



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématiques et numérique

Thème

Sur la solution numérique des équations intégrales de Volterra-
Fredholm en utilisant les polynômes de Chebyshev

Présenté par:

NADIR Mohamed Nasseh

Soutenu publiquement le: 27/06/2022.

Devant le jury composé de:

GAGUI Bachir

DJAIDJA Noui

DILMI Mustapha

Prof,

M.C.B,

M.C.A,

Université de M'sila

Université de M'sila

Université de M'sila

Président:

Encadreur:

Examineur:

Année universitaire 2021/202

Remerciements

Je remercie **ALLAH**, qui m'a donné la force, la santé et la volonté de commencer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de professeur **DJAIDJA Noui** je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant mon préparation de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements à Mon père le professeur **Mostefa NADIR** Qui m'a aidé dans ce travail

J'adresse mes sincères remerciements à Messieurs les professeurs **GAGUI Bachir** et **DILMI Mustapha** qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce mémoire.

Enfin, je remercie tous mes amis de près ou de loin, et je voudrais mentionner ma collègue **MESSLMI FATIMA** et les étudiants de ma promotion de spécialité

Analyse Mathématique et Numérique

Dédicace

Je dédie ce travail à la mémoire de mes chères grands-mères **HOURIA & WARDA** sans oublier mon cher grand-père **NADIR MOHAMED**

Ensuite, à mes chers parents **NADIR MOSTEFA** et **AMROUNE FELLA**, je ne saurais trop vous dire merci pour vos conseils, votre soutien et vos encouragements.

et pour vos prières qui m'ont accompagné tout le long de mes études. Ce travail est le fruit de tous vos sacrifices mieux que des mots. Il reflète tout l'amour que je ressens pour vous

A mes chers frères : **RAID, AKIL & HOUSSAM MOUSSAI**

A mes chères soeurs : **DJAMILA & DJAHANE**

A toutes mes deux familles **NADIR & AMROUNE.**

&

La promotion de mathématiques 2022

A toutes les personnes que j'aime.

Table des matières

Introduction	ii
0.1 Introduction	ii
1 Rappels d'analyse fonctionnelle et numérique	1
1.1 Notions d'analyse fonctionnelle	1
1.1.1 Espace vectoriel normé:	1
1.1.2 Espace de Banach :	2
1.1.3 Espace de Hilbert	3
1.1.4 Opérateurs linéaires bornés :	6
1.1.5 Opérateurs compact :	8
1.1.6 Opérateurs intégraux	9
1.2 Notions d'analyse numérique :	14
1.2.1 Les méthodes de projection	14
2 Equations intégrales et leurs classification	16
2.1 Classification des équations intégrales	16
2.1.1 Equations intégrales de Fredholm	16
2.1.2 Equations intégrales de Volterra	17
2.1.3 Equations intégrales de Volterra -Fredholm	17
2.2 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra- Fredholm	18
2.3 Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm	20

2.3.1	La méthode des solutions sous forme de série [5]	20
2.3.2	La méthode de décomposition d'Adomian:	21
2.4	Polynômes orthogonaux	23
2.4.1	Polynômes de Tchebychev	23
2.4.2	Polynôme de Legendre	25
2.4.3	Polynôme de Laguerre	26
3	Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm	28
3.1	Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredholm : .	28
3.1.1	Méthode de collocation	28
3.1.2	Méthode de collocation-Tchebyshev	29
3.2	Exemples Numériques	31
	Conclusion	36
	Bibliographie	36

0.1 Introduction

Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles, à savoir impossible à résoudre dans le passé.

Notre travail est divisé en trois chapitres.

Le Premier chapitre est une introduction à l'analyse numérique telles que les méthodes de collocation et celles de projections avec Ritz-Galerkin, Bubnov-Galerkin et Petrov-Galerkin où, on a utilisé les notions de base de l'analyse fonctionnelle, les espaces de Hilbert et de Banach avec la théorie des opérateurs bornés, compacts et intégraux.

Le Deuxième chapitre est une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, qui a pour objectif, de familiariser le lecteur de ce travail avec le concept d'équation intégrale. On trouve aussi une étude sur l'existence et l'unicité des équations intégrales du types Volterra-Fredholm avec la résolution analytique par la méthode des séries convergentes.

Le Troisième chapitre est destiné à l'étude de la résolution numérique des équations intégrales type Volterra-Fredholm en utilisant les méthodes spectrales avec le polynôme de Chebyshev tout en montrant l'efficacité de cette méthode par des exemples illustrés.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle et numérique

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace vectoriel normé:

Normes

Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R} , telle que

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in E$, et $\lambda \in K$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tout $x, y \in E$

on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|$

Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrisable

Preuve. Pour tout $x, y \in E$ on définit la fonction ϕ par

$$\phi(x, y) = \|x - y\|$$

On remarque que cette fonction est bien une métrique sur E car, on a

$$\phi(x, y) = \|x - y\| = 0$$

ou encore

$$x - y = 0$$

D'où l'égalité

$$x = y$$

Il est évident de voir que la distance $\phi(x, y)$ est symétrique

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|y - x\| = \phi(y, x)\end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= \phi(x, z) + \phi(z, y)\end{aligned}$$

■

1.1.2 Espace de Banach :

Suite de Cauchy:

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$; on dit que la suite (x_n) est de Cauchy si, on a la relation suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Soit x_n une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ contient une sous suite x_{n_k} convergente vers x alors la suite x_n est aussi convergente vers le même élément x .

Soit x_n une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

en particulier pour $n_k \geq N_\varepsilon$, on a

$$\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \|x_p - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

avec la convergence de la suite x_{n_k} vers x

$$n_k \geq N_\varepsilon, \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$$

D'où la convergence de la suite x_n vers l'élément x

$$\begin{aligned} \forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \|x_p - x\| &= \|x_p - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| \\ &\leq \|x_p - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Définition 1.1.1 *Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy x_n d'éléments de E est une suite convergente dans E*

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Implique l'existence d'un élément $x \in E$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Espaces de Banach

Définition 1.1.2 *On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.*

1.1.3 Espace de Hilbert

Produit scalaire

Définition 1.1.3 *On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) une application: $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
5. $\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$

Définition 1.1.4 *un espace de Hilbert H est un espace complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire. En d'autres termes un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme induite par un produit scalaire.*

Généralement l'espace H est séparable et de dimension infinie, en d'autres termes, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans H et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe n vecteurs dans H linéairement indépendants.

Exemple 1.1.1 *L'espace $L^2(a, b)$*

L'espace $L^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrales défini par

$$L^2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f; \int_I |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

ou l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, muni de la norme

$$\|f\|^2 = \int_I |f(t)|^2 dt$$

induite par le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert

Orthogonalité

Définition 1.1.5 *On dit que deux vecteurs x et y d'un espace de Hilbert H sont orthogonaux si:*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Base hilbertiennes

Une partie X de H est dite dense dans H si:

$$\forall y \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X; \|x - y\| < \varepsilon$$

de manière équivalente si tout y de H est limite d'une suite d'éléments x_n de X : $\|x_n - y\| \rightarrow 0$

Définition 1.1.6 Soit H un espace de Hilbert sur le corps \mathbb{k} et $F = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que F est une base de Hilbert (base hilbertienne) de H si:

1. F est une famille orthonormée de H , c'est-à-dire:
$$\begin{cases} \forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0 \\ \forall i \in I, \langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1 \end{cases}$$
2. La famille F est de plus complète ou total, c'est-à-dire: l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de F est dense dans H

Théorème 1.1.1 (Riesz-Fischer) Soit un système orthonormé dans un espace de Hilbert H , et soient les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i$ telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ soit convergente, alors on peut trouver un vecteur $f \in H$, tel que

$$\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle, \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

et de plus, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

ou encore

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

Soit $\{\varphi_k\}$ un système orthonormé d'éléments d'un espace de Hilbert H , pour que ce système soit complet, il faut et il suffit que, le seul vecteur de H orthogonal au système $\{\varphi_k\}$ est le vecteur nul. Cela signifie qu'il n'existe pas un vecteur non nul de H , qui soit orthogonal à tous les vecteurs du système $\{\varphi_k\}$

Théorème 1.1.2 Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux.

Remarque 1.1.1 *Comme il est connu en algèbre linéaire, que tous les espaces vectoriels ou euclidiens de mêmes dimensions finies n sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à l'espace K^n alors de même tous les espaces de Hilbert sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à l_2*

1.1.4 Opérateurs linéaires bornés :

Linéarité des opérateurs

Définition 1.1.7 *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes*

- Condition additive

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

- Condition homogène

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in K = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

Continuité des opérateurs linéaires

Définition 1.1.8 *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la propriété suivante*

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0).$$

Remarque 1.1.2 *L'opérateur linéaire A est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .*

Théorème 1.1.3 Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F , est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G .

Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Proposition 1.1.1 La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.

Théorème 1.1.4 Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement s'il est borné.

Espaces isomorphes

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, E et F sont dits isomorphes, s'il existe un opérateur homéomorphe A défini sur E dans F , c'est à dire

- A est bijectif sur E dans F .
- A et A^{-1} sont des opérateurs continus.

Espaces isométriques

Les espaces E et F sont dits linéairement isométriques, s'il existe une isométrie A appliquant E dans F , c'est à dire,

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Remarque 1.1.3 La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \| \cdot \|_1)$ et $(E, \| \cdot \|_2)$, ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β , telles que

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés $(E, \| \cdot \|_1)$ et $(E, \| \cdot \|_2)$.

1.1.5 Opérateurs compact :

Définition 1.1.9 Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.

Ensembles relativement compacts

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G , il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F .

Théorème 1.1.5 (critère de compacité)

Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E , la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente dans F .

Preuve. Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact. ■

Théorème 1.1.6 Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

Théorème 1.1.7 Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Preuve. Soit $\{\varphi_n\}$ un suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autres part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. ■

Théorème 1.1.8 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors A est compact.

Corollaire 1.1.1 *La boule unité $B(0, 1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

Théorème 1.1.9 *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fautive.*

Théorème 1.1.10 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Noyau faiblement singulier

Définition 1.1.10 *On appelle noyau faiblement singulier la fonction K continue sur $G \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sauf peut être aux points $x = y$ et telle que,*

$$\forall x, y \in G, x \neq y, \exists M > 0, |K(x, y)| < \frac{M}{|x - y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq n$$

Théorème 1.1.11 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

1.1.6 Opérateurs intégraux

Les opérateurs intégraux constituent des objets fondamentaux en analyse fonctionnelle, où ils permettent notamment de transformer les équations fonctionnelles en une version plus simple afin de les résoudre facilement. Les opérateurs intégraux interviennent dans plusieurs

domaines tels que les équations aux dérivées partielles, les phénomènes de diffusion et les équations intégrales.

Opérateur Intégral

On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire A défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F donné sous la forme

$$A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x, y)\varphi(y)dy, \quad x \in G_1,$$

où $k(x, y)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$ et $\varphi(y)$ est une fonction mesurable définie sur G_2 .

La fonction mesurable $k(x, y)$ est dite noyau de l'opérateur intégral A .

Normes des opérateurs intégraux

Soit A un opérateur intégral défini sur $L_p(G_1)$, alors pour tout p et q conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), avec ($1 \leq p, q \leq \infty$), la norme de l'opérateur A est donnée par

$$\|A\|_p = \begin{cases} \left(\int_{G_1} \left(\int_{G_2} |k(x, y)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{pour } 1 < p < \infty \\ \int_{G_1} \text{esssup} |k(x, y)| dx, & \text{pour } p = 1 \\ \text{esssup}_x \int_{G_2} |k(x, y)| dy, & \text{pour } p = \infty \end{cases}$$

où $k(x, y)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$.

Théorème 1.1.12 *Soit A un opérateur intégral de norme finie*

$$\|A\|_p < \infty$$

Alors l'opérateur intégral A est un opérateur linéaire continu de $L_p(G_2)$ dans $L_p(G_1)$. De plus, on a

$$\|A\varphi\|_p \leq \|A\|_p \|\varphi\|_p$$

$$\|A\varphi\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|\varphi\|_\infty.$$

Remarque 1.1.4 *La norme de l'opérateur intégral A pour $p = q = 2$ est donnée par*

$$\|A\|_2 = \left(\int_{G_1} \int_{G_2} |k(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Proposition 1.1.2 *La condition $\|A\|_p < \infty$ donnée sur la norme de l'opérateur intégral A est uniquement suffisante et non nécessaire pour la continuité de cet opérateur*

En effet, il suffit de prendre A comme opérateur de convolution dans $L_p(\mathbb{R})$

$$A\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)\varphi(y)dy$$

où $k(x, y)$ est un noyau de convolution $k(x, y) = k(x - y)$ avec la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |k(t)| dt < \infty.$$

Comme il est connu que la norme dans l'espace $L_p(G)$ est aussi donnée par

$$\|f\|_p = \sup \int_G |f(x)g(x)| dx, \quad g \in L_q(G), \quad \|g\|_q = 1.$$

Le théorème de Fubini, nous donne

$$\begin{aligned} \|A\varphi\|_p &= \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |g(x)A\varphi(x)| dx \\ &\leq \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |g(x)| \left(\int_{\mathbb{R}} |k(x-y)\varphi(y)| dy \right) dx \\ &= \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |g(x)| \left(\int_{\mathbb{R}} |k(y)\varphi(x-y)| dy \right) dx \\ &= \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |k(y)| dy \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)\varphi(x-y)| dy \right) dx \\ &\leq \|g\|_q \|\varphi\|_p \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} |k(y)| dy \\ &= \|\varphi\|_p \int_{\mathbb{R}} |k(y)| dy \end{aligned}$$

D'où la continuité de l'opérateur intégral $A\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)\varphi(y)dy$ de $L_p(\mathbb{R})$ dans $L_p(\mathbb{R})$. De plus, on a

$$\|A\varphi\|_p \leq \|A\|_1 \|\varphi\|_p.$$

Bien entendu, la condition (2) n'est pas remplie car, on a

$$\begin{aligned}\|A\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |k(x-y)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|A\|_q^p dx = \infty.\end{aligned}$$

Théorème 1.1.13 *Soit A un opérateur intégral vérifiant les conditions suivantes*

Il existe deux constantes positives $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$\left(\int_{G_2} |k(x,y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_1, \quad r > 0, \quad \text{pour tout } x \in G_1.$$

De plus, pour tout p et q conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), avec ($1 \leq p, q \leq \infty$), on a

$$p_1 \geq p, \quad p_1 \geq s, \quad \frac{p_1 - s}{p_1} \leq \frac{r}{q}.$$

Alors l'opérateur A est un opérateur linéaire continu de $L_p(G_2)$ dans $L_{p_1}(G_1)$. De plus, on a

$$\|A\| \leq C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}} C_2^{\frac{s}{p_1}}.$$

$$\|A\varphi\|_{p_1} \leq \|A\| \|\varphi\|_p, \quad \text{avec } \|A\| \leq C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}} C_2^{\frac{s}{p_1}}.$$

Remarque 1.1.5 *Le cas où $p = 1$, l'opérateur A devient un opérateur continu de $L_1(G_2)$ dans $L_{p_1}(G_1)$ sous la condition suivante*

$$\left(\int_{G_1} |k(x,y)|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq C_2, \quad \text{pour tout } y \in G_2.$$

De plus, on a

$$\|A\| \leq C_2.$$

Bien entendu, si $p = 1$ implique que $q = \infty$ et la relation (6) donne $p_1 = s$, ce qui entraîne le résultat voulu.

Remarque 1.1.6 *Le cas où $p_1 = \infty$, l'opérateur A devient un opérateur continu de $L_p(G_2)$ dans $L_\infty(G_1)$ sous la condition suivante*

$$q \leq r.$$

De plus, on a

$$\|A\| \leq C_1.$$

Bien entendu, si $p_1 = \infty$ implique que $\frac{r}{q} \geq 1$ et la relation (6) donne $\frac{s}{p_1} = 0$, ce qui entraîne le résultat voulu.

Proposition 1.1.3 *(Opérateurs produits) Soient A_1 et A_2 deux opérateurs intégraux de $L_p(E)$ dans $L_p(E)$, alors l'opérateur produit $(A_1A_2)\varphi = A_1(A_2\varphi)$ est un opérateur intégral de $L_p(E)$ dans $L_p(E)$.*

En effet, on a

$$\begin{aligned} (A_1A_2)\varphi(x) &= A_1(A_2\varphi) \\ &= \int_E k_1(x, z)A_2\varphi(z)dz \\ &= \int_E k_1(x, z) \left(\int_E k_2(z, y)\varphi(y)dy \right) dz \\ &= \int_E \varphi(y)dy \left(\int_E k_1(x, z)k_2(z, y)dz \right) \\ &= \int_E k_3(x, y)\varphi(y)dy, \end{aligned}$$

où la fonction $k_3(x, y)$ désigne le noyau de l'opérateur produit A_1A_2 donné par la relation

$$k_3(x, y) = \int_E k_1(x, z)k_2(z, y)dz.$$

Remarque 1.1.7 *L'opérateur intégral produit $A^2\varphi(x) = A(A\varphi(x))$ admet un noyau $k_2(x, y)$ donné par*

$$k_2(x, y) = \int k(x, z)k(z, y)dz.$$

Noyaux itérés

Le noyau $k_n(x, y)$ de l'opérateur intégral produit $A^n\varphi(x) = A(A^{n-1}\varphi(x))$ est dit noyau itéré du noyau $k(x, y)$, donné par

$$k_n(x, y) = \int k(x, z)k_{n-1}(z, y)dz.$$

1.2 Notions d'analyse numérique :**1.2.1 Les méthodes de projection****Opérateurs de projection :**

Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H ($M \subset H$), on définit la projection orthogonale sur M , notée P_M , de la manière suivante:

Pour tout $x \in H$, il existe P_Mx l'unique élément de M tel que $(x - P_Mx) \perp M$. Alors P_Mx est une application linéaire continue c'est à dire, on a

$$P_M^2x = P_Mx \quad \text{et} \quad \|P_Mx\| \leq \|x\|.$$

De plus $\text{Im } P_Mx = M$ et $\ker P_Mx = M^\perp$.

Méthode de collocation :

En mathématiques, une méthode de collocation est une méthode de résolution numérique d'équations différentielles ordinaires, d'équations aux dérivées partielles et d'équations intégrales. L'idée est de choisir un espace de dimension finie de solutions candidates (généralement des polynômes jusqu'à un certain degré) et un certain nombre de points dans le domaine (appelés points de collocation), et de sélectionner la solution qui satisfait l'équation donnée aux points de collocation

Méthode de Galerkin :

En mathématiques, dans le domaine de l'analyse numérique, les méthodes de Galerkin, du nom du mathématicien russe Boris Galerkin, convertissent un problème d'opérateur continu,

tel qu'une équation différentielle, généralement dans une formulation faible, en un problème discret en appliquant des contraintes linéaires déterminées par fini ensembles de fonctions de base.

Souvent, en se référant à une méthode Galerkin, on donne également le nom ainsi que les hypothèses typiques et les méthodes d'approximation utilisées :

La méthode de Ritz-Galerkin

(d'après Walther Ritz) prend généralement une forme bilinéaire définie symétrique et positive dans la formulation faible, où l'équation différentielle d'un système physique peut être formulée via la minimisation d'une fonction quadratique représentant l'énergie du système et la solution approximative est un linéaire combinaison de l'ensemble donné des fonctions de base

La méthode de Bubnov-Galerkin

(d'après Ivan Bubnov) n'exige pas que la forme bilinéaire soit symétrique et remplace la minimisation de l'énergie par des contraintes d'orthogonalité déterminées par les mêmes fonctions de base qui sont utilisées pour approximer la solution. Dans une formulation d'opérateur de l'équation différentielle, la méthode Bubno-Galerkin peut être considérée comme l'application d'une projection orthogonale à l'opérateur

La méthode de Petrov-Galerkin

(d'après Georgii I. Petrov) permet d'utiliser des fonctions de base pour les contraintes d'orthogonalité (appelées fonctions de base de test) qui sont différentes des fonctions de base utilisées pour approximer la solution. La méthode Petrov – Galerkin peut être considérée comme une extension de la méthode Bubnov-Galerkin, appliquant une projection qui n'est pas nécessairement orthogonale dans la formulation de l'opérateur de l'équation différentielle

Chapitre 2

Equations intégrales et leurs classification

2.1 Classification des équations intégrales

2.1.1 Equations intégrales de Fredholm

Définition 2.1.1 *On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme:*

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où φ est la fonction inconnue, f et k sont des fonctions connues, les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équation de Fredholm .

Définition 2.1.2 *On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $k(x, y)$ et $f(x)$ des fonctions données, λ est un facteur inconnu

2.1.2 Equations intégrales de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est tel que $k(x, t) = 0$ pour $x < t$

Définition 2.1.3 On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme :

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

Définition 2.1.4 On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation à inconnue $\varphi(x)$ de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

2.1.3 Equations intégrales de Volterra -Fredholm

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints ,apparaît dans une équation intégrale .

Définition 2.1.5 On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt , x \in [a, b] \quad (2.1.1)$$

On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme:2

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s, t)\varphi(t)dt ds$$

où les fonctions k_1 , k_2 et f sont connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Exemple 2.1.1

$$\varphi(x) = \exp(x) + x + 1 + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + \int_0^1 \exp(x-t)\varphi(t)dt, \quad x \in [0, 1]$$

$$\varphi(x) = \frac{17}{2}x^2 + 11x + \int_a^x \int_a^b (s-t)\varphi(t)dtds$$

2.2 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utilisées pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solutions de l'équation (2.1.1)

Définition 2.2.1 Soit X un espace normé et $T : X \rightarrow X$ un opérateur, T est dit un opérateur de Picard s'il existe $\varphi_0 \in X$ unique tel que

$$T(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ pour tout } \varphi \text{ de } X$$

Théorème 2.2.1 (principe de contraction). Soit X un espace normé. Si $T : X \rightarrow X$ un opérateur de contraction admis un point fixe unique φ , alors T est un opérateur de Picard

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi_0)\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|\varphi - T(\varphi)\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Théorèmes d'existence et d'unicité :

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a, b] \quad (2.2.1)$$

où

1. $f \in C[a, b]$, $k_1(x, t) \in C(D_1)$, avec $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq t \leq x \leq b\}$
2. $\varphi \in C[a, b]$, $k_2(x; t) \in C(D_2)$, avec $D_2 = [a, b] \times [a, b]$
3. $M_1 = \max_{(x,t) \in D_1} |k_1(x, t)|$, et $M_2 = \max_{(x,t) \in D_2} |k_2(x, t)|$

2.2. Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Théorème 2.2.2 Dans les conditions de continuité ci-dessus, supposons qu'il existe une constante $c > 0$ tel que:

$$\frac{1}{c} [M_1 + M_2 \exp(c(b-a))] < 1$$

Alors l'équation (2.2.1) a une solution unique $\varphi \in C[a, b]$, et cette solution peut être obtenir par la méthode d'approximation successive, à partir de $\varphi_0 \in C[a, b]$

Preuve. Soit l'opérateur integral $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt$$

On a

$$\begin{aligned} |T\varphi(x) - T\psi(x)| &= \left| \int_a^x k_1(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt + \int_a^b k_2(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |k_1(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt + \int_a^b |k_2(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt \\ &\leq M_1 \int_a^x |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(t-a)) \exp(c(t-a)) dt + \\ &\quad M_2 \int_a^b |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(t-a)) \exp(c(t-a)) dt \\ &\leq \left[\frac{M_1}{c} (\exp(c(x-a)) - 1) + \frac{M_2}{c} (\exp(c(b-a)) - 1) \right] \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \left[\frac{M_1}{c} \exp(c(x-a)) + \frac{M_2}{c} \exp c(x-a+b-x) \right] \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp(c(x-a))}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-x))) \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp(c(x-a))}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\| \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|A\varphi(x) - A\psi(x)| \exp(-c(x-a)) \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|, \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

Alors

$$\|A\varphi - A\psi\| \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|$$

On déduit que l'opérateur A est Lipschitzien de constante $k = \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a)))$

La condition supposée garantit que A est une contraction. Alors on applique principe de contraction ■

2.3 Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm

2.3.1 La méthode des solutions sous forme de série [5]

Une fonction $\varphi(x)$ est dite analytique si elle a des dérivées de tous les ordres telles que la série de Taylor en $x = 0$ peut être écrite comme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.3.1)$$

Dans cette section, nous appliquerons la méthode des solutions en série, qui découle principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques .

Pour résoudre les équations intégrales de Volterra -Fredholm, nous supposons que la solution $\varphi(x)$ de l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.3.2)$$

est analytique, et possède donc une série de Taylor de la forme donné en (2.3.1), où les coefficients seront déterminés de manière récurrente. Dans cette méthode, nous substituons généralement la série Taylor (2.3.1) des deux côtés de (2.3.2) pour obtenir

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = T(f(x)) + \int_0^x k_1(x, t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt + \int_a^b k_2(x, t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt \quad (2.3.3)$$

pour plus de simplicité on utilise

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \int_0^x k_1(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt + \int_a^b k_2(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt \quad (2.3.4)$$

où $T(f(x))$ est le développement de Taylor de la fonction f .

Exemple 2.3.1

Résoudre l'équation intégrale deVolterra -Fredholm en utilisant la méthode des solutions en série

$$\varphi(x) = x^5 - 6x^3 - x^2 - x + 2 + \int_0^x t\varphi(t)dt + \int_{-1}^1 (x+t)\varphi(t)dt \quad (2.3.5)$$

en remplaçant $\varphi(x)$ par la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dans les deux côtés de l'équation. (2.3.5) on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^5 - 6x^3 - x^2 - x + 2 + \int_0^x t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt + \int_{-1}^1 ((x+t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt \quad (2.3.6)$$

Évaluons les intégrales du côté droit, en utilisant quelques termes des deux côtés, et en collectant les coefficients de même puissances de x , on trouve

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots &= 2 + \frac{2}{3}a_1 + \frac{2}{5}a_3 + \left(-1 + 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4\right)x + \left(-1 + \frac{1}{2}a_0\right)x^2 + \\ &\quad \left(-6 + \frac{1}{3}a_1\right)x^3 + \frac{1}{4}a_2 x^4 + \left(1 + \frac{1}{5}a_3\right)x^5 + \dots \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

En égalant les coefficients de puissances similaires de x des deux côtés de (2.3.7) et en résolvant le système d'équations résultant, nous obtenons

$$a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 0, a_3 = -5, a_4 = a_5 = \dots = 0$$

La solution exacte est donc donnée par

$$\varphi(x) = 2 + 3x - 5x^2$$

2.3.2 La méthode de décomposition d'Adomian:

La méthode de décomposition d'Adomian a été présentée en détail dans ce texte pour traiter indépendamment les équations intégrales de Volterra-Fredholm. La méthode consiste à décomposer la fonction inconnue $\varphi(x)$ de toute équation en une somme d'un nombre infini de composants définis par la série suivante

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (2.3.8)$$

où les composantes $\varphi_n(x)$, $n \geq 0$ sont à déterminer de manière récursive. Pour établir la relation de récurrence, nous substituons la série de décomposition dans l'équation intégrale de Volterra -Fredholm (2.3.2) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = T(f(x)) + \int_0^x k_1(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \right) dt + \int_a^b k_2(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \right) dt$$

La composante $\varphi_0(x)$ est identifiée par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe d'intégral. Par conséquent, nous définissons la relation de récurrence

$$\varphi(x) = f(x) \text{ et } \varphi_{n+1}(x) = \int_0^x k_1(x, t) \varphi_n(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi_n(t) dt, \quad n \geq 0$$

Après avoir déterminé les composants $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ la solution sous forme de série est facilement obtenue en utilisant (2.3.8), qui converge vers la solution exacte.

Exemple 2.3.2 Utiliser la méthode de décomposition d'Adomian modifiée pour résoudre l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante:

$$\varphi(x) = \cos x - \sin x - 2 + \int_0^x \varphi(t) dt + \int_0^\pi (x - t) \varphi(t) dt$$

L'utilisation de la méthode de décomposition modifiée donne la relation de récurrence

$$\varphi_0(x) = \cos(x), \text{ et } \varphi_1(x) = -\sin x - 2 + \int_0^x \varphi(t) dt + \int_0^\pi (x - t) \varphi(t) dt = 0$$

Par conséquent, la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = \cos x$$

2.4 Polynômes orthogonaux

2.4.1 Polynômes de Tchebychev

En mathématiques, un polynôme de Tchebychev est un terme de l'une des deux suites de polynômes orthogonaux particulières reliées à la formule de Moivre. Les polynômes de Tchebychev sont nommés ainsi en l'honneur du mathématicien russe Pafnouti Lvovitch Tchebychev.

Définition 2.4.1 Soit $n \in \mathbb{N}$, On appelle polynôme de Tchebychev de degré n , l'application T_n définie de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} par :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

Il existe deux suites de polynômes de Tchebychev de degré n , l'une nommée polynômes de Tchebychev de première espèce et notée T_n et l'autre nommée polynômes de Tchebychev de seconde espèce et notée U_n .

Relation de récurrence entre les polynômes de Tchebychev de degré n

La suite de polynômes de Tchebychev T_n peut être définie par la relation de récurrence. Ces deux suites de polynômes de Tchebychev peuvent être définies par la relation de récurrence

$$1- T_0(x) = 1, T_1(x) = x \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$T_{n+2} = 2x T_{n+1} - T_n$$

$$2- U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$U_{n+2} = 2x U_{n+1} - U_n$$

Une définition alternative de ces polynômes peut être donnée par les relations trigonométriques :

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta), \text{ soit: } T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

et

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$$

ce qui revient, par exemple, à considérer $T_n(\cos \theta)$ comme le développement de $\cos(n\theta)$ sous forme de polynôme en $\cos \theta$.

Contrairement à d'autres familles de polynômes orthogonaux, tels ceux de Legendre, d'Hermite ou de Laguerre, les polynômes de Tchebychev n'ont pratiquement pas d'application directe en physique. En revanche, ils sont particulièrement utiles en analyse numérique pour l'interpolation polynomiale de fonctions. En premier lieu, en ce qui concerne le choix des points d'interpolation, comme les zéros de $T_n(x)$ ou abscisses de Tchebychev, en vue de limiter le phénomène de Runge. Également, ils constituent une base alternative de polynômes par rapport à la base canonique X^n de $R[X]$ des polynômes de Lagrange, ce qui permet d'améliorer sensiblement la convergence.

Orthogonalité des polynômes de Tchebychev

Chacune de T_n et U_n est une suite de polynômes orthogonaux par rapport à un produit scalaire de fonctions, associé à la fonction poids $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Les polynômes de Tchebychev de première espèce sont w -orthogonaux, c'est à dire orthogonaux relativement à la fonction poids définie par $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$.

En effet pour $x = \cos(\theta)$, $dx = -\sin(\theta)d\theta$, on a, alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) w(x) dx &= - \int_{\pi}^0 \frac{\cos(n\theta) \cos(m\theta) \sin(\theta)}{|\sin(\theta)|} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)) d\theta \\ &= \begin{cases} \pi, & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0, & \text{si } n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

Racines des polynômes de Tchebychev de première espèce

Proposition 2.4.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le polynômes de Tchebychev de première espèce T_n admet exactement n racines simples définies par :*

$$x_k = \cos\left(\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\pi\right), \quad k = 1, \dots, n$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, T_n et $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} T_n(x_k) &= \cos(n \arccos(x_k)) \\ &= \cos\left(n \arccos\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

T_n étant de degré n , les x_k , $k = 1, \dots, n$ sont exactement les zéros de T_n . Elles sont simples puisque pour tout $k \neq k'$, on a $x_k \neq x_{k'}$ ■

Remarque 2.4.1 *On peut généraliser cela à tout intervalle fermé $[a, b]$, d'où*

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\pi\right), \quad k = 1, \dots, n$$

2.4.2 Polynôme de Legendre

En mathématiques et en physique théorique, les polynômes de Legendre constituent l'exemple le plus simple d'une suite de polynômes orthogonaux. Ce sont des solutions polynomiales $P_n(x)$, sur l'intervalle $x \in [-1, 1]$, de l'équation différentielle de Legendre

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] + n(n+1)P_n(x) = 0,$$

dans le cas particulier où le paramètre n est un entier.

De façon équivalente, les polynômes de Legendre sont les fonctions propres de l'endomorphisme de $R[X]$ défini par :

$$P \mapsto u(P) = \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right]$$

pour les valeurs propres $-n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$

Ces polynômes orthogonaux ont de nombreuses applications tant en mathématiques, par exemple pour la décomposition d'une fonction en série de polynômes de Legendre, qu'en physique, où l'équation de Legendre apparaît naturellement lors de la résolution des équations de Laplace ou de Helmholtz en coordonnées sphériques

2.4.3 Polynôme de Laguerre

En mathématiques, les polynômes de Laguerre, nommés d'après Edmond Laguerre, sont les solutions normalisées de l'équation de Laguerre

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 et se réécrit sous la forme de Sturm-Liouville

$$-\frac{d}{dx} \left(x \exp(-x) \frac{dy}{dx} \right) = n \exp(-x) y$$

Cette équation a des solutions non singulières seulement si n est un entier positif. Les solutions L_n forment une suite de polynômes orthogonaux dans $L^2(\mathbb{R}, \exp(-x)dx)$, et la normalisation se fait en leur imposant d'être de norme 1, donc de former une famille orthonormale. Ils forment même une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \exp(-x)dx)$.

Cette suite de polynômes peut être définie par la formule de Rodrigues

$$L_n(x) = \frac{\exp(x)}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (\exp(-x) x^n)$$

La suite des polynômes de Laguerre est une suite de Sheffer.

Les polynômes de Laguerre apparaissent en mécanique quantique dans la partie radiale de la solution de l'équation de Schrödinger pour un atome à un électron

Le coefficient dominant de L_n est $(-1)^n/n!$. Les physiciens utilisent souvent une définition des polynômes de Laguerre où ceux-ci sont multipliés par $(-1)^n n!$, obtenant ainsi des polynômes unitaires.

Chapitre 3

Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm

3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredholm :

Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équation intégrales de volterra-Fredholm de second espèce en utilisant les polynômes de Tchebychev.

3.1.1 Méthode de collocation

On considère l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt \quad (3.1.1)$$

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à l'équation (3.1.1) consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (3.1.1) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C([a, b])$ ou de $L^2([a, b])$. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base

de X_n . On cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$, telle que

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x), \quad x \in [a, b]$$

Pour déterminer les coefficients (c_j), on substituant, cette fonction dans l'équation (3.1.1), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \varphi_n(x) - \int_a^x k_1(x, t) \varphi_n(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) \varphi_n(t) dt - f(x), \quad x \in [a, b] \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x, t) dt \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(t) - \int_a^b k_2(x, t) dt \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(t) - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \left\{ \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x, t) \psi_j(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) \psi_j(t) dt \right\} - f(x), \quad x \in [a, b] \end{aligned}$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, (i.e, aux points de collocation) ce qui conduit à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i, t) \psi_j(t) dt - \int_a^b k_2(x_i, t) \psi_j(t) dt \right\} c_j = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

qui s'écrit sous la forme $AC = F$, où

$$\begin{aligned} A &= \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i, t) \psi_j(t) dt - \int_a^b k_2(x_i, t) \psi_j(t) dt, \quad i, j = 1, \dots, n \\ C &= (c_i), \quad i = 1, \dots, n \\ F &= f(x_i), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

ce système admet une solution unique si $\det A \neq 0$, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

3.1.2 Méthode de collocation-Tchebyshev

On considère l'équation de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt, \quad x \in [a, b] \quad (3.1.2)$$

On définit les polynômes de Tchebyshev $T_i^*(x)$ de degré i sur $[a, b]$ comme suit

$$T_i^*(x) = T_i\left(\frac{2x - (a + b)}{b - a}\right)$$

où $T_i(x)$ sont les polynômes de Chebyshev de degré i définis sur $[-1, 1]$

On utilise la méthode de Collocation pour approximer la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (3.1.2).

On suppose

$$\varphi(x) \simeq \varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i T_i^*(x) \quad (3.1.3)$$

où $T_i^*(x)$ sont les polynômes de Tchebyshev de degré i définis sur $[a, b]$ et c_i des coefficients à déterminer.

Substituant (3.1.3) dans (3.1.2) on obtient

$$\sum_{i=0}^n c_i T_i^*(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t) \sum_{i=0}^n c_i T_i^*(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \sum_{i=0}^n c_i T_i^*(t) dt$$

d'où

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[T_i^*(x) - \int_a^x k_1(x, t) T_i^*(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) T_i^*(t) dt \right] = f(x) \quad (3.1.4)$$

l'équation (3.1.4) peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^n c_i \psi_i(x) = f(x)$$

où

$$\psi_i(x) = T_i^*(x) - \int_a^x k_1(x, t) T_i^*(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) T_i^*(t) dt$$

Soit $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$, $i = 1, \dots, n$ les points de Tchebechev :

Alors les équations de collocation sont obtenues en prenant des points x_j

$$\sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1.5)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i \psi_{ij} = f_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1.6)$$

L'équation (3.1.5) représente un système linéaires de (n) inconnue qui s'écrit sous la forme

$$Ac = F$$

où

$$A = \psi_{ij}, i, j = 1, \dots, n$$

$$c = (c_1, \dots, c_n)^t$$

$$F = (, f_1, \dots, f_n)^t$$

$$c = A^{-1}F$$

3.2 Exemples Numériques

Dans cette section on va traité quelques exemples pour résoudre les équations intégrales linéaire de Volterra-Fredholm de second espèce par la méthode de collocation-Tchebyshev

Exemple 1. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

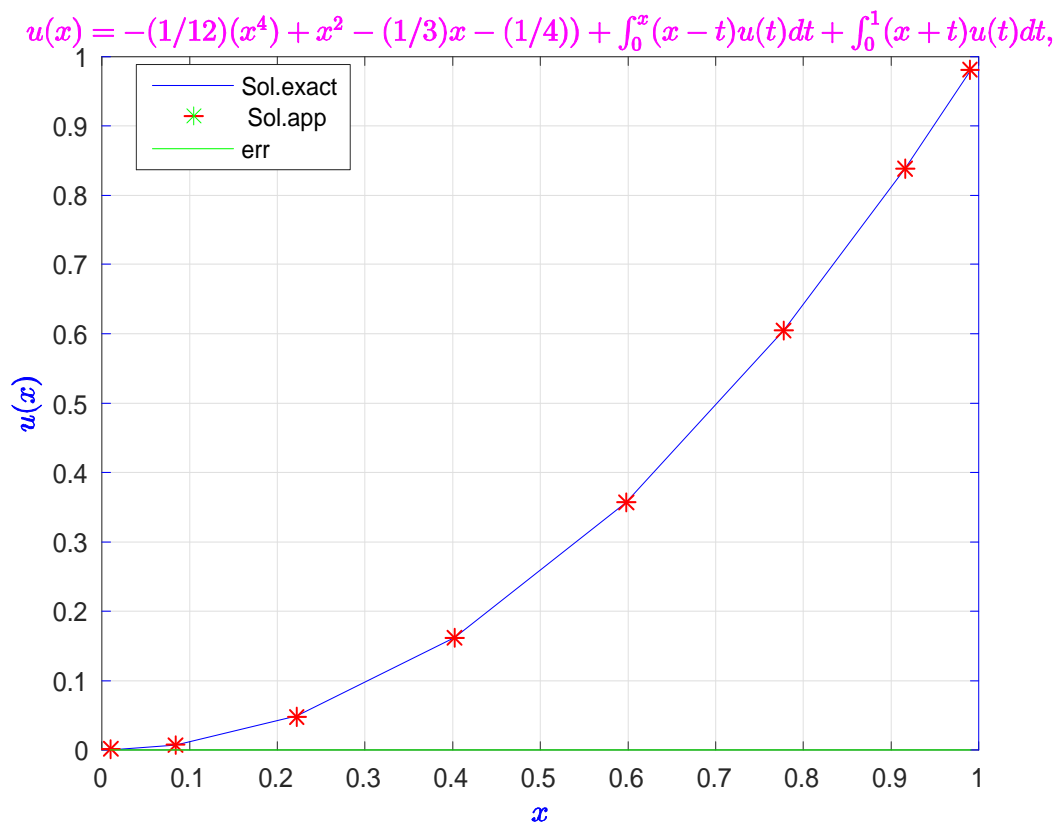
$$\varphi(x) = -\frac{1}{12}x^4 + x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4} + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + \int_0^1 (x+t)\varphi(t)dt,$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = x^2. \quad (3.2.1)$$

Table 1. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev, en certains points de Tchebyshev, l'erreur est calculée pour $N = 8$.

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Solapp φ_{app}	Erreur
9.9039e-01	9.8087e-01	9.8087e-01	1.1102e-16
9.1573e-01	8.3857e-01	8.3857e-01	1.1102e-16
7.7778e-01	6.0494e-01	6.0494e-01	0
5.9754e-01	3.5706e-01	3.5706e-01	5.5513e-17
4.0245e-01	1.6196e-01	1.6196e-01	2.7755e-17
2.2221e-01	4.9379e-02	4.9379e-02	1.3877e-17
8.4265e-02	7.1006e-03	7.1006e-03	9.5409e-18
9.6073e-03	9.2301e-05	9.2301e-05	3.4640e-17



$$u_{ex} = x^2$$

Exemple 2. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

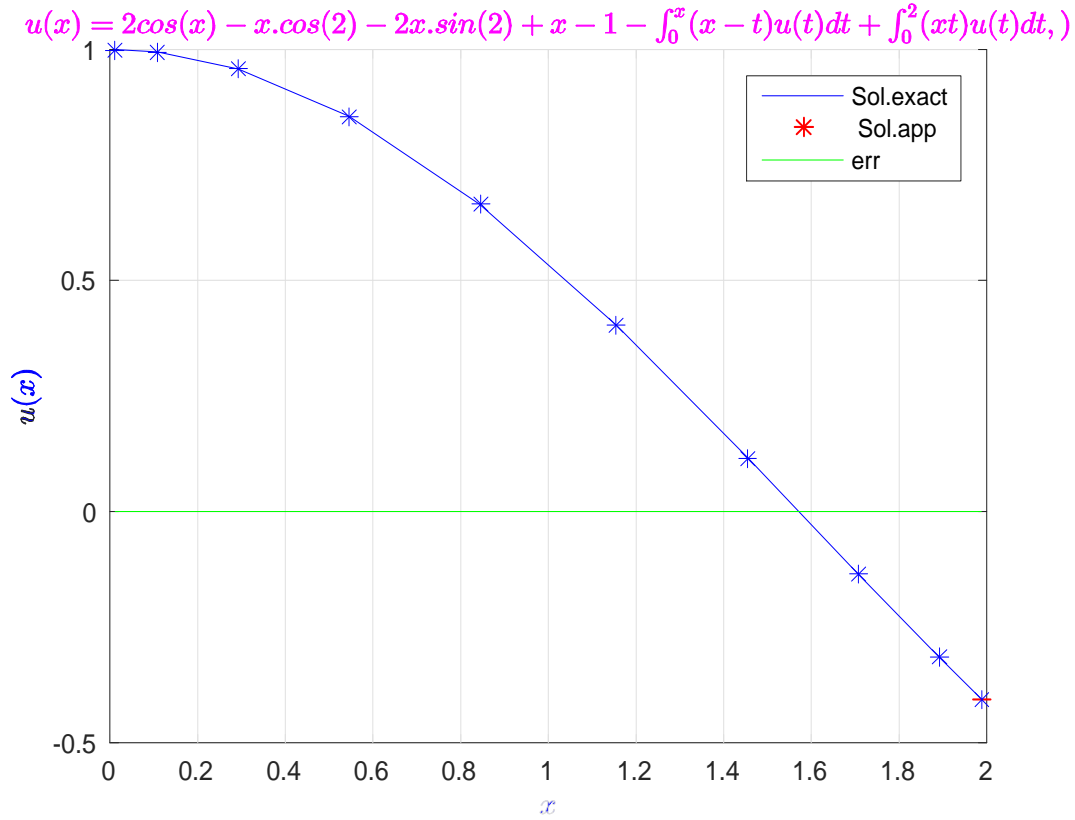
$$\varphi(x) = 2 \cos(x) - x \cos(2) - 2x \sin(2) + x - 1 - \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + \int_0^2 xt \varphi(t) dt,$$

où $0 \leq x, t \leq 2$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \cos x$$

Table 2. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev, en certains points de Chebychev, l'erreur est calculée pour $n = 10$

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Solapp φ_{app}	Erreur
1.9876e+00	-4.0492e-01	-4.0492e-01	1.0379e-11
1.8910e+00	-3.1476e-01	-3.1476e-01	8.9565e-12
1.7071e+00	-1.3588e-01	-1.3588e-01	8.0613e-12
1.4539e+00	1.1654e-01	1.1654e-01	5.3834e-12
1.1564e+00	4.0260e-01	4.0260e-01	4.2971e-12
8.4356e-01	6.6480e-01	6.6480e-01	2.7305e-12
5.4600e-01	8.5460e-01	8.5460e-01	1.2615e-12
2.9289e-01	9.5741e-01	9.5741e-01	1.2411e-12
1.0899e-01	9.9406e-01	9.9406e-01	1.8396e-13
1.2311e-02	9.9992e-01	9.9992e-01	9.2592e-14



$$u_{ex} = \cos(x)$$

Exemple3. Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

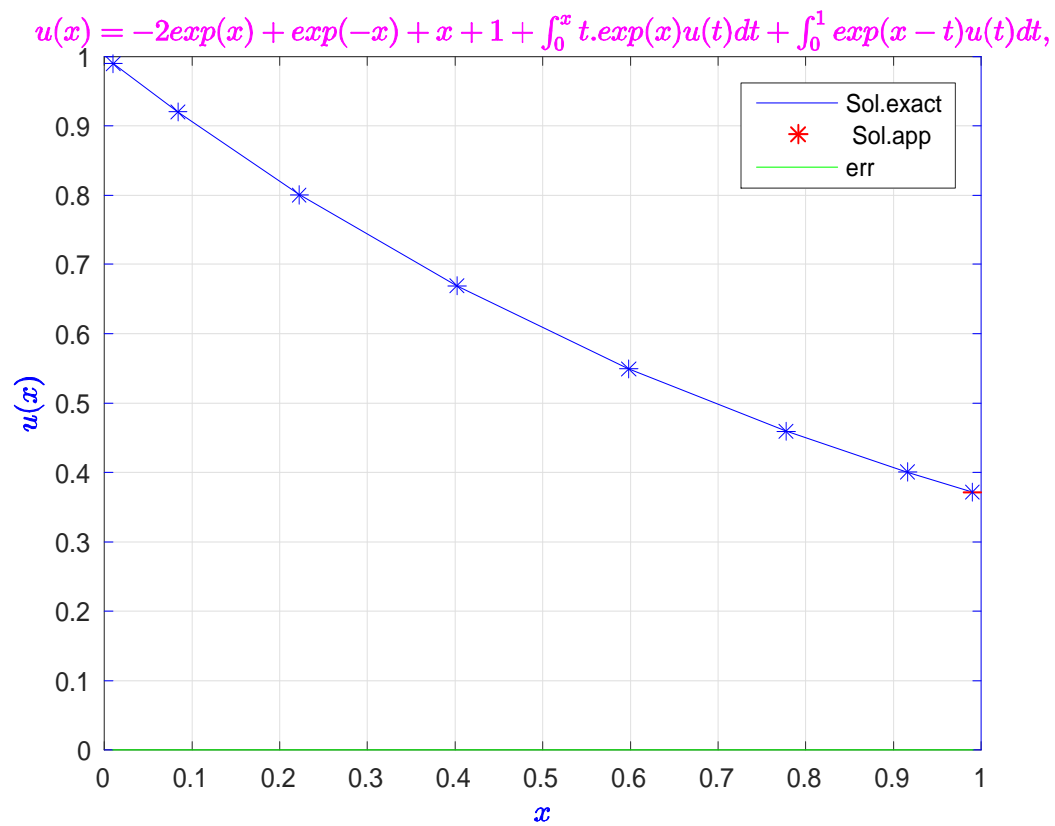
$$\varphi(x) = -2 \exp(x) + \exp(-x) + x + 1 + \int_0^x t. \exp(x)\varphi(t)dt + \int_0^1 \exp(x-t) \varphi(t)dt,$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \exp(-x).$$

Table 3. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation-Chebyshev, en certains points de Chebychev, l'erreur est calculée pour $n = 8$.

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Solapp φ_{app}	Erreur
9.9039e-01	3.7143e-01	3.7143e-01	7.6507e-12
9.1573e-01	4.0022e-01	4.0022e-01	4.8251e-11
7.7778e-01	4.5942e-01	4.5942e-01	2.9699e-11
5.9754e-01	5.5016e-01	5.5016e-01	3.9433e-11
4.0245e-01	6.6867e-01	6.6867e-01	1.3724e-11
2.2221e-01	8.0074e-01	8.0074e-01	1.0525e-11
8.4265e-02	9.1918e-01	9.1918e-01	1.8706e-12
9.6073e-03	9.9043e-01	9.9043e-01	2.7642e-12



$$u_{ex} = \exp(-x)$$

Conclusion

Dans cette mémoire on a présenté quelques méthodes analytiques de résolution de l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm de seconde espèce comme la méthode des solutions sous forme de série et la méthode de décomposition d'Adomian. Numériquement on a utilisé la méthode de collocation Tchebychev, pour approximer ces équations. La méthode de collocation consiste à projecté cette équation dans un sous espace de dimension finie, dans lequel on cherche à approcher la solution exacte par une combinison linéaire des éléments de la base orthonormale de Tchebychev, on a choisit les nœuds de Chebyshev décalés pour réduire l'équation intégrale de Volterra-Fredholm considérée à un système d'équations linéaires, nous donnons aussi quelques exemples pour montrer l'applicabilité de cette méthode.

Les résultats numériques obtenus à partir de ces exemples, démontrent l'efficacité et la bonne précision de cette méthode, lorsque n (le nombre de nœuds) augmente, le terme d'erreur diminue.

La méthode peut être étendue et appliquée au équations intégrales de Volterra-Fredholm non linéaires.

Bibliographie

- [1] W. M. Abd-Elhameed, Y. H Youssri, Numerical solutions for Volterra–Fredholm–Hammerstein integral equations via second kind Chebyshev quadrature collocation algorithm. *Adv. Math. Sci. Appl.* 24,(2014) 129–141
- [2] A. Al-Jubory, Some Approximation Methods for Solving Volterra-Fredholm Integral and IntegroDifferential Equations, Ph.D. Thesis, University of Technology (2010).
- [3] S. Andréas, weakly singular Volterra and Fredholm-Volterra integral equation, *Studia Univ . Babes-Bolyar, Mathematica* , Volume XLVIII, (3), (2003).
- [4] K. E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, (2010).
- [5] H. Brunner, On the numerical solution of Volterra–Fredholm integral equation by collocation methods. *SIAM J. Numer. Anal.* 27(4), 87–96 (1990).
- [6] P. Kumar and G. C. Dubey, An application of Volterra integral equation by expansion of Taylor’s series in the problem of heat transfer and electrostatics, in *IOSR Journal of Mathematics* 11 (5), (2015) 59-62.
- [7] M. M. Muna and I. N. Ghanim, “Numerical Solution of Linear Volterra-Fredholm Integral Equations Using Lagrange Polynomials,in *Mathematical Theory and Modeling*, 4 (5), (2014)137-146
- [8] M. NADIR .Cours d’analyse fonctionnelle ,université de M’sila Algérie 2004

- [9] S. Nemati, Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations using Legendre collocation method. *J. Comput. Appl. Math.* 278, (2015) 29-36.
- [10] K. Y. Wang, Q. S. Wang, Lagrange collocation method for solving Volterra–Fredholm integral equations. *Appl. Math. Comput.* 219, (2013) 10434–10440.
- [11] A. M. Wazwaz, *Linear and nonlinear integral equations methods and applications*, Saint Xavier University Chicago, IL 60655, USA.

المخلص:

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول تقريبية لمعادلة فولتيرا – فريدولم التكاملية من النوع الثاني وذلك باستخدام كثير حدود تشببتيشيف على ذلك تم تقديم أمثلة مختلفة لتوضيح دقة الطريقة المقترحة

الكلمات المفتاحية:

كثير حدود تشببتيشيف - المعادلات التكاملية لفولتيرا- المعادلات التكاملية لفرد هولم - المعادلات التكاملية لفولتيرا-فرد هولم - الطرق التربيعية

Résumé :

Le but de ce mémoire, est la résolution numérique de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm du second espèce, en utilisant le polynôme de Tchebychev. De plus, de nombreux exemples sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la méthode proposée

Mots clés :

Polynôme de Tchebychev, Equation intégrale de Volterra, Equation intégrale de Fredholm, Equation intégrale de Volterra-Fredholm, Méthodes de quadratures.

Abstract :

The goal of this memory is consecrated to the numerical method to find approximate solutions to the Volterra-Fredholm integral equation of the second kind using Tchebychev polynomial. Moreover, many examples are presented to illustrate the accuracy and efficiency of the method.

Keywords:

Tchebychev polynomials, Volterra integral equation, Fredholm integral equation, Volterra-Fredholm integral equation, numerical quadrature.