



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et  
de la Recherche Scientifique  
Université de M'sila  
Faculté des Sciences  
Département de Physique

**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

**MASTER**

Domaine : **Physique Théorique**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

**Bahache abdelkader**

THEME

**Titre**

**Thermodynamique des trous noirs en présence des distances  
minimales**

Soutenue le : 24/06/2013

Devant le jury composé de :

S.Zaim	MCA Univ. de Batna	Président
Y. Sabri	MAB Univ. de M'sila	Rapporteur
A.Mairche	MCA Univ. de M'sila	Examineur

Promotion Juin 2013



## *Dédicace*

*Je dédie ce modestes travail a ma très chère douce mère et mon très cher pair.*

*Pour mes chers frères Zohir et mokhtar et surtout abdelkarim.*

*Pour mes chères sœurs Fouzia et monira et fahima et sara et surtout mariem.*

*A tout la promotion.*

## **Remerciements**

*Nous tenons tout d'abord à remercier Allah qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.*

*Nous tenons tout particulièrement à remercier notre encadreur monsieur sabri youcef d'avoir dirigé notre travail.*

*Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tous les professeurs qui nous ont enseigné.*

*"J'adresse mes remerciements aux personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de ce mémoire.*

*Enfin, on remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce modeste travail.*

*Merci à tous.*

## Table de Matières:

<b>Introduction</b> .....	07
<b>1 Introduction a la Relativité Générale</b> .....	09
<b>1.1 Les Principes Physiques</b> .....	09
<b>1.2 Equations d'Einstein</b> .....	09
<b>2 Trous noirs</b> .....	11
<b>2.1 Le trou noir neutre (Schwarzschild)</b> .....	11
2.1.1 La métrique.....	11
2.1.2 Horizons et Singularités.....	11
2.1.3 Coordonnées Kruskal.....	12
<b>2.2 Le trou noire Chargé (Reissner-Nordström)</b> .....	12
2.2.1 La Métrique.....	13
2.2.2 Horizons et Singularités.....	13
<b>2.3 Le trou noire neutre et en rotation(Kerr)</b> .....	13
2.3.1 Métrique de Kerr.....	13
2.3.2 Coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes.....	14
2.3.3 Ergo sphère.....	14
<b>2.4 Le trou noire Chargé et en rotation (Kerr-Newman)</b> .....	15
2.4.1 Métrique de Kerr-Newman.....	15
2.4.2 Horizon et Singularités.....	16
2.4.3 L'ergo sphère.....	16
<b>2.5 Thermodynamiques des Trous noirs</b> .....	16
2.5.1 Le Principe Zéro.....	17
2.5.2 Le Premier principe.....	18
2.5.3 Le deuxième principe.....	18
2.5.4 Le troisième principe.....	19
<b>3. Thermodynamiques des Trous noirs avec Principe d'incertitude généralisée</b> ...20	
<b>3.1 Mécanique Quantique avec une Relation d'Incertitude Généralisée</b> .....	20
3.1.1 Longueur minimale : .....	20
3.1.2 La relation de dispersion : .....	20

3.1.3	Le commutateur modifié.....	21
3.1.4	La représentation $\hat{X}$ et $\hat{P}$ .....	21
3.1.5	Produit scalaire et relation de fermeture modifiée.....	21
3.1.6	La relation d'incertitude généralisée.....	23
<b>3.2</b>	<b>Thermodynamique</b> .....	<b>26</b>
3.2.1	Les corrections à la température de Hawking standard :.....	26
3.2.1	Les corrections de l'entropie de Hawking-Bekenstein standard.....	27
	<b>Conclusion</b> .....	<b>30</b>

## **Introduction :**

Au début des années 70, J. Bekenstein proposa que la non décroissance de l'aire d'un trou noir, démontrée par S. Hawking, est analogue au second principe de la thermodynamique, qui dit que, pour tout processus physique, l'entropie d'un système ne peut pas diminuer. Il proposa alors qu'il existe un concept d'entropie pour un trou noir encodé par l'aire de l'horizon de ce dernier. J. Bekenstein obtint notamment une formule analogue au premier principe de la thermodynamique pour le trou noir de Kerr. Puis, ces résultats furent érigés sous forme de lois par J. Bardeen, B. Carter et S. Hawking pour toute solution stationnaire et à symétrie axiale des équations d'Einstein contenant un trou noir en présence de matière.

Récemment, un grand intérêt a été consacré pour étudier les effets des principes d'incertitude généralisée (GUP) et les relations de dispersion modifiées (MDR) sur la thermodynamique des trous noirs. Les concepts de GUP et MDR proviennent de plusieurs études sur l'approche de la théorie des cordes à la gravité quantique [1 - 4], gravitation quantique à boucles [5], non commutative algèbre d'espace-temps [6-8] et les expériences de Gedanken sur les trous noirs [9 - 10]. Toutes ces approches montrent que la norme du principe d'incertitude de Heisenberg doit être généralisée à l'effet d'intégrer des incertitudes supplémentaires lorsque les effets quantiques gravitationnels sont pris en compte. En fait, on croit que tout candidat prometteur pour une théorie quantique de la gravitation doit inclure les GUP et MDR comme ingrédients centraux.

La conséquence principale de la GUP est l'apparition d'une échelle de longueur minimale de l'ordre de la longueur de Planck qui ne peut pas être sondé, résultant une coupure naturelle des UV, et donc, des corrections aux paramètres de la dynamique des trous noirs sont attendues à l'échelle de Planck.

Les conséquences de la GUP et MDR sur la thermodynamique des trous noirs ont été considérées de manière intensive dans la littérature récente sur le sujet [11 - 16]. Notamment, il a été démontré que GUP empêche les trous noirs de l'évaporation complète, comme le principe de la norme de Heisenberg qui empêche l'atome d'hydrogène d'être l'objet d'un effondrement total [17]. Puis, à l'étape finale du processus de rayonnement de Hawking du trou noir, le trou noir inerte (BHR) continue à exister avec une entropie nulle, et d'une capacité thermique égale à zéro et une température finie non nulle. Le caractère inerte du BHR, en plus des interactions gravitationnelles, rend de cet objet un candidat sérieux pour expliquer la nature de la matière noire [18, 19]. D'autre part, une attention particulière a été également consacrée au calcul de l'entropie du trou noir et le sous-chef de la correction logarithmique [20 - 34].

Toutes les études susmentionnées ont été réalisées avec une GUP à l'ordre dominant dans la longueur de Planck. Cependant, la généralisation récente du GUP a induit des corrections quantitatives à l'entropie et elle influe sur la phase d'évaporation du trou noir [35]. En outre de cet intérêt croissant pour le phénomène de la gravitation quantique, une activité intense est

effectivement consacrée à une production possible des trous noirs à collisionneurs de particules [36, 37] et à très haute énergie de rayons cosmiques (UHECR) airshowers [38, 39]. La génération prochaine de collisionneurs de particules est prévue pour atteindre une énergie cm de l'ordre de quelques TeV, une échelle à laquelle l'évaporation complète de BH est susceptible d'être finie, laissant un BHR inerte avec le scénario du GUP. Ensuite, il est phénoménologiquement pertinent, pour obtenir les corrections apportées aux paramètres thermodynamiques du BH dans le cadre d'un GUP au-delà de l'ordre de premier plan dans la longueur de Planck.

Dans ce mémoire, nous examinons les effets apportés par la généralisation de la relation d'incertitude (GUP) à tous les ordres de la longueur de Planck, sur les paramètres thermodynamiques du trou noir de Schwarzschild. Pour cela, on décompose ce travail a trois chapitre. Dans le premier chapitre, on va donner une petite introduction à la relativité générale, Dans le deuxième chapitre, nous allons définir des lois de la thermodynamique des trous noires et le troisième chapitre qui est l'objectif de mon travail, se décompose a 2 parties :

Dans la première partie on a donnera un rappel de la mécanique quartique avec une relation d'incertitude généralisée et dans la deuxième partie nous étudierons la thermodynamique des trous noire en présence de la GUP.

# 1 Introduction a la Relativité Générale:

## 1.1 Les Principes Physiques:

La relativité générale est une théorie relativiste de l'interaction gravitationnelle, basée sur le principe de l'équivalence masse gravitationnelle-masse inertielle, qui permet de formuler toutes les autres lois de la physique, en présence d'un champ de gravitation. Cette théorie se base sur trois principes qui sont:

- a- *Le principe de Mach* cherche à dépasser le concept habituel d'espace et de temps absolus newtoniens. En effet, un mouvement est dit inertielle lorsqu'il est uniformément accéléré comparé à un référentiel absolu, postulé a priori de toute distribution de matière. Dans les pas de Mach, Einstein refusait par essence un tel postulat, et tenta de construire une théorie où géométrie et matière seraient intimement liés : la matière déterminerait la géométrie, et vice-versa. Ce principe est clairement incarné par la forme des équations, où à gauche est présente la géométrie, à droite la matière.
- b- Le principe d'équivalence postule l'égalité entre la masse inertielle  $m_i$ , qui intervient dans le Principe Fondamental de la Dynamique de Newton,  $m_i \vec{a} = \vec{F}$  la masse grave passive  $m_p$ , qui intervient dans l'expression de la force gravitationnelle ressentie par une particule ponctuelle massive dans un potentiel gravitationnel,  $\vec{F} = -m_p \vec{\nabla} \varphi$  et enfin la masse grave active  $m_a$ , qui intervient dans le potentiel gravitationnel crée par une masse ponctuelle  $\varphi = \frac{G m_a}{r}$ . Cette égalité, fortuite et non-nécessaire dans la théorie newtonienne, devient essentielle é la théorie einsteinienne, sans laquelle ni référentiels localement inertiels ni description cohérente de l'interaction géométrie-matière.
- c- Le principe de la covariance générale postule que les lois de la physique sont invariantes sous un changement de coordonnées. Tout observateur doit pouvoir localement déterminer les lois de la physique. En termes plus mathématiques, la structure tensorielle de la théorie est complétée par une invariance sous les difféomorphismes.

## 1.2 Equations d'Einstein :

Les équations d'Einstein sont la généralisation relativiste de l'équation de Newton. Dans le vide, il découle d'un principe variationnel dont l'action est :

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x \quad (1.1)$$

L'équation d'Einstein est dérivée à partir de la variation de l'action précédente par rapport à  $g^{\mu\nu}$  et elle est donnée par :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (1.2)$$

$g^{\mu\nu}$ : est le tenseur inverse de  $g_{\mu\nu}$ .

G : est la constante de Newton.

$G_{\mu\nu}$ : le tenseur d'Einstein.

En présence de la matière ou des champs dans l'espace, l'équation d'Einstein devient :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

$T_{\mu\nu}$  : est le tenseur énergie-impulsion de la matière. Il vérifie la condition de conservation de l'énergie:

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.4)$$

Les équations d'Einstein sont des équations non linéaires, qui expriment l'influence de la matière et des champs sur la géométrie de l'espace-temps [40].

## 2 Trous noirs:

### 2.1 Le trou noir neutre (Schwarzschild) :

#### 2.1.1 La métrique :

La géométrie d'un vide à symétrie sphérique, c'est à dire l'espace-temps vide en dehors du trou noir sphérique est la géométrie de Schwarzschild décrit en termes de la métrique:

:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.1)$$

avec :  $m = \frac{GM}{c^2}$  ou M est la masse de trou noir.

En absence de la matière ( $m = 0$ ), cette métrique devient celle de l'espace-temps de Minkowski en coordonnées sphériques:

$$ds^2_{Minkowski} = - dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.2)$$

Le même résultat s obtient quand  $r \rightarrow \infty$  (La métrique de Schwarzschild tend vers la métrique de l'espace-temps de Minkowski). On en traduit que la solution de Schwarzschild est asymptotiquement plate.

#### 2.1.2 Horizons et Singularités:

Comme nous savons, la solution d équation  $g_{00} = 0$  nous donne les expressions des horizons. En utilisant (2.1) :

$$1 - \frac{2m}{r} = 0 \Rightarrow r_s = 2m. \quad (2.3)$$

On remarque que les composantes de la métrique (2.1) sont singulières aux points :

$r = 0$  ( $g_{tt} \rightarrow \infty$ ) et  $r = 2m$  ( $g_{rr} \rightarrow \infty$ ), mais les invariants scalaires comme l invariant de Kretschmann:

$$R_{\alpha\beta\rho\sigma}R^{\alpha\beta\rho\sigma} = 48 \frac{m^2}{r^6} \quad (2.4)$$

divergent seulement au point  $r_s = 0$ , en effet:

$$\lim_{r \rightarrow 0} R_{\alpha\beta\rho\sigma}R^{\alpha\beta\rho\sigma} = \infty \quad (2.5)$$

$$\lim_{r \rightarrow 2m} R_{\alpha\beta\rho\sigma}R^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{1}{m^2} \quad (2.6)$$

La singularité  $r = 0$  existe dans tout système de coordonnées. On en déduit qu'elle est une vrais singularité, par contre, le point  $r = 2m$  est une singularité de coordonnées [41].

### 2.1.3 Coordonnées Kruskal:

Le comportement singulier de la métrique est resté un bon moment sans être expliqué de façon satisfaisante. En 1960 Kruskal a résolu le problème ou il a introduit des nouvelles coordonnées  $u$  et  $v$  par :

$$r \geq 2M \Rightarrow \begin{cases} u = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$r \leq 2M \Rightarrow \begin{cases} u = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{cases} \quad (2.8)$$

En introduit ces nouvelles variables dans la métrique (2.1), on obtient :

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{\left(-\frac{r}{2M}\right)} [dv^2 - du^2] + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.9)$$

avec:

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right) \quad (2.10)$$

La métrique (2.9) montre que la seule singularité est au point  $r=0$ . Donc  $r=2m$  représente une surface particulière appelée horizon d'événement et quand une particule traverse cette surface vers  $r=0$  ne peut plus en ressortir [40].

## 2.2 Le trou noir Chargé (Reissner-Nordström):

La solution de Reissner-Nordström représente est la solution pour une masse ponctuelle à symétrie sphérique de masse  $M$  et de charge électrique  $Q$ . La métrique est la solution des équations de Maxwell-Einstein :

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu} \\ F_{\nu}^{\mu\nu} &= 0 \\ F_{[\mu\nu;\lambda]} &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

où le tenseur d'énergie-impulsion est celui du champ électromagnétique produit par la charge  $Q$  :

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \quad (2.12)$$

avec:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \quad (2.13)$$

$F_{\mu\nu}$  : est une tenseur de champ électromagnétique.

$A_\mu$  : est une potentiel électromagnétique.

### 2.2.1 La Métrique :

Comme dans le cas de la solution de Schwarzschild, l'hypothèse de la symétrie sphérique simplifie l'expression de la métrique qui se réduit à la forme:

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\mu dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.14)$$

En remplaçant les composantes de cette métrique dans les équations de maxwell-Einstein, on obtient la solution de Reissner-Nordström donnée par:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.15)$$

Où  $M$  et  $Q$  sont respectivement la masse totale et la charge.

### 2.2.2 Horizons et Singularités :

Comme nous savons, l horizon est la solution de l équation  $g_{00}=0$  ou bien :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow r^2 - 2mr + Q^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pour  $m^2 < Q^2$  : il n'y a pas de racine, et cette espace-temps est une singularité nue et la métrique est parfaitement régulière partout sauf en  $r=0$  qui est une singularité nue.

Pour  $m^2 > Q^2$  : Il y deux racines  $r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2}$ . La racine externe à  $r_+$  est un horizon des événements, et la région à l'extérieur de celui-ci est statique et asymptotiquement plate. La région comprise les deux horizons ; intérieur et extérieur est de genre temps. Et si un observateur de tomber dans le trou doit traverser la zone intérieure, qui est semblable à l'espace nouveau.

Pour  $m=\pm q$  On a une double racine  $r_e = m_e$ . Le trou noir est appelé extrémal, mais il n'y a pas d'horizon des événements.

On remarque que les éléments de la métrique de Reissner-Nordström sont singuliers aux points  $r = 0$  et  $r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2}$ . Mais l invariant de courbure  $R_{\alpha\beta\rho\sigma}R^{\alpha\beta\rho\sigma}$  est fini sur tout l espace sauf au point  $r = 0$  ; ou on déduit que le point  $r = 0$  est une vrais singularité et  $r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2}$  sont des singularités de coordonnées.

## 2.3 Le trou noire neutre et en rotation(Kerr) :

### 2.3.1 Métrique de Kerr :

Le trou noir de Kerr est un trou noire neutre et en rotation, et il est axialement symétrique mais pas sphériquement. Cette solution des équations d'Einstein, découverte en 1963 par R. Kerr, n'était pas d'abord reconnue pour être une solution de trou noir. Cette métrique est

donnée, dans les coordonnées de Boyer-Lindquist qui sont une généralisation des coordonnées des Schwarzschild, par :

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{\rho^2}{\Delta}\right) dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(\frac{2Mr}{\rho^2}\right) (a \sin^2 \theta d\varphi - dt)^2 \quad (2.17)$$

avec:

$$\Delta = \Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (2.18)$$

$$\rho = \rho(r, \theta) = \sqrt{r^2 + (a \cos \theta)^2} \quad (2.19)$$

$a$  : Paramètre proportionnel au moment cinétique de l'étoile.

$M$  : la Masse de trou noir.

### 2.3.2 Coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes :

Il existe dans ce cas aussi des coordonnées qui restent régulières sur les horizons: on peut, par exemple, définir les nouvelles coordonnées  $v$  et  $\chi$  par:

$$dv = dt + \frac{r^2 - a^2}{\Delta} dr \quad (2.20)$$

$$d\chi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr \quad (2.21)$$

la métrique devient:

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dv^2 + 2dvdr - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho^2} dv d\chi - 2a \sin^2 \theta d\chi dr + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\chi^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (2.22)$$

Alors Cette métrique n'est pas singulière lorsque  $\Delta = 0$ .

### 2.3.3 Ergo sphère :

Une particularité de la métrique (2.21) de Kerr est que la surface sur laquelle  $g_{00}$  s'annule se distingue des horizons déventements. Cette surface est parfois appelée "limite statique" car, une fois à l'intérieur, aucune particule ne peut plus rester immobile. cas de Schwarzschild (resp. de Reissner-Nordström),  $g_{00}$  est nul sur l'horizon d'événements, en  $r = 2M$  (resp. en  $r = r_+$ ).

Dans le cas de Kerr, on a:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) = -\frac{1}{\rho^2} (r^2 - 2Mr + a^2 \csc^2 \theta) = -\frac{1}{\rho^2} (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)$$

$$r = r_+ \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow g_{00} \Big|_{r=r_+} = (\partial_t, \partial_t) \Big|_{r=r_+} = \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \geq 0 \quad (2.23)$$

$$r = r_{s\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \csc^2 \theta}$$

Les surfaces  $S_{\pm}$  sont invariantes par rotation autour de l'axe Oz:

$$S_+ \equiv \begin{cases} 2M & \theta = \frac{\pi}{2} \\ M + \sqrt{M^2 - a^2} & \theta = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

$S_+$  : est appelée limite statique.

$S_-$  : est complètement intérieure à  $S_+$ .

$r_+$  : est l'horizon externe.

$r_-$  : est l'horizon interne.

donc, l'ergosphère est une le volume compris entre la limite statique et l'horizon externe [41].

## 2.4 Le trou noir neutre (kerr-Newmann):

### 2.4.1 Métrique de Kerr-Newman:

Le trou noir de Kerr- Newman est un trou noire chargé et en rotation, et il est axialement symétrique mais pas sphériquement. Cette solution des équations d'Einstein, découverte en 1963 par R. Kerr, n'était pas d'abord reconnue pour être une solution de trou noir. Cette métrique est donnée, dans les coordonnées de Boyer-Lindquist qui sont une généralisation des coordonnées des Schwarzschild, par:

$$ds^2 = \left( \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) dct^2 + 2 \frac{\omega}{c} \varpi^2 dctd\phi - \varpi^2 d\phi^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2$$

avec:

$$\alpha = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{e^2}{r^2}$$

$$\Delta = a^2 + r^2 \alpha$$

$$\rho = (r^2 + a^2 \csc^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\square = [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta]^{\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

$$\varpi = \frac{\Sigma}{\rho} \sin \theta$$

Ce qui peut également s'écrire:

$$ds^2 = R^2 dct^2 - \varpi^2 \left( d\phi - \frac{\omega}{c} dct \right)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (2.26)$$

avec:

$$R = \left( \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varpi^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.27)$$

R : est le facteur de décalage vers le rouge gravitationnel.

### 2.4.2 Horizon et Singularités :

Comme nous savons, l'horizon est la solution de l'équation  $g_{00}=0$  ou bien :

$$\Delta = r^2 - \frac{2GM}{c^2}r + e^2 + a^2 = 0$$

$$r = r_{\pm} = \frac{GM}{c^2} + \left[ \left( \frac{GM}{c^2} \right)^2 - a^2 - e^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.28)$$

Le trou noir possède deux surfaces  $r_{\pm}$  en  $\Delta$  s'anile est appelées l'horizon des évènements Externe et interne pour choisir le cas  $\left( \frac{GM}{c^2} \right)^2 > a^2 + e^2$ .

### 2.4.3 L'ergosphère:

La région entre la limite statique et l'horizon des évènements externes est appelée l'ergo sphère, Les objets dans cette région tournent inexorablement dans le sens de rotation du trou noir de Kerr.

La vitesse angulaire de coordonnée égale à la vitesse de la lumière dans l'ergo sphère [42].

## 2.5 Thermodynamiques des Trous noirs :

La découverte par Hawking du rayonnement thermique des trous noirs a été une véritable surprise pour les principaux spécialistes, même si de nombreuses indications sur une relation entre la thermodynamique et la physique des trous noirs avaient émergé avant cette découverte Wheeler semble avoir été le premier à remarquer la contradiction entre l'existence des trous noirs dans la théorie classique de la gravitation et le principe de non décroissance de l'entropie. En effet, imaginons qu'un trou noir absorbe un corps chaud possédant une certaine entropie. Alors, un observateur extérieur constate une diminution de l'entropie totale du monde accessible à ses observations. Cette disparition peut être contournée formellement si l'on attribue au trou noir l'entropie du corps absorbé. En fait cette "solution" n'est manifestement pas satisfaisante puisque toute tentative d'un observateur extérieur de mesurer la quantité d'entropie absorbée par le trou noir est vouée à l'échec: dès l'absorption, le trou noir redevient stationnaire et perd complètement toute information (et donc l'entropie) sur le corps disparu.

Si l'on veut éviter de renoncer à ce principe fondamental de la thermodynamique, on doit en arriver à la conclusion qu'un trou noir possède par lui même une certaine entropie et qu'un corps chaud plongeant dans un trou noir ne lui transfère pas seulement sa masse, sa charge et son moment angulaire mais également sa propre entropie  $S$ , augmentant ainsi celle du trou noir d'au moins une telle quantité Bekenstein remarqua que les propriétés de lune des caractéristiques des trous noirs l'aire  $A$  ressemblent à celles de l'entropie puisque, d'après le théorème de l'aire de Hawking, l'aire  $A$  ne diminue dans aucun processus classique [43].

Bardeen Carter et Hawking formulèrent les quatre principes de la thermodynamique de la physique des trous noirs de façon similaire aux quatre principes de la thermodynamique usuelle.

Loi	Système thermodynamique	Trou noir
<b>La loi zéro</b>	Sur un corps, T est constante en équilibre thermique	$\kappa$ est constante à l'intérieur du trou noir
<b>première loi</b>	$dE = T dS + p dV + \mu dN$	$dM = dA + -dJ + \odot dQ$
<b>Deuxième loi</b>	$dS \geq 0$	$dA \geq 0$
<b>Troisième loi</b>	. $T=0$ ne peut pas être atteint	$\kappa=0$ ne peut pas être atteint

### 2.5.1 Le Principe Zéro :

*La surface de gravité d'un trou noir stationnaire est constante sur toute la surface de l'horizon.*

L'analogie de cette loi est que la température d'un corps en équilibre thermique est constante. La relation entre la gravité de surface  $\kappa$  et la température d'un trou noir  $T_h$  est donnée par :

$$T_h = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (2.29)$$

$\kappa$  : est La gravité de surface d'un trou noir :

Pour le cas de trou noir de Schwarzschild, où  $\kappa = \frac{1}{4GM}$ , la température Hawking devient:

$$T_h = \frac{\hbar}{8\pi G k_B M} \approx 6,2 \cdot 10^{-8} \frac{M_\odot}{M} \text{ K} \quad (2.30)$$

Pour un trou noir de Reissner-Nordström l'expression de la température de Hawking est :

$$T_h = \frac{\hbar \kappa}{2\pi k_B} = 2 \left(1 - \frac{Q^4}{r_+^4}\right)^{-1} \frac{\hbar}{8\pi M k_B} < \frac{\hbar}{8\pi M k_B} \quad (2.31)$$

On remarque que la charge électrique permet également de réduire la température de Hawking. Comme conclusion, on peut affirmer que le rayonnement Hawking ne joue aucun rôle dans le cas des grands trous noirs [44].

Pour un trou noir de Kerr l'expression de la température de Hawking est:

$$T_h = \frac{\hbar \kappa}{2\pi k_B} = 2 \left(1 + \frac{M}{\sqrt{M^2 - a^2}}\right)^{-1} \frac{\hbar}{8\pi M k_B} < \frac{\hbar}{8\pi M k_B} \quad (2.32)$$

### 2.5.2 Le Premier principe :

Lorsqu' un système contenant un trou noir passe d'un état stationnaire à un autre, sa masse change comme :

$$dM = \frac{\kappa}{2\pi} dA + \text{terme de travail} \quad (2.33)$$

ou

$$dM = TdS + \text{terme de travail} \quad (2.34)$$

On remarque que cette loi est analogue avec la première loi de la thermodynamique [41] :

$$dE = TdS + \text{terme de travail} \quad (2.35)$$

Et l'entropie du trou noir est donc représentée par un quart de la superficie de l'horizon, c'est-à-dire :

$$S = \frac{A}{4} \quad (2.36)$$

Pour un trou noir de Kerr-Newman :

$$dM = \frac{\kappa}{2\pi} dA + \Omega dJ + \phi dQ \quad (2.37)$$

$M$  : la masse de trou noir.

$A$  : l'aire de l'horizon d'événement.

$\Omega$  : la vitesse angulaire du trou noir telle que.

$$\Omega = \frac{\partial M}{\partial J} \quad (2.38)$$

$\phi$  : le potentiel électrique associé telle que.

$$\phi = \frac{\partial M}{\partial Q} \quad (2.39)$$

$J$  : le moment angulaire du trou noir.

$Q$  : la charge électrique du trou noir [45].

### 2.5.3 Le deuxième principe :

Dans n'importe quel processus classique, l'aire du trou noir  $A$  et par conséquent son entropie  $s_h$  ne diminuent pas.

$$\Delta s_h \geq 0 \quad (2.40)$$

Cette deuxième loi correspond au théorème de l'aire qui est le pendant du deuxième principe de la thermodynamique. Ce théorème dit que l'aire  $A$  de l'horizon des événements d'un trou noir ne peut jamais décroître dans le temps.

$$dA \geq 1 \quad (2.41)$$

L'entropie généralisée de l'Univers est :

$$S' = S_{hB} + S_m \quad (2.42)$$

$S'$  : est L'entropie généralisée.

$S_{hB}$ : est l'entropie Hawking- Bekenstein de trou noir.

$S_m$  : L'entropie de la matière Qui est entré à la surface de trou noir [44].

La Solution de Bekenstein (1973,1974) : tout trou noir possède une entropie et cette dernière est proportionnelle à son aire :

$$S_{bh} = k\alpha \frac{A}{L_{pl}^2} \quad (2.43)$$

un trou noir rayonne comme un corps noir à une température  $T$  ce phénomène est appelé la radiation d'Hawking. Ce qui permet ainsi de fixer la constante  $\alpha$  introduite précédemment et d'associer une entropie  $S$  au trou noir :

$$S_{bh} = \frac{A}{4} \quad (2.44)$$

Calcule l'entropie du trou noir de Schwarzschild est :

$$S_{hB} = \frac{k_B A}{4Gh} = \frac{k_B \pi R_S^2}{Gh} \quad (2.45)$$

$k_B$  : est la constante de Boltzmann [44].

#### 2.5.4 Le troisième principe :

La troisième loi exprime l'inaccessibilité du zéro absolu : elle dit qu'il est impossible de baisser la température d'un système à  $T = 0$  en un nombre fini de processus physique. Sa traduction devrait être qu'il est impossible de réaliser  $\kappa = 0$  en un nombre fini de tapes [41]. Et plus forte a été proposée par Planck l'entropie de tout système tend vers une constante absolue qui peut être prise a zéro quand  $T$  tend vers 0, Barden Carter et Hawking formulèrent l'analogie du troisième principe pour les trous noirs de la manière suivante: Il est impossible quelle que soit la procédure de réduire la température d'un trou noir a zéro en une séquence finie d'opérations [43]

### 3 Thermodynamiques des Trous noirs avec Principe d'incertitude généralisée (GUP)

#### 3.1 Mécanique Quantique avec une Relation d'Incertainité Généralisée GUP:

##### 3.1.1 Longueur minimale :

Le concept de longueur minimale n'est pas nouveau en physique. Il a été introduit en particulier en relation avec le problème fondamental de la physique moderne, à savoir l'unification des interactions gravitationnelles et des interactions fortes, électromagnétiques et faibles. Cette longueur minimale est supposée être proche de la longueur de Planck ( $L_{Pl} \approx 10^{-33} cm$ ).

Le concept de longueur élémentaire est aussi apparu dans le contexte de la théorie des cordes, candidate à l'unification des interactions fondamentales. Dans ce contexte, des études récentes en théorie des cordes et en théorie de la gravitation quantique proposent des petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg qui impliquent une incertitude minimale non nulle  $(\Delta X)_{min}$  sur la position correspondant à cette longueur élémentaire. Cette incertitude minimale peut être vue comme étant une conséquence du caractère "flou" (fuzzy) de l'espace temps à des échelles de distances de l'ordre de la longueur de Planck ou aussi comme une limite naturelle exprimant la nature non ponctuelle des particules élémentaires.

Plus récemment, plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude de l'effet de la longueur élémentaire sur la thermodynamique des trous noirs. Il a été montré en particulier que la longueur minimale, qui serait de l'ordre de la longueur de Planck, empêche les trous noirs de s'évaporer totalement [46].

##### 3.1.2 La relation de dispersion :

On suppose une relation  $p = f(k)$  ou  $p$  et  $k$  représentent respectivement l'impulsion et la vecteur d'onde telle que :

$$\frac{\partial p}{\partial K} = \hbar \exp(\eta p^2) \quad (3.1)$$

avec  $\eta = \frac{\alpha^2 L_{Pl}^2}{\hbar^2}$  :

$\eta$  : La longueur minimale.

L'intégration de cette relation nous donne la relation de dispersion donnée par:

$$\begin{aligned} k(p) &= \frac{1}{\hbar} \int_0^p dp \exp\left(-\frac{\alpha^2 L_{Pl}^2}{\hbar^2} p^2\right) \\ k(p) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha L_{Pl}} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha L_{Pl}}{\hbar} p\right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$\alpha$  : est une constante.

En utilisant cette relation on obtient longueur d'onde Compton minimale donnée par :

$$\lambda_0 = 4\sqrt{\pi} \alpha L_{Pl} \quad (3.3)$$

### 3.1.3 Le commutateur modifié :

Supposant que le commutateur entre  $X$  et  $k$  garde la forme standard, c'est-à-dire  $[X, k] = i\delta_{ij}$  et utilisant la relation générale :

$$[X, A(k)] = i \frac{\partial A}{\partial k} \quad (3.4)$$

on obtient la relation de commutation définissant l'algèbre de Heisenberg modifiée:

$$[X, P(k)] = i \frac{\partial P}{\partial k} \quad (3.5)$$

La relation (3.4) Alors on trouve :

$$[X, P(k)] = i\hbar \exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} P^2\right) \quad (3.6)$$

### 3.1.4 La représentation $\hat{X}$ et $\hat{P}$ :

On peut trouver une représentation de  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  qui vérifie la relation de commutation modifiée (3.6) La réalisation la plus simple s'écrit :

$$\hat{X} = \exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} P^2\right) \hat{x} \quad , \quad \hat{P} = \hat{p} \quad (3.7)$$

avec  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  satisfaisant la relation de commutation canonique :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (3.8)$$

Où l'on a :

$$\hat{X}\psi(p) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi(p) \quad , \quad \hat{P}\psi(p) = p\psi \quad (3.9)$$

Alors  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  s'écrivent explicitement :

$$\hat{X} = i\hbar \exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} P^2\right) \partial_p \quad , \quad \hat{P} = \hat{p} \quad (3.10)$$

### 3.1.5 Produit scalaire et relation de fermeture modifiée :

La condition la plus importante que doit satisfaire la représentation (3.10), est la préservation de la symétrie des opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  pour que leurs valeurs propres soient réelles. Du moment que  $\hat{P}$  n'est pas modifié, alors sa symétrie est évidente ; il n'en est pas le cas pour l'opérateur  $\hat{X}$ . En effet, la condition de symétrie s'écrit :

$$\langle (\psi | \hat{X}) | \varphi \rangle = \langle \psi | (\hat{X} | \varphi) \rangle \quad (3.11)$$

Pour que l'opérateur  $\hat{X}$  soit symétrique, il faut modifier le produit scalaire de la façon suivante:

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2\right)} \psi^*(p) \varphi(p) \quad (3.12)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \langle \psi | (\hat{X} | \varphi) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2\right)} \psi^*(p) \left[ i\hbar \exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2\right) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p) \right] \\ &= i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^*(p) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^*(p) \varphi(p) - i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left( \frac{\partial}{\partial p} \psi^*(p) \right) \varphi(p) \end{aligned}$$

Sachant que  $\psi(p)$  et  $\varphi(p)$  sont nulles à l'infini, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \psi | (\hat{X} | \varphi) \rangle &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left( \frac{\partial}{\partial p} \psi^*(p) \right) \varphi(p) \quad (3.13) \\ \langle (\square | \hat{X}) | \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2\right)} \left[ i\hbar \exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2\right) \frac{\partial}{\partial p} \square(p) \right]^* \varphi(p) \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left( \frac{\partial}{\partial p} \square^*(p) \right) \varphi(p) \end{aligned}$$

(3.14)

La comparaison entre (3.13) et (3.14) montre que,  $\hat{X}$  est symétrique par rapport au produit scalaire.

La modification du produit scalaire implique une nouvelle relation de fermeture; celle-ci devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2\right)} |p\rangle \langle p| = 1 \quad (3.15)$$

En insérant cette dernière relation dans le produit scalaire de deux vecteurs propres de l'opérateur impulsion, on obtient :

$$\langle p'' | p' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2\right)} \langle p'' | p \rangle \langle p | p' \rangle$$

Pour :

$$p'' = p \Rightarrow \langle p'' | p \rangle = 1$$

$$\langle p | p' \rangle = \delta(p - p')$$

On en déduit, immédiatement, la nouvelle relation d'orthogonalité:

$$\langle p'' | p' \rangle = \exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} p^2\right) \delta(p - p') \quad (3.16)$$

### 3.1.6 La relation d'incertitude généralisée :

En mécanique quantique, la relation de commutation est reliée directement à la relation d'incertitude à travers la formule :

$$(\delta A)(\delta B) = \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \quad (3.17)$$

Ce qui donne :

$$(\delta X)(\delta P) = \frac{1}{2} |\langle \partial \hat{P} / \partial K \rangle|$$

$$= \frac{\hbar}{2} \langle \exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} P^2\right) \rangle \quad (3.18)$$

En utilisant les propriétés  $\langle P^{2n} \rangle \geq \langle P \rangle^{2n}$  et  $(\delta P)^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2$  . on obtient :

$$(\delta X)(\delta P) = \frac{\hbar}{2} \exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} (\langle P^2 \rangle + \langle P \rangle^2)\right) \quad (3.19)$$

prendre la place de cette expression que nous obtenons :

$$W(u) e^{W(u)} = u \quad (3.20)$$

Avec :

$$W(u) = -2 \frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} \delta P^2 \quad (3.21)$$

$$u = -\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{2(\delta x)^2} e^{-2 \frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} \langle P \rangle^2} \quad (3.22)$$

L'équation (3.20) est définit la fonction de Lambert, telle que pour  $0 \geq u \geq -\frac{1}{e}$  : cette équation (3.20) possède deux solutions réelles est  $W_0(u)$  et  $W_{-1}(u)$ .

Pour  $u \geq 0$  : l'équation (3.20) possède une seule solution réelle est  $W_0(u)$  .

Pour  $-\infty < u < -\frac{1}{e}$  : l'équation (3.20) n'pas des solutions réelles.

La relation d'incertitude correspondante est :

$$(\delta X)(\delta P) = \frac{\hbar}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}W(u) + \frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} \langle P \rangle^2\right) \quad (3.23)$$

Dans l'équation (3.21) et (3.22) on a trouve l'incertitude minimale d'impulsion est :

$$(\delta X)(\delta P) = \frac{\hbar}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}W(u) + \frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} \langle P \rangle^2\right)$$

Alors :

$$(\delta P) = \frac{\hbar e^{\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} \langle P \rangle^2}}{2(\delta X)} \exp\left(-\frac{1}{2}W\left(-\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{2(\delta x)^2} e^{2\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} \langle P \rangle^2}\right)\right) \quad (3.24)$$

Ensuite, à partir de l'argument de la fonction de Lambert dans l'équation (3.24) .nous avons la condition suivante :

$$\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{2(\delta x)^2} e^{2\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} \langle P \rangle^2} \leq \frac{1}{e} \quad (3.25)$$

On a:

$$\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{2(\delta x)_{min}^2} e^{2\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} \langle P \rangle^2} = \frac{1}{e}$$

$$(\delta x)_{min} = \sqrt{\frac{e}{2}} \alpha L_{pl} e^{\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} \langle P \rangle^2} \quad (3.26)$$

$(\delta x)_{min}$ : est une l'incertitude minimale de la position.

Avec :  $\langle P \rangle = 0$

$$\text{Alors : } (\delta X)_0 = \sqrt{\frac{e}{2}} \alpha L_{pl} \quad (3.27)$$

$(\delta X)_0$  : est une longueur minimale non nulle.

Donc l'incertitude minimale d'impulsion est :

$$\delta P = \frac{\hbar e^{\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} \langle P \rangle^2}}{2\delta X} \exp\left(-\frac{1}{2}W\left(-\frac{2}{e} \frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{2(\delta x)^2} e^{2\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} \langle P \rangle^2}\right)\right)$$

$$\delta P = \frac{\hbar e^{\frac{\alpha^2 L_{pl}^2 \langle P \rangle^2}{\hbar^2}}}{2\delta X} \exp\left(-\frac{1}{2} W\left(-\frac{1}{e} \left(\frac{(\delta X)_0}{(\delta X)}\right)^2 e^{2\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} \langle P \rangle^2}\right)\right)$$

Avec :  $\langle P \rangle = 0$

$$\text{Donc : } \delta P = \frac{\hbar}{2\delta X} \exp\left(-\frac{1}{2} W\left(-\frac{1}{e} \left(\frac{(\delta X)_0}{(\delta X)}\right)^2\right)\right) \quad (3.28)$$

En utilisant le développement :

$$\delta P \simeq \frac{\hbar}{2\delta X} \left(1 + \frac{1}{2e} \left(\frac{(\delta X)_0}{\delta X}\right)^2 + \frac{5}{8e^2} \left(\frac{(\delta X)_0}{\delta X}\right)^4 + \frac{49}{48e^3} \left(\frac{(\delta X)_0}{\delta X}\right)^6 + \dots\right) \quad (3.29)$$

L'expression (3.29) contient seulement les variables  $\delta X$ , cette expression permet la compatibilité avec l'analyse moderne de la théorie de la gravitation quantique à boucle et la théorie des cordes qui est la théorie principale d'étudier la quantité de gravitation :

Après un calcul simple, on trouve  $(\delta X)_0$  :

$$\delta P \delta X \geq \frac{\hbar}{2} \langle \exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} P^2\right) \rangle$$

$$(\delta P)^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2$$

(3.30)

$$\delta P \delta X \geq \frac{\hbar}{2} \exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} ((\delta P)^2 + \langle P \rangle^2)\right)$$

Pour :  $\langle P \rangle = 0 \Rightarrow \delta P \neq 0$

$$\delta P \delta X \geq \frac{\hbar}{2} \exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} (\delta P)^2\right)$$

Pour :  $\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} (\delta P)^2\right) \sim 0 \Rightarrow \exp\left(\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} (\delta P)^2\right) \approx 1 + \frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} (\delta P)^2$

Alors l'équation devient :

$$\delta P \geq \frac{\hbar}{2\delta X} \left(1 + \frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar^2} (\delta P)^2\right) \quad (3.31)$$

Pour un  $(\delta X)$  fixe, l'inégalité (3.31) est satisfaite dans l'intervalle  $[\delta P_-, \delta P_+]$  alors calcule  $(\delta X)_0$  comme suit :

$$-\frac{\alpha^2 L_{pl}^2}{\hbar} (\delta P)^2 + 2\delta X \delta P - \hbar \geq 0$$

$$\delta P_{\pm} = \frac{\hbar \left( -2\delta X \pm \sqrt{(2\delta X)^2 - 4\alpha^2 L_{pl}^2} \right)}{-2\alpha^2 L_{pl}^2}$$

La plus petite valeur de,  $\delta X$  est celle qui correspond à une racine double, c.-à-d  $\delta P_- = \delta P_+$ , soit :

$$\frac{\hbar \left( -2\delta X + \sqrt{(2\delta X)^2 - 4\alpha^2 L_{pl}^2} \right)}{-2\alpha^2 L_{pl}^2} = \frac{\hbar \left( -2\delta X - \sqrt{(2\delta X)^2 - 4\alpha^2 L_{pl}^2} \right)}{-2\alpha^2 L_{pl}^2}$$

$$2\sqrt{(2\delta X)^2 - 4\alpha^2 L_{pl}^2} = 0$$

$$(\delta X)_0 = \alpha L_{pl} \quad (3.32)$$

### 3.2 Thermodynamiques :

#### 3.2.1 Les corrections à la température de Hawking standard :

Examinons donc les corrections apportées aux expressions ci-dessus en raison de la GUP. Suite à l'argument heuristique de Bekenstein nous avons :

$$T_H \approx \frac{\delta P}{2\pi} \quad (3.33)$$

en utilisant l'équation. (3.28), on obtient les corrections à la température de Hawking Donnée par :

$$T_H = \frac{1}{8\pi M L_{pl}^2} \exp \left( -\frac{1}{2} W \left( -\frac{1}{e} \left( \frac{(\delta M)_0}{(\delta M)} \right)^2 \right) \right) \quad (3.34)$$

En substituant  $r_h = (\delta X)_0 = \sqrt{\frac{e}{2}} \alpha L_{pl}$  et  $M_0 = \frac{\alpha \sqrt{e}}{2\sqrt{2}} M_{pl}$  dans l'équation (3.34), nous obtenons la température maximale du trou noir donnée par :

$$T_h^{max} = \frac{T_{pl}}{2\pi\sqrt{2}\alpha} \quad (3.35)$$

les corrections à la température standard de Hawking sont obtenues en développant l'expression (3.34) en termes de  $\frac{1}{e} \left( \frac{M_0}{M} \right)$  .en effet, nous obtenons :

$$T_H \approx \frac{1}{8\pi M L_{pl}^2} \left( 1 + \frac{1}{2e} \left( \frac{M_0}{M} \right)^2 + \frac{5}{8e^2} \left( \frac{M_0}{M} \right)^4 + \frac{49}{48e^3} \left( \frac{M_0}{M} \right)^6 + \dots \right) \quad (3.36)$$

Il est très intéressant d'inverser l'expression (3.36) et écrire la masse du trou noir en fonction de la température :

$$M = \frac{1}{8\pi T_H L_{pl}^2} \exp \left( \frac{1}{2} \left( \frac{T_H}{T_H^{max}} \right)^2 \right) \quad (3.37)$$

cette relation montre que pour des températures supérieures à la  $T_{max}$ , la masse du trou noir augmente avec l'augmentation de la température.

### 3.2.2 Les corrections de l'entropie de Hawking-Bekenstein standard :

Nous passons maintenant au calcul de l'entropie micro-canonique d'un grand trou noir .dans le cas standard, l'entropie est proportionnelle dans l'air du trou noir .comme résultat de la découverte heuristiques de Bekenstein, l'aire minimale d'un trou noir qui absorbe une particule classique d'énergie E et la rayon R est donné par :

$$(\Delta A)_0 \approx 4L_{pl}^2 (\ln 2) ER \quad (3.38)$$

Au niveau de la mécanique quantique, la rayon et l'énergie de la particule doivent vérifies :

$$R \sim 2\delta X, \quad E \sim 2\delta P, \quad (3.39)$$

Alors on trouve :

$$(\Delta A)_0 \approx 8L_{pl}^2 (\ln 2) \delta X \delta P \quad (3.40)$$

L'extension de cette approche au cas GUP et en utilisant des considérations de géométrie a l'entourage de le horizon , nous obtenons :

$$(\Delta A)_0 \approx 4L_{pl}^2 \ln 2 \exp \left( -\frac{1}{2} W \left( -\frac{1}{e} \frac{A_0}{A} \right) \right) \quad (3.41)$$

Où

$$A = 4\pi(\delta x)^2 \text{ et } A_0 = 4\pi(\delta x)_0^2 \quad (3.42)$$

Où  $A$  et  $A_0$  sont respectivement l'aire et l'aire minimale de trou noir. A l'aide du facteur de Bekenstein pour la variation minimale de l'entropie :

$$(\Delta S)_0 = \ln 2 \quad (3.43)$$

On a:

$$\frac{dS}{dA} \simeq \frac{(\Delta S)_0}{(\Delta A)_0} = \frac{1}{4L_{pl}^2} \exp\left(\frac{1}{2} W\left(-\frac{1}{e} \frac{A_0}{A}\right)\right) \quad (3.44)$$

Avant d'intégrer sur  $A$  nous notons que l'existence d'une aire minimale impose de régler la limite inférieure de l'intégration  $A_0$ , Donc :

$$S \simeq \frac{1}{4L_{pl}^2} \int_{A_0}^A \exp\left(\frac{1}{2} W\left(-\frac{1}{e} \frac{A_0}{A}\right)\right) dA \dots \quad (3.45)$$

La formule  $e^{\frac{W(x)}{2}} = \sqrt{\frac{x}{W(x)}}$  nous permet d'écrire (3.45) comme :

$$S = \frac{A_0}{4L_{pl}^2} \text{pv} \int_{-\frac{1}{e}}^{-\frac{1}{e} \frac{A_0}{A}} y^{-\frac{3}{2}} [W(y)]^{-\frac{1}{2}} dy \quad (3.46)$$

Où PV, la valeur d'intégration de principale de Cauchy. En imposant  $y = -\frac{1}{e} \frac{A_0}{A}$  et en intégrant (3.46), on obtient l'expression de l'entropie corrigée par la GUP :

$$S = \frac{A_0}{8eL_{pl}^2} \left\{ EI\left(-\frac{1}{2} W\left(-\frac{1}{e} \frac{A_0}{A}\right)\right) - 2 \left(-\frac{1}{e} \frac{A_0}{A} W\left(-\frac{1}{e} \frac{A_0}{A}\right)\right)^2 - 2\sqrt{e} - EI\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \quad (3.47)$$

Avec  $Ei$ : est la fonction exponentielle.

L'expansion de (3.47) en fonction de paramètre  $\left(\frac{A_0}{eA}\right)$ , est donnée par :

$$S = \left\{ \frac{A}{4L_{pl}^2} - \frac{A_0}{8eL_{pl}^2} \ln \frac{A_0}{A} + \frac{3\pi\alpha^2}{16e} \left( \frac{A_0}{A} \right) + \frac{25\pi\alpha^2}{192e^2} \left( \frac{A_0}{A} \right)^2 + \frac{343\pi\alpha^3}{2304e^3} \left( \frac{A_0}{A} \right)^3 + \dots + C \right\} \quad (3.48)$$

C : est une constante et donnée par :

$$c = \frac{A_0}{8L_{pl}^2} \left\{ \gamma - 1 - \ln(2e) - 2\sqrt{e} - \text{Ei} \left( \frac{1}{2} \right) \right\} \simeq -4.60 \frac{\alpha^2}{L_{pl}^2} \quad (3.49)$$

$\gamma$  est la constante d'Euler.

On remarque que on a trouve la même correction logarithmique avec un signe négatif obtenue par autres approches comme la théorie des cordes, la gravitation quantique à boucles et le modèles effectif avec GUP ou MDR.

En introduisant  $\rho = -\frac{\pi\alpha^2}{4}$  et  $\beta = \frac{3\pi^2\alpha^2}{8}$  dans (3.36) et (3.48), on obtient :

$$T_H = \frac{M_{pl}^2}{8\pi M} \left[ 1 - \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{M_{pl}}{M} \right)^2 + \frac{\rho^2 + \frac{\beta}{4}}{16\pi^2} \left( \frac{M_{pl}}{M} \right)^4 \right] \quad (3.50)$$

$$S = \frac{A}{4L_{pl}^2} + \rho \ln \frac{A}{L_{pl}^2} + \frac{\beta L_{pl}^2}{A} \quad (3.51)$$

Ces expressions son exactement la température  $T_H$  et l'entropie  $S$  obtenues par la théorie de la gravitation quantique à boucles et aussi par l'approche de la gravitation quantique de la théorie des cordes [47].

## **Conclusion :**

Dans ce mémoire nous avons étudié la thermodynamique du trou noir de Schwarzschild en présence des distances minimales. Pour cela, nous avons décomposé cette mémoire en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, qui est une petite introduction à la relativité générale, nous avons rappelé les principes physiques de la relativité générale et aussi on a dérivé les équations d'Einstein à partir de l'action.

Dans le deuxième chapitre, nous avons donné une bonne explication des lois de la thermodynamique des trous noirs. Et comme application, nous avons étudié le cas de trou noir de Schwarzschild.

Le troisième chapitre qui est l'objectif de mon travail, se décompose en 2 parties :

Dans la première partie on a donné un rappel de la mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée.

Dans la deuxième partie nous avons étudié comment les paramètres de la thermodynamique des trous noirs sont affectés par un GUP à tous les ordres de la longueur de Planck. Nous avons obtenu les expressions analytiques exactes de la température Hawking et l'entropie. Nous avons constaté particulièrement qu'un trou noir d'une masse inférieure à la masse minimale n'existe pas. L'existence d'une échelle d'énergie inférieure à l'échelle de Planck nous a permis de calculer, à l'ordre de premier plan, les écarts par rapport à la loi standard de Stefan-Boltzmann. Par souci d'exhaustivité, nous avons également comparé nos résultats avec les résultats semi-classiques et les prédictions de la GUP à l'ordre dominant dans la longueur de Planck. En particulier, nous avons montré que l'entropie dans notre cadre est plus petite que l'entropie dans un cas à la norme et avec GUP.. D'autre part, nous avons constaté que les prédictions de la GUP à tous les ordres de la longueur de Planck et la GUP à l'ordre de premier plan dans la longueur de Planck, concernant l'entropie, deviennent différentes pour des effets gravitationnels forts et une grande masse des trous noirs, suggérant une enquête plus approfondie de la thermodynamique de l'univers précoce dans le cadre de la GUP sur tous les ordres de la longueur de Planck. Concernant le travail futur, nous allons examiner les effets de la GUP à tous les ordres de la longueur de Planck sur la thermodynamique des trous noirs dans un scénario avec des dimensions supplémentaires.

## Bibliographie :

- [1] G. Veneziano, *Europhys. Lett.* 2, 199 (1986).
- [2] E. Witten, *Phys. Today*, Apr. 24 (1996).
- [3] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano, *Phys. Lett. B* 216, 41 (1989); *Nucl. Phys. B* 347, 550 (1990); *Nucl. Phys. B* 403, 707 (1993).
- [4] K. Konishi, G. Paffuti and P. Provero, *Phys. Lett. B* 234, 276 (1990).
- [5] L. J. Garay, *Int. J. Mod. Phys. A* 10, 145(1995).
- [6] M. Maggiore, *Phys. Rev. D* 49, 5182 (1994) [hep-th/9305163]; *Phys. Lett. B* 319, 83(1993) [hep-th/9309034].
- [7] A. Kempf, G. Mangano and R.B. Mann, *Phys. Rev. D* 52, 1108 (1995) [hep-th/9412167].
- [8] A. Kempf and G. Mangano, *Phys. Rev. D* 55, 7909 (1997).
- [9] M. Maggiore, *Phys. Lett. B* 304, 65 (1993) [hep-th/9301067].
- [10] F. Scardigli, *Phys. Lett. B* 452, 39 (1999) [hep-th/9904025].
- [11] B. Bolen and M. Cavaglia, *Gen. Rel. Grav.* 37, 1255 (2005) [gr-qc/0411086]
- [12] A. J. M. Medved and E. C. Vagenas, *Phys. Rev. D* 70, 1240(2004).
- [13] A. J. M. Medved, *Class. Quant. Grav.* 22, 133(2005).17
- [14] G. Gour and A. J. M. Medved, *Class. Quant. Grav.* 20, 3307(2003).
- [15] K. Nozari and T. Azizi, *Int. J. Quant. Inf.* 3, 623(2005) [gr-qc/0504090]
- [16] G. A. Amelino-Camelia, M. Arzano, Y. Ling and G. Mandanici, *Class. Quant. Grav.* 23, 2585 (2006) [gr-qc/0506110].
- [17] R. J. Adler, P. Chen, D. I. Santiago, *Gen. Rel. Grav.* 33, 2101 (2001) [arXiv:gr-qc/0106080].
- [18] P. Chen, *New Astron. Rev.* 49, 233(2005).
- [19] P. Chen and R. J. Adler, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 124, 103 (2003)[gr-qc/0205106]
- [20] K. Nozari and A. S. Sefiedgar, *Phys. Lett. B* 635, 156(2006) [gr-qc/0601116] .
- [21] A. J. M. Medved and E. C. Vagenas, *Phys. Rev. D* 70 , 124021(2004).
- [22] A. Chatterjee and P. Majumdar, *Phys. Rev. Lett.* 92, 141301(2004).
- [23] R. K. Kaul and P. Majumdar, *Phys. Rev. Lett.* 84, 5255 (2000).
- [24] G. A. Camellia, M. Arzano and A. Procaccini, *Phys. Rev. D* 70, 107501(2004).
- [25] A. Chatterjee and P. Majumdar, *Phys. Rev. D* 71, 024003(2005).
- [26] Y. S. Myung, *Phys. Lett. B* 579, 205(2004).
- [27] M. M. Akbar and S. Das, *Class. Quant. Grav.* 21, 1383(2004).
- [28] S. Das, *Class. Quant. Grav.* 19, 2355 (2002).
- [29] S. Hod, *Class. Quant. Grav.* 21, L97 (2004).
- [30] A. J. M. Medved, *Class. Quant. Grav.* 22, 133 (2005).
- [31] A. J. M. Medved, *Class. Quant. Grav.* 22, 5195 (2005).
- [32] A. J. M. Medved and E. C. Vagenas, *Mod. Phys. Lett. A* 20, 1723 (2005).
- [33] G. Gour and A. J. M. Medved, *Class. Quant. Grav.* 20, 3307(2003).
- [34] L. Alejandro Correa-Borbonet, *Braz. J. Phys.* 35, 1145(2005).
- [35] Y. Ko, S. Lee and S. Nam, *Tests of Quantum Gravity via Generalized Uncertainty Principle*, [hep-th/0608016 v2].
- [36] <http://lhc-new-homepage.web.cern.ch/lhc-new-homepage>.
- [37] [http://www.fnal.gov/projects/muon collider](http://www.fnal.gov/projects/muon%20collider).
- [38] J. L. Feng and A. D. Shapere, *Phys. Rev. Lett.* 88, 021303 (2002).

- [39] M. Cavagli'a, Int. J. Mod. Phys. A 18, 1843 (2003).
- [40] Habiba bouhallouf, etude des proprietes des trous noirs du type kerr topologiquement, le :21/06/ 2005.
- [41] Christiane Schomblond, Eléments de la Théorie classique des Trous Noirs, Université Libre de Bruxelles, Février-Mars 2003.
- [42] D. Waite, Trous Noirs en rotation chargés et leur thermodynamique.
- [43] Gaelle Boudoul, Trous noirs primordiaux , l'Université Joseph Fourier, Septembre2003.
- [44] Narit Pidokrajt, Black Hole Thermodynamics, Department of Physics 2003.
- [45] Yannis Bardoux, Trous noirs dans des théories modifiées de la gravitation, l'université paris-sud le 24 septembre 2012.
- [46] Djamil Bouaziz ,Mécanique quantique avec un principe d'incertitude généralisé Universitaire Wallonie-Europe Juin 2009.
- [47] Khireddine Nouicer, Quantum-corrected black hole thermodynamics to all orders in the Planck length, University of Jijel Apr 2007.