}}$, alors nous pouvons changer l'invariant $I_1(t)$ dépendant du temps à l'invariant I_{1V} indépendant du temps, et le résultat est

$$I_{1V} = \alpha_{01} \hat{N}_g + \delta_{01} - \frac{\beta_{01} \gamma_{01}}{\alpha_{01}} \quad (\text{III-50})$$

Le vecteur propre de I_{1V} est: $|\varphi_{1v}\rangle = |n_g\rangle$ avec la valeur propre $\lambda_1 = \alpha_{01} n_g + \delta_{01} - \frac{\beta_{01} \gamma_{01}}{\alpha_{01}}, n_g = 0, 1, 2, \dots$

Le vecteur propre de I_V est :

$$|\varphi_1(t)\rangle = V_1(t) |n_g\rangle \quad (\text{III-51})$$

Une analyse plus approfondie de [24] montre que la solution particulière exacte $|\psi_1(t)\rangle$ de l'équation de Schrödinger dépendante du temps n'est différente de l'état propre de l'invariant $I_1(t)$ que par un facteur dépendant du temps (la phase) :

$$e^{i\theta_1(t)} = \exp \left\{ i \int_0^t \langle n_g | V_1(t')^\dagger \left[i \frac{\partial}{\partial t'} - H_1(t') \right] V_1(t') |n_g\rangle dt' \right\} \quad (\text{III-52})$$

en conséquence, $H_1(t)$ est transformé en:

$$H_{1V}(t) = V_1^\dagger(t) H_1(t) V_1(t) - V_1^\dagger(t) i \frac{\partial}{\partial t} V_1 = W_1 \hat{N}_g - (\rho_1 W_1 + i \dot{\rho}_1) a_g^\dagger + (\rho_1^* W_1 - i \dot{\rho}_1^*) a_g + |\rho_1|^2 W_1 - i(\rho_1^* \dot{\rho}_1 - \rho_1 \dot{\rho}_1^*) \quad (\text{III-53})$$

donc $\langle n_g | H_{1V}(t) |n_g\rangle$ s'écrit comme:

$$\langle n_g | H_{1V}(t) |n_g\rangle = +W_1 \hat{N}_g + |\rho_1|^2 W_1 - i(\rho_1^* \dot{\rho}_1 - \rho_1 \dot{\rho}_1^*) \quad (\text{III-54})$$

et le facteur dépendant du temps $\exp(i\theta_1(t))$ est donc:

$$\begin{aligned} \exp(i\theta_1(t)) &= \exp \left\{ i \langle n_g | -H_{1V}(t) |n_g\rangle dt' \right\} \\ &= \exp \left\{ i \left[-n_g W_1 - |\rho_1|^2 W_1 + i(\rho_1^* \dot{\rho}_1 - \rho_1 \dot{\rho}_1^*) \right] dt' \right\} \end{aligned} \quad (\text{III-55})$$

Chapitre III: La solution l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un oscillateur harmonique à 2D dans l'espace-phase non commutative

on utilise les deux équations (III-41) et (III-42), on obtient

$$\exp(i\theta_1(t)) = e^{i\left(\frac{\beta_{01}\gamma_{01}}{\alpha_{01}^2} - n_g\right) \int_0^t w_1(t') dt'} \quad (\text{III-56})$$

Par conséquent, la solution exacte de l'équation de Schrödinger dépendante du temps (III-28) correspondant à la valeur propre particulière $\alpha_{01}n_g + \delta_{01}$

$-\frac{\beta_{01}\gamma_{01}}{\alpha_{01}}$, de l'invariant $I_1(t)$ peut être écrite

$$|\psi_1(t)\rangle = e^{i\left(\frac{\beta_{01}\gamma_{01}}{\alpha_{01}^2} - n_g\right) \int_0^t W_1(t') dt'} V_1(t) |n_g\rangle \quad (\text{III-57})$$

avec

$$|n_g\rangle = \frac{(n_g^+)^{n_g}}{\sqrt{n_g!}} |0\rangle \quad (\text{III-58})$$

où $n_g = 0, 1, 2, \dots$ et $|0\rangle$ est l'état du vide de l'hamiltonien H_1 .

De la même manière, on peut facilement obtenir la solution exacte particulière de l'équation de Schrödinger dépendante du temps (III-29), il suffit seulement de remplacer :

$$|n_g\rangle \rightarrow |n_d\rangle, V_1(t) \rightarrow V_2(t), W_1(t) \rightarrow W_2(t), I_1(t) \rightarrow I_2(t), n_g \rightarrow n_d, \alpha_{01} \rightarrow \alpha_{02}, \beta_{01} \rightarrow \beta_{02}, \gamma_{01} \rightarrow \gamma_{02} \text{ et } \delta_{01} \rightarrow \delta_{02} \quad (\text{III-59})$$

Donc la solution de dépendante du temps (III-29) correspondant à la valeur propre particulière $\alpha_{02}n_d + \delta_{02} - \frac{\beta_{02}\gamma_{02}}{\alpha_{02}}$, de l'invariant $I_2(t)$ peut être écrite :

$$|\psi_2(t)\rangle = e^{i\left(\frac{\beta_{02}\gamma_{02}}{\alpha_{02}^2} - n_d\right) \int_0^t W_2(t') dt'} V_2(t) |n_d\rangle \quad (\text{III-60})$$

avec

$$|n_d\rangle = \frac{(n_d^+)^{n_d}}{\sqrt{n_d!}} |0\rangle \quad (\text{III-61})$$

où
 $n_d = 0, 1, 2, \dots$

Chapitre III: La solution l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un oscillateur harmonique à 2D dans l'espace-phase non commutative

Par conséquent la solution exacte $|\psi(t)\rangle$ de notre système en utilisant la méthode des invariants est donnée par :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i \int_0^t \Omega(t') dt'} e^{i \left(\frac{\beta_{01} \gamma_{01}}{\alpha_{01}^2} - n_g \right) \int_0^t W_1(t') dt'} e^{i \left(\frac{\beta_{02} \gamma_{02}}{\alpha_{02}^2} - n_d \right) \int_0^t W_2(t') dt'} V_1(t) V_2(t) |n_g, n_d\rangle \quad (\text{III-62})$$

avec

$$|n_g, n_d\rangle = \frac{(n_g^+)^{n_g} (n_d^+)^{n_d}}{\sqrt{n_g! n_d!}} |0,0\rangle \quad (\text{III-63})$$

où $|0,0\rangle$ est l'état du vide de notre hamiltonien.

Conclusion

Conclusion

Les oscillateurs harmoniques bidimensionnels sont devenus d'outils puissants de modélisation et, par conséquent, sont fréquemment utilisés pour modéliser un large phénomènes physiques.

Parmi les différentes méthodes mathématiques de l'étude d'un tel système dépendant du temps, nous choisissons la théorie qui est établi par Lewis et Riesenfeld et appelée la méthode d'invariant dynamique de Lewis et Riesenfeld.

Nous avons étudié l'oscillateur harmonique stationnaire et non stationnaire en 2D dans l'espace- phase non commutative. Nous avons écrit l'hamiltonien du système en termes d'opérateurs de création et d'annihilation (a_i, a_i^+) , puis nous résolvons l'équation de Schrödinger indépendante et dépendante du temps. Pour l'équation de Schrödinger non stationnaire, nous avons utilisé la théorie d'invariant et la formulation de transformation unitaire associée à cet invariant. La théorie des invariants proposée par Lewis et Riessenfeld peut résoudre exactement l'équation de Schrödinger dépendante du temps. C'est un outil puissant pour traiter l'équation de Schrödinger en fonction du temps et le facteur de phase dynamique et géométrique.

Nous avons trouvé la solution exacte de l'équation de Schrödinger indépendante et dépendante du temps pour l'oscillateur harmonique à 2D dans l'espace-phase spatiale non commutative. Tous ces résultats sont explicites plutôt que formels, nous pensons que la méthode présentée dans ce mémoire présente plusieurs avantages par rapport à celles basées sur les formules de phase adiabatique de Berry et mérite d'être examinée plus approfondiment.



**Références
Bibliographiques**

Références Bibliographiques

- [1] C.M.A. Dantas, I.A. pedrosa and B. Baseia, Phys.Rev. A45, 1320 (1992).
- [2] F. Delgao C., B. Mielnik and M.A. Reys, Phys. Lett. A. 237, 359 (1998).
- [3] J.P. Reithmaier and al., Phys.Rev.Lett. 78, 378 (1997).
- [4] I.A. Pedrosa, Phys.Rev.Lett. 103, 010402 (2009) and Phys.Rev. A 83, 032108 (2011).
- [5] R.K. Colegrave and M.S. Abdella, Opt. Acta 28, 495 (1981).
- [6] N.A. Lemos and C.P. Natuvidade, Nuovo Cimento 99, 211 (1987).
- [7] Y. Ben-Aryel and A. Mann, Phys.Rev.A 32, 552 (1985).
- [8] M. bleicher, M. Reier, A. Dumitru, J. Brachmann, C.Spieler, S.A. Bass, H. Stocher, W. Griner, Phys.Rev.C 59, 1844 (1999).
- [9] R.S. Kohlman, J.Jr, A.J. Epstein, in: J.E. Mark (Ed), Physical Properties of Polymers Handbook, (AIP Press, Woodburg, New York, 1996), p.453.
- [10] H.N. Nagashima, R.N. Onody, R.M0 Faria, Phys.Rev. B59, 905 (1999).
- [11] H.J. Garmichael, An Open Systems Approach to Quantum Optics, (Springer, Berlin, 1993).
- [12] C.W. Gardner, Quantum Noise, (Springer, New York, 1991).
- [13] H.J.Garmichael, Statistical Methods in Quantum Optics I,(Springer, Berlin, 1991), Chapter 18.2.
- [14] S.L. Sondhi, S.M. Girwin, J.P. Carini, D. Shaher, Rev.Mod.Phys. 69, 315 (1997)
- [15] E. Chow, H.P. Wei, S.m. Girwin, M. Shaygan, Phys. Rev.Lett. 77, 1143 (1996).
- [16] A.Wolter, P. Rannou, J.P. Travers, B. Gills and D. Djurado, Phys.Rev. B 58, 7637 (1998).
- [17] F.Zuo, M. Angelopoulos, A.G.MacDiarmid and A.J. Epstein, Phys.Rev.B 36, 3475 (1987).
- [18] A.Gold, Z.Phys. B. 83, 429 (1991).
- [19] A.Gold, Z.Phys. B. 81, 155 (1990).
- [20] A.P. Betenew and V.V. kurin, Phys.Rev.B 56, 7855 (1997).
- [21] A.A. Golukov, B.A. Mohamed and A.V. Ustinov, Phys.Rev.B 54, 3047 (1996).
- [22] H.G. Schuster, Deterministic Choas, 2nd Edition, (VCH, Weinkeim, 1989).
- [23] E.Ott, Choas in Dynamical System, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).

- [24] Lewis HR and Riesenfeld WB , An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field J. Math Phys. 10 (1969) 1458.
- [25] Thierry Masson, Géométrie non commutative et applications à la théorie des champs, Thèse de Doctorat Université Paris 11, (1996).
- [26] E. Schrödinger, "The non relativistic equation of the de Broglie waves," Ann. Physik 79(1926)361.
- [27] L. Landau et E. Lifchitz, mécanique quantique, edition mir 1975.
- [28] Boucheriha.H.'Introduction à la physique quantique'.Centre de publication universitaire : Tunis.(2002).
- [29] A.Messiah,Mécanique Quantique T1(Dunod,Paris,1995) nouvelle édition.
- [30] - Cohen-Tannoudji, Quantum Mechanics, Vol 1, 2 .
- [31] D. J. Griffiths – Introduction to Quantum Mechanics – Prentice Hall, Inc. Toronto (1995).
- [32] M. Born, The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics nobel Lecture, December 11, 1954.
- [33] L. Krache, Thèse de Doctorat, (Université de Sétif, 2010).
- [34] A.M. Markov, Invariant and the Evolution of Non stationary Quantum Systems, (New York, 1989).
- [35] S. Menouar, Thèse de Doctorat ès Sciences, (Université de Sétif, 2009).
- [36] J. L. Basidevant, Mécanique Quantique, ellipses, ISBN 2-7298-8614-1 (1986), Paris, France.
- [37] A. Connes, Non commutative geometry, Academic Press (1994).
- [38] H. Snyder, The Quantization of space time, Phys. Rev. 71 (1946) 38-41.
- [39] Mémoire de master préparé par: Gharbi Noura et dirigé par Dr : Maireche Abdelmadjid, L'atome d'Hydrogène sous l'action d'un potentiel Coulombien dans l'espace non commutatif a deux dimensions, promotion : 2013-2014, département de physique, université de M'sila, Algérie.

- [40] Mémoire de master préparé par: El bahi Fatima et dirigé par Dr : Maireche Abdelmadjid, L'atome d'Hydrogène sous l'action d'un multi-potentiels dans l'espace non commutatif a deux dimensions, promotion : 2013-2014, département de physique, université de M'sila, Algérie.
- [41] Mémoire de master préparé par: Zellagui Asma et dirigé par Dr : Maireche Abdelmadjid, Les niveaux d'énergies atomique produit par le Mie-type potentiel dans l'espace non commutatif à deux dimensions : 2014-2015, département de physique, université de M'sila, Algérie.
- [42] Mémoire de master préparé par: Delaldja HANANE et dirigé par Dr : Maireche Abdelmadjid, Les niveaux d'énergie atomique produit par le Mie-type potentiel dans l'espace non-commutatif à trois dimensions, promotion : 2013-2014, département de physique, université de M'sila, Algérie.
- [43] A. Maireche, Spectrum of Schrödinger Equation with H.L.C. Potential in Non-Commutative Two-dimensional Real Space, The African Rev. Phys. 9: 0060, 479-483 (2014).
- [44] A. Maireche, Deformed Quantum Energy Spectra with Mixed Harmonic Potential for Non relativistic Schrödinger equation, J. Nano-Electron. Phys. 7 No 2, (2015) 02003.
- [45] A. Maireche, A Study of Schrödinger Equation with Inverse Sextic Potential in 2-dimensional Non-commutative Space, The African Rev. Phys. 9:0025, (2014) 185-193.
- [46] A. Maireche , Deformed Bound States for Central Fraction Power Potential: Non Relativistic Schrödinger Equation, The African Rev. Phys. 10:0014, (2015) 97-103.
- [47] A. Maireche, Non relativistic Atomic Spectrum for Companied Harmonic Oscillator Potential and its Inverse in both NC-2D: RSP, International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy, Vol. 56, pp. 1-9, Jul. 2015.
- [48] A. Maireche, Atomic Spectrum for Schrödinger Equation with Rational Spherical Type Potential in Non-commutative Space and Phase, The African Review of Physics, Vol. 10:0046, 373-381(2015).
- [49] A. Maireche, New exact bound states solutions for (C.F.P.S.) potential in the case of Non-commutative three dimensional non relativistic quantum mechanics, Med. J. Model. Simul. 04 (2015) 060-072.
- [50] A. Maireche, New Exact Solution of the Bound States for the Potential Family $V(r)=A/r^2-B/r+Cr^k$ ($k=0,-1,-2$) in both Non

commutative Three Dimensional Spaces and Phases: Non Relativistic Quantum Mechanics, International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy, Vol. 58, pp. 164-176, Sep. 2015.

[51] A. Maireche, New Quantum atomic spectrum of Schrödinger equation with pseudoharmonic potential in both non commutative three dimensional spaces and phases, Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol.09, March, Year 2015, 1301-1--1301-8.

[52] A. Maireche, A New Approach to the Non Relativistic Schrödinger equation for an Energy-Depended Potential in Both Non commutative three Dimensional spaces and phases, International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy, Vol. 60, pp. 11-19, Sep. 2015.

[53] A. Maireche, A Recent Study of Quantum Atomic Spectrum of the Lowest Excitations for Schrödinger Equation with Typical Rational Spherical Potential at Planck's and Nanoscales, J. Nano- Electron. Phys. 7 No 3, (2015) 02003.

[54] A. Maireche, A New Study to the Schrödinger Equation for Modified Potential $V(r)=ar^2+br^{-4}+cr^{-6}$ in Non relativistic Three Dimensional Real Spaces and Phases, International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy, Vol. 61, pp. 38-48, Nov. 2015.

[55] A. Maireche, Quantum Hamiltonian and Spectrum of Schrödinger Equation with companied Harmonic Oscillator Potential and its Inverse in three Dimensional Non commutative Real Space and Phase, J. Nano- Electron. Phys. Vol. 7 N0 4, (2015) 04021-1 0402, 1-7 (7pp).

[56] A. Maireche, Spectrum of Hydrogen Atom Ground State Counting Quadratic Term in Schrödinger Equation, The African Rev. Phys. Vol.10, (2015) 177-183.

[57] A. Maireche, New Bound State Energies for Spherical Quantum Dots in Presence of a Confining Potential Model at Nano and Plank's Scales, NanoWorld J, 1(4): (2016) 120-127.

[58] A. Maireche, New Relativistic Atomic Mass Spectra of Quark (u, d and s) for Extended Modified Cornell Potential in Nano and Plank's Scales, J. Nano- Electron. Phys. 8 No 1, (2016) 01020.

[59] A. Maireche, The Non relativistic Ground State Energy Spectra of Potential Counting Coulomb and Quadratic Terms in Non-commutative Two Dimensional Real Spaces and Phases, J. Nano-Electron. Phys. 8 No 1, (2016) 01021.

[60] A. E. F. Djemei and H. Smail, On Quantum Mechanics on Non commutative Quantum Phase Space, Commun. Theor. Phys. (Beijinig, China). 41 (2004) pp.837-844.

- [61] Shaohong Cai, Tao Jing, Guangjie Guo, Rukun Zhang, Dirac Oscillator in Non commutative Phase Space, International Journal of Theoretical Physics. 49 (8) (2010) pp 1699-1705.
- [62] A. Jahan, Non commutative harmonic oscillator at finite temperature: a path integral approach, Brazilian Journal of Physics, vol. 37, no. 4 (2007) 144-146.
- [63] Anselme F. Dossa, Gabriel Y. H. Avossevou, Non commutative Phase Space and the Two Dimensional Quantum Dipole in Background Electric and Magnetic Fields, Journal of Modern Physics. 4 (2013) 1400-1411.
- [64] Yang, Zu-Hua et al., DKP Oscillator with spin-0 in Three dimensional Non commutative Phase-Space, Int. J. Theor. Phys. 49 (2010) 644-657.
- [65] Jumakari-Mamat; Sayipjamal Dulat and Hekim Mamatabdulla, Landau-like Atomic Problem on a Non-commutative Phase Space, Int J Theor Phys; DOI 10.1007/s10773-016-2922-1 (2016).
- [66] Matthieu Lefrançois Théorie des champs topologiques et mécanique quantique en espace non-commutatif Thèse de Doctorat Soutenue le 5 décembre 2005 à l'Université Claude Bernard Lyon-I.
- [67] K. Farid, Aspects Mathématiques et physiques de la géométrie non commutative, université d'arizona, 2007.
- [68] S.M. Ikhdair and R. Sever, exact solutions of the 2D Schrodinger equation with central potentials induced by the non-commutativity of space, Arxiv: 1405.1002v2[math-ph] (2014)1-8.
- [69] F. Raid, M.M. Sheikh-Jabbari, non commutative QED and anomalous dipole moments, JHEP 0008(2000)045, hep-th/0008132.
- [70] A. Micu and M.M. Sheikh-Jabbari, non commutative ϕ^4 theory and two loops, JHEP 0101 (2001) 025, hep-th/0008057.
- [71] A. Maireche, a complete solution of the Mie_type potential in non commutative 3- dimensions space and phase symmetries, the African review of physics (2016) 11:0015.
- [72] A. Maireche, quantum spectrum of Schrodinger equation with singular 1-fraction power potential in non commutative 2 dimensional spaces, Turkish journal of physics (2014).
- [73] H. Sobhania, and H. Hassanabadi, Physics of Particles and Nuclei Letters, 2018, Vol. 15, No. 5, pp. 469–472.
- [74] Habib Bouchriha, Introduction à la physique quantique, cours et application 2002, centre de publication universitaire tunisien.
- [75] Jan Qi Shen, Exact solutions and geometric phases of dipole oscillator in rapidly varying electric field, arxiv.math-ph/0301026 v1 18Jan 2003.

[76] Franz Schwall, Advanced Quantum Mechanics, fourth edition, Springer-Verlag-Berlin Heidelberg 2008.

المخلص

لقد درسنا المهتز التوافقي المتعلق و غير المتعلق بالزمن ذي بعدين في الطور الفضائي غير التبادلي. كتبنا هاميلتونيان النظام بدلالة مؤثري التوليد والانذار (a_i, a_i^+) ، ثم قمنا بحل معادلة شرود نجر المتعلقة و غير المتعلقة بالزمن. بالنسبة لمعادلة شرود نجر غير المتعلقة بالزمن ، استخدمنا نظرية اللامتحول و التحول الوحدوي. يمكن لنظرية اللامتحول التي اقترحها لويس وريسينفيلد أن تحل بالضبط معادلة شرود نجر المتعلقة بالزمن. إنها أداة قوية لمعالجة معادلة شرود نجر المتعلقة بالزمن وعامل الطور الديناميكي والهندسي.

كلمات مفتاحية: معادلة شرود نجر, المهتز التوافقي, الطور الفضائي غير التبادلي, نظرية اللامتحول.

Résumé

Nous avons étudié l'oscillateur harmonique stationnaire et non stationnaire en 2D dans l'espace-phase non commutative. Nous avons écrit l'hamiltonien du système en termes d'opérateurs de création et d'annihilation (a_i, a_i^+), puis nous résolvons l'équation de Schrödinger indépendante et dépendante du temps. Pour l'équation de Schrödinger non stationnaire, nous avons utilisé la théorie d'invariant et la formulation de transformation unitaire associée à cet invariant. La théorie des invariants proposée par Lewis et Riessensfeld peut résoudre exactement l'équation de Schrödinger dépendante du temps. C'est un outil puissant pour traiter l'équation de Schrödinger en fonction du temps et le facteur de phase dynamique et géométrique.

Mot clés: l'équation de Schrödinger, oscillateur harmonique, l'espace-phase non-commutative, la théorie d'invariant.

Abstract

We have studying the stationary and non stationary harmonic oscillator in 2D in non-commutative space-phase. We have written the Hamiltonian of the system in terms of creation and annihilation operators (a_i, a_i^+), and then we solve the time-independent and time-dependent Schrödinger equation. For non stationary Schrödinger equation we have used the invariant theory and invariant related unitary transformation formulation. The invariant theory suggested by Lewis and Riessensfeld can exactly solves the time-dependent Schrödinger equation. It is a powerful tool for treating the time-dependent Schrödinger equation and the dynamic and geometric phase factor.

Keywords: The Schrödinger equation, harmonic oscillator, the space-phase non-commutative, the invariant theory.