Notations

$L(E;F)$	Espace des applications linéaires.
$\mathcal{L}(E;F)$	Espace des applications linéaires continues.
i	Injection canonique.
T^*	Adjoint de l'opérateur linéaire.
$T^\#$	Adjoint de l'opérateur lipschitzien.
e	Elément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé.
$\mathcal{M}_0$	Ensemble des espaces métriques complets pointés.
$\mathbb{K}$	Corps des scalaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$Lip(X,E)$	Espace de toutes les fonctions lipschitziennes bornées de$X$ dans E.
$Lip_0(X,E)$	Espace de toutes les applications lipschitziennes de X dans E nulles au point e.
$\mathcal{F}(X)$	Espace de Lipschitz libre
B_X	Boule unité fermé de l'espace X.

Table des matières

Introduction

La théorie des opérateurs p-sommant joue un rôle très important dans la théorie moderne des espaces de Banach, non seulement pour sa beauté intrinsèque, mais aussi pour ses applications étendues parmi un large éventail de sujets tels que la géométrie des espaces de Banach, l'analyse harmonique, la théorie des opérateurs etc.... Lorsqu'on travaille avec des opérateurs p-sommants, il n'est pas rare de rencontrer un opérateur T avec la propriété que $S \circ T$ est p-sommant lorsque S est q-sommant. C'est précisément le concept des opérateurs(q, p)-mixing, défini et étudié par Pietsch [6]. D'autre part, Farmer et Johnson [4] ont récemment présenté la notion d'opérateurs lipchitziens p-sommants. Les opérateurs lipchitziens (q, p)-mixing sont considérés comme la version lipchitzienne des opérateurs linéaires (q, p)-mixing ils ont été introduits par Chávez-Domínguez dans [2]. Nous proposons dans ce travail de revoir cette généralisation en détail et d'étudier quelques propriétés.

Le mémoire est divisé en trois chapitres :

Le premie chapitre, est consacré à la présentation de quelques préliminaires utiles ainsi qu'aux rappels de quelques définitions essentielles et nécessaires pour mieux comprendre le manuscrit.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté la définition des opérateurs Lipschitz (q, p)-mixing, telle que la condition "ou le critère" suffisante est présenté. On commencera par un rappel sur les opérateurs Lipschitz p-sommants. On donnera aussi quelques propriétés relatives à la classe d'opérateurs Lipschitz (q, p)-mixing.

Le troisième chapitre, consacré à l'étude des caractérisations de ces opérateurs. Trois caractéristations différentes sont présentées. La premiere est une inégalité intégrale suivant le théorème de domination de Pietsch, tandis que la seconde correspondaux suites (q, p)-mixing et la troisième repose sur l'espace de Chevet-Saphar.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Espace métrique

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble non vide. On dit que d est une distance sur X si et seulement si d est une application de X^2 dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $(x,y,z) \in X^3$, on a*

$$\begin{array}{ll} (i)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y & (\textit{Séparation}), \\ (ii)\ d(x,y) = d(y,x) & (\textit{Symétrie}), \\ (iii)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) & (\textit{Inégalité triangulaire}). \end{array}$$

Soit (X, d_X, e) est un espaces métrique pointé (i.e, e un élément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé). On note par

$$\mathcal{M}_0 = \{\textit{espaces métriques complets pointés}\}.$$

Exemple 1.1.1 (Somme de distances) *Soient $d_1, ..., d_n$ des distances sur un ensemble X et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des réels positifs ou nules et non tous nules. Si x, $y \in X$. On peut démontre que d est une distance sur X, telle que*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \alpha_1 d_1(x,y) + ... + \alpha_n d_n(x,y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(x,y). \end{aligned}$$

En effet

$$
\begin{array}{rcl}
1)\ d(x,y)=0 & \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i(x,y)=0\\
& \Leftrightarrow & \forall i\in\{1,...,n\}\ \alpha_i d_i(x,y)=0\\
& \Leftrightarrow & \exists i_0\in\{1,...,n\}\ d_{i_0}(x,y)=0,\alpha_{i_0}>0\\
& \Leftrightarrow & x=y.\\
2)\ d(x,y) & \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i(x,y)\\
& \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i(y,x)\\
& \Leftrightarrow & d(y,x).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
3)\ d(x,y) & = & \sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i(x,y)\\
& \leq & \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(d_i(x,z)+d_i(z,y))\\
& \leq & \sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i(x,z)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i(z,y)\\
& \leq & d(x,z)+d(z,y).
\end{array}
$$

1.2 Les applications lipschitziennes

Définition 1.2.1 *Soient* $(X,d_X),(Y,d_Y)$ *deux espaces métriques, une application* $f:X\longrightarrow Y$ *est dite lipschitzienne, s'il existe* $C\geq 0$ *telle que*

$$\forall x,y\in X : d_Y(f(x),f(y))\leq C d_X(x,y) \tag{1.1}$$

On note

$$
\begin{array}{rcl}
Lip(f) & = & \sup\limits_{x\neq y}\dfrac{d_Y(f(x),f(y))}{d_X(x,y)}.\\
& = & \inf\{C : \textit{vérifiant l'inégalité } (1.1)\}.
\end{array}
$$

Soit (X,e_X,d_X) *et* (Y,e_Y,d_Y) *deux espaces métriques pointés on dira que* f *préserve le point distingué si* $f(e_X)=e_Y$.

Proposition 1.2.1 *Soit* (X,e,d) *un espace métrique pointé, alors l'application définie comme suit*

$$
\begin{array}{rccl}
f_z: & X & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
& x & \longmapsto & f_z(x)=d(x,z)-d(e,z),
\end{array}
$$

est une application lipschitzienne et $Lip(f_z)=1$

Preuve. D'après la seconde inégalité triangulaire, pour tout $x, y, z \in X$, on a

$$|f_z(x) - f_z(y)| = |d(x,z) - d(e,z) - d(y,z) + d(e,z)| \leq d(x,y).$$

Alors f_z est une fonction non expanssive $(i.e, Lip(f_z) \leq 1)$.

Pour l'inégalité inverse, on a

$$\begin{aligned} Lip(f_z) &= \sup_{x \neq y} \frac{|f_z(x) - f_z(y)|}{d(x,y)} \\ &\geq \frac{|f_z(z) - f_z(y)|}{d(z,y)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

On obtient finalement que $Lip(f_z) = 1$. ■

Proposition 1.2.2 *Soit X un espace métrique et soient f, g des fonctions lipschitzienne de X dans $\mathbb{R}$. Alors*

1) $Lip(\lambda f) = |\lambda| Lip(f)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) $Lip(f+g) \leq Lip(f) + Lip(g)$.

Preuve.

1. Si λ est dans $\mathbb{R}$, pour (x,y) dans X^2

$$\begin{aligned} Lip(\lambda f) &= \sup_{x \neq y} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{d_X(x,y)} \\ &= \sup_{x \neq y} \frac{|\lambda| |f(x) - f(y)|}{d_X(x,y)} \\ &= |\lambda| Lip(f). \end{aligned}$$

   Donc λf est fonction lipschitzienne et $Lip(\lambda f) = |\lambda| Lip(f)$.

2. Soient f et g des fonctions lipschitzienne de X dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x, y \in X$, on a

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq (Lip(x) + Lip(y)) d_X(x,y). \end{aligned}$$

   Donc $f + g$ est fonction lipschitzienne et

$$Lip(f+g) \leq Lip(f) + Lip(g).$$

■

Proposition 1.2.3 *Soient X, Y et Z trois espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications lipschitziennes, alors $g \circ f : X \longrightarrow Z$ est lipschitzienne et*

$$Lip\,(g \circ f) \leq Lip\,(g)\, Lip\,(f)\,.$$

Preuve. Si f est lipschitzienne de X dans Y et g est lipschitzienne de Y dans Z, alors

$$\begin{aligned} d_Z\,(g \circ f\,(x)\,, g \circ f\,(y)) &\leq Lip\,(g)\, d_Y\,(f\,(x)\,, f\,(y))\,. \\ &\leq Lip\,(g)\, Lip\,(f)\, d_X\,(x, y)\,. \end{aligned}$$

Alors $g \circ f$ est lipschitzienne et

$$Lip\,(g \circ f) \leq Lip\,(g)\, Lip\,(f)\,.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

1.3 Espace de Lipschitz

Nous donnerons dans cette section quelques propriétés utiles concernant l'espace de tous les fonctions lipschitziennes définit d'un espace métrique dans un espace de Banach.

1.3.1 L'espace $Lip\,(X)$

Définition 1.3.1 *Soit X un espace métrique et E un espace de Banach. On note par $Lip(X, E)$ l'espace de toutes les fonctions lipschitziennes bornées de X dans E*

$$Lip\,(X, E) = \{\textit{fonctions lipschitziennes bornées } f : X \longrightarrow E\}\,,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{Lip(X,E)} = \max\left\{\|f\|_\infty\,,\ Lip\,(f)\right\}. \tag{1.2}$$

Si $E = \mathbb{R}$ alors $Lip(X, \mathbb{R}) = Lip\,(X)\,.$

$Lip\,(X)$ est un espace de Banach pour la norme (1.2)*, pour tout espace métrique X.*

1.3.2 L'espace $Lip_0(X)$

Soit (X, d_X, e) un espace métrique pointé. Pour tout espace de Banach E, nous désignons par $Lip_0(X,E)$ l'espace de toutes les applications lipschitziennes $f : X \longrightarrow E$ nulles au point e

$$Lip_0(X,E) = \{f : X \longrightarrow E \text{ lipschitzienne telle que } f(e) = 0\}.$$

On le munit de la norme

$$Lip\left(f\right) = \sup_{x \neq y} \frac{\left\| f\left(x\right) - f\left(y\right) \right\|}{d_X\left(x, y\right)}.$$

Si $E = \mathbb{R}$ alors $Lip_0(X, \mathbb{R}) = Lip_0\left(X\right).$

On l'appelle dual de Lipschitz et on le note par $X^{\#}$, l'espace de Banach des formes lipschitzenne sur X, i.e.,

$$X^{\#} = Lip_0\left(X, \mathbb{R}\right) = Lip_0\left(X\right),$$

muni de la norme

$$Lip\left(x^{\#}\right) = \sup_{x \neq y} \frac{\left| x^{\#}\left(x\right) - x^{\#}\left(y\right) \right|}{d_X\left(x, y\right)}.$$

1.4 Espaces Lipschitz-libres

Dans cet section on va présenter le prédual de $Lip_0(X)$, c'est à dire il existe un espace de Banach Z, telle que $Lip_0(X)$ est isométriquement isomorphe à Z^*.

Définition 1.4.1 *Soit X un espace métrique pointé. L'espace Lipschitz-libre sur X, noté $\mathcal{F}\left(X\right)$, est le sous-espace de $Lip_0(X)^*$suivant:*

$$\mathcal{F}\left(X\right) = \overline{vect}\left\{\delta_x;\ x \in X\right\},$$

telle que l'application $\delta_X : X \longrightarrow \mathcal{F}\left(X\right)$ définie par $\delta_X\left(x\right) = \delta_x$, pour $x \in X$, tel que:

$$\begin{array}{cccc} \delta_x : & X^{\#} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \delta_x\left(f\right) := f\left(x\right). \end{array}$$

On pose

$$\left\|\mu\right\|_{\mathcal{F}(X)} = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i\right| d\left(x_i, x_i'\right)\right\},$$

le infimum est portée sur touts les réprésentation de μ sous la forme

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\delta_{x_i} - \delta_{x'_i}).$$

On note que l'espace Lipschitz-libre introduit par Godefroy et Kalton en 2003 voir [5] bien que cet espace a eté présenté a la premiere fois par Arens-Eells on 1956 [1] voir aussi le livre de Weaver [7] pour plus d'informations.

Proposition 1.4.1 *Soit X un espace métrique pointé*
Les espaces $X^{\#}, \mathcal{F}(X)^*$ sont isométriquement isomorphique. C'est-à-dire $X^{\#} \cong \mathcal{F}(X)^*$.

Preuve. On définit l'application suivant

$$\begin{array}{llll} S: & \mathcal{F}(X)^* & \longrightarrow & Lip_0(X) \\ & \varphi & \longmapsto & S(\varphi)\,;\ (S(\varphi)(x) = \varphi(\delta_x - \delta_0)\,. \end{array}$$

Pour tout x, $x' \in X$. On a

$$\begin{aligned} |S(\varphi)(x) - S(\varphi)(x')| &= |\varphi(\delta_x - \delta_0) - \varphi(\delta_{x'} - \delta_0)| \\ &= |\varphi(\delta_x - \delta_{x'})| \\ &\leq \|\varphi\|\, d(x, x'). \end{aligned}$$

Ainsi $S(\varphi)(0) = \varphi(0)$, alors $S(\varphi) \in Lip_0(X)$. Nous concluons que S est une application linéaire et $\|S\| \leq 1$.

Maintenant on définit l'application suivant

$$\begin{array}{llll} R: & Lip_0(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}(X)^* \\ & f & \longmapsto & R(f)\,, \end{array}$$

telle que $R(f)(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f(x_i) - f(x'_i))$, pour $f \in Lip_0(X)$ et $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{\delta}_{x_i} - \boldsymbol{\delta}_{x'_i})$.

On a

$$\begin{aligned} |R(f)(\mu)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f(x_i) - f(x'_i)) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\, |f(x_i) - f(x'_i)| \\ &\leq Lip(f) \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\, d(x_i, x'_i), \end{aligned}$$

le infimum est portée sur touts les réprésentations de μ on trouve $R(f) \in \mathcal{F}(X)^*$ et $\|R(f)\| \leq Lip(f)$.

Alors nous concluons que R est une application linéaire non expanssive à partir de $Lip_0(X)$ à $\mathcal{F}(X)^*$.

Enfin, un simple calcul indique que $R \circ S = id_{\mathcal{F}(X)^*}$ et $S \circ R = id_{X^\#}$. Donc $X^\# \cong \mathcal{F}(X)^*$.

■

Proposition 1.4.2 *Soit (X, d) un espace métrique pointé. L'application $\delta_X : X \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ est l'injection isométrique non linéaire de X dans $\mathcal{F}(X)$. Soit $T : X \longrightarrow E$ une application lipshitzienne telle que $T(e) = 0$. Alors il existe une unique application linéaire $T_L : \mathcal{F}(X) \longrightarrow E$ telle que $T = T_L \circ \delta_X$ et $\|T_L\| = Lip(T)$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[dr, "T_L"] & \\ X \arrow[u, "\delta_X"] \arrow[r, "T"] & E \end{tikzcd}$$

Preuve. Pour tout x, $x' \in X$, et pour tout $f \in Lip_0(X)$ on a

$$\begin{aligned} \|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} &= \|\delta_x - \delta_{x'}\|_{\mathcal{F}(X)} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{F}(X)^*}} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, \varphi \rangle| \\ &= \sup_{R(g) \in B_{\mathcal{F}(X)^*}} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, R(g) \rangle|, \ R(g) = \varphi \\ &= \sup_{g \in B_{X^\#}} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, g \rangle| \\ &\leq \sup_{g \in B_{X^\#}} |g(x) - g(x')| \\ &\leq \sup_{g \in B_{X^\#}} Lip(g)\, d(x, x') \\ &\leq d(x, x'), \end{aligned}$$

ce que implique $\|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} \leq d(x, x')$.

Donc δ_X est lipshitzienne et $Lip\,(\delta_X) \leq 1$.
Pour l'inégalité inverse, pour tout $x, x' \in X$ on a

$$\begin{aligned}
\|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} &= \|\delta_x - \delta_{x'}\|_{\mathcal{F}(X)} \\
&= \sup_{f \in B_{X^\#}} |\langle\ \delta_x - \delta_{x'}, f\ \rangle| \\
&\geq |\langle\ \delta_x - \delta_{x'}, f_x\ \rangle| \\
&= |f_x(x) - f_x(x')|\ \text{(voir la Proposition (1.2.1))} \\
&= d(x, x').
\end{aligned}$$

On obtient finalement que

$$\begin{aligned}
\|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} &= \|\delta_x - \delta_{x'}\|_{\mathcal{F}(X)} \\
&= d(x, x'),
\end{aligned}$$

et $Lip\,(\delta_X) = 1$.

■

1.5 L'espace des molécules $M(X,E)$

Nous commençons par rappeler la définition et les propriétés de l'espace d'Arens-Eells. Nous référons à [Wea99] pour plus de détails.

Définition 1.5.1 *Soit (X, d_X) un espace métrique. Une molécule sur X est une fonction $m : X \to \mathbb{R}$ a support fini et satisfait* $\sum\limits_{x \in supp(m)} m(x) = 0$.

Désignons par $M(X)$ l'espace vectoriel de tous les molécules définies sur X .On peut écrire

$$\begin{aligned}
m &= \sum_{x \in supp(m)} m(x)\, 1_{\{x\}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m(x_i)\, \mathbf{1}_{\{x_i\}}.
\end{aligned}$$

Où $supp(m) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $1_{\{x\}}$ désigne la fonction caractéristique de $\{x\}$.

Remarque 1.5.1 *On peut montrer que tout $m \in M(X)$, s'écrit sous la forme*

$$\begin{aligned} m &= \sum_{m(x_i)\geqslant 0,i} m(x_i)\,\mathbf{1}_{\{x_i\}} + \sum_{m(x_i)<0,i} m(x_i)\,\mathbf{1}_{\{x_i\}} \\ &= \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left(\mathbf{1}_{\{x_i\}} - \mathbf{1}_{\{x_i'\}} \right). \end{aligned}$$

Cette écriture n'est pas unique.

Définition 1.5.2 *Soit (X, d_X) un espace métrique. Munissons l'espace des molécules $M(X)$ de la norme suivante*

$$\|m\|_{M(X)} = \left\{ \inf \sum_{j=1}^{l} |\lambda_j|\, d(x_j\ , y_j) : m = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \left(1_{\{x_j\}} - 1_{\{x_j'\}} \right) \right\}.$$

$\left(M(X), \|.\|_{M(X)}\right)$ *est une espace normé. Notons Æ(X) la complètè de l'espace normé* $\left(M(X), \|.\|_{M(X)}\right)$.
Pour tout $x, y \in X$ on définit le molecule m_{xy} par $m_{xy} = \mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{y\}}$.

Définition 1.5.3 *[3]*

a) Soit (X, d_X) un espace métrique et E un espace de Banach. Une E-molécule sur X est une fonction $m : X \to E$ a support fini et satisfait $\sum_{x\in X} m(x) = 0$.

Désignons par $M(X, E)$ l'espace vectoriel de tous les E-molécules définies sur X.

b) Une E-atom est une fonction de la forme $vm_{xx'}$ où $v \in E$, x,$x' \in X$.

Tout molecule est une some des atoms. i.e, $m = \sum_{i=1}^{n} v_j m_{x_j x_j'}$.

On définit le crochet $\langle ., . \rangle$ de $Lip_0(X, E^*)$ et $M(X, E)$ par

$$\langle T, m\rangle = \sum_{x\in X} \langle T(x), m(x)\rangle,\ m \in \mathcal{M}(X, E),\ T \in Lip_0(X, E^*)$$

Pour tout atom $m = vm_{x'y'}$ et $T \in Lip_0(X, E^*)$,

$$\begin{aligned} \langle T, m\rangle &= \sum_{x\in X} \langle T(x), vm_{x'y'}(x)\rangle \\ &= \langle T(x'), vm_{x'y'}(x')\rangle + \langle T(y'), vm_{x'y'}(y')\rangle \\ &= \langle T(x') - T(y'), v\rangle. \end{aligned}$$

Dans ce cas, pour $m = \sum_j v_j m_{x_j x_j'}$, on ait

$$\langle T, m\rangle = \sum_j \langle T(x_j) - T(x_j'), v_j\rangle \tag{1.3}$$

Chapitre 2

Les opérateurs lipschitz (q, p)-mixing

2.1 Opérateurs Lipschitz p-sommants

Nous présentons ici la version non linéaire d'opérateurs p-sommants [4] qui nous appelons les opérateurs Lipschitz p-sommants. Puis nous présentons le théorème de domination/factorisation de Pietsch et quelques propriétés sur ces opérateurs.

Soit (X, d_X) est un espace métrique pointé. La boule unité $B_{X^\#}$ de $X^\#$ est compact pour la topologie de convergence simple de X.

Définition 2.1.1 *Une application lipschitziene $T : X \to E$ est dite lipschitzienne p-sommant ($1 \leq p < \infty$), s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ (x_i)_{1\leq\ i\ \leq n}, (y_i)_{1\leq\ i\ \leq n}$ $\subset X$, $\forall\ (\alpha_i)_{1\leq\ i\ \leq n} \subset \mathbb{R}_+$, on ait*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_X(T(x_i) - T(y_i))^p \leq\ C^p sup_{f\in\ X^\#} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left|f(x_i) - f(y_i)\right|^p . \tag{2.1}$$

La classe des opérateurs lipschitziens p-sommants de X dans Y est notée par

$$\Pi_p^L(X, Y).$$

Muni de la norme

$$\pi_p^L(T) = inf \left\{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (2.1)}\right\}.$$

Théorème 2.1.1 *[4, Theorem 2] Soit* $(1 \leq p < \infty)$, *T un opérateur linéaire borné de E dans F. Alors*

$$\pi_p^L(T) = \pi_p(T).$$

Remarque 2.1.1 *1) Dans la définition, on peut prendre les* $\alpha_i = 1$.

2) $Lip(T) \leq \pi_p^L(T)$, *pour tout* $T \in \Pi_p^L(X,Y)$.

Proposition 2.1.1 (Proprieté idéal) *Soient X, Y, E, F des espaces métriques. Soit $v : E \longrightarrow X$, $w : Y \longrightarrow F$ des fonctions Lipschitziennes et $T : X \longrightarrow Y$, un opérateur Lipschitz p-sommant. Alors l'opérateur wTv est Lipschitz p-sommant et*

$$\pi_p^L(wTv) \leq Lip(w)\pi_p^L(T)\, Lip(v).$$

Preuve. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n} \subset E$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} d(wTv(x_i), wTv(y_i))^p &\leq Lip(w)^p \sum_{i=1}^{n} d(Tv(x_i), Tv(y_i))^p \\
&\leq Lip(w)^p\ \pi_P^L(T) \sup_{f \epsilon B_{X\#}} \sum_{i=1}^{n} |f(v(x_i)) - f(v(y_i))|^p \\
&\leq Lip(w)^p\ \pi_P^L(T)\ Lip(v)^p \sup_{f \epsilon B_{X\#}} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f(v(x_i))}{Lip(v)} - \frac{f(v(y_i))}{Lip(v)} \right|^p \\
&\leq Lip(w)^p\ \pi_P^L(T)\ Lip(v)^p \sup_{g \epsilon B_{E\#}} \sum_{i=1}^{n} |g(v(x_i)) - g(v(y_i))|^p .
\end{aligned}$$

D'où $wTv \in \pi_p^L(E,F)$ et $\pi_P^L(wTv) \leq Lip(w)\ \pi_P^L(T)\ Lip(v)$ ■

Proposition 2.1.2 *L'espace* (Π_p^L, π_p^L) *est injectif.*

Preuve. Soient $i : E \hookrightarrow F$ l'*injection linéaire métrique,* et $T \in Lip_0(X,E)$ tel-que $i \circ T \in \Pi_p^L(X,E)$. Puisque i est une injection, donnée $(x_i)_{i\leq n}, (y_i)_{i\leq n}$ dans X, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i) - T(y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \|iT(x_i) - iT(y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p^L(iT) \sup_{f \in X\#} (\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)|^p)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $T \in \Pi_p^L(X,E)$ et $\pi_p^L(T) \leq \pi_p^L(iT)$. Et la propriété d' idéal donnée l'inégalité inverse, et donc $\pi_p^L(T) = \pi_p^L(i \circ T)$. Cela montre que Π_p^L est injective. ■

Le théorème suivant donne la caracteresation des opérateurs Lipschitz p-sommants.

Rappelons qu'un espace metrique Z est injectif si pour tout sous espace F_0 d'un espace métrique F et pour tout $w \in Lip(F_0, Z)$, v admet un prolongement $\widetilde{w} \in Lip(F, Z)$ avec $Lip(v) = Lip(\widetilde{w})$.

Théorème 2.1.2 *Soient* $1 \leq p < \infty$, $C > 0$ *et* $T : X \longrightarrow Y$ *un opérateur entre les espaces métriques* X *et* Y*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes en la constante* C*.*

(a) L'opérateur T *est Lipschitz p-sommants et* $\pi_p^L(T) \leq C$.

(b) Il existe une mesure de probabilité régulière μ *sur* $B_{X^\#}$ *telle que:*

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C \left(\int\limits_{B_{X^\#}} |f(x) - f(y)|^p \, d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

"Théorème de Domination de Pietsch".

(c) Pour tout isométrie J *de* Y *dans un espace injectif* Z*, le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J} & Z \\ A \downarrow & & & & \uparrow B \\ L_\infty(B_{X^\#}, \mu) & & \xrightarrow{J_P} & & L_p(B_{X^\#}, \mu) \end{array}$$

avec $Lip(A)Lip(B) \leq C$.

"Théorème de Factorisation".

Théorème 2.1.3 (Théorème d'inclusion) *Soient* X, Y *deux espaces métriques et* $1 \leq p < q < +\infty$*, alors*

$$\pi_p^L(X,Y) \subset \pi_q^L(X,Y)$$

et

$$\pi_q^L(T) \leq \pi_p^L(T) \textit{pour tout} T \in \pi_p^L(X,Y).$$

2.2 Opérateurs Lipschitz (q, p)-mixing

Définition 2.2.1 *Soit $1 \leq p, q \leq \infty$. On dit que l'opérateur $T : X \to Y$ est Lipschitz (q, p)-mixing avec constant k, si pour tout espace métrique Z et tout opérateur Lipschitz q-sommant $S : Y \to Z$, la composition $S \circ T$ est un opérateur Lipschitz p-sommant et*

$$\pi_p^L(S \circ T) \leq k \pi_q^L(S).$$

La plus petite k sera noté $m_{q,p}^L(T)$. On note $M_{q,p}^L(X, Y)$ l'espace des opérateurs Lipschitz (q, p)-mixing.

Remarque 2.2.1 *Pour tout $T \in M_{q,p}^L(X, Y)$ on ait*

$$Lip(T) \leq \pi_p(T) \leq m_{q,p}^L(T). \tag{2.2}$$

Exemple 2.2.1 *Un premier exemple est apparaît déjà dans [FJ09], où un résultat non linéaire de Grothendieck est prouvée. C'est a dire, l'opérateur Lipschitz T d'un arbre métrique X dans un espace de Hilbert H est Lipschitz 1-sommant et en fait $\pi_1^L(S \circ T) \leq k_G$ $Lip(T)$, où K_G est la constante de Grothendieck.*

Ce résultat, implique que l'identité sur X est $(2, 1)$-mixing avec constante de Grothendieck.

Preuve. *En effet, Soient Y un espace métrique et $S : X \to Y$ Lipschitz 2-sommant. Alors d'après le théorème de factorisation on ait,*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{S} & Y & \xrightarrow{J} & Z \\ A\downarrow & & & & \uparrow B \\ L_\infty(B_{X^\#}, \mu) & & \xrightarrow{J_2} & & L_2(B_{X^\#}, \mu) \end{array}$$

Comme $J_2 \circ A$ un opérateur de X dans espace de Hilbert L_2, alors $J_2 \circ A$ est Lipschitz 1-sommant et $\pi_1^L(J_2 \circ A) \leq k_G.Lip(A)$. Donc d'après la propriété d'idéal et l'njectivité on trouve

$$\pi_1^L(S \circ I_X) = \pi_1^L(J \circ S \circ I_X) = \pi_1^L(B \circ (J_2 \circ A) \circ I_X) \leq k_G.Lip(A).Lip(B),$$

ce qui implique que

$$\pi_1^L(S \circ I_X) \leq k_G \pi_2^L(S).$$

D'où I_X est $(2,1)$-mixing. ■

Lemme 2.2.1 *Pour montrer que $T : X \to Y$ est Lipschitz (q,p)-mixing, il suffit de considérer sa composition avec des opérateurs de Y dans ℓ_q (ou , tout autre espace L_q de dimension infinie).*

Preuve. Premièrement, nous pouvons supposer sans pèrdre la généralité que X et Y sont des espaces métriques fini.

Maintenant on suppose que

$$\pi_p^L(R \circ T) \leq C\pi_q^L(R) \text{ pour tout } R : Y \to \ell_q \tag{2.3}$$

Et soit $S : Y \to Z$ une application Lipschitz q-sommant. Soit $J : Z \to W$ l'injection isométrique de l'espace métrique Z dans l'espace **1-injective** W. Par le théorème de fatorization pour les opérateurs Lipschitz q-sommant, on a

$$\begin{array}{ccccc}
L_\infty(\mu) & & \longrightarrow^{\ell_{\infty,q}} & & L_q(\mu) \\
A \uparrow & & & & \downarrow B \\
Y & \to^S & Z & \to^J & W
\end{array}$$

avec $Lip(A).Lip(B) = \pi_q^L(S)$.

Puisque Y est un ensemble fini, le rang de $I_{\infty,q} \circ A$ est un sous-ensemble fini de $L_q(\mu)$ et donc est presque isométrique à un sous-ensemble de ℓ_q. On a donc $I_{\infty,q} \circ A$ est une application lipschitzienne de Y dans ℓ_q, alors la condition (2.3) donne

$$\pi_p^L(I_{\infty,q} \circ A \circ T) \leq C\ \pi_q^L(I_{\infty,q} \circ A).$$

D'après la propriété d'idéal pour les applications lipschitzienne q-sommant, on a

$$\pi_q^L(I_{\infty,q} \circ A) \leq C\ Lip(A)\pi_q^L(I_{\infty,q}) = C Lip(A),$$

alors que la propriété d'idéale pour les applications lipschitzienne p-sommant nous donne

$$\begin{aligned}\pi_p^L(J \circ S \circ T) &= \pi_p^L(B \circ I_{\infty,q} \circ A \circ T) \\ &\leq Lip(B)\ \pi_q^L(I_{\infty,q} \circ A \circ T) \\ &\leq Lip(B).C.Lip(A) \\ &= C\ \pi_q^L(S)\end{aligned}$$

Comme J est une injection isométrique, on ait

$$\pi_p^L(J \circ S \circ T) = \pi_p^L(S \circ T).$$

Donc nous concluons que

$$\pi_p^L(S \circ T) \leq C\ \pi_q^L(S).$$

C'est-à-dire que T est Lipschitz (q, p)-mixing. ■

La propriété d'idéal pour les opérateurs Lipschitz p-sommant donne:

Proposition 2.2.1 *Pour tout opérateur T, on a*

1) $m_{q,p}^L(T) = Lip(T)$ pour tout $q \leq p$

2) $m_{\infty,p}^L(T) = \pi_p^L(T)$.

Donc ce cas, le seul cas donne quelque chose de nouveau est $q \geq p$.

Preuve. 1) Il suffit de montre que $m_{q,p}^L(T) \leq Lip(T)$.

Si $q \leq p \Rightarrow \Pi_q^L(X, Y) \subset \Pi_p^L(X, Y)$ et $\pi_p^L(R) \leq \pi_q^L(R)$, pour tout $R \in \pi_q$.

Donc pour tout $T \in m_{q,p}^L(T)$, on ait

$$\begin{aligned}\pi_p^L(S \circ T) &\leq \pi_q^L(S \circ T) \\ &\leq Lip(T).\pi_q^L(S).\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$m_{q,p}^L(T) \leq Lip(T).$$

2) Il suffit de montre que $m_{\infty,p}^L(T) \leq \pi_p^L(T)$.

Soit $T \in \Pi_p^L(X, Y)$, alors pour tout espace métrique Z et $S \in \Pi_\infty^L(Y, Z) = Lip(Y, Z)$, on ait

$$\begin{aligned}\pi_p^L(S \circ T) &\leq Lip(S).\pi_q^L(T) \\ &= \pi_q^L(T).\pi_\infty^L(S).\end{aligned}$$

D'où

$$m^L_{\infty,p}(T) \leq \pi^L_p(T).$$

■

Proposition 2.2.2 (Propriété d'idéale) *Soient X, Y, E, F des espaces métriques. Soit $B : E \longrightarrow X$, $A : Y \longrightarrow F$ des fonctions Lipschitziennes et $T : X \longrightarrow Y$, un opérateur Lipschitz (q, p)-mixing. Alors l'opérateur $A \circ T \circ B$ est Lipschitz q,p-mixing et*

$$m^L_{q,p}(A \circ T \circ B) \leq Lip(A).m^L_{q,p}(T).Lip(B).$$

Preuve. Soient X, Y, E, F des espaces métriques.
Soit $B : E \longrightarrow X$, $A : Y \longrightarrow F$ des fonctions Lipschitziennes et $T : X \longrightarrow Y$, un opérateur Lipschitz (q, p)-mixing.

D'après la définition des opérateurs (q, p)-mixing on obtient

$$\begin{array}{rcl} \pi_p(S \circ (A \circ T \circ B)) & = & \pi_p((S \circ A \circ T) \circ B) \\ & \leq & \pi_p(S \circ A \circ T)\ Lip(B) \\ & \leq & \pi^L_p(S \circ A)\ m^L_q(T)\ Lip(B) \\ & \leq & Lip(A).\pi^L_p(S)\ m^L_q(T)\ .Lip(B). \end{array}$$

D'où

$$m^L_{q,p}(A \circ T \circ B) \leq Lip(A).m^L_{q,p}(T).Lip(B).$$

■

Proposition 2.2.3 *Soient X, Y et Z trois espaces métriques et p, q et r dans $[1, \infty]$. Si $T : X \to Y$ est Lipschitz (p, r)-mixing et $S : Y \to Z$ est Lipschitz (q, p)-mixing, alors la composition $S \circ T$ est Lipschitz (q, r)-mixing et*

$$m^L_{q,r}(ST) \leq m^L_{q,p}(S).m^L_{p,r}(T).$$

Proposition 2.2.4 *Soient X, Y deux espace métriques.*
Soit $T \in M^L_{q_2,p_2}(X, Y)$.
Si $p_1 \leq p_2$ et $q_1 \geq q_2$, alors

$$M^L_{q_2,p_2}(X, Y) \subset M^L_{q_1,p_1}(X, Y)$$

et

$$m^L_{q_2,p_2}(T) \leq m^L_{q_1,p_1}(T), \text{ pour tout } \; q_1 \geq q_2 \text{ et } p_2 \geq p_1.$$

Preuve. Soient X,Y deux espace métriques.

Soient $T : X \longrightarrow Y$ *et* $S : Y \longrightarrow Z$ des appliqations Lipschitz (q,p)-mixing, on a

$$\begin{array}{rcc} M^L_{q_1,p_1}(X,Y) & \subset & M^L_{q_2,p_2}(X,Y) \\ \pi^L_{p_1}(S \circ T) & \leq & m^L_{q_1,p_1}(T)\ \pi^L_{q_1}(S) \\ & \leq & m^L_{q_1,p_1}(T)\ \pi^L_{q_2}(S),\ \mathrm{q}_1 \geq \mathrm{q}_2 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcc} \pi^L_{p_2}(S \circ T) & \leq & \pi^L_{p_1}(S \circ T) \\ & \leq & m^L_{q_1,p_1}(T)\ \pi^L_{q_2}(S),\ \mathrm{p}_2 \geq \mathrm{p}_1 \\ \pi^L_{p_2}(S \circ T) & \leq & m^L_{q_1,p_1}(T)\ \pi^L_{q_2}(S). \end{array}$$

D'où

$$M^L_{q_2,p_2}(X,Y) \subset M^L_{q_1,p_1}(X,Y)$$

et

$$m^L_{q_2,p_2}(T) \leq m^L_{q_1,p_1}(T), \text{ pour tout } \; \mathrm{q}_1 \geq \mathrm{q}_2 \text{ et } \mathrm{p}_2 \geq \mathrm{p}_1.$$

■

Chapitre 3

Caractérisations

Nous présentons ici trois caractérisations différentes des opérateurs Lipschitz (q,p)-mixing, toutes inspirées par des résultats analogues dans le cas linéaire.

3.1 Domination.

La première caractérisation est proche dans l'esprit de la caractérisation des opérateurs Lipschitz p-sommant par le théorème de domination $[FJ09]$.

Théorème 3.1.1 *Soient* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $T : X \to Y$ *un opérateur lipschitzien et* $C \geq 0$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

Théorème 3.1.2 *1)* T *est Lipschitz* $(q.p)$*-mixing avec* $m^L_{q,p}(T) \leq C$.

2) Pour toute probabilité μ *sur* $B_{Y^\#}$ *il existe une probabilité* ν *sur* $B_{X^\#}$ *telle que, pour tout* $x, x' \epsilon X$ *on ait*

$$\left[\int_{B_{Y^\#}} |g(Tx) - g(Tx')|^q \, d\mu(g)\right]^{\frac{1}{q}} \leq C \left[\int_{B_{X^\#}} |f(x) - f(x')|^P \, d\nu(f)\right]^{\frac{1}{p}}$$

3) Pour tout $x_1, ..., x_m, x'_1, ..., x'_m \in X$ *et* $g_1, ..., g_n \ \epsilon \ Y^\#$,

$$\left[\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n}\left|g_k(Tx_j) - g_k(Tx'_j)\right|^q\right]^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{1}{p}} \leq C\left[\sum_{k=1}^{n} Lip(g_k)^q\right]^{\frac{1}{q}} . \sup_{f \epsilon B_{X^\#}} \left[\sum_{j=1}^{m}\left|f(x_j) - f(x'_j)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

4) Pour tout $x_1, ..., x_m, x'_1, ..., x'_m \in X$ et tout probabilitè μ sur $B_{Y^\#}$,

$$\left[\sum_{j=1}^{m}\left[\int_{B_{Y^\#}}\left|g(Tx_j)-g(Tx'_j)\right|^q d\mu(g)\right]^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{f\in B_{X^\#}}\left[\sum_{j=1}^{m}\left|f(x_j)-f(x'_j)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.1)$$

Dans ce cas, $m^L_{q,p}(T)$ est égal à l'infimum de ces constantes C dans soit (2), (3) ou (4).

Preuve. Le cas $q = \infty$ se réduit au théorème de domination pour les opérateurs Lipschitz p-sommant (d'après la Proposition 2.2.1), donc on va supposer que $1 \leq p \leq q \prec \infty$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons que $T : X \to Y$ est Lipschitz (q,p)-mixing et soit μ une mesure de probabilité sur $B_{Y^\#}$. L'inclusion canonique $d_\mu : C(k) \longrightarrow L_q(\mu)$, est un opérateur Lipschitz q-sommant de norme ≤ 1.

Donc, la composition $j_\mu \circ T$ est lipschitz p-sommant. Par le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs lipschitziens p-sommants, il existe une mesure de probabilité ν sur $B_{X^\#}$ telle que pour tout $x, x'\epsilon X$,

$$\|j_\mu \circ T(x) - j_\mu \circ T(x')\|_{L_q(\mu)} \leq \pi^L_p(j_\mu \circ T)\left[\int_{B_{X^\#}}|f(x)-f(x')|^P d\nu(f)\right]^{\frac{1}{p}}$$

i.e,

$$\left[\int_{B_{Y^\#}}|g(Tx)-g(Tx')|^q d\mu(g)\right]^{\frac{1}{q}} \leq \pi^L_p(j_\mu \circ T)\left[\int_{B_{X^\#}}|f(x)-f(x')|^P d\nu(f)\right]^{\frac{1}{p}}$$

Donc, on a la condition (2) avec

$$C = \pi^L_p(J_\mu \circ T) \leq m^L_{q,p}(T)\pi^L_q(J_\mu) \leq m^L_{q,p}(T).$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) On peut supposer sans perte de généralité que

$$\sum_{k=1}^{n} Lip(g_k)^q = 1.$$

Alors $\mu := \sum_{k=1}^{n} Lip(g_k)^q \delta_{g_k/Lip(g_k)}$, (ou δ_g est la mesure de dirac en $g\ \epsilon Y^\#$) est une mesure de probabilité sur $B_{Y^\#}$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}\left[\int_{B_{Y\#}}|g(Tx)-g(Tx')|^{q}\,d\mu(g)\right]^{\frac{p}{q}}\\
=&\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n}Lip(g_k)^{q}\left|\frac{g_k}{Lip(g_k)}(Tx_j)-\frac{g_k}{Lip(g_k)}(Tx'_j)\right|^{q}\right]^{\frac{p}{q}}\\
=&\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{Lip(g_k)^{q}}{Lip(g_k)^{q}}\left|g_k(Tx_j)-g_k(Tx'_j)\right|^{q}\right]^{\frac{p}{q}}\\
=&\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n}\left|g_k(Tx_j)-g_k(Tx'_j)\right|^{q}\right]^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Alors, d'aprés la condition (2) on a

$$\begin{aligned}
\leq\ & C^{p}\sum_{j=1}^{m}\int_{B_{Y\#}}|f(x)-f(x')|^{p}\,d\nu(f)\\
\leq\ & C^{p}\sum_{j=1}^{m}|f(x)-f(x')|^{p}.
\end{aligned}$$

Donc on a la condition (3) avec la même constante C.

(3) $\Longrightarrow$ (4) La condition (3) signifie que toutes les mesures de probabilité μ à support fini sur $B_{Y\#}$ satisfait l'inégalité (3.1). Puisque l'ensemble de toutes les mesures de probabilité à support fini sur $B_{Y\#}$ est $\sigma(C(B_{Y\#})^{*},C(B_{Y\#}))$ dense dans l'ensemble de tout les mesures de probabilité sur $B_{Y\#}$, alors l'inégalité (3.1), est satisfaite pour tout mesure de probabilité μ sur $B_{Y\#}$.

(4) $\Longrightarrow$ (3) Soit $S:Y\to Z$ est Lipschitz q-sommant. D'après le théorème de domination, il existe une mesure μ telle que pour tous $y,y'\in Y$

$$d_Z(S(y),S(y'))^{p}\leq\pi_p^{L}(S)^{p}\left[\int_{B_{Y\#}}|g(y)-g(y)|^{q}\,d\mu(g)\right]^{\frac{p}{q}}$$

On fixe $x_1,...,x_m,x'_1,...,x'_m\ \epsilon\ X$. Alors, d'après linégalité précédente,

$$\left[\sum_{j=1}^{m}d_Z(S(Tx_j))-(S(Tx'_j)))^{p}\right]^{\frac{1}{p}}\leq\pi_q^{L}(S)\left[\sum_{j=1}^{m}\left[\int_{B_{Y\#}}\left|g(Tx_j)-g(Tx'_j)\right|^{q}\,d\mu(g)\right]^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

avec (3.1), on obtient

$$\left[\sum_{j=1}^{m} d_Z(S(Tx_j)) - (S(Tx'_j)))^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq C\ \pi_q^L(S) \sup_{f \epsilon B_{X^\#}} \left[\sum_{j=1}^{m} |f(x) - f(x')|^P\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Donc SoT est Lipschitz p-sommant et

$$\pi_p^L(SoT) \leq C\pi_q^L(S).$$

D'où T est Lipschitz (q,p)-mixing et

$$m_{q,p}^L(T) \leq C.$$

■

3.2 Les suites (q, p)-mixing

Les opérateurs linéaires (q,p)-mixing ont été donnés par Pietsch [Pie80]. Parce qu'un opérateur linéaire est (q,p)-mixing si et seulement si l'opérateur linéaire transferme les suites faiblement p-sommable en des suites (q,p)-mixing. Le résultat analogue dans le cas lipschitzienne découlera par le théorème précédent, car nous trouvons une contrepartie non linéaire appropriée de suite (q,p)-mixing. Nous utiliserons le lemme de Ky Fan minimax (voir [Pie80, Lemme E.4.2].).

Une famille $\mathcal{A}$ de fonctions réelles définies sur un ensemble K est appelée concave si donnée $\phi_n, ..., \phi_n \in \mathcal{A}$. Et $\alpha_n, ..., \alpha_n \geq 0$ tel que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, il existe $\phi \in \mathcal{A}$ satisfaisant $\phi(x) \geq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_j(x)$ pour tout $x \in K$.

Maintenant nous prouvons un résultat analogue à [Pie80,Thm .16.4.3](voir $[Mau74]$).

Proposition 3.2.1 *Soit* $1 \leq p \leq q < \infty$ *et* $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. *Pour toutes points* $x_1, ..., x_m, x'_1, ..., x'_m \in X$,

$$\sup \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n} \left[\int_{B_{X^\#}} \left| f(x_j) - f(x'_j) \right|^q d\mu(f) \right]^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} : \mu \text{ est une probabilité sur } B_{X^\#} \right\} \tag{3.2}$$

$$= \inf \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^r \right]^{\frac{1}{r}} \sup_{f \epsilon B_{X^\#}} \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-q} \left| f(x_j) - f(x'_j) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} : \lambda_j > 0 \right\}$$

Preuve. On définie σ le supremum du côté gauche (3.2) (on note qu'il est fini). Soit $u = \frac{r}{p}$ et $v = \frac{q}{p}$, donc $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$. Nous considérons maintenant le compact, sous-ensemble convexe

$$K = \left\{ \xi = (\xi)_{j=1}^{n} : \sum_{j=1}^{n} \xi_j^u \leq \sigma^p \text{ et } \xi_j \geq 0 \right\} \subset \ell_u^n$$

Pour $\varepsilon > 0$ et μ une probabilité sur $B_{X^\#}$, l'équation

$$\phi(\xi) = \sum_{j=1}^{n} (\ \xi_j + \varepsilon)^{-v} \int_{B_{X^\#}} \left| f(x_j) - f(x'_j) \right|^q d\mu(f)$$

définit une fonction convexe continue ϕ sur K. On prend le vecteur $\xi \epsilon \mathbb{R}^n$ avec

$$\xi_j = \left(\int_{B_{X^\#}} \left| f(x_j) - f(x'_j) \right|^q d\mu(f) \right)^{\frac{1}{uv}}.$$

Alors $\xi \in K$ et $\phi(\xi) \leq \sigma^p$. Puisque la famille $\mathcal{A}$ de toutes les fonctions ϕ obtenue de cette manière est concave, d'après le lamme de Ky Fan, nous pouvons trouver $\xi^0 \epsilon K$ tel que $\phi(\xi^0) \leq \sigma^p$ pour tous $\phi \in \mathcal{A}$. En particulier, considérant la mesure de Dirac δ_f on $f \in B_{X^\#}$ nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{n} (\ \xi_j^0 + \varepsilon)^{-v} \left| f(x_j) - f(x'_j) \right|^q \leq \sigma^p.$$

On pose $\lambda_j(\varepsilon) := (\ \xi_j^0 + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}$. Alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\varepsilon)^r \right]^{\frac{1}{r}} = \left[\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{\frac{r}{p}} \right]^{\frac{1}{r}} = \left[\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{u} \right]^{\frac{1}{r}} \leq \sigma^{\frac{p}{r}} = \sigma^{\frac{1}{u}}$$

et, pour $f \in B_{X^\#}$, on a

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\varepsilon)^{-q} \left| f(x_j) - f(x'_j) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} = \left[\sum_{j=1}^{n} (\ \xi_j^0 + \varepsilon)^{-v} \left| f(x_j) - f(x'_j) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \leq \sigma^{\frac{p}{q}} = \sigma^{\frac{1}{v}}.$$

Donc, le côté droit de (3.2) est inférieur ou égal au côté gauche.

Inversement, soit $\lambda_j > 0$ est arbitraire. Par l'inégalité de Hölder pour toute mesure de probabilité μ sur $B_{X^\#}$ nous avons

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{j=1}^{n} \left[\int_{B_{X^\#}} \left| f(x_j) - f(x'_j) \right|^q d\mu(f) \right]^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \\
= & \left[\sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_j \left(\int_{B_{X^\#}} \lambda_j^{-q} \left| f(x_j) - f(x'_j) \right|^q d\mu(f) \right)^{\frac{1}{q}} \right]^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
\leq & \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^r \right]^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{B_{X^\#}} \lambda_j^{-q} \left| f(x_j) - f(x'_j) \right|^q d\mu(f) \right)^{\frac{1}{q}} \\
= & \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^r \right]^{\frac{1}{r}} \left(\int_{B_{X^\#}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-q} \left| f(x_j) - f(x'_j) \right|^q d\mu(f) \right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq & \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^r \right]^{\frac{1}{r}} \sup_{f \epsilon B_{X^\#}} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-q} \left| f(x_j) - f(x'_j) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Le Tthéorème 3.2.1et la Proposition 3.2.1 nous donnent immédiatement une autre caractérisation des opérateurs lipschitz $(q.p)$-mixing, indiquée ci-dessous.

Corollaire 3.2.1 *Soit* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *et* $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. *Un opérateur Lipschitz* $T : X \to Y$ *est* (q,p)*-mixing si est seulement s'il existe une constante* C *telle que pour tout* $x_1, ..., x_m, x'_1, ..., x'_m \in X$, *on ait*

$$\inf \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^r \right]^{\frac{1}{r}} \sup_{g \in B_{Y^\#}} \left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-q} \left| g(Tx_j) - g(Tx'_j) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} : \lambda_j > 0 \right\}$$
$$\leq \ C \sup_{f \in B_{X^\#}} \left[\sum_{j=1}^{n} \left| f(x_j) - f(x'_j) \right|^p \right]^{\frac{1}{P}}.$$

Dans ce cas, $m^L_{q,p}(T)$ *égale à l'infimum des constantes* C.

3.3 La norme de Chevet-Saphar et opérateurs Lipschitz (q, p)-mixing

Soient $(\lambda_j)_j \subset R$, $(x_j)_j$ et $(x_j^{'})_j$ dans X, on définit

$$w_p^{Lip}\left((\lambda_j, x_j, x_j^{'})_j\right) := \sup_{f \in B_{X^\#}} \left\| \left(\lambda_j \left[f(x_j) - f(x_j^{'})\right]\right)_j \right\|_p .$$

Définition 3.3.1 *Soit $m \in \mathcal{M}(X,E)$, on définit la norme p-Chevet–Saphar sur $\mathcal{M}(X,E)$ par*

$$cs_p(m) = \inf\left\{ \|(\lambda_j \|v_j\|)_j\|_p \, w_{p'}^{Lip}\left((\lambda_j^{-1}, x_j, x_j^{'})_j\right) : m = \sum_j v_j m_{x_j x_j'}, \ \lambda_j > 0 \right\}, \ pour \ 1 < p < \infty,$$

et

$$cs_1(m) = \inf\left\{ \sum_{j=1} \|v_j\| \, d_X\left(x_j, x_j'\right) : m = \sum_j v_j m_{x_j x_j'}, \right\}, \ pour \ p = 1,$$

et

$$cs_\infty(m) = \inf\left\{ \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_j \|v_j\| \left| f_k(x_j) - f_k(x_j^{'}) \right| : m = \sum_j v_j m_{x_j x_j'}, \right\}, \ pour \ p = \infty.$$

Théorème 3.3.1 *[3]Pour tout $1 \leq p \leq \infty, .cs_p(.)$ est une norme sur $\mathcal{M}(X,E)$.*

On dénote par $CS_P(X,E)$ l'espace normé $(\mathcal{M}(X,E), cs_p(.))$ qui s'appelle l'espace de P-Chevet-Saphar.

Théorème 3.3.2 *[3] Les espaces $CS_p(X,E)^*$ et $\Pi_{p'}^L(X,E^*)$ sont isométriquement isomorphe.*

Maintenant, nous arrivons à la troisième caractérisation des lopérateurs Lipschitz (q,p)-mixing.

Rappelons que pour tout espace de Banach E et tout Lipschitz $T : X \to Y$, on définit l'opérateur linéaire $T_E : M(X,E) \to M(Y,E)$ par

$$T_E\left(\sum_{j=1}^n v_j m_{x_j x_j'}\right) = \sum_{j=1}^n v_j m_{Tx_j Tx_j'}$$

Théorème 3.3.3 *Soit $T : X \to Y$ une application lipschitzienne. Les prpriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *1) T est Lipschitz (q,p)-mixing et $m^L_{q,p} \leq C$.*

   2) Pour tout espace de Banach G (ou seulement $G = \ell_{q'}$), l'opérateur $T_G : CS_{p'}(X,G) \to CS_{q'}(Y,G)$ est continu.

   Dans ce cas,

$$\begin{aligned} m^L_{q,p}(T) &= \left\| T_{\ell_{q'}} : CS_{p'}(X,\ell_{q'}) \to CS_{q'}(Y,\ell_{q'}) \right\| \\ &\geq \| T_G : CS_{p'}(X,G) \to CS_{q'}(Y,G) \| . \end{aligned}$$

Preuve. Premièrement, supposons que T est Lipschitz (q,p)-mixing. Soit $\varphi \in (CS_{q'}(Y,G))^*$ avec $\|\varphi\| \leq 1$. Comme $(CS_{q'}(Y,G))^* \equiv \Pi^L_q(Y,G^*)$, on peut identifier φ avec un opérateur $L_\varphi \in \Pi^L_q(Y,G^*)$ tel que $\pi^L_q(L_\varphi) = \|\varphi\| \leq 1$. Soit $m = \sum_j \upsilon_j m_{x_j x'_j} \in M(X,G)$.

Alors $T_G(m) = \sum_j \upsilon_j m_{Tx_j Tx'_j}$, et

$$\begin{aligned} \langle \varphi, T_G(m) \rangle &= \left\langle \sum_j L_\varphi(Tx_j) - L_\varphi(Tx'_j), \upsilon_j \right\rangle \\ &= \langle L_\varphi \circ T, m \rangle \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, T_G(m) \rangle| \qquad |\langle L_\varphi \circ T, m \rangle| &\leq \pi^L_p\left(L_\varphi \circ T\right) cs_{p'}(m) \\ &\leq \pi^L_q(L_\varphi) m^L_{q,p}(T) cs_{p'}(m) \\ &\leq m^L_{q,p}(T) cs_{p'}(m) \end{aligned}$$

En prenant la supremum sur tous les φ, on aura

$$cs_{q'}(T_G(m)) \leq m^L_{q,p}(T) cs_{p'}(m)$$

ainsi

$$T_G : CS_{P'}(X,G) \to CS_{q'}(Y,G)$$

est continu et

$$\|T_G\| \leq m^L_{q,p}(T).$$

Inversement, on suppose que $T_{\ell_{q'}} : CS_{P'}(X, \ell_{q'}) \to CS_{q'}(Y, \ell_{q'})$ est continu et a une norme C, et soit $S : Y \to \ell_q$ un opérateur $q-$somment. Il suffit de montre que $S \circ T$ est p-sommant.

Soit $m \in \mathcal{M}(X, \ell_{q'})$, on prend $m = \sum_j \upsilon_j m_{x_j x_j'}$ où $\upsilon_j \in \ell_{q'}$ et $x_j, x_j' \in X$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \langle S \circ T, m \rangle & = & \sum_j \left\langle \upsilon_j, (STx_j) - S(Tx_j') \right\rangle \\ & = & \left\langle S, \sum_j \upsilon_j m_{Tx_j Tx_j'} \right\rangle \\ & = & \left\langle S, T_{\ell_{q'}}(m) \right\rangle \end{array}$$

De la dualité entre la norme q-sommant et la norme $q'-$Chevet-Saphar,

$$\begin{array}{rcl} |\langle S \circ T, m \rangle| & = & \left| \left\langle S, T_{\ell_{q'}}(m) \right\rangle \right| \\ & \leq & \pi_q^L(S)\ cs_{q'}(T_{\ell_{q'}}(m)) \\ & \leq & \pi_q^L(S)\ .C.\ cs_{p'}(m). \end{array}$$

Prenant le supermum sur tous les m avec $cs_{p'}(m) \leq 1$ et en invoquant la dualité entre la norme de Lipschitz p-sommant et la norme p'-Chevet-Saphar, nous concluons que

$$\pi_p^L(S \circ T) \leq C \pi_q^L(S).$$

D'après le lemme 2.1, (la condition siffésante), nous concluons que T est Lipschitz (q, p)-mixing avec $m_{q,p}^L \leq C$. ■

Conclusion

Les opérateurs lipchitziens (q, p)-mixing sont considérés comme la version lipchitzienne des opérateurs linéaires (q, p)-mixing. Ils ont été introduits par Chávez-Domínguez en 2012.

A partire de la théorie des opérateurs Lipschitz p-sommants, nous introduisons la définition principale des opérateurs Lipschitz (q, p)-mixing . Ensuite, trois caractéristations différentes de ces opérateurs sont présentées. La premiere est une inégalité intégrale suivant le théorème de domination de Pietsch, tandis que la seconde correspond aux suites (q, p)-mixing et la troisième repose sur l'espace de Chevet-Saphar.

Bibliographie

[1] R. F. Arens and J. Eels, *On embedding uniform and topological spaces*, Pacific J. Math **6** (1956), 397-403.

[2] Javier Alejandro Chávez-Domínguez. Lpschitz (q, p)-mixing operators. Proceedings of the America Mathematical Socity. Volume 140, Number 9, September 2012, Pages 3101–3115.

[3] Javier Alejandro Chávez-Domínguez. Duality for Lipschitz p-summing operators, J Funct. Anal 261(2011)387-407.

[4] J.D.Farmer and W.B. Johnson, *Lipschitz p-summing operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **137**(9) (2009),2989-2995.

[5] N. J. Kalton and G. Godefroy, *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math. **159** (2003), 121-141.

[6] A. Pietsch, Operator Ideals, Deutsch. Verlag Wiss, Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, pp. 247-259.

[7] N. Weaver. *Lipschitz Algebras*, World Scientific, Singapore 1999.