

# *Remerciements*

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon promoteur : le Professeur **Gasmi Abdelkader** pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience.

Les discussions scientifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions qui m'ont permis de finaliser ce modeste travail. Je souhaite leurs transmettent ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce modeste travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers ; ma famille qui ont eu un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Transformations conformes et applications</b>	<b>3</b>
1.1 Transformations conformes . . . . .	3
1.1.1 Vue générale de la transformation . . . . .	3
1.1.2 Propriétés de base des transformations conformes . . . . .	4
1.1.3 Transformation bilinéaire . . . . .	7
1.1.4 Théorème de Riemann . . . . .	7
1.2 Applications des transformations conformes . . . . .	8
1.2.1 Préliminaire . . . . .	8
1.2.2 Problèmes aux limites . . . . .	8
1.2.3 Méthode pour résoudre des Problèmes de Dirichlet par les transformations conformes . . . . .	9
1.2.4 Applications au écoulement de fluide . . . . .	9
1.2.5 Application d'électrostatique (Exemple) . . . . .	14
<b>2 Transformation de Schwarz-Christoffel</b>	<b>16</b>
2.1 Introduction . . . . .	16
2.2 Justification pour la formule (construction) . . . . .	18
2.3 Transformation de Schwarz-Christoffel . . . . .	20
2.4 Triangle et rectangle . . . . .	23
<b>3 Ecoulement sous un barrage sans effet de tension de surface</b>	<b>28</b>
3.1 problème physique . . . . .	28
3.2 Formulation mathématique et résolution du problème . . . . .	29

<b>Conclusion</b>	<b>37</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>37</b>

# Introduction

Dans notre travail on s'intéresse à l'étude des transformations conformes, qui devient à la réponse de la question générale, est-il possible de trouver une fonction analytique  $f$  qui établit une transformation conforme entre deux régions quelconques ?

La réponse de cette question a été donnée par le mathématicien **Bernhard Riemann** (1826-1866) sous un théorème est connu par théorème de Riemann pour la transformation.

Néanmoins, ce résultat n'indique aucune méthode pratique permettant la construction d'une formule pour la transformation. En effet, le cas général ne peut être traité que par des méthodes d'approximation. Mais, il est possible de construire des formules dans certains cas simples et un de ces cas est la transformation d'un polygone, c'est-à-dire, nous pouvons construire une fonction qui transforme le demi-plan supérieur ou inférieur en un polygone simplement connexe, cette transformation s'appelle transformation de **Schwarz-Christoffel**, elle est nommée d'après les mathématiciens Allemands **Elwin Bruno Christoffel** (1829-1900) et **Hermann Amandus Schwarz** (1843-1921) qui l'ont découverte indépendamment, on s'intéresse ici à cette transformation qui a une grande importance pour la résolution des problèmes d'ingénierie surtout dans le domaine de mécanique des fluides et de la physique.

Notre mémoire est partagée en trois chapitres :

Dans le premier chapitre on donne quelques notions fondamentales sur les transformations conformes et on présente quelques techniques de ces transformations pour résoudre et simplifier certaines situations physiques surgissant la mécanique des fluides et l'électrostatique.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la théorie de la transformation de **Schwarz-Christoffel** à travers le quel on représente la justification de la formule et ses propriétés.

Dans le troisième chapitre on traite le problème d'un écoulement bidimensionnel sous

un barrage d'un fluide incompressible et non visqueux par cette transformation qui est nous donne des bonnes resultats pour ce genre de problème.

finalement on se termine ce travail par une conclusion générale et perspectives.

# Chapitre 1

## Transformations conformes et applications

### 1.1 Transformations conformes

#### 1.1.1 Vue générale de la transformation

##### Transformation

**Définition 1.1** Si  $w = u + iv$  est une fonction uniforme de  $z = x + iy$  où ( $u, v, x$  et  $y$  sont des réels) alors nous peut écrire  $u + iv = f(x + iy)$  ceci est équivalent à

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

l'ensemble des équations (1.1) définit, en générale, une transformation, qui établit une correspondance entre les points  $(x, y)$  du plan  $z$  et les points  $(u, v)$  du plan  $w$ , les équations (1.1) sont appelées équations de la transformation.

##### Transformation linéaire

**Définition 1.2** En générale, la transformation linéaire est donnée comme suit

$$w = Az + B,$$

où  $A$  et  $B$  sont des nombres complexes avec  $A \neq 0$  et  $z \neq 0$ , cette transformation est une composition des transformations de translation, rotation et homothétie.

## Quelques transformations générales

Pour certains transformations on écrit :

1. Translation:  $w = z + b$  où ( $b$  est constante complexe) par cette transformation les figures du plan  $z$  sont déplaées dans la direction de vecteur  $b$ .
2. Rotation :  $w = e^{i\theta}z$  par cette transformation les figures du plan  $z$  sont tournées par l'angle  $\theta$ .
3. Homothétie :  $w = az$  où ( $a$  est constante réelle) par cette transformation les figures du plan  $z$  sont étirées (ou contractées) dans la direction  $z$  si  $a > 1$  ou ( $0 < a < 1$ ).
4. Inverse :  $w = \frac{1}{z}$

## Transformation Jaccobienne

L'ensemble des équations (1.1) qui représente une transformation et le déterminant de Jacobien  $J(x,y)$  donné comme suit

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

si  $u$  et  $v$  sont des parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique, dans tel cas, la transformation Jaccobienne est donnée par

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2.$$

il se suite que les points où  $f'(z) = 0$  sont appelés **point critique**.

### 1.1.2 Propriétés de base des transformations conformes

Soit  $C$  un arc régulier représenté par l'équation dans le plan  $z$

$$z = z(t), \text{ avec } (a \leq t \leq b)$$

et soit  $f(z)$  est une fonction définie en tout point  $z$  de  $C$ , l'équation suivante

$$w = f[z(t)], \text{ avec } (a \leq t \leq b)$$

est représentation paramétrique de l'image  $\Gamma$  de  $C$  sous la transformation  $w = f(z)$ , on suppose que  $C$  passe par le point  $z_0 = z(t_0)$ , ( $a < t_0 < b$ ) qui est  $f$  est analytique telque :  $f'(z_0) \neq 0$

si  $w(t) = f[z(t)]$ , il se suite  $w'(t_0) = f'[z(t_0)] z'(t_0)$ , alors :

$$\arg w'(t_0) = \arg f'[z(t_0)] + \arg z'(t_0). \quad (1.2)$$

soit  $\vec{t}$  le vecteur tangent unitaire construit à  $C$  au point  $z_0$  et  $\theta_0 = \arg z'(t_0)$  est l'angle de l'inclination de  $\vec{t}$  et  $\vec{T}$  le vecteur tangent unitaire construit à  $\Gamma$  l'image de  $C$  au point  $w_0 = f(z_0)$  et  $\phi_0 = \arg w'(t_0)$  est l'angle de l'inclination de  $\vec{T}$ , et aussi  $\psi_0 = \arg f'[z(t_0)]$ .

De (1.2) on obtient  $\phi_0 = \theta_0 + \psi_0$  telque  $\psi_0$  l'angle de rotation ( $\psi_0 = \phi_0 - \theta_0$ ).

Il se suit que l'angle  $\psi_0$  (dans la grandeur et l'orientation) étant la différence des angles des tangentes est préservée par telles transformations ,Alors une transformation avec cette propriété s'appelle **transformation conforme**.(voir la figure 01)

le théorème suivant est fondamental :

**Théorème 1.3** Soit  $f$  est une fonction analytique dans région  $R$ , et soit  $z_0$  est une point dans  $R$ , si  $f'(z_0) \neq 0$  alors  $f$  est conforme en  $z_0$ .

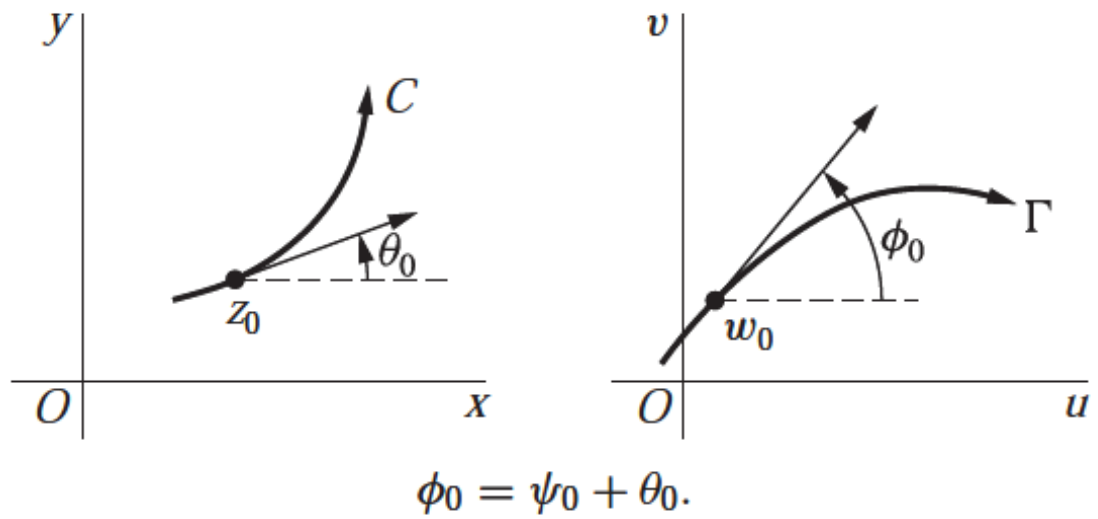
**Démonstration.** Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux arcs réguliers qui passent par le point  $z_0$  avec les tangentes données par  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$  respectivement,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les angles d'inclination de  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$  respectivement et soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont l'image du  $C_1$  et  $C_2$  qui passent par le point  $w_0$  avec les tangentes données par  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$  respectivement,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les angles d'inclination de  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$  respectivement.

on utilise (1.2) et on obtient :  $\phi_1 = \theta_1 + \psi_0$  et  $\phi_2 = \theta_2 + \psi_0$  où  $\psi_0 = \arg f'(z_0)$

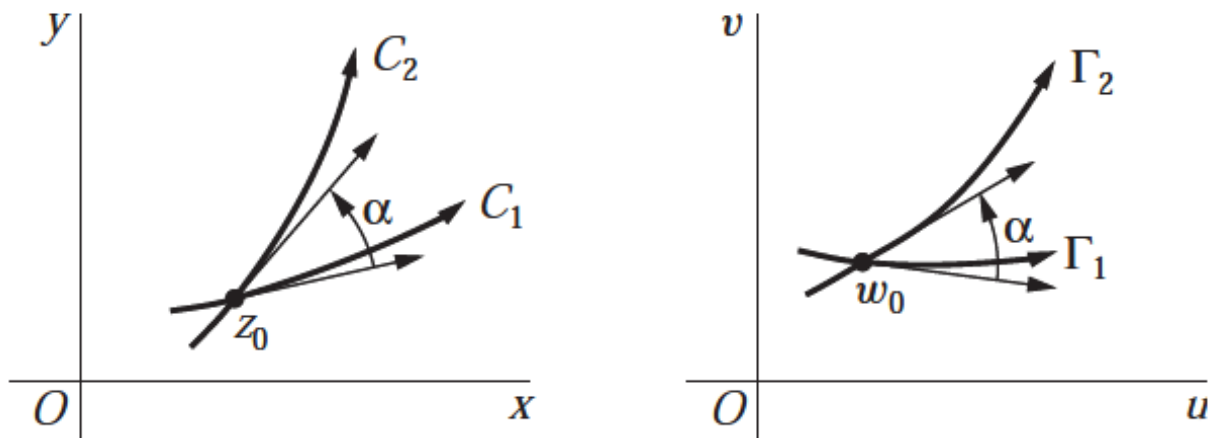
d'où  $\theta_2 - \theta_1 = \phi_2 - \phi_1$  c'est-à-dire, l'angle  $\theta_2 - \theta_1$  de  $\Gamma_1$  à  $\Gamma_2$  est le même dans la grandeur et le sens que l'angle  $\theta_2 - \theta_1$  de  $C_1$  à  $C_2$ , ces angles sont dénotés par  $\alpha$ , la situation est montrée par la figure 02.

D'où la transformation  $w = f(z)$  est conforme au point  $z_0$ . ■

**Remarque 1.4** Une transformation qui préserve la valeur absolue des angles mais qui renverse l'orientation aux points où sa dérivée ne s'annule pas, s'appelle une transformation **anti-conforme**.



**Figure 01** (Les tangentes au points  $z_0$  et  $w_0$  avec  $\phi_0 = \psi_0 + \theta_0$ )



**Figure 02** (La transformation conforme au point  $z_0$ ).

### 1.1.3 Transformation bilinéaire

**Définition 1.5** Soit  $a, b, c$  et  $d$  quatre nombres complexes tel que  $ad - bc \neq 0$ , la fonction complexe définie par

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

s'appelle une transformation de **Möbius** ou parfois une transformation bilinéaire, la condition  $ad - bc \neq 0$  élimine les cas où  $w$  pourrait se réduire à une constante, en général cette transformation étant composition de translation, inverse et homothétie.

**Théorème 1.6** Toute transformation de Möbius est conforme.

**Théorème 1.7** Les transformations de Möbius préserve la famille qui consiste de toutes les droites et tous les cercles du plan.

**Théorème 1.8** Si  $z_1, z_2$  et  $z_3$  sont distinctes et si le triplet  $w_1, w_2$  et  $w_3$  se compose de trois autre points distinctes dans le plan des  $w$  alors il n'existe qu'une seule transformation de Möbius  $T$  telle que  $T(z_1) = w_1, T(z_2) = w_2$  et  $T(z_3) = w_3$  cette transformation est définie implicitement par l'équation  $\frac{w-w_1}{w-w_3} \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

### 1.1.4 Théorème de Riemann

Dans la transformation conforme, on pose la question générale, à savoir, si  $R$  et  $R'$  sont deux régions quelconques du plan est-il possible de trouver une fonction analytique  $f$  qui établit une transformation conforme entre elles ?

La réponse de cette question a été donnée par le mathématicien Bernhard Riemann (1826-1866) sous le théorème suivant :

**Théorème 1.9 (Riemann)**

Si  $R$  et  $R'$  sont deux régions simplement connexes et si leurs frontières respectives consistent de plus qu'un seul point alors il est toujours possible de trouver une fonction analytique  $f$  laquelle définit une transformation conforme entre  $R$  et  $R'$ .

## 1.2 Applications des transformations conformes

### 1.2.1 Préliminaire

Un grand nombre de problèmes surgissant la mécanique de fluide, électrostatique, conduction de la chaleur et beaucoup d'autres situations physiques peuvent être mathématiquement formulées en termes d'équation de Laplace, c'est-à-dire, tous ces problèmes réduisent à résoudre l'équation suivante dans certain domaine  $D$  du plan  $z$

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0.$$

En plus, la fonction  $\phi$  satisfait certaines conditions aux limites sur le bord  $C$  et  $D$ , donc les techniques de transformation conforme harmonique avec des conditions aux limites.

### 1.2.2 Problèmes aux limites

On a deux types de problèmes aux limites

1. Problème de Dirichlet cherche la détermination d'une fonction  $\phi$  qui satisfait l'équation de Laplace dans  $D$  et prend des valeurs prescrites sur le bord  $C$ .
2. Problème de Neumann cherche la détermination d'une fonction  $\phi$  qui satisfait l'équation de Laplace dans  $D$  et la dérivée normale  $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$  prend des valeurs prescrites à le bord  $C$ .

Maintenant on présente quelques notions sur la fonction harmonique :

**Définition 1.10** Soit  $f$  une fonction uniforme définie sur  $R$ , on dit que  $f$  est harmonique si les dérivées partielles de deuxième ordre continues et vérifient la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0,$$

cette relation est appelée équation de Laplace et noté par  $\nabla^2 f = 0$ .

**Théorème 1.11** On suppose que la fonction complexe  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  est analytique dans la région  $R$ , alors les fonctions  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  sont harmoniques dans la région  $R$ .

**Théorème 1.12** Une fonction  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  est analytique dans une région  $R$  si et seulement si  $v$  est un conjugué harmonique de  $u$ .

### 1.2.3 Méthode pour résoudre des Problèmes de Dirichlet par les transformations conformes

Nous avons obtenu une solution d'un problème de Dirichlet dans un domaine  $D$  par trouve une transformation conforme  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  de  $D$  sur  $D'$  dans lequel associé le Problème de Dirichlet, ceci implique les étapes suivantes :

1. Trouver une fonction analytique  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  qui transforme le domaine  $D$  dans le plan  $z$  sur  $D$  dans le plan  $w$  qui simple (un cercle unité, demi-plan supérieure).
2. Transformer les conditions aux limites de domaine  $D$  à  $D'$ .
3. Résoudre ce problème dans  $D$ , pour obtenir un fonction harmonique  $\Phi(u, v)$ .
4. Substituer la partie réelle et imaginaire  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  de  $f$  aux variables  $u$  et  $v$  dans  $\phi(u, v)$  (voir la figure 03).

La clé de cette méthode pour résoudre des problèmes aux limites est le théoreme suivant :

**Théorème 1.13** *Soit  $w = f(z)$  une fonction analytique, on suppose que le domaine  $D$  du plan  $z$  est transformé en  $D'$  du le plan  $w$  par transformation  $w = f(z)$  si la fonction  $\Phi(u, v)$  est harmonique dans  $D'$  alors la fonction  $\phi(u, v) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$  est harmonique dans  $D$ .*

### 1.2.4 Applications au écoulement de fluide

#### Fluide idéal

La solution de nombreux problèmes importants dans l'écoulement de fluide est souvent réalisée sous les hypothèses suivantes :

1. L'écoulement est bidimensionnel :c'est-à-dire, le mouvement de fluide dans n'importe quel plan est identique à celui dans n'importe quel autre plan parallèle, un modèle d'écoulement représenté dans ce plan peut être interprété comme coupe d'une perpendiculaire infinie de cylindre à cet plan.
2. L'écoulement est stationnaire :c'est-à-dire, la vitesse du fluide à un point quelconque dépend seulement de la position  $(x, y)$  et pas du temps .

3. L'écoulement est irrotationnel : on suppose que  $V_x$  et  $V_y$  désignent les composants de la vitesse du fluide au  $(x, y)$ , en suite, il existe une fonction  $\phi$  appelée potentiel de vitesse, telle que :

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.3)$$

si  $C$  est toute courbe fermé simple dans le plan  $z$  et  $V_t$  est le composant tangentielle de vitesse sur  $C$  alors :  $\int_c V_t ds = \int_c V_x dx + V_y dy = 0$ .

4. Le fluide est incompressible : la densité ou la masse par volume unitaire du fluide est constante, si  $V_n$  le composant normale de la vitesse sur  $C$ , il se suit que

$$\int_c V_n ds = \int_c V_x dy - V_y dx = 0 \text{ ou } \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

ce qui exprime la condition que la quantité de fluide contenu à l'intérieur  $C$  est une constante.

5. Le fluide est non visqueux : c'est-à-dire, le fluide n'a pas viscosité ou de frottement interne.

Si les hypothèses précédentes est vérifiées donc on dit que le fluide est **idéal**.

### Potentiel complexe, ligne équipotentielle et ligne de courant

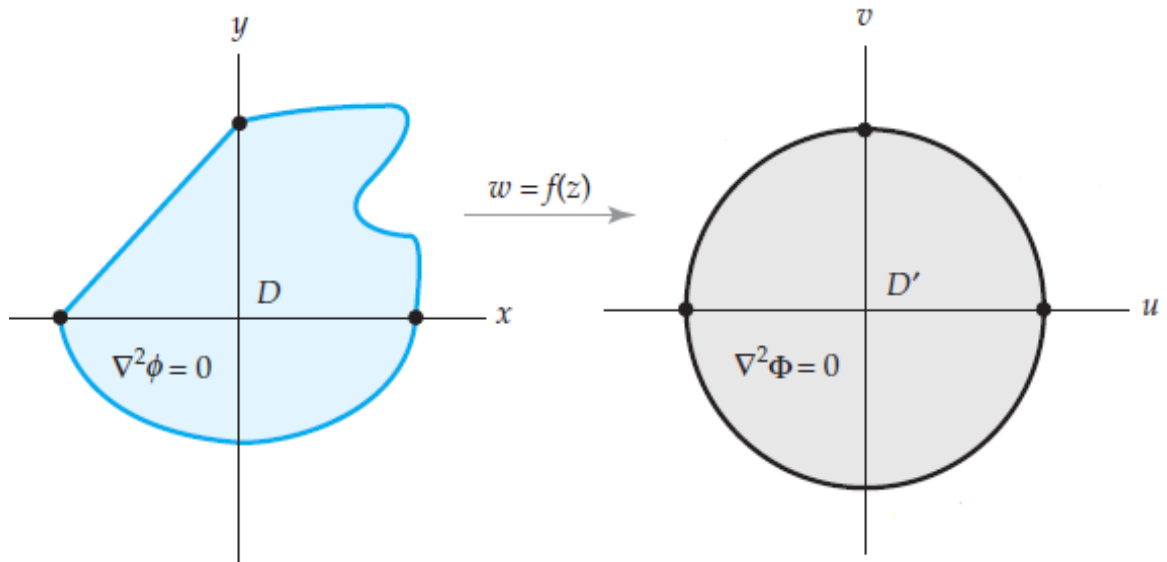
D'après les relations (1.3)(1.4), il vient que la fonction  $\phi$  est harmonique, il évident que la fonction conjuguée  $\psi$  de  $\phi$  est harmonique, telle que :

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (1.5)$$

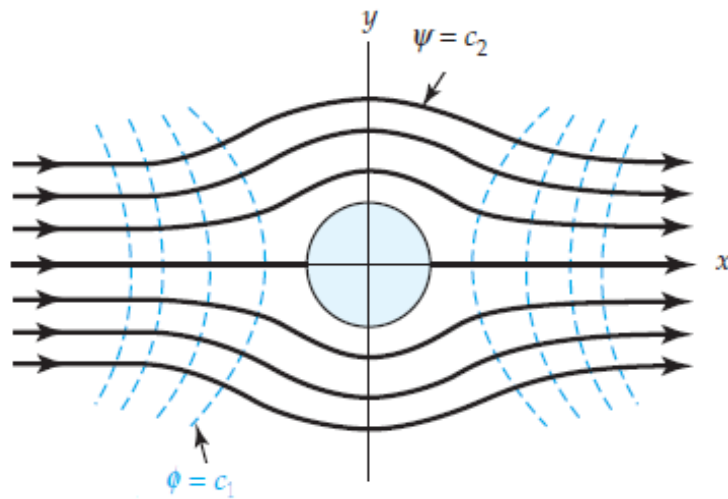
est analytique et on a  $\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i\frac{\partial \phi}{\partial y} = V_x - iV_y$  donc la vitesse complexe est donnée par :  $v = V_x + iV_y = \overline{\Omega'(z)}$ , de (1.5) on note :

- $\Omega(z)$  la fonction potentielle complexe.
- $\phi(x, y)$  la fonction potentielle de vitesse
- $\psi(x, y)$  la fonction de courant.

Les familles de courbes  $\phi(x, y) = \alpha$ ,  $\psi(x, y) = \beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes, sont appelées respectivement lignes équipotentielle et lignes de courants de l'écoulement (voir la figure 04).



**Figure 03** (Solution d'un Problème de Dirichlet).



**Figure 04** (Ecoulement d'un fluide)

**Solution d'un problème de ligne de courant**

on suppose  $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  est le potentiel complexe dans  $D$ , et soit  $\psi$  est constant sur le bord de  $D$ , alors  $v = \overline{\Omega'(z)}$  est la vitesse complexe de l'écoulement d'un fluide idéal dans  $D$ .

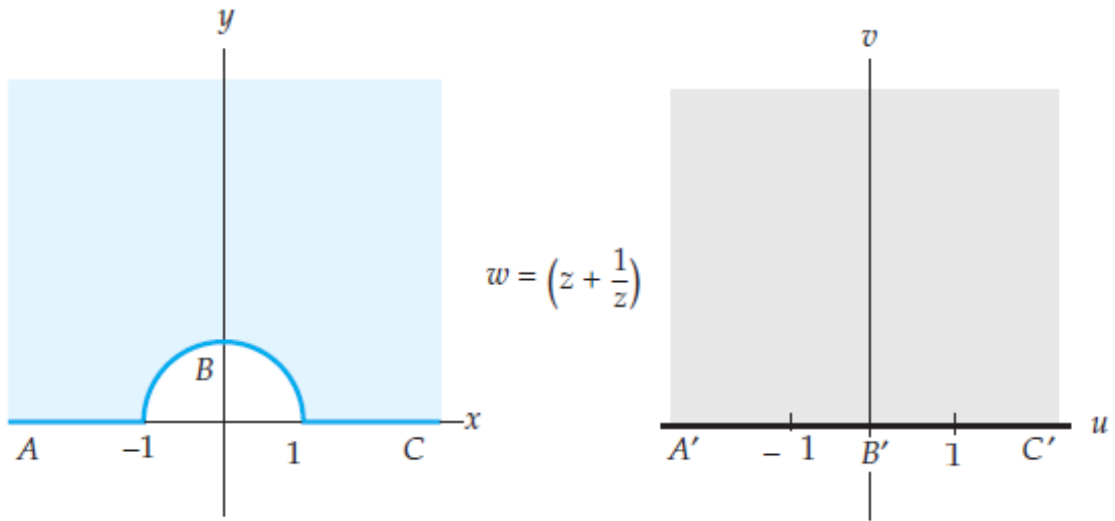
En d'autre part, beaucoup de problèmes de la fonction de courant peuvent être résoudre en utilisant la transformation conforme, il se suite que :si  $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  est une transformation conforme de domaine  $D$  dans le plan  $z$  sur un domaine  $D'$  dans le plan  $w$  telle que :l'image du bord  $C$  de  $D$  est une ligne horizontal dans le plan  $w$ , alors  $v = \overline{\Omega'(z)}$  est la vitesse complexe de l'écoulement d'un fluide idéal dans  $D$ .

**Exemple 1.14 (Écoulement autour d'un cylindre)**

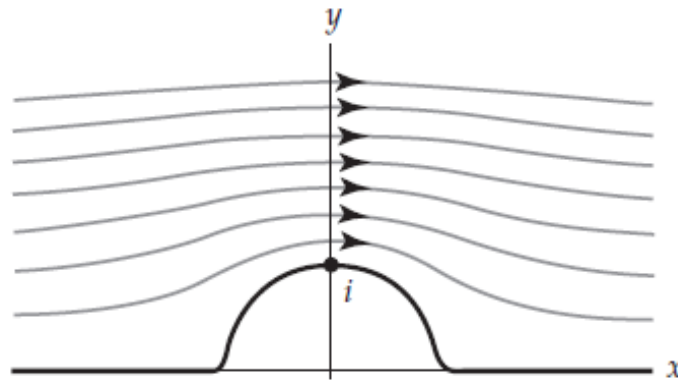
*Construire un écoulement d'un fluide idéal dans le domaine  $D$  se composant sont de tous les points dehors le cercle d'unité  $|z| = 1$  et demi-plan supérieur  $y > 0$ ,*

*(voir la figure 05) de cette figure, on obtient la transformation conforme  $w = \Omega(z) = z + \frac{1}{z}$  du domaine  $D$  dans le plan  $z$  sur un domaine  $D'$  dans le plan  $w$  telle que  $v > 0$  et le bord de  $D$  est transformé à l'axe réel  $v = 0$  d'où : $v = \overline{\Omega'(z)} = 1 - \frac{1}{z^2}$  est la vitesse complexe de l'écoulement d'un fluide idéal dans  $D$ .*

*On a  $w = \Omega(z) = z + \frac{1}{z} = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i(y - \frac{y}{x^2+y^2})$  alors les lignes de courants de cet écoulement sont les courbes  $\Psi(x, y) = c$  ou  $y - \frac{y}{x^2+y^2} = c$  (voir la figure 06).*



**Figure 05** (La transformation conforme  $\Omega(z)$ )



**Figure 06** (Ecoulement autour d'un cylindre).

### 1.2.5 Application d'électrostatique (Exemple)

Dans l'exemple suivant, nous appliquons la méthode qui est présentée pour résoudre des problèmes aux limites par la transformation conforme, en plus nous utilisons quelques notions surgissant dans le domaine de l'électrostatique.

**Exemple 1.15** Soit le domaine  $D$  dans le plan  $z$  est limité par les lignes  $y = x$  et  $y = x + 2$  (voir la figure 07 et 08), trouver une fonction  $\phi(x, y)$  qui harmonique dans  $D$  est satisfait les conditions aux limites  $\phi(x, x + 2) = -2$  et  $\phi(x, x) = 3$  pour résoudre ce problème, on utilise la méthode précédente :

1. On trouve une fonction analytique qui transforme  $D$  en  $D'$ , cette transformation exprime sous la forme de composition suivante :

$$f(z) = T(H(R(z))) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 1 = (1 + i)z + 1 = x - y + 1 + i(x + y).$$

2. Maintenant, on transforme les conditions aux limites de  $D$  à  $D'$  par utilise la transformation  $w = f(z) = (1 + i)z + 1$  alors on trouve  $\Phi(-1, v) = -2$  et  $\Phi(1, v) = 3$ .
3. La solution de problème de Dirichlet dans  $D'$  est donnée par  $\Phi(u, v) = \frac{5}{2}U + \frac{1}{2}$ .
4. D'après le théorème (1.15), on trouve

$$\phi(x, y) = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y + 3$$

Si  $\phi$  est harmonique et si  $\psi$  est la conjuguée harmonique de  $\phi$ ,

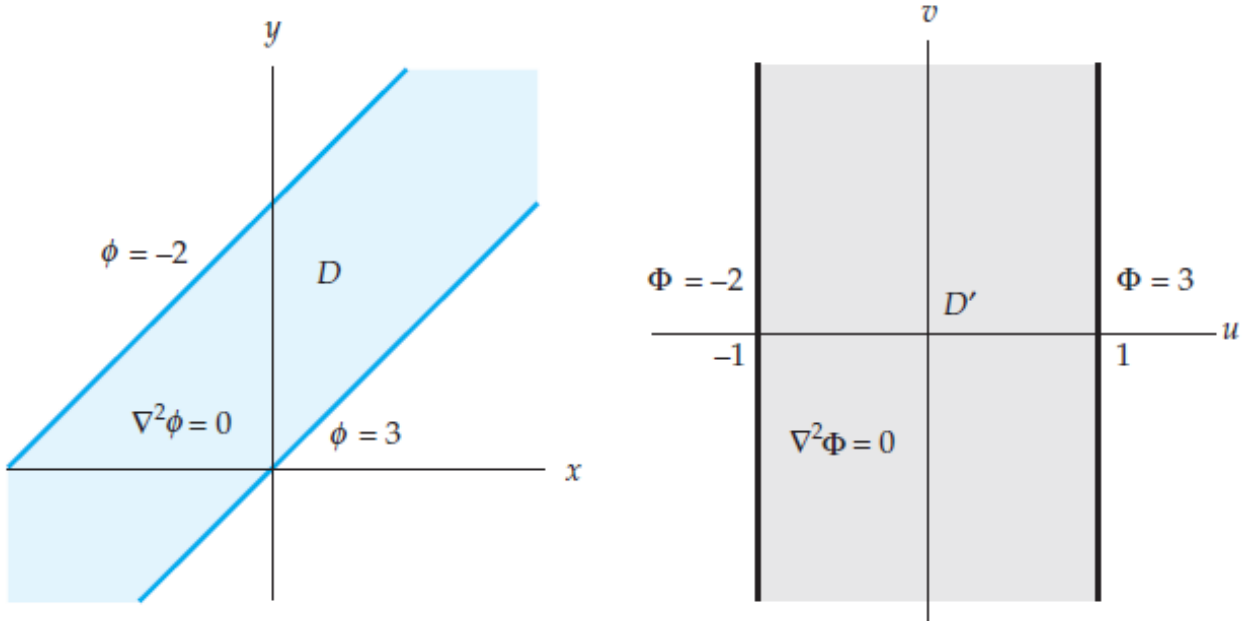
alors  $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  le potentiel complexe électrostatique est analytique, donc

$$\Omega(z) = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y + 3 + i\left(\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y\right)$$

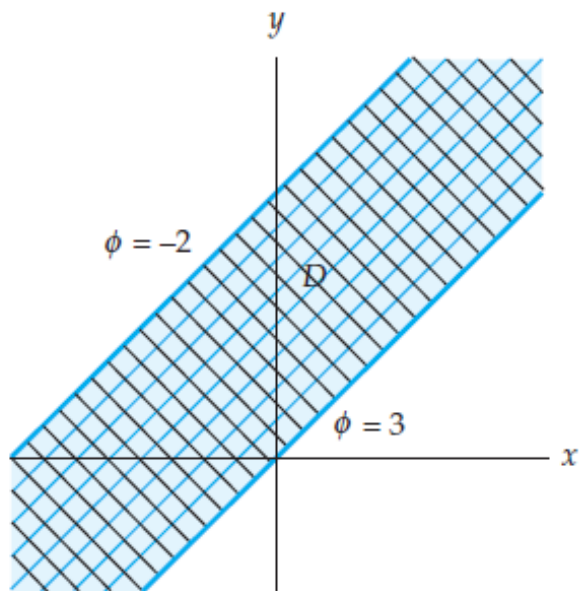
Si  $\phi$  représente le potentiel électrostatique, alors  $\psi(x, y) = c$  représente **ligne de force** qui donne par

$$y = -x + c' \text{ où } c' = \frac{5}{2}c.$$

voir la figure 09.



**Figure 07** (Le domaine  $D$  dans le plan  $z$  ). **Figure 08** (Le domaine  $D'$  dans le plan  $w$  ).



**Figure 09** (ligne de force ).

# Chapitre 2

## Transformation de Schwarz-Christoffel

### 2.1 Introduction

Le théorème de Riemann nous dit qu'il existe, dans presque tous les cas, une transformation conforme qui transforme une région simplement connexe sur le disque unitaire, néanmoins, ce résultat n'indique aucune méthode pratique permettant la construction d'une formule pour la transformation. En effet, le cas général ne peut être traité que par des méthodes d'approximation.

Mais, il est possible de construire des formules dans certains cas simples et un de ces cas est la transformation d'un polygone, c'est-à-dire, nous pouvons construire une fonction qui transforme le demi-plan supérieur (avec l'axe réel), il est noté par  $R$  dans le plan  $z$  en un polygone simplement connexe (avec son intérieur), il est noté par  $R'$  dans le plan  $w$ . (voir les figures 10 (a) et 10 (b)) La transformation précédente est donnée par la formule suivante :

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \dots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}} \quad (2.1)$$

où  $A \in \mathbb{C}$  et  $-1 < k_j < 1$  pour  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ , cette transformation s'appelle transformation de Schwarz-Christoffel, elle est nommée d'après les mathématiciens Allemands **Elwin Bruno Christoffel** (1829-1900) et **Hermann Amandus Schwarz** (1843-1921) qui l'ont découverte indépendamment.

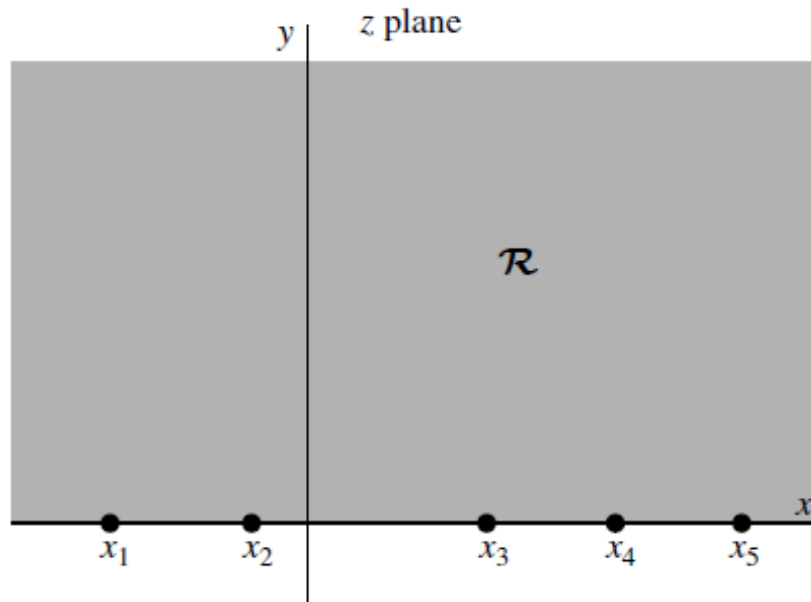


Figure 10(a) ( Le demi-plan supérieure du plan  $z$  )

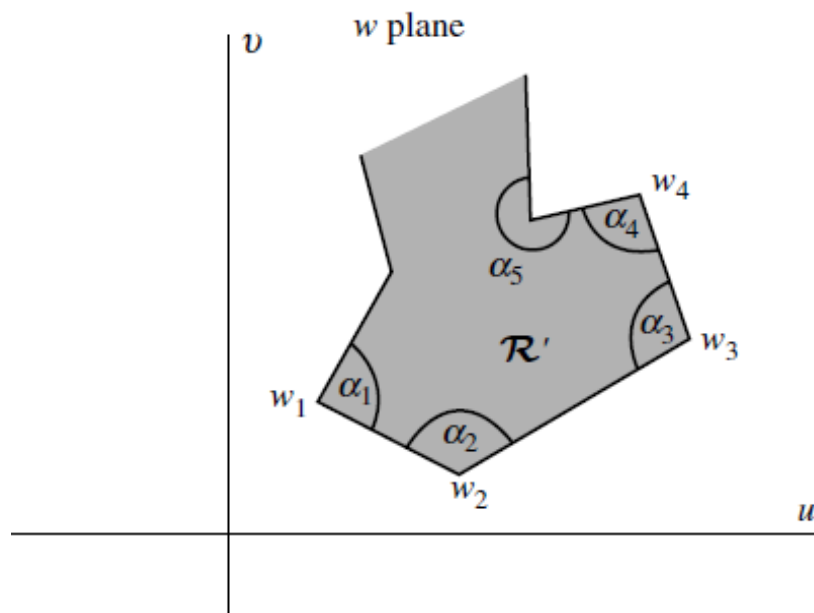


Figure 10(b) (un polygone dans le plan  $w$ ).

## 2.2 Justification pour la formule (construction)

Soit  $C$  un arc régulier qui passe par le point  $z_0$  et supposons que  $\vec{t}$  soit le vecteur tangent unitaire construit à  $C$  au point  $z_0$  et que  $\vec{T}$  soit le vecteur tangent unitaire construit à l'image de  $C$  au point  $f(z_0)$ . Si  $f'(z_0) \neq 0$ , alors :

$$\arg(\vec{T}) = \arg[f'(z_0)] + \arg(\vec{t})$$

Pour le cas particulier où  $C$  est un segment de l'axe des  $x$ ,  $\vec{t} = 1 + 0i$  et  $\arg(\vec{t}) = 0$  à chaque point de  $C$  d'où

$$\arg(\vec{T}) = \arg[f'(z_0)], \quad (z_0 = x + 0i) \quad (2.2)$$

Si  $\arg[f'(z)]$  demeure constante sur l'intervalle alors  $\arg(\vec{T})$  ne varie pas et l'image de  $C$  est aussi un segment de droite.

Choisissons  $n - 1$  points sur l'axe réel, disons  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  et posons  $x_n = \infty$ . On construira une fonction  $f$  qui transforme l'axe réel en un polygone  $R'$  pour lesquelles sommets correspondent aux nombres complexes  $w_j$ . En fait,  $w_j = f(x_j)$  pour  $j = 1, 2, \dots, n - 1$  et  $w_n = f(\infty)$ . Il est donc clair que lorsque  $z$  varie sur l'axe réel,  $\arg[f'(z)]$  doit sauter chaque fois qu'on passe par une des valeurs  $x_j$  (Voir la figure 11(a) et 11(b)).

Nous essayerons de trouver une fonction  $f$  qui satisfait à nos exigences en prenant la fonction la plus élémentaire possible pour représenter sa dérivée. En fait on suppose que la fonction  $f$  satisfait

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \dots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}} \quad (2.3)$$

ce qui implique que l'argument de  $f'(z)$  s'écrit comme suit :

$$\arg[f'(z)] = \arg(A) - \sum_{j=1}^{n-1} k_j \arg(z - x_j)$$

- lorsque  $z$  est réel avec  $z < x_1$ ,  $\arg(z - x_j) = \pi$  pour  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ .

- lorsque  $x_1 < z < x_2$  alors  $\arg(z - x_1) = 0$  et  $\arg(z - x_j) = \pi$  pour  $j = 2, 3, \dots, n - 1$ .

Donc, on déduit que l'argument de  $f'(z)$  saute par  $k_j\pi$  lorsque  $z$  passe par le point  $x_j$ .

Or,  $\arg(\vec{T}) = \arg[f'(z)]$  et la direction de  $\vec{T}$  change subitement chaque fois qu'on passe par un des points  $x_j$ . Les angles  $k_j\pi$  sont les angles extérieurs d'un polygone décrit par  $w = f(z)$  lorsque  $z$  varie sur l'axe réel.

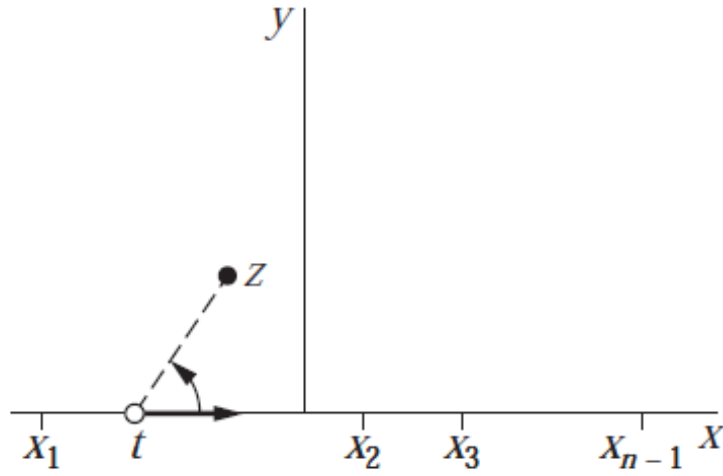


Figure 11(a)

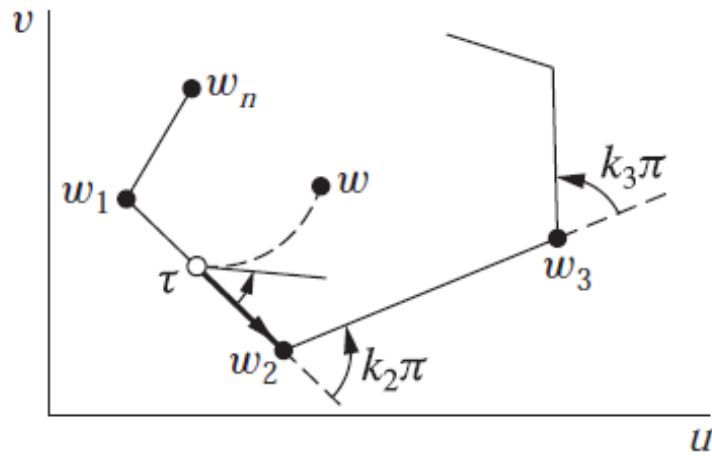


Figure 11(b)

Nous pouvons supposer que les angles extérieurs sont dans l'intervalle  $(-\pi, \pi)$ . En imposant les restrictions que les côtés du polygone ne se recoupent pas et que le sens d'orientation est positif et que  $w_n$  est l'image de  $z = \infty$  on trouve que  $k_n\pi = 2\pi - (k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1})\pi$  alors  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 2$ ,  $-1 < k_j < 1$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$ , dans le cas où  $k_n = 0$  et  $\sum_{j=1}^{n-1} k_j = 2$  ce qui implique que la direction du vecteur  $\vec{T}$  ne change pas au point  $w_n$  ce qui veut dire que  $w_n$  n'est pas un sommet, d'où le polygone n'a que  $n - 1$  côtés.

**Remarque 2.1** *L'existence d'une fonction de transformation  $f$  dont la dérivée est donnée par l'équation (2.3) nous établirons dans la section suivante.*

## 2.3 Transformation de Schwarz-Christoffel

Ce que nous avons trouvé jusqu'ici est la dérivée d'une fonction  $f$  laquelle transformerait l'axe réel en un polygone est de la forme (2.3) Pour chacun des facteurs  $(z - x_j)^{-k_j}$  nous considérons la ramification défini par :

$$(z - x_j)^{-k_j} = |z - x_j| e^{-ik_j\theta_j}, \text{ où } \theta_j = \arg(z - x_j), \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n - 1 \text{ et } \frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Il s'ensuit que  $f$  est analytique dans

$$\varrho = \{z : S(z) \geq 0\} - \{z : z = x_j + 0i, j = 1, 2, \dots, n - 1\}.$$

Si  $z_0 \in \varrho$  alors :

$$F(z) = \int_{z_0}^z f'(s) ds \tag{2.4}$$

est analytique dans  $\varrho$  (Bien sûr, on suppose que l'intégrale est toujours évaluée sur un arc qui relie  $z_0$  et  $z$  en passant uniquement par des points de la région  $\varrho$ ).

La fonction  $F$  n'est pas définie pour les points  $z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n - 1$  mais il est possible d'étendre sa définition pour inclure ces points et même faire ceci de manière que  $f$  y soit

continue. Considérons le point  $x_1$ . Seulement le terme  $(z - x_1)^{-k_1}$  dans l'équation (2.3) nous concerne et nous pouvons écrire

$$f'(z) = (z - x_1)^{-k_1} h(z),$$

où  $h$  est analytique au point  $x_1$  et on peut même écrire

$$f'(z) = (z - x_1)^{-k_1} h(x_1) + (z - x_1)^{-k_1+1} H(z)$$

où  $H$  est analytique dans un disque  $D = \{z : |z - x_1| < r\}$  pour  $r$  suffisamment petit. (Ceci suit du Théorème de Taylor.)

Vu que  $H$  est analytique dans un  $D$  et que  $k_1 < 1$  le terme  $(z - x_1)^{-k_1+1} H(z)$  représente une fonction continue au point  $x_1$  si l'on y définit sa valeur comme zéro. L'intégrale de ce même terme sera aussi continue au point  $x_1$  si le chemin d'intégration demeure dans  $D$ .

Si  $z$  et  $z_*$  sont des points de  $D^+ = \{z : (z \in D) \wedge (S(z) \geq 0)\}$  alors l'intégrale

$$\int_{z_0}^z (s - x_1)^{-k_1} ds = \frac{1}{1 - k_1} [(z - x_1)^{1-k_1} - (z_* - x_1)^{1-k_1}]$$

est continue au point  $x_1$  si l'on y définit sa valeur comme la limite lorsque  $z$  approche  $x_1$  en passant par des points de  $D^+$ . On peut répéter les mêmes arguments pour les points  $z_2, z_3, z_4, \dots, z_{n-1}$  pour finalement déduire que  $F$  est continue dans la région définie par  $S(z) \geq 0$ .

Maintenant on étudie la limite de  $F$ , il existe  $M > 0$  si grand que, lorsque  $|z| > M$ .

$$\frac{1}{|z - x_j|} \leq \frac{1}{||x| - x_j|} \leq \frac{1}{z}$$

pour  $j = 1, 2, \dots, n - 1$  et pour ces valeurs de  $z$

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq |A| |z - x_1|^{-k_1} |z - x_2|^{-k_2} \dots |z - x_{n-1}|^{-k_{n-1}} \\ &\leq |A| |z|^{-(k_1+k_2+\dots+k_{n-1})} \\ &= |A| |z|^{k_n-2} \end{aligned}$$

Mais  $2 - k_n > 1$  et la dernière inégalité nous assure que pour les valeurs de  $z$  avec  $|z| > M$

$$\left| \int_{c_M} f'(z) dz \right| \leq \int_{c_M} |f'(z)| dz \leq \int_0^\pi \frac{|A|}{|z|^{2-k_n}} |z| d\theta < 2\pi |A| M^{1-k_n}$$

ce qui tend vers zéro lorsque  $z \rightarrow \infty$ . Donc, l'intégrale (2.4) converge lorsque  $x \rightarrow \infty$  et on pose

$$w_n = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{z_0}^z f'(s) ds$$

Nous avons justifié que les transformations de la forme :

$$w = A \int_{z_0}^z (s - x_1)^{-k_1} (s - x_2)^{-k_2} \dots (s - x_{n-1})^{-k_{n-1}} ds + B \quad (2.5)$$

où  $B$  est une constante complexe quelconque transforme l'axe réel en un polygone dont les sommets sont des points  $w(x_j)$ . L'équation (2.5) est continue dans le demi-plan défini par  $S(z) \geq 0$  sauf aux points  $x_j$ . Les conditions imposées garantissent que les côtés du polygone ne se recoupent pas nous assurant que le polygone est effectivement une courbe fermée simple et lorsque  $z$  trace l'axe réel dans la direction des  $x$  croissants,  $w$  trace le polygone de telle manière que l'intérieur reste toujours à gauche (Notons que l'image du point  $\infty$  est  $W_n$ .) Donc, il est possible de conclure que l'image du demi-plan supérieur est effectivement l'intérieur du polygone.

Une transformation de **Schwarz-Christoffel** est une de la forme (2.5), Il y a une certaine liberté de choix par rapport aux constantes  $A$  et  $B$  qui peut être employé afin de simplifier certains transformations.

D'où on arrive à le théorème principal suivant :

### **Théorème 2.2 ( Schwarz-Christoffel)**

*On suppose que  $R$  est un polygone simplement connexe avec des sommet  $W_1, W_2, \dots, W_n$  et les angles extérieurs sont  $k_1\pi, k_2\pi, \dots, k_n\pi$  telle que  $-1 < k_j < 1$  pour  $j = 1, 2, \dots, n-1$  alors il existe une fonction de la forme intégrale :*

$$w = A \int_{z_0}^z (s - x_1)^{-k_1} (s - x_2)^{-k_2} \dots (s - x_{n-1})^{-k_{n-1}} ds + B \quad (2.6)$$

ou en forme différentielle :

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-k_1} (z - x_2)^{-k_2} \dots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}}$$

est une transformation conforme de demi-plan supérieur  $R$  en  $R'$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes complexes et  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$  sont des nombres réels et on a :

$$f(x_j) = w_j, \text{ et } f(\infty) = W_n, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n-1$$

cette transformation est continue dans tout le demi-plan supérieur  $y \geq 0$ .

**Remarque 2.3** Pour les raisons de symétrie il est parfois de préférence d'avoir tous les sommets du polygone générés par des valeurs réels finis. Ceci est possible si la fonction dérivée  $f'$  s'annule au point  $\infty$  impliquant qu'il n'y a pas de sommet correspondant à ce point., Dans ce cas la formule (2.6) pour la transformation de **Schwarz-Christoffel** peut s'écrire comme

$$w = A \int_{z_0}^z (s - x_1)^{-k_1} (s - x_2)^{-k_2} \dots (s - x_n)^{-k_n} ds + B \quad (2.7)$$

où  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 2$ . Les valeurs  $k_j$  sont déterminées par les angles du polygone.

1. **Remarque 2.4** D'après la relation (2.6) on écrit :  $f = AF + B$

(a) On voit que la constante complexe  $A = |A| e^{i \arg(A)}$  comporte un Homothétie arbitraire par le facteur  $|A|$  et un rotation par l'angle  $\arg(A)$ .

(b) De la même manière, la constante  $B = b_0 + ib_1$  représente une translation arbitraire.

Alors les constantes  $A$  et  $B$  déterminent la taille, l'orientation et la position de polygone.

2. Trois des points  $x_1, x_2, \dots, x_n$  peut être choisi à volonté.

## 2.4 Triangle et rectangle

Soient  $x_1, x_2$  deux nombres réels distincts avec  $x_1 < x_2$ , d'après la formule de **Schwarz-Christoffel** :

$$w = A \int_{z_0}^z (s - x_1)^{-k_1} (s - x_2)^{-k_2} \dots (s - x_{n-1})^{-k_{n-1}} ds + B$$

alors la transformation recherchée est

$$w = A \int_{z_0}^z (s - x_1)^{-k_1} (s - x_2)^{-k_2} ds + B$$

où les sommets sont :  $w_1 = w(x_1), w_2 = w(x_2)$  et  $w_3 = w(\infty)$ , Il faut aussi que  $k_1 + k_2 + k_3 = 2$  et les angles intérieurs du triangle,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  satisfont les relations  $\theta_j = \pi(1 - k_j)$ .

La spécification des valeurs  $k_1$  et  $k_2$  détermine le triangle à une similitude près et si nous choisissons  $x_1$  et  $x_2$  de façon arbitraire le placement spécifique des points déterminera les constantes  $A, B, z_0$

Pour être plus spécifique choisissons  $x_1 = -1$  et  $x_2 = 1$ . Alors

$$w = A \int_{z_0}^1 (s+1)^{-k_1} (s-1)^{-k_2} ds + B$$

et

$$w_1 = w(-1) = A \int_{z_0}^{-1} (s+1)^{-k_1} (s-1)^{-k_2} ds + B$$

$$w_2 = w(+1) = A \int_{z_0}^1 (s+1)^{-k_1} (s-1)^{-k_2} ds + B$$

$$w_3 = w(\infty) = A \int_{z_0}^{\infty} (s+1)^{-k_1} (s-1)^{-k_2} ds + B$$

Notons que si les trois points sont spécifiés le triangle est complètement déterminé et les valeurs  $k_1$  et  $k_2$  sont connues à l'avance (la trigonométrie) Si on spécifie seulement que la forme est importante nous pouvons choisir où placer le triangle et ainsi simplifier les calculs dans certains cas. (Voir les exemples suivants.)

**Exemple 2.5** *Trouver une transformation conforme entre le demi-plan supérieur et triangle droite isocèle*

**Solution :** Ici nous allons placer l'angle droit au point  $w_2$  de telle sorte que  $k_2 = \frac{1}{2}$  et  $k_1 = k_3 = \frac{3}{4}$ . Vu que l'énoncé du problème ne spécifie rien quant au placement du triangle on peut choisir  $A = 1, B = 0$  et  $z_0 = 1$  ce qui implique, en particulier,  $w_2 = 0$  Or,

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_1^{-1} (s+1)^{-\frac{1}{2}} (s-1)^{-\frac{3}{4}} ds \\ &= \int_1^{-1} (1+x)^{-\frac{1}{2}} (e^{i\pi}(1-x))^{-\frac{3}{4}} ds \\ &= e^{-\frac{3\pi I}{4}} \int_1^{-1} (1+s)^{-\frac{1}{2}} (1-s)^{-\frac{3}{4}} ds \\ &= e^{\frac{\pi I}{4}} \int_{-1}^1 (1+s)^{-\frac{1}{2}} (1-s)^{-\frac{3}{4}} ds \end{aligned}$$

En effectuant la substitution  $2y = 1 + s$  dans l'intégrale on trouve que

$$\begin{aligned} w_1 &= 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}} (1-y)^{-\frac{3}{4}} dy \\ &= 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^1 y^{\frac{1}{2}-1} (1-y)^{\frac{1}{4}-1} dy \\ &= 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi i}{4}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \\ &= c(1+i), \quad c = 2^{-\frac{1}{4}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

On déduit facilement que  $w_3 = 2c$  comme indiquée dans la Figure 12.

**Exemple 2.6** Trouver une transformation de **Schwarz-Christoffel** qui transforme le demi-plan supérieur dans un rectangle.

**Solution :** Soit  $a > 1$  et choisissons les quatre points réels  $x_1 = -a, x_2 = -1, x_3 = 1$  et  $x_4 = a$ . Pour un rectangle on a, forcément,  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1/2$  et si  $z_0 = 0$  la formule (2.7) s'exprime comme

$$w = A \int_0^z (s+a)^{-\frac{1}{2}} (s+1)^{-\frac{1}{2}} (s-1)^{-\frac{1}{2}} (s-a)^{-\frac{1}{2}} ds + B$$

Les valeurs  $A = 0$  et  $B$  servent à placer le rectangle 'à une position d'esirée et ajuster sa grandeur mais la partie essentielle de la transformation réside dans l'intégrale et ceci comprend le rapport entre les longueurs des côtés. Pour déterminer les sommets du rectangle il convient de considérer les deux intégrales auxiliaires

$$\begin{aligned} b &= \int_0^1 |F(s)| ds = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(a^2-s^2)}} \\ c &= \int_1^a |F(s)| ds = \int_1^a \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(a^2-s^2)}} \end{aligned}$$

si  $-1 < s < 0$  on note que

$$F(s) = (s+a)^{-\frac{1}{2}} (s+1)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi i}{2}} (1-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi i}{2}} (a-s)^{-\frac{1}{2}} = e^{-i\pi} |F(s)| = -|F(s)|$$

et si  $-a < s < -1$  on trouve de la même manière que

$$F(s) = e^{-\frac{3\pi i}{2}} |F(s)| = -i |F(s)|$$

Les quatre points du rectangle sont

$$\begin{aligned}
 w(-a) &= A \int_0^{-a} F(s) ds + B \\
 &= A \left( \int_0^{-1} F(s) ds + \int_{-1}^{-a} F(s) ds \right) + B \\
 &= A \left( - \int_0^{-1} |F(s)| ds + i \int_{-1}^{-a} |F(s)| ds \right) + B \\
 &= A(b - ic) + B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w(-1) &= A \int_0^{-1} F(s) ds + B \\
 &= -A \int_0^{-1} |F(s)| ds + B \\
 &= Ab + B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w(1) &= A \int_0^1 F(s) ds + B \\
 &= -A \int_0^1 |F(s)| ds + B \\
 &= -Ab + B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w(a) &= A \int_0^a F(s) ds + B \\
 &= A \left( \int_0^1 F(s) ds + \int_1^a F(s) ds \right) + B \\
 &= A \left( - \int_0^1 |F(s)| ds - i \int_1^a |F(s)| ds \right) + B \\
 &= -A(b + ic) + B
 \end{aligned}$$

Il est clair que  $b > 0$  et  $c > 0$  de telle sorte que le choix  $A = -1$ ,  $B = 0$  produit le rectangle de la Figure 13.

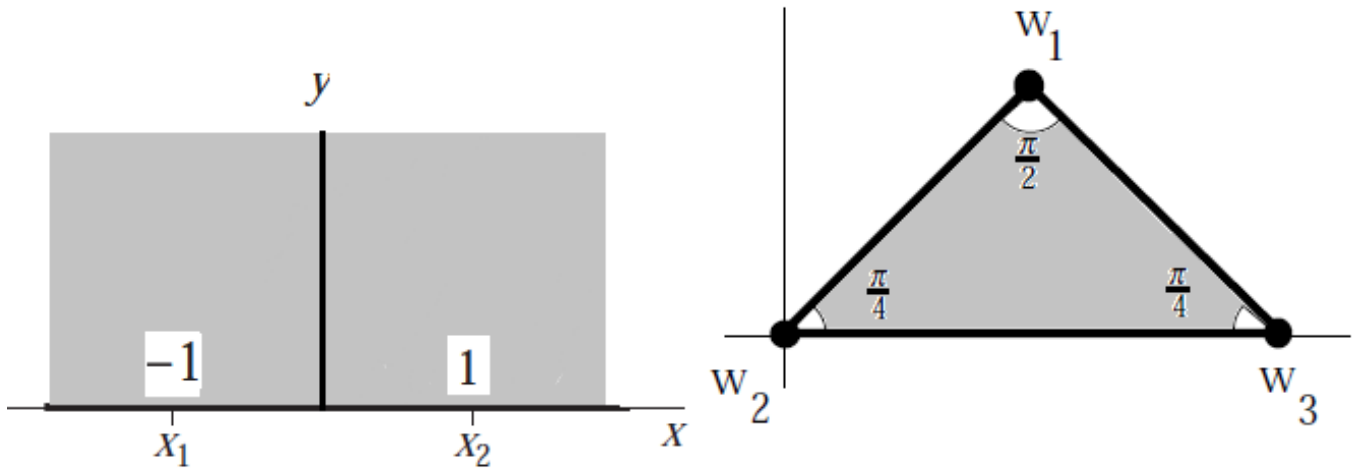


Figure 12 (transformation conforme entre le demi-plan et un triangle isocèle)

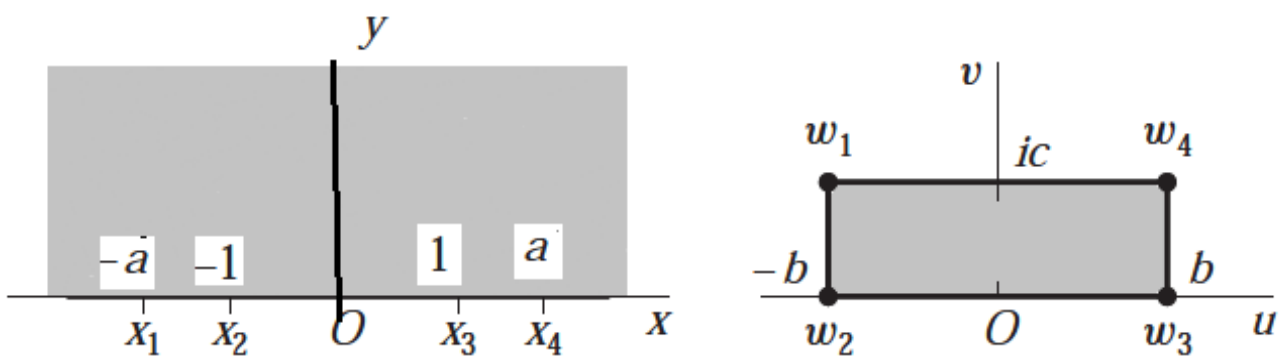


Figure 13 (transformation conforme entre le demi-plan et un rectangle)

# Chapitre 3

## Écoulement sous un barrage sans effet de tension de surface

### 3.1 problème physique

La surface libre est l'interface entre l'air et l'eau, la pression y est égale le plus souvent à la pression atmosphérique. Les écoulements dans les canaux naturels (rivière) et artificiels (irrigation, assainissement) sont, dans la plupart des cas, des écoulements à surface libre.

Maintenant on se propose d'étudier un écoulement à surface libre sous un barrage, voir la figure(14), les effets de gravité et de tension de surface sont négligés. Une solution exacte de l'écoulement peut être trouvée en utilisant la méthode des lignes de courant libres introduite par **Kirchoff** (1869) la méthode consiste à considérer les écoulements limités partiellement par des parois rigides rectilignes et d'autre part par des surfaces libres de formes inconnues. La clé de cette méthode est basée sur l'introduction d'une nouvelle variable complexe, définie par :

$$\begin{aligned} F &= \log\left(\frac{dz}{d\Omega}\right) = \log(u - iv)^{-1}, \\ &= \log q^{-1} + i\theta, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $z = x + iy$ ,  $\Omega = \phi + i\psi$  et  $q$ ,  $\theta$  sont le module de la vitesse et l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale (l'axe réel) respectivement. La variable  $F$  a la propriété suivante :

sa partie réelle est constante sur chaque surface libre, et sa partie imaginaire est constante sur chaque paroi rigide rectiligne. Ainsi le domaine de l'écoulement dans le plan

physique est transformé en un polygone dans le plan  $F$ . Dans ces conditions la solution du problème peut être obtenue exactement. De même la fonction  $\Omega = \phi + i\psi$  transforme le domaine de l'écoulement dans le plan physique en une bande infinie (polygone). On sait d'après le théorème de **Schwarz-Christoffel**, qu'il est possible de trouver une transformation conforme qui applique l'intérieur ou l'extérieur d'un polygone plan en un demi plan d'un autre plan. Une met en correspondance la région indiquée du plan  $F$ , ainsi que celle du plan  $\Omega$  sur la moitié supérieur du plan d'une certaine variable complexe  $\lambda$ . Dans ce cas, on trouve une relation entre  $F$  et  $\Omega$ , qui partir laquelle, une expression de  $\Omega$  en fonction de  $z$  est obtenue par intégration.

## 3.2 Formulation mathématique et résolution du problème

Notons par  $v = u - iv$ , où  $(u, v)$  sont les composantes du vecteur vitesse dans la direction de  $x$  et  $y$  respectivement et par  $\Omega = \phi + i\psi$  la fonction potentielle complexe où  $\phi$  et  $\psi$  désignent respectivement la fonction potentielle et la fonction de courant. On suppose que la densité  $\sigma$  de fluide est constante ainsi que la pression  $p$  sur la surface libre (pression atmosphérique). Les conditions sur la surface libre sont données par l'équation de **Bernoulli**

$$\frac{1}{2}|v|^2 + \frac{p}{\sigma} = cte, \text{ sur } BC. \quad (3.2)$$

L'équation (3.2) implique que la vitesse est constante sur la surface libre car  $p = cte$  et  $\sigma = cte$  alors (3.2) devient :

$$q = |v| = cte, \text{ sur } BC. \quad (3.3)$$

De la transformation (3.1), il convient de poser :

$$\begin{aligned} F &= \log\left(\frac{Udz}{d\Omega}\right) = \log\left(\frac{U}{u - iv}\right), \\ &= \log\frac{U}{q} + i\theta, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $\theta$  est l'angle que fait le vecteur vitesse  $\vec{V}(u, v)$  avec l'axe  $x'o'x$ . Par cette transformation, le domaine occupé par le fluide dans le plan de la variable  $z$  se transforme en une bande semi-infinie (fig 15). On choisie  $\phi = 0$  au point  $(x, y) = (0, 0)$  et  $\psi = 0$  sur la ligne  $EOC$ .

Par conséquent  $\psi = HU$  sur la ligne de courant  $ABC$  (fig 16) telle que  $U$  est la vitesse de l'écoulement à l'infini.

La transformation conforme d'une bande semi-infinie dans le plan  $F$  au demi plan supérieur d'un autre plan complexe  $\lambda$  est donnée par le théorème de **Schwarz-Christoffel**. En respectant le sens et l'orientation de l'écoulement, On choisit  $B = 1, C = 0$  et  $A$  à l'infini sur le plan  $\lambda$  (fig17)

$$\frac{dF}{d\lambda} = \mathbb{A}(\lambda-1)^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}},$$

Par intégration on trouve :

$$F = \mathbb{A} \int (\lambda-1)^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} d\lambda + \mathbb{B}, \quad (3.5)$$

En faisant le changement de variable  $\gamma = 2\lambda - 1$  dans (3.5) on obtient

$$F = \mathbb{A} \int \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \mathbb{B}.$$

d'où

$$F = \mathbb{A} \arg ch(2\lambda - 1) + \mathbb{B}, \quad (3.6)$$

où  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  sont des constantes à déterminer. Pour la détermination de  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  on utilise les conditions :

1.  $F(1) = -i\frac{\pi}{2}$  on trouve  $\mathbb{B} = -i\frac{\pi}{2}$ .

En substituant  $\mathbb{B}$  dans l'équation (3.6) on aura :

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( 1 + ch \left( \frac{F + i\frac{\pi}{2}}{\mathbb{A}} \right) \right) \quad (3.7)$$

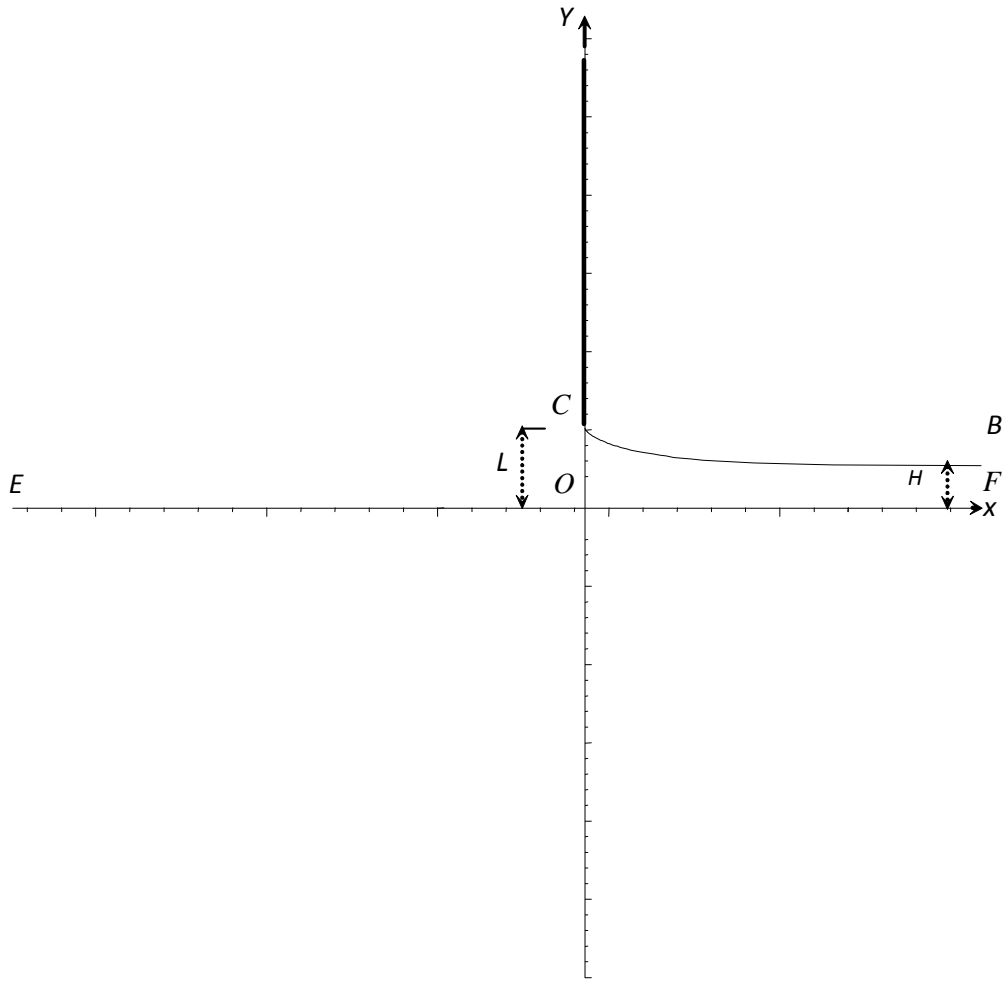
2.  $F(0) = 0$  on trouve  $\mathbb{A} = \frac{1}{2}$ .

En substituant les valeurs de  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  dans l'équation (3.7) on obtient

$$\lambda = \frac{1}{2}(1 - ch(2F)) \quad (3.8)$$

$$= -sh^2 F \quad (3.9)$$

L'équation (3.8) nous donne une relation entre  $\lambda$  et  $F$ .



**Figure(14)** (un écoulement à surface libre sous un barrage)

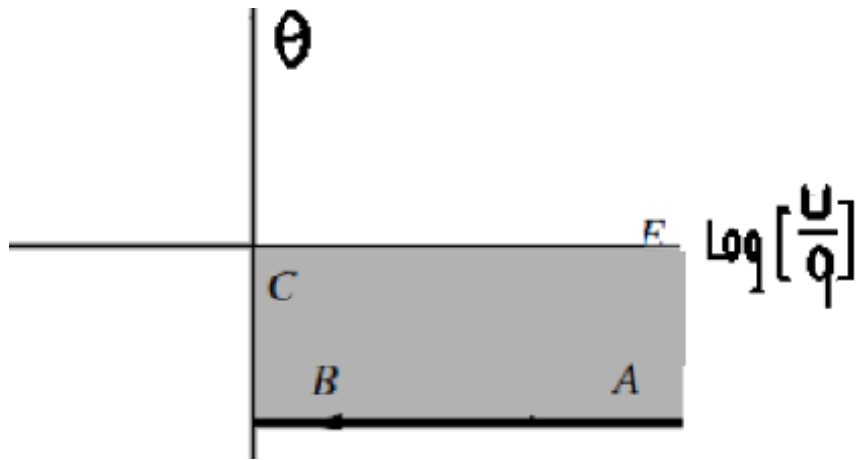


Figure 15 (Le domaine occupé par le fluide dans le plan  $F$ )

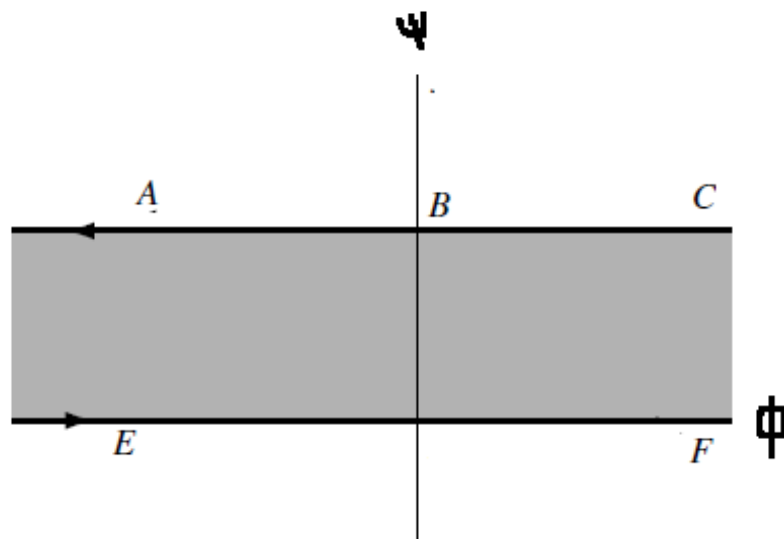


Figure 16 (plan de la variable  $\Omega$ )

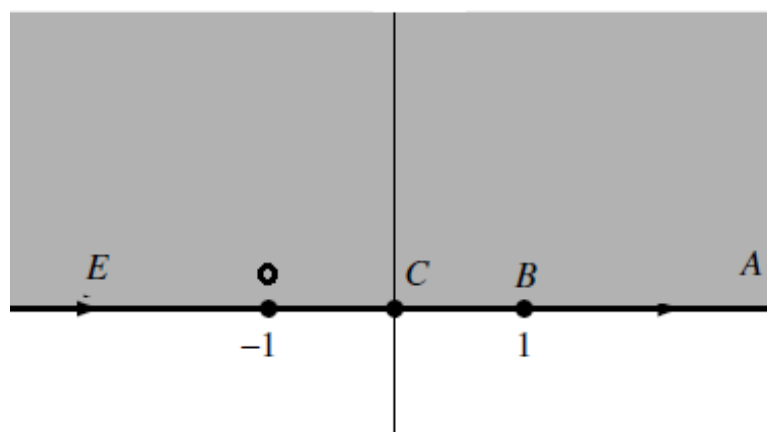


Figure 17 (plan de variable  $\lambda$ )

Le seonde partie du travail consiste à trouver par la méthode des transformation conformes une relation entre  $\lambda$  et  $\Omega$ .

En utilisant le théorème de **Schwarz-Christoffel** et en respectant la correspondance des points  $A \rightarrow -\infty$ ,  $B = iH$ ,  $C$  à l'infini du plan  $\Omega$  au point  $B = 1$ ,  $C = 0$  et  $A$  à l'infini sur le plan  $\lambda$  (fig17)  $\frac{d\Omega}{d\lambda} = \mathbb{A}\lambda^{-1}$ , ce qui donne, après intégration

$$\Omega = \mathbb{A} \log \lambda + \mathbb{B}, \quad (3.10)$$

pour détermine les constantes  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$ , on utilise le fait qu'au point  $B$  on a :

$$\Omega = iHU \text{ et } \lambda = 1, \quad (3.11)$$

et au point  $O$  on a :

$$\Omega = 0 \text{ et } \lambda = -1, \quad (3.12)$$

En remplaçant  $\Omega$  et  $\lambda$  par les valeurs de la relation (3.11) dans (3.10), on trouve

$$\mathbb{B} = iHU.$$

De l'équation (3.10), on déduit :

$$\mathbb{A} = \frac{\Omega - iHU}{\log \lambda}$$

On sait d'après la relation (3.12)  $\Omega(-1) = 0$ , donc  $\mathbb{A} = \frac{-iHU}{\pi}$

En substituant  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  dans (3.10) on obtient

$$\lambda = -\exp\left(\frac{-\pi}{HU}\Omega\right). \quad (3.13)$$

D'où l'on tire, en utilisant (3.8), la relation entre  $F$  et  $\Omega$  :

$$\lambda = -\exp\left(\frac{-\pi}{HU}\Omega\right) = -sh^2F.$$

Comme

$$\lambda = -sh^2F = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\exp(2F) + \exp(-2F)}{2}\right) \quad (3.14)$$

En substituant (3.4) dans (3.14), on trouve après simplification

$$\lambda = -\frac{1}{4} \left(-2 + U^2 \left(\frac{dz}{d\Omega}\right)^2 + \frac{1}{U^2} \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2\right). \quad (3.15)$$

on pose  $\Upsilon = U^2(\frac{dz}{d\Omega})^2$ , l'équation (3.15) devient

$$\Upsilon^2 - 2(1 - 2\lambda)\Upsilon + 1 = 0$$

la solution s'écrit :

$$\Upsilon = U^2(\frac{dz}{d\Omega})^2 = (1 - 2\lambda) \pm i\sqrt{1 - (1 - 2\lambda)^2}$$

comme  $U^2(\frac{dz}{d\Omega})^2 = -i$  lorsque  $\lambda = \frac{1}{2}$ , on prend donc le signe négatif de la racine, c'est-à-dire,

$$U^2(\frac{dz}{d\Omega})^2 = (1 - 2\lambda) - i\sqrt{1 - (1 - 2\lambda)^2}$$

En résolvant cette équation on trouve

$$\begin{aligned} U(\frac{dz}{d\Omega}) &= \sqrt{\lambda} - i\sqrt{1 - \lambda} & U(\frac{dz}{d\Omega}) &= \sqrt{1 - \lambda} - i\sqrt{\lambda} \\ U(\frac{dz}{d\Omega}) &= -\sqrt{\lambda} + i\sqrt{1 - \lambda} & U(\frac{dz}{d\Omega}) &= -\sqrt{1 - \lambda} + i\sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} U(\frac{dz}{d\Omega}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{lorsque } \lambda = \frac{1}{2} \\ U(\frac{dz}{d\Omega}) = i & \text{lorsque } \lambda = 1 \end{cases}$$

On choisit

$$U(\frac{dz}{d\Omega}) = \sqrt{1 - \lambda} - i\sqrt{\lambda} \quad (3.16)$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} U \frac{dz}{d\lambda} &= U \frac{dz}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d\lambda} & (3.17) \\ &= \frac{HU}{\pi} \left( -\frac{\sqrt{1 - \lambda}}{\lambda} + i\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \end{aligned}$$

par une intégration simple on trouve

$$z - z_0 = 2\frac{HU}{\pi} \left( -\log \frac{\sqrt{1 - \lambda}}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{1 - \lambda} + i\sqrt{\lambda} \right), \quad (3.18)$$

où  $z_0$  est la constante d'intégration.

Les équations (3.18) et (3.13) donne la solution du problème sous forme

$$\begin{cases} z = \kappa(\lambda) \\ \lambda = -\exp\left(\frac{-\pi}{HU}\Omega\right). \end{cases} \quad (3.19)$$

Le système (3.19) nous permet de trouver la forme de la surface libre  $BC$  On a

$$\begin{aligned}\psi &= HU, \\ \phi &= Us, \\ F &= i\theta,\end{aligned}$$

où  $s$  désigne la distance de long de la surface libre à partir du point  $B$ .

De (3.8) (3.13) on peut écrire

$$\begin{aligned}\lambda &= \sin^2 \theta \\ &= \exp\left(\frac{\pi s}{H}\right)\end{aligned}\tag{3.20}$$

puisque au point  $B$  on a  $z(1) = iL$ , en substituant dans (3.18), on trouve  $z_0 = iL$ , on obtient la forme de la surface libre par l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = \frac{2H}{\pi}(-\log(\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}) - \cos\theta) \\ y = L - \frac{2H}{\pi}(1 + \sin\theta) \end{cases} \quad \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq 0\tag{3.21}$$

L'amplitude de l'écoulement à l'infini est donnée par

$$H = \lim_{s \rightarrow +\infty} y(s) = L - \frac{2H}{\pi}\tag{3.22}$$

ce qui donne

$$\frac{H}{L} = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0,611\tag{3.23}$$

La valeur  $\frac{H}{L} = 0,611$  représente le degré de contraction de l'écoulement, on pose

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{x}{L} \\ \tilde{y} = \frac{y}{L} \end{cases}$$

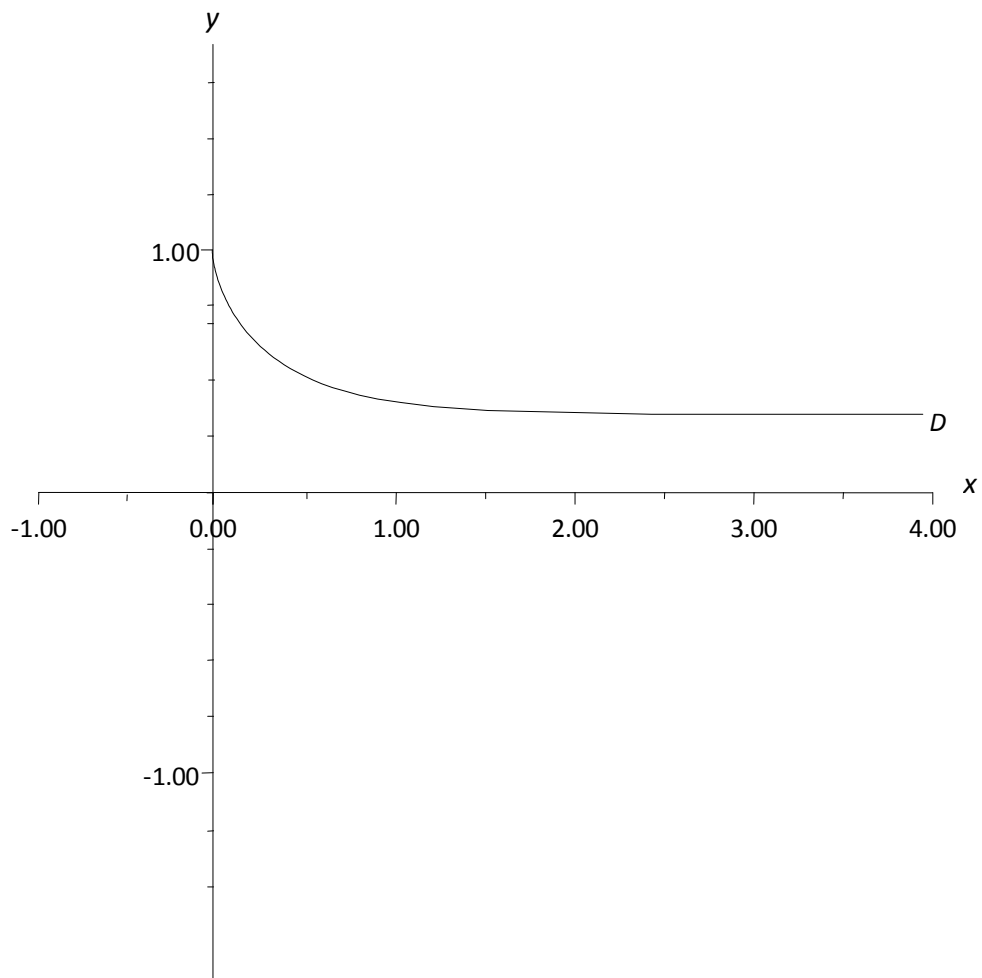
et comme  $\frac{H}{L}$  est donné par (3.17), l'équation paramétrique de la surface libre devient

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{2}{2+\pi}(-\log(\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}) - \cos\theta) \\ \tilde{y} = 1 - \frac{2}{2+\pi}(1 + \sin\theta) \end{cases} \quad \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq 0\tag{3.24}$$

Pour déterminer la forme de la surface libre du jet il suffit de prendre la symétrie de la courbe dans (3.24) par rapport à l'axe  $x$  ou  $\tilde{y}$

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{2}{2+\pi}(-\log(\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}) - \cos\theta) \\ \tilde{y} = -1 + \frac{2}{2+\pi}(1 + \sin\theta) \end{cases} \quad \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq 0.$$

et par suite la figure (18) représente le graphe de l'équation paramétrique de la surface libre.



**Figure (18)** L'équation paramétrique de la surface libre.

1.

# Conclusion

Dans ce mémoire, on a exposé l'importance de la théorie des fonctions analytiques et surtout dans les transformations conformes entre certaines régions du plan. Mais, comme nous avons déjà vu, le problème difficile est de trouver la fonction lorsque les régions sont spécifiées à l'avance, la transformation de Schwarz-Christoffel nous fournit une solution pour la situation où une des régions est le demi-plan supérieur et un polygone.

On représente aussi comment utilisée la transformation conforme en générale et la transformation de Schwarz-Christoffel en particulier pour résoudre quelques problèmes physiques.

# Bibliographie

- [1] **Ackerberg R C and Liu Ta-Jo 1987** The effects of capillarity on the contraction coefficient of a jet emanating from a slot *Phys. Fluids* **30** 289-90
- [2] **Asavanat J and Vanden-Broeck Jean-Marc 1996** Nonlinear free-surface flow emerging from vessels and flows under a sluice gate *J. Austral. Mat. Soc* **B 38** 63-86
- [3] **Batchelor G. K 1967** An introduction to fluid dynamics (*Cambridge : Cambridge University Press*)
- [4] **Dennis G. Zill et Patrick D. Shanahan**, A first course in complex analysis with applications, Jones and Bartlett Publishers, 2003.
- [5] **Gasmi A and Mekias H 2007** A jet from container and flow past a vertical flat plate in a channel with the surface tension effects *Appl. Math. Sci* **1(54)** 2687-2698
- [6] **.Gasmi A and Mekias H 2003** The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet *J.Phys. A : Math. Gen* **36** 851-862
- [7] **James Ward Brown et Ruel V. Churchill**, complex variables and applications, The McGraw-Hill Companies, 2009.
- [8] **John H.Mathews et Russell W.Howell**, Complex Analysis for Mathematics and Engineering, Jones and Bartlett Publishers, 1997.
- [9] **Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz, John J. Schiller et Dennis Spellman**, complex variables with an introduction to conformal mapping and its applications, McGraw-Hill.
- [10] **Naghdi P. M and Vongsarnpigoon L 1986** Steady flow past a sluice gate *Phys. Fluids* **29** 3962-3970
- [11] **Vanden-Broeck Jean-Marc 1986** Flow under a gate *Phys. Fluids* **29** 3148-3151