Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des mathématiques et de l'informatique
Département de Mathématiques

N° d'ordre : ....

Thèse

Présentée par

FARES BENSAID

Pour l'obtention du diplôme de

Docteur en sciences

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques appliquées

Thème

Quelques propriétés des espaces homogènes et non-homogènes

Soutenue publiquement le 07.03.2024 devant le jury composé de

DOUADI DRIHEM	*Professeur*	Université de M'sila	Président
MADANI MOUSSAI	*Professeur*	Université de M'sila	Directeur de thèse
KHALIL SAADI	*Professeur*	Université de M'sila	Examinateur
AZEDINE RAHMOUNE	*Professeur*	Université de B.B.Arréridj	Examinateur
ABDELBAKI MEROUANI	*Professeur*	Université de Sétif 1	Examinateur
MOHAMED SAADI	*MCA*	Université d'Oum Bouaghi	Examinateur

2023/2024

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse, le Professeur Madani Moussai. Sa guidance éclairée, son expertise inégalée et son soutien indéfectible ont été les piliers de cette recherche. Je suis extrêmement reconnaissant d'avoir eu l'opportunité de travailler sous sa direction, et je suis inspiré par son dévouement à l'excellence académique.

Je souhaite également adresser mes remerciements les plus sincères aux membres du jury, les Professeurs Drihem Douadi (Président), Abdelbaki Merouani, Azedine Rahmoune, Khalil Saadi et Mohamed Saadi (examinateurs). Leurs expertises et leurs commentaires constructifs ont grandement enrichi mon travail et ont contribué à son amélioration significative. Je suis honoré d'avoir bénéficié de leur évaluation impartiale et de leurs précieuses suggestions.

J'aimerais également exprimer ma gratitude envers mes collègues de laboratoire et mes camarades de thèse. Je n'oublierai pas de remercier les membres du personnel administratif et technique de l'université de M'sila pour leur assistance précieuse. Leurs efforts en coulisses ont contribué à créer un environnement propice à la recherche et ont facilité les aspects logistiques de mon projet.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude envers ma famille et mes amis pour leurs encouragements. Mes remerciements s'étendent également à toutes les autres personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'élaboration de cette thèse.

Dédicaces

A Mon père (Allah yarehmou), Ma Mère…
Ma famille …
Je dédie cette thèse

Table de matières

Résumé

Dans cette thèse, nous allons étudier quelques propriétés des espaces de type de Besov et de type de Triebel-Lizorkin.
En premier lieu, on va donner des résultats qui présentent des généralisations des inégalités de Nikol'skij dans les espaces de type de Besov et de type de Triebel-Lizorkin, ces résultats vont être en deux versions, une où les supports sont des couronnes et l'autre où les supports sont des boules.
Deuxièmement, on définit les algèbres de fonctions de type de Besov et de type de Triebel-Lizorkin puis on étudie la composition dans ces espaces.
Finalement, on va donner les réalisations des espaces de type de Besov et de Type de Triebel-Lizorkin homogènes, c'est-à-dire de choisir un représentant de chaque classe d'équivalence par une application linéaire continue de sorte que l'on préserve les propriétés d'invariance par translation et/ou dilatation.
Mots clés : Décomposition de Littlewood-Paley, Espace de Besov, Espace de Triebel-Lizorkin, Opérateur de composition, Réalisations.

Abstract

In this thesis, we will study some properties of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces.
Firstly, we will provide results that generalize Nikol'skij's inequalities in Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces. These results will come in two versions : one where the supports are annuli and the other where the supports are balls.
Secondly, we define the function algebras of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type and then study composition within these spaces.
Finally, we will present the notion of the realizations of homogeneous Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces. This means selecting a representative from each equivalence class through a continuous linear mapping that preserves the properties of translation and/or dilation invariance.
Key words : Littlewood-Paley decomposition, Besov space, Triebel-Lizorkin space, Composition operator, Realizations.

Introduction

La théorie des espaces fonctionnels joue un rôle fondamental dans l'analyse mathématique en fournissant des outils puissants pour étudier les propriétés des fonctions et leurs espaces de régularité. Dans cette thèse de doctorat intitulée "Quelques propriétés des espaces homogènes et non homogènes", nous nous concentrons sur deux classes importantes d'espaces fonctionnels : les espaces de type de Triebel-Lizorkin et les espaces de type de Besov.

Les espaces de type Besov et de type Triebel-Lizorkin ont été largement étudiés ces dernières années. Lorsque $\tau = 0$, ils correspondent aux espaces de fonction usuels de Besov et de Triebel-Lizorkin, qui ont été étudiés en détail par Triebel dans ses travaux [42, 43, 44]. Lorsque $s \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, \infty)$ et $1 \leq p, q < \infty$, les espaces $B^{s,\tau}_{p,q}$ ont été introduits pour la première fois par El Baraka dans [23, 24], où il s'est penché sur les plongements ainsi que sur les caractérisations de Littlewood-Paley des espaces de Campanato. Il a démontré que les espaces $B^{s,\tau}_{p,q}$ englobent certains espaces de Campanato étudiés dans [22]. Après, Drihem a donné, dans [25, 26], une caractérisation des espaces $B^{s,\tau}_{p,q}$ en utilisant des moyens locaux et des fonctions maximales et une caractérisation par les différences. Pour une lecture plus exhaustive des espaces $B^{s,\tau}_{p,q}$ et $F^{s,\tau}_{p,q}$, on a le travail réalisé par Yuan et ses collaborateurs [49]. Yang et Yuan, dans [45, 46, 51], ont introduit les échelles d'espaces de type Besov-Triebel-Lizorkin homogènes $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}$ et $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$, qui généralisent les espaces homogènes de Besov-Triebel-Lizorkin $\dot{B}^{s}_{p,q}$, $\dot{F}^{s}_{p,q}$, et ont établi la relation entre $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$ et les espaces Q_α.

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux inégalités de type de Nikol'skij dans les espaces de type de Besov homogènes $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et dans les espaces de type de Triebel-Lizorkin homogènes $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. On traite deux cas : lorsque les supports des fonctions considérées sont des couronnes [4] et lorsque les support sont des boules [5]. Les inégalités de type de Nikols'kij fournissent des estimations de la norme dans ces espaces fonctionnels et jouent un rôle essentiel dans l'étude de la régularité des fonctions. Depuis leurs apparition, ils ont été largement étudiées, où on peut trouver leurs preuves et utilisations dans de divers papier, citons par exemple [19], [33, 34] pour les espaces classiques, ou pour les espaces de Triebel-Lizorkin non-homogènes dans [49].

Nous allons étudier les algèbres de fonctions définies sur les espaces de type de Triebel-Lizorkin et les espaces de type de Besov [5]. Ensuite, on étudiera l'opérateur de composition dans ces espaces, en utilisant notamment les espaces BV_p, qui sont les espaces de fonctions de variation bornée. Le problème de l'opérateur de composition à fait l'objet d'un grand nombre d'études dans de différents espaces fonctionnels, citons par exemple S. Igari [28] Savaré [41] et dans plusieurs de ces papiers Bourdaud [10, 11, 12, 16] ou encore Moussai [31, 32]. A partir de 2007 Bourdaud et Co ont étudié le problème de composition en introduisant les algèbres de fonctions des espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin [18, 19, 20], ici on va étendre cette théorie dans les espaces de type Triebel-Lizorkin et les espaces de type de Besov.

Enfin, nous nous intéressons également aux réalisations des espaces homogènes de type de Triebel-Lizorkin et des espaces de type de Besov. Les espaces homogènes sont des espaces de fonctions qui possèdent des propriétés de symétrie spéciales et sont largement étudiés en géométrie et en analyse harmonique. L'étude des réalisations des espaces homogènes dans les espaces de type de Triebel-Lizorkin et de Besov permet de mieux comprendre les liens entre ces différentes classes d'espaces fonctionnels. Initié par Bourdaud [9, 13, 14], il a mis en place cette théorie et a montré l'existence des réalisations dans les espaces de Sobolev, Besov et Triebel-Lizorkin homogènes avec $1 \leq p,q \leq \infty$, puis Moussai [34] en étendant les cas à $0 < p,q < 1$. Rappelons qu'un espace homogène est un espace dont les éléments sont des classes d'équivalences pour la relation d'équivalence $f\mathscr{R}g$ si, et seulement si $f-g$ est un polynôme, car tout polynôme de $\mathbb{R}^n$ a une norme nulle dans ces espaces. Réaliser ces espaces, et de choisir un représentant de chaque classe par une application linéaire et continue, tout en préservant l'invariance par translation et/ou dilatation.

En résumé, nous abordons plusieurs aspects des espaces de type de Triebel-Lizorkin et des espaces de type de Besov. Nous nous intéressons aux inégalités de type de Nikol'skij dans des cas particuliers, aux algèbres de fonctions sur ces espaces, ainsi qu'aux réalisations des espaces homogènes. Nous espérons que cette étude contribuera à approfondir notre compréhension des propriétés des espaces fonctionnels et à ouvrir de nouvelles perspectives pour la recherche future dans ce domaine.

Ce manuscrit est divisé en quatre chapitres et une annexe :
Le *premier chapitre* contient des généralités et préliminaires d'analyse fonctionnelle qui sont la base des chapitres qui suivent.
Le *deuxième chapitre* présente des estimations de type de Nikol'skij, ces célèbres inégalités qui nous sert d'outils puissant pour la convergence des séries rencontrées dans cette thèse.
Le *troisième chapitre* évoque les algèbres de fonctions des espaces de type de Triebel-Lizorkin et de type de Besov, puis un résultat de composition dans ces espaces.
Dans le *quatrième chapitre* on va étudier les réalisations des espaces de type de Triebel-Lizorkin, notamment les réalisations invariantes par translation et/ou par dilatation.
L'*annexe* contient des démonstrations de différentes propositions du premier chapitre .

Notations

- $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels non nuls.
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $\mathbb{Z}$: Ensemble des entiers relatifs.
- Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ alors $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.
- $[a]$: la partie entière de $a \in \mathbb{R}$. Si $a \in \mathbb{R}^n$, alors $[a] := ([a_1], [a_2], \cdots, [a_n])$.
- $x \lesssim y$: $x \leq cy$ pour une certaine constante c.
- $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: L'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts.
- $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$: Le dual topologique de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.
- $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$: L'espace de Schwarz des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide.
- $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$: Le dual topologique de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (distributions tempérées).
- $\mathscr{P}_m(\mathbb{R}^n)$: L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}^n$ de degré strictement inférieur à m.
- $[f]_m := \{f + P : \ P \in \mathscr{P}_m(\mathbb{R}^n)\}$ est la classe d'équivalence de f pour la relation d'équivalence définie par $\forall f, g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : f\mathscr{R}g \Leftrightarrow f - g \in \mathscr{P}_m(\mathbb{R}^n)$.
- $a_+ := \max(a, 0)$.
- $C_b(\mathbb{R}^n)$: Espace de Banach des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme sup.
- $C_{ub}(\mathbb{R}^n)$: Espace de Banach des fonctions uniformément continues et bornées sur $\mathbb{R}^n$.
- $L_p(\mathbb{R}^n)$: Espace de Lebesgue des fonctions mesurables p-ième intégrables, on note par $\|\cdot\|_{L_p(X)}$ sa norme et par $\|\cdot\|_p$ si $X = \mathbb{R}^n$.
- ℓ_q : Espace des suites q-ième sommables.
- h_λ : L'opérateur de dilatation définie par $h_\lambda f = f(\lambda^{-1}\cdot)$ pour $\lambda > 0$.
- τ_a : L'opérateur de translation définie par $\tau_a f = f(\cdot - a)$.
- Δ_h^m : L'opérateur de différences défini par $\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x)$ et $\Delta_h^m f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x))$ (voir plus loin, page 13).

- $c, c_1, c_2, \cdots$ sont des constantes positives propres, ne dépendent uniquement que des paramètres fixés au départ, comme n, s, p, q, τ, leurs valeurs peuvent changer d'une ligne à une autre.
- Si un espace fonctionnel est défini sur $\mathbb{R}^n$, par exemple $L_p(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,..., on écrit tout simplement $L_p, \mathscr{C}, \mathscr{S}, \cdots$.

Chapitre 1

Rappels et préliminaires

Dans ce chapitre nous donnerons quelques notions fondamentales de l'analyse fonctionnelle et nous définirons les espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin en utilisant la décomposition de Littlewood-Paley, puis quelques propriétés et d'autres définitions de ces espaces (par les différences,...)

1.1 Généralités

1.1.1 Éléments d'analyse de base

Une fonction f appartient à $L_p(\mathbb{R}^n)$ si $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < +\infty$ avec $0 < p < +\infty$. Notons que l'espace L_∞ est l'ensemble des fonctions essentiellement bornées.

On dit qu'une fonction f appartient à $L_p(\mathbb{R})$ localement-uniformément s'il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$\int_J |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq M, \tag{1.1}$$

pour tout intervalle J, de longueur 1.

ℓ_q est l'espace des suites $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (réelles ou complexes) telles que $\sum_{n\geq 0} |x_n|^q < +\infty$.

Soient $0 < p \leq \infty$ et $0 < q \leq \infty$. Si $\{f_k\}$ est une suite de fonctions mesurables boréliennes et à valeurs complexes sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\|f_k\|_{L_p(\ell_q)} = \big\|\|f_k\|_{\ell_q}\big\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \big(\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(x)|^q\big)^{p/q} \mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

$$\|f_k\|_{\ell_q(L_p)} = \big\|\|f_k\|_{L_p}\big\|_{\ell_q} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \big(\int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x)|^p \mathrm{d}x\big)^{q/p}\right)^{1/q}.$$

La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est donnée par

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

L'opérateur $\mathscr{F}$ est bien défini sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ par la formule habituelle

$$\langle \mathscr{F} f, \varphi \rangle := \langle f, \mathscr{F}\varphi \rangle \qquad \forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

La transformée de Fourier inverse est définie par

$$\mathscr{F}^{-1}(f)(x) := (2\pi)^{-n}\mathscr{F}(f)(-x).$$

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ telle que la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ soit intégrable. Le produit de convolution de f et de g est défini par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

Ci-après, quelques inégalités essentielles qu'on utilisera le long de cette thèse.

1. *Inégalité de Minkowski* [21]

   Soit $p \geq 1$, pour tout f et g de $L_p(\mathbb{R}^n)$, on a

   $$\|f+g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.2}$$

   La formule ci-dessus est aussi valable pour $0 < p < 1$ dans le sens suivant :

   $$\|f+g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\right); \quad \text{(inégalité triangulaire faible)}.$$

   En général, nous utiliserons l'inégalité de Minkowski comme suit [43] : si $0 < p < q \leq \infty$, on a

   $$\big\|\|\cdot\|_{L_p}\big\|_{\ell_q} \leq \big\|\|\cdot\|_{\ell_q}\big\|_{L_p}.$$

   Lemme 1.1.1. *Soit $0 < q \leq 1$. Soit $\{a_j\}_{j\in\Lambda,\Lambda\subseteq\mathbb{Z}}$ une suite à valeurs réelles ou complexes, alors*

   $$\left(\sum_{j\in\Lambda} |a_j|\right)^q \leq \sum_{j\in\Lambda} |a_j|^q. \tag{1.3}$$

   La formule (1.3) peut s'étendre à $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$.

2. *Inégalité de Hölder* [21]

   Soient $p, q \in [1, +\infty]$, deux exposants conjugués $\left(\text{i.e } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. Alors, pour toute fonction mesurable $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on a :

$$\|fg\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} . \tag{1.4}$$

3. *Inégalité de Young* [48]

   Soient $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, avec $p, q, r \in [1, +\infty]$ et $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ alors, $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f * g\|_{L_r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} . \tag{1.5}$$

4. *Inégalité de Bernstien* (voir [6]) :

   Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Il existe $c = c(\alpha, p, q, n) > 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $supp \hat{f} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$ on a

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq cR^{|\alpha| + n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} . \tag{1.6}$$

5. *Inégalité du maximum* ([43]) :

   Si f est une fonction localement Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs complexes sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$(\mathscr{M} f)(x) = \sup \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \tag{1.7}$$

   est la fonction maximale de Hardy-Littlewood, où le sup est pris sur toutes les boules de $\mathbb{R}^n$ centrées en x. Alors, on a

$$\|\mathscr{M}(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{pour } 1 < p \leq \infty$$

   et

$$\left\|\mathscr{M}(f_j)\right\|_{L_p(\ell_q)} \leq c \left\|f_j\right\|_{L_p(\ell_q)} \quad \text{pour } 1 < p \leq \infty \text{ et } 1 \leq q \leq \infty.$$

6. *Inégalité de Marschall* ([49]) :

   Soient $f \in C^\infty$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que pour $A > 0$ et $R \geq 1$ on a

$$\text{supp}\widehat{f} \subset \{\xi : |\xi| \leq AR\} \quad \text{et} \quad \text{supp}\varphi \subset \{\xi : |\xi| \leq A\}$$

   Alors,

$$\left|\mathscr{F}^{-1}(\varphi \mathscr{F} f)(x)\right| \leq c(AR)^{n(\frac{1}{t} - 1)} \|\varphi\|_{\dot{B}^{n/t}_{1,t}(\mathbb{R}^n)} \left(\mathscr{M} |f|^t\right)^{1/t}(x), \tag{1.8}$$

   avec $0 < t \leq 1$ et c ne dépend pas de φ, f, A, R et x.

Distributions modulo les polynômes

On notera par $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ à l'ensemble de tous les polynômes de $\mathbb{R}^n$, c'est un sous-espace de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Par $\mathscr{P}_m(\mathbb{R}^n)$ au sous-espace de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ des polynômes de degrés au plus m. On note aussi $\mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n) = \{0\}$. Donnons maintenant quelques propriétés. On rappelle les semi-normes de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $k, N \in \mathbb{N}_0$ et toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\zeta_{N,k}(f)(x) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leq N} (1+|x|)^k \left| f^{(\alpha)}(x) \right|.$$

Proposition 1.1.2. *Soient m de $\mathbb{N}$ et f de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors, $f \in \mathscr{P}_m(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $f^{(\alpha)} = 0$ pour tout $|\alpha| = m$.*

Remarque 1.1.1. L'orthogonal de $\mathscr{P}_m(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sera noté $\mathscr{S}_m(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.1.2. On note par $[f]_m$ à la classe d'équivalence de f modulo $\mathscr{P}_m$. L'application qui envoie $[f]_m$ à la restriction de f à $\mathscr{S}_m$, est un isomorphisme de $\mathscr{S}'/\mathscr{P}_m(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathscr{S}'_m(\mathbb{R}^n)$.

Invariance par translations et par dilatations

Dans cette section, nous allons définir et examiner l'invariance par translation et par dilatation. Avant d'aborder ces concepts, nous allons introduire l'espace de Banach des distributions. Pour une référence détaillée, nous nous appuierons sur les travaux de [8] et [15].

Définition 1.1.1. Un espace de Banach de distributions (E.B.D.) dans $\mathscr{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel E de $\mathscr{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ muni d'une norme complète rendant continue l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathscr{S}'_m(\mathbb{R}^n)$.

Si E est un espace de Banach de distributions et que $\tau_a(E) \subseteq E$ (respectivement $h_\lambda(E) \subseteq E$) pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ (respectivement, pour tout $\lambda > 0$), on dit que E est invariant par translations (respectivement dilatations).

Définition 1.1.2. On dit qu'un E.B.D. $(E, \|\cdot\|)$ est isométriquement invariant par translation, s'il est invariant par translations et $\|\tau_a f\| = \|f\|$ pour tout $f \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$. On dit que E est homogène de degré ℓ, s'il est invariant par dilatations et $\|h_\lambda f\| = \lambda^{-\ell} \|f\|$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in E$.

Définition 1.1.3. Soit $f \in \mathscr{S}'_m(\mathbb{R}^n)$, on dit que f est bornée par translations si, la fonction $x \longmapsto \langle \tau_x f, g \rangle$ est bornée sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $g \in \mathscr{S}_m(\mathbb{R}^n)$.

Il y a une classe de distributions tempérées qui a un rôle important dans notre travail, en particulier dans la réalisation des espaces homogènes. Cette classe est les distributions tempérées qui tendent faiblement vers 0 à l'infini.

Définition 1.1.4. Une distribution tempérée $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tends vers 0 faiblement à l'infini si $\lim_{\lambda \to 0} f(\lambda^{-1}(\cdot)) = 0$ dans $\mathscr{S}'$. Cet ensemble sera noté $\tilde{C}_0$.

Lemme 1.1.3. *Si f est un polynôme de $\widetilde{C}_0$, alors $f = 0$, c'est-à-dire $\widetilde{C}_0 \cap \mathscr{P}_\infty = \{0\}$.*

Preuve. Voir [9] □

Lemme 1.1.4. *Toute fonction f, tel que $\mathrm{supp}\widehat{f}$ est compact dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ appartient à $\widetilde{C}_0$.*

Preuve. Pour la preuve, on peut voir [9] ou [14]. □

Remarque 1.1.3. Dans l'annexe on trouvera cinq exemples de fonctions dans $\widetilde{C}_0$.

Le lemme suivant représente une estimation d'une fonction dans $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}_m$, pour sa preuve on peut se référer à [34].

Lemme 1.1.5. **i.** *Soit $k, m \in \mathbb{N}_0$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\left|\varphi_j * f(x)\right| \leq C 2^{-jm} \zeta_{m,k}(f) \zeta_{m,k}(\varphi)(1+|x|)^{-k},$$

Pour toute $f \in \mathscr{S}$, toute $\varphi \in \mathscr{S}_m$ (avec $\varphi_j = 2^{nj} h_{2^{-j}} \varphi$), tout $j \in \mathbb{N}_0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

ii. *Soit $k, m \in \mathbb{N}_0$. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\left|\psi_j * f(x)\right| \leq C 2^{m+n} \zeta_{m,k}(f) \zeta_{m,k}(\psi)(1+2^j |x|)^{-k},$$

Pour toute $f \in \mathscr{S}_m$, toute $\psi \in \mathscr{S}$ (avec $\psi_j = 2^{nj} h_{2^{-j}} \psi$), tout $j \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On va définir dans ce qui suit, des espaces fonctionnels qui nous seront utiles par la suite.

Définition 1.1.5.

- C est l'espace de Banach des fonctions à valeurs complexes et uniformément continues et bornées sur $\mathbb{R}^n$, muni de la norme sup.
- C_b^m est l'espace de Banach des fonctions à valeurs complexes, continues et bornées sur $\mathbb{R}^n$, avec ces dérivées jusqu'a l'ordre m.
- C_{ub} est l'espaces de Banach des fonctions à valeurs complexes, uniformément continues et bornées sur $\mathbb{R}^n$.
- L'espace de Hölder $\mathscr{C}^s$ est défini par :

  Si s est réel, on pose $s = [s] + \{s\}$ avec $[s]$ entier et $0 \leq \{s\} < 1$. Alors,

$$\mathscr{C}^s = \left\{ f \in \mathscr{C}^{[s]} : \|f\|_{\mathscr{C}^s} := \|f\|_{\mathscr{C}^{[s]}} + \sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^{\{s\}}} \right\}.$$

1.1.2 Décomposition de Littlewood-Paley

La décomposition de Littlewood-Paley est primordiale dans les définitions des espaces fonctionnels. Cette théorie, avait pour objectifs d'étendre certains résultats sur les fonctions de L_2 aux fonctions de L_p $(0 < p \leq +\infty)$. Elle va aussi nous permettre de définir les espaces de Besov et les espaces de Triebel-Lizorkin.

On se donne une fois pour toute, une fonction C^∞ radiale positive ρ définie par

$$\begin{cases} \rho(\xi) = 1 & \text{si} \quad |\xi| \leq 1 \\ 0 \leq \rho(\xi) \leq 1 & \text{si} \quad 1 \leq |\xi| \leq 3/2 \\ \rho(\xi) = 0 & \text{si} \quad |\xi| \geq 3/2. \end{cases}$$

Puis, on définit $\gamma(\xi) := \rho(\xi) - \rho(2\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. Alors, γ a pour support la couronne $1/2 \leq |\xi| \leq 3/2$. Par suite, nous avons les sommes suivantes :

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma(2^j\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{1.9}$$

$$\rho(2^{-k}\xi) + \sum_{j>k} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{1.10}$$

On introduit maintenant les opérateurs de convolutions $(S_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $(Q_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ définis par :

$$\widehat{S_j f}(\xi) := \rho(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi), \quad \widehat{Q_j f}(\xi) := \gamma(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi). \tag{1.11}$$

Remarque 1.1.4. Les opérateurs S_j et Q_j sont définis sur $\mathscr{S}'$. L'opérateur Q_j est également défini sur $\mathscr{S}'_\infty$ du fait que $Q_j f = 0$ si, et seulement si f est un polynôme dans $\mathbb{R}^n$. En effet, si $f \in \mathscr{P}_\infty$ (disons $f(x) := \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$), on a $\widehat{f}(\xi) = \sum_\alpha c'_\alpha \delta^{(\alpha)}$, où δ est la distribution de Dirac, comme

$$\gamma(\xi)\delta = \gamma(0)\delta = 0$$

il vient que $\widehat{Q_j f} \equiv 0$, c'est-à-dire $Q_j f \equiv 0$. De cette observation, nous allons utiliser la convention suivante

$$\text{Si } f \in \mathscr{S}'_\infty \ \text{ on pose } \ Q_j f := Q_j g \ \text{ pour tout } g \in \mathscr{S}' \ \text{ telle que } \ [g]_\infty = f. \tag{1.12}$$

Remarque 1.1.5. Les familles d'opérateurs $\{S_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ constitues des opérateurs uniformément bornés dans l'espace normé $\mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$, et cela est par l'inégalité de Young dans $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Le lemme suivant est une conséquence de la formule de Taylor.

Lemme 1.1.6. **(i)** *Soit $N \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\|Q_j f\|_p = O(2^{-jN})$ quand $j \to +\infty$.*

(ii) *Soit $N \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathscr{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $\|Q_j f\|_p = O(2^{jN})$ et $\|S_j f\|_p = O(2^{jN})$ quand $j \to -\infty$.*

Preuve. Voir [34]. □

Le lemme 1.1.6 nous donne une conséquence directe, qui est la convergence de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée, c'est la proposition suivante :

Proposition 1.1.7. **(i)** *Pour tout $f \in \mathscr{S}_\infty$ (respectivement $f \in \mathscr{S}'_\infty$), on a $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f$ dans $\mathscr{S}_\infty$ (respectivement $\mathscr{S}'_\infty$).*

(ii) *Pour tout $f \in \mathscr{S}$ (respectivement $f \in \mathscr{S}'$), on a $f = S_k f + \sum_{j>k} Q_j f$ dans $\mathscr{S}$ (respectivement $\mathscr{S}'$).*

Preuve. Voir [45, Lemme 2.1]. □

Nous avons besoin de définir les cubes dyadiques disjoints de $\mathbb{R}^n$ que nous utiliserons pour la définition des espaces de type de Besov et les espaces de type de Triebel-Lizorkin.

Définition 1.1.6. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et soit $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$. Un cube dyadique $P_{k,\nu}$ de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble défini par

$$P_{k,\nu} := \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \nu_j \leq 2^k x < \nu_j + 1,\ \ j = 1, \cdots, n \right\}.$$

Si $P_{k,\nu}$ est un cube dyadique de $\mathbb{R}^n$ et c une constante positive, alors $cP_{k,\nu}$ est un cube de $\mathbb{R}^n$ qui a le même centre que $P_{k,\nu}$ et de longueur de côté $c2^{-k}$. On désigne par $\chi_{P_{k,\nu}}$ à la fonction caractéristique de $P_{k,\nu}$.

Définition 1.1.7. Soient $0 < p \leq \infty$ et $\tau \in \mathbb{R}$. L'espace $L_p^\tau(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de fonctions mesurables f tel que

$$\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k<0} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\int_{P_{k,\nu}} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Remarque 1.1.6. Soient $0 < p \leq +\infty$.

(i) $L_p^\tau(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Si $\tau < 0$, alors $L_p^\tau = \{0\}$.

(iii) Si $\tau = 0$, alors $L_p^0 = L_p$.

Pour plus de détails on se réfère à [49, Proposition 2.7].

Preuve. Pour la preuve voir l'annexe. □

1.2 Espaces de type de Besov et espaces de type de Triebel-Lizorkin

On commence par les définitions des espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin classiques puis on donnera les définitions des espaces de type de Besov et les espaces de type de Triebel-Lizorkin.

Définition 1.2.1. 1. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p,q \leq \infty$. L'espace de Besov non-homogène $B^s_{p,q}$ est l'ensemble des $f \in \mathscr{S}'$ tel que

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \left(\sum_{j\geq 0} \left(2^{sj} \left\| Q_j f \right\|_{L_p} \right)^q \right)^{1/q} < \infty, \quad \text{avec } S_0 \equiv Q_0. \tag{1.13}$$

2. Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. L'espace de Triebel-Lizorkin non-homogène $F^s_{p,q}$ est l'ensemble des $f \in \mathscr{S}'$ tel que

$$\|f\|_{F^s_{p,q}} = \left\| \left(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq} \left| Q_j f \right|^q \right)^{1/q} \right\|_p < \infty, \quad \text{avec } S_0 \equiv Q_0. \tag{1.14}$$

3. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p,q \leq \infty$. L'espace de Besov homogène $\dot{B}^s_{p,q}$ est l'ensemble des $f \in \mathscr{S}'_\infty$ tel que

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{sj} \left\| Q_j f \right\|_{L_p} \right)^q \right)^{1/q} < \infty. \tag{1.15}$$

4. Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. L'espace de Triebel-Lizorkin homogène $\dot{F}^s_{p,q}$ est l'ensemble des $f \in \mathscr{S}'_\infty$ tel que

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}} = \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sjq} \left| Q_j f \right|^q \right)^{1/q} \right\|_p < \infty. \tag{1.16}$$

Avec la modification usuelle quand $p = \infty$ ou $q = \infty$ dans le cas de l'espace de Besov, et $q = \infty$ dans le cas de l'espace de Triebel-Lizorkin.

Définition 1.2.2. 1. Soient $s, \tau \in \mathbb{R}$ et $0 < p,q \leq \infty$. L'espace de type de Besov non-homogène $B^{s,\tau}_{p,q}$ est l'ensemble des $f \in \mathscr{S}'$ tel que

$$\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{kn\tau} \left(\sum_{j\geq k_+} \left(2^{sj} \left\| Q_j f \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \right)^q \right)^{1/q} < \infty, \quad \text{avec } S_0 \equiv Q_0. \tag{1.17}$$

2. Soient $s,\tau \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. L'espace de type de Triebel-Lizorkin non-homogène $F^{s,\tau}_{p,q}$ est l'ensemble des $f \in \mathscr{S}'$ tel que

$$\|f\|_{F^{s,\tau}_{p,q}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{kn\tau} \left\| \left(\sum_{j\geq k_+} 2^{sjq} \left|Q_j f\right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} < \infty, \quad \text{avec } S_0 \equiv Q_0. \tag{1.18}$$

3. Soient $s,\tau \in \mathbb{R}$ et $0 < p,q \leq \infty$. L'espace de type de Besov homogène $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}$ est l'ensemble des $f \in \mathscr{S}'_\infty$ tel que

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{kn\tau} \left(\sum_{j\geq k} \left(2^{sj} \left\|Q_j f\right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \right)^q \right)^{1/q} < \infty. \tag{1.19}$$

4. Soient $s,\tau \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. L'espace de type de Triebel-Lizorkin homogène $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$ est l'ensemble des $f \in \mathscr{S}'_\infty$ tel que

$$\|f\|_{\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{kn\tau} \left\| \left(\sum_{j\geq k} 2^{sjq} \left|Q_j f\right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} < \infty. \tag{1.20}$$

Avec la modification usuelle pour $p = \infty$ ou $q = \infty$ dans le cas de l'espace de Besov, et $q = \infty$ dans le cas de l'espace de Triebel-Lizorkin.

Remarque 1.2.1. Dans les définitions précédentes, les espaces de Besov et les espaces de Triebel-Lizorkin sont indépendants du choix de la fonction ρ, pour cela on peut voir [43]. Même chose pour les espaces de type de Besov et les espaces de type de Triebel-Lizorkin où dans [46] le Corollaire 3.1 on a prouvé qu'ils sont indépendants du choix de ρ.

Lemme 1.2.1. *Les espaces $A^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sont quasi-Banach, c'est à dire des espaces vectoriels quasi-normés complets, on a*

$$\|f+g\|^d_{A^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|^d_{A^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|^d_{A^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$

avec $d = \min(1,p,q)$ et pour tout f et g de $A^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [49, Lemme 2.1]. □

Remarque 1.2.2. On utilisera la notation $A^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ pour $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ainsi que pour $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, dans le cas où il n'est pas nécessaire de faire la distinction entre les espaces B et les espaces F.

Proposition 1.2.2. *Nous avons les inclusions suivantes*

$$\mathscr{S} \hookrightarrow A^s_{p,q}, A^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow \mathscr{S}' \quad \textit{et} \quad \mathscr{S}_\infty \hookrightarrow \dot{A}^s_{p,q}, \dot{A}^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow \mathscr{S}'_\infty. \tag{1.21}$$

La preuve de la proposition ci-dessus peut être trouvé dans [43] et [49].

Lemme 1.2.3. *On pose $d := \min(1, p)$. Alors, il existe $c > 0$ telle que*

$$\|Q_j f\|_{A^{s,\tau}_{p,q}} \leq c \max(1\,, 2^{jn(1-1/d)}) \|f\|_{A^{s,\tau}_{p,q}}$$

soit vraie pour tout $f \in A^{s,\tau}_{p,q}$ et tout $j \in \mathbb{Z}$.

Preuve. Voir l'annexe. □

1.3 Quelques propriétés

Proposition 1.3.1. *Soient $0 < p, q \leq \infty$ et $\tau, s \in \mathbb{R}$ ($0 < p < \infty$ pour le cas de Triebel-Lizorkin). Nous avons les propriétés suivantes :*

1. $A^{s,0}_{p,q} = A^{s}_{p,q}$.
2. $$A^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow B^{s+n\tau-(n/p)}_{\infty,\infty}. \tag{1.22}$$
3. *Pour $\tau > 1/p$ et $0 < q < \infty$ ou $\tau = 1/p$ et $q = \infty$, on a*
$$B^{s,\tau}_{p,q} = B^{s+n\tau-(n/p)}_{\infty,\infty} \quad et \quad F^{s,\tau}_{p,q} = B^{s+n\tau-(n/p)}_{\infty,\infty}. \tag{1.23}$$
4. *L'espace $A^{s,\tau}_{p,q}$ est monotone par rapport à s. Pour tout $0 < q_1, q_2 \leq \infty$ on a*
$$A^{s+\varepsilon,\tau}_{p,q_1} \hookrightarrow A^{s,\tau}_{p,q_2}. \tag{1.24}$$
5. *Si $\varepsilon > 0$ et $0 < q_1, q_2 \leq \infty$, alors*
$$\dot{A}^{s+\varepsilon,\tau-\frac{\varepsilon}{n}}_{p,q_1} \hookrightarrow \dot{A}^{s,\tau}_{p,q_2}. \tag{1.25}$$
6. *Pour $0 < \tau < 1/p$ on a*
$$A^{s}_{\frac{p}{1-\tau p},q} \hookrightarrow A^{s,\tau}_{p,q}. \tag{1.26}$$
7. *Pour $q_1 \leq q_2$ on a*
$$A^{s,\tau}_{p,q_1} \hookrightarrow A^{s,\tau}_{p,q_2}. \tag{1.27}$$
8. *Pour $0 < p < +\infty$ on a*
$$B^{s,\tau}_{p,\min\{p,q\}} \hookrightarrow F^{s,\tau}_{p,\min\{p,q\}} \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,\max\{p,q\}}. \tag{1.28}$$

9.

$$B^{0,\tau}_{p,1} \hookrightarrow F^{0,\tau}_{p,1} \hookrightarrow L^{\tau}_{p} \hookrightarrow B^{0,\tau}_{p,\infty}. \tag{1.29}$$

Preuve. Voir [51] ou [49]. □

Proposition 1.3.2. *Soient $\tau \geq 0$, $r, q \in]0,+\infty]$ et $-\infty < s_1 < s_2 < +\infty$.*

(i) *Si $0 < p_1 < p_2 < +\infty$ tels que $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$, alors*

$$F^{s_1,\tau}_{p_1,r} \hookrightarrow F^{s_2,\tau}_{p_2,q}. \tag{1.30}$$

(ii) *Si $0 < p_1 < p_2 \leq +\infty$ tels que $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$, alors*

$$B^{s_1,\tau}_{p_1,q} \hookrightarrow B^{s_2,\tau}_{p_2,q}. \tag{1.31}$$

Preuve. Pour la preuve voir [49, Corollaire 2.2]. □

On donne maintenant dans la proposition suivante, une relation entre les espaces $A^{s,\tau}_{p,q}$ et l'espace L^{τ}_{p}.

Proposition 1.3.3. *Si $s > (\frac{n}{p} - n)_+$, alors $A^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow L^{\tau}_{p}$.*

Preuve. En combinant (1.24) avec [49, proposition 2.7] on aboutit au résultat. □

Proposition 1.3.4. *Soient $s \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$ et $0 < p, q \leq +\infty$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) $B^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow C_{ub}$.

(b) $B^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow C$.

(c) $B^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow L_{\infty}$.

Preuve. On peut voir la preuve dans [50, Corollaire 5.5]. □

1.4 Quasi-normes équiavlentes

Proposition 1.4.1. *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p, q \leq \infty$ ($p < \infty$ dans le cas des espaces $F^s_{p,q}$). Alors, l'opérateur de dérivation ∂_j ($j = 1, \cdots, n$) envoie $A^s_{p,q}$ dans $A^{s-1}_{p,q}$, et on a*

$$\left\|\partial_j f\right\|_{A^{s-1}_{p,q}} \leq c \left\|f\right\|_{B^s_{p,q}} \quad \textit{pour tout } f \in B^s_{p,q} \ \textit{ et } j = 1, \cdots, n.$$

Remarque 1.4.1. La proposition précédente (on trouvera sa preuve dans [43]), reste vraie pour les espaces $A^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, ou on peut voir dans [52, Théorème 1.5, 1.6] notamment la proposition suivante .

Proposition 1.4.2. *Soient $s \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$, $p,q \in]0,+\infty]$ ($p > \infty$ dans le cas de l'espace de Triebel-Lizorkin) et $m \in \mathbb{N}$. Alors,*

$$\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_{\dot{A}^{s-m,\tau}_{p,q}}$$

est une quasi-norme équivalente dans $\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$.

Proposition 1.4.3. *Soient $s \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$, $p,q \in]0,+\infty]$ ($p > \infty$ dans le cas de l'espace de Triebel-Lizorkin) et $m \in \mathbb{N}$. Alors,*

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_{A^{s-m,\tau}_{p,q}},$$
$$\|f\|_{A^{s-m,\tau}_{p,q}} + \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \right\|_{A^{s-m,\tau}_{p,q}}$$

sont des quasi-normes équivalentes dans $A^{s,\tau}_{p,q}$.

La proposition suivante nous montre l'origine de l'appellation "homogène" des espaces homogènes. Sa preuve est dans L'annexe.

Proposition 1.4.4. *Les espaces homogènes sont appelés ainsi, du fait que : Pour toute $f \in \dot{B}^{s,\tau}_{p,q}$ et tout $\lambda > 0$, il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que*

$$c_1 \|f\|_{\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}} \leq \lambda^{s+n\tau-n/p} \|h_\lambda f\|_{\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}} \leq c_2 \|f\|_{\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}}. \tag{1.32}$$

Si $\lambda = 2^k (k \in \mathbb{Z})$, on aura

$$\|f\|_{\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}} = 2^{k(s+n\tau-n/p)} \|h_{2^k} f\|_{\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}}.$$

Proposition 1.4.5. **i.** *Si $\tau = 0$, alors $\dot{B}^{s,0}_{p,q} = \dot{B}^s_{p,q}$ et $\dot{F}^{s,0}_{p,q} = \dot{F}^s_{p,q}$.*

ii. *Si $\tau < 0$, alors on a $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q} = \mathscr{P}_\infty$ et $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q} = \mathscr{P}_\infty$.*

iii. *$\|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} = 0$ si, et seulement si, f est un polynôme.*

iv. *Pour toute $f \in \dot{B}^{s,\tau}_{p,q}$ (respectivement $f \in \dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$), on a $\partial_l f \in \dot{B}^{s-1,\tau}_{p,q}$ (respectivement $\partial_l f \in \dot{F}^{s-1,\tau}_{p,q}$) ($l = 1, \cdots, n$), et*

$$\|\partial_l f\|_{\dot{B}^{s-1,\tau}_{p,q}} \leq \|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} \quad et \quad \|\partial_l f\|_{\dot{F}^{s-1,\tau}_{p,q}} \leq \|f\|_{\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}}.$$

v. *Nous avons les injections continues suivantes :*

$$\dot{B}^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{s+n\tau-n/p}_{\infty,\infty} \quad et \quad \dot{F}^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{s+n\tau-n/p}_{\infty,\infty}.$$

Preuve. Voir l'annexe. □

Chapitre 2

Estimations de type de Nikol'skij

Dans ce chapitre, on va donner des estimations de type de Nikol'skij qui sont d'une grande importance dans cette thèse dans les chapitres qui suivent. D'abord on les donnent dans les espaces classiques, puis notre contribution et de donner et démontrer ces inégalités dans les espaces de type de Besov et de type de Triebel-Lizorkin homogènes. Pour les résultats dans les espaces $\dot{B}^s_{p,q}$ et $\dot{F}^s_{p,q}$ on peut se référer par exemple à [15], [34], [40]. Les inégalités de type de Nikolskij ont été explorées à travers divers travaux de recherche, parmi lesquels nous pouvons citer quelques exemples, pour les espaces usuels non-homogènes de Besov et de Triebel-Lizorkin, nous avons Triebel [43], Yamazaki [47], Marschall [30] et Runst et Al [40]. Pour les espaces usuels homogènes Bourdaud et Al[19] et Moussai [33]. Concernant les espaces non-homogènes de Type Triebel-Lizorkin on a Yuan et Al [49].

2.1 Inégalités de type de Nikol'skij dans $\dot{B}^s_{p,q}$ et $\dot{F}^s_{p,q}$

On donne dans cette section, les résultats concernant les inégalités de type de Nikols'kij dans $\dot{B}^s_{p,q}$ et $\dot{F}^s_{p,q}$. Le nombre $\nu \in \mathbb{N}$ associé à ces espaces est défini par :

- $\nu := \left([s-n/p]+1\right)_+$ si $s-n/p \notin \mathbb{N}$ ou $\nu = s-n/p$ avec $q>1$ dans le cas B et $p>1$ dans le cas F.
- $\nu = s-n/p \in \mathbb{N}$ avec $q=1$ dans le cas B et $p=1$ dans le cas F.

Proposition 2.1.1. *Soient $0<p\leq\infty$, $0<q\leq\infty$ et a,b des réels tel que $0<a<b$. Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite dans $S'(\mathbb{R}^n)$ telle que*

- *$\widehat{u_j}$ est portée par la couronne $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$,*
- *$A_B := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(2^{sj}\left\|u_j\right\|_p)^q\right)^{1/q}$.*

Alors la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ converge dans $S'_\nu(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j\right\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq cA_B, \tag{2.1}$$

où c dépend de n,s,p,q,a et b. La même conclusion est vérifiée pour $a=0$ pour $s>0$ et dans le cas $s<0$, la même conclusion est vérifiée pour $b=+\infty$.

Proposition 2.1.2. *Soient $0<p<+\infty$, $0<q\leq+\infty$ et a,b des réels tel que $0<a<b$. Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite dans $S'(\mathbb{R}^n)$ telle que*

- *$\widehat{u_j}$ est portée par la couronne $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$,*
- *$A_F := \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(2^{sj}\left\|u_j\right\|^q)\right)^{1/q}\right\|_p$.*

Alors la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ converge dans $S'_\nu(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j\right\|_{\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq cA_F, \tag{2.2}$$

où c dépend de n,s,p,q,a et b. La même conclusion est vérifiée pour $a=0$ pour $s>0$, et dans le cas $s<0$ la même conclusion est vérifiée pour $b=+\infty$.

Dans [34], l'auteur a démontré les inégalités de type de Nikol'skij dans $\mathscr{S}'$. Ces résultats sont les suivants.

Proposition 2.1.3. *Soient $0<p\leq\infty$ et $0<q\leq\infty$ ($p<+\infty$ dans les cas des espaces F). Soit s un nombre réel tel que*

$$(s<n/p) \text{ ou } (s=n/p \text{ et } 0<q\leq 1 \text{ dans les cas } B \ (0<p\leq 1 \text{ dans le cas des espaces } F)).$$

Soient a et b deux nombres réels tel que $0<a<b$. Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\mathscr{S}'$ telle que

- *$\widehat{u}_j$ est portée par la couronne $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$.*
- $$A_B := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(2^{sj}\left\|u_j\right\|_p)^q\right)^{1/q} < +\infty, \ (\text{dans le cas des espaces } B),$$
$$A_F := \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(2^{sj}\left|u_j\right|)^q\right)^{1/q}\right\|_p \ (\text{dans le cas des espaces } F),$$

i. *Alors, la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ converge dans $\mathscr{S}'$, et vérifie*

$$\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j\right\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq cA_B,$$

$$\left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j \right\|_{\dot{F}^s_{p,q}} \leq cA_F,$$

où c dépend de n,s,p,q,a et b.

ii. *Si de plus $s > \max(\frac{n}{p} - n, 0)$ (respectivement, $s > \max(\frac{n}{\min(p,q)} - n, 0)$ dans le cas des espaces F), la même conclusion pour $a = 0$.*

Proposition 2.1.4. *Soient $p, q \in]0, +\infty]$ ($p < +\infty$ dans les cas des espaces F). Soit s un nombre réel tel que*

$(s - n/p \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}_0)$ *ou* $(s - n/p \in \mathbb{N}$ *et* $0 < q \leq 1$ *dans le cas B* $(0 < p \leq 1$ *dans le cas des espaces* $F))$.

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$s - \frac{n}{p} \leq m < s - \frac{n}{p} + 1.$$

Soient a et b deux nombres réels tel que $0 < a < b$. Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\mathscr{S}'$ telle que

- *$\widehat{u}_j$ est portée par la boule $|\xi| \leq b2^j$ pour les espaces B et l'anneau $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$ pour les espaces F.*
- $$A_B := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{sj} \|u_j\|_p)^q \right)^{1/q} < +\infty, \ (\textit{dans le cas des espaces } B),$$
  $$A_F := \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{sj} |u_j|)^q \right)^{1/q} \right\|_p < +\infty \ (\textit{dans le cas des espaces } F).$$

On pose

$$v_j(x) := u_j(x) - \sum_{|\alpha|\leq m-1} u_j^{(\alpha)}(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \quad (\forall j \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}^n).$$

i. *Alors, les séries $\sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j$ convergent dans $\mathscr{S}'$, et vérifient*

$$\left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j \right\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq cA_B$$

$$\left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j \right\|_{\dot{F}^s_{p,q}} \leq cA_F,$$

où c dépend de n,s,p,q,b (et a dans le cas des espaces F).

ii. *Dans le cas des espaces de Triebel-Lizorkin, Si de plus $s > \left(\frac{n}{\min(p,q)} - n\right)$, on a la même conclusion pour $a = 0$.*

Remarque 2.1.1.

2.2 Lemmes préparatoires

Lemme 2.2.1. **(i)** *Soient j et k de $\mathbb{Z}$. Si $|j-k| \geq 2$ alors $Q_jQ_k = 0$.*

(ii) *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < b$ et $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp}\theta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : a \leq |\xi| \leq b\}$. Alors, il existe deux entiers m_1 et m_2 tel que $\theta(2^{-j}\xi)\theta(2^{-k}\xi) = 0$ si $m_1 \leq k-j \leq m_2$.*

***Preuve*.** **(i)** On sait que le support de Q_j est $\{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 3 \cdot 2^{j-1}\}$. Alors, pour $|j-k| \geq 2$ on a

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 3 \cdot 2^{j-1}\} \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 3 \cdot 2^{k-1}\} = \emptyset,$$

donc $Q_jQ_k = 0$.

(ii) On a

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : a2^j \leq |\xi| \leq b \cdot 2^j\} \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n : a2^k \leq |\xi| \leq \cdot b2^k\} = \emptyset,$$

Nous avons d'un côté $b2^j \leq a2^k$ implique $\frac{b}{a} \leq 2^{k-j}$ c'est-à-dire $\log_2(b/a) \leq k-j$,
D'un autre côté, on a $a2^j \geq \cdot b2^k$ ce qui donne $\frac{a}{b} \geq 2^{k-j}$ donc $\log_2 \frac{a}{b} \geq k-j$.
De cette façon on trouve les entiers $m_1 = \left[\log_2 \frac{a}{b}\right] - 1$ et $m_2 = \left[\log_2 \frac{b}{a}\right] + 1$.

□

Le lemme suivant est une inégalité de type de Hardy.

Lemme 2.2.2. *Soient $0 < q \leq \infty$, $a > 1$ et (x_j) une suite de $\ell_q(\mathbb{Z})$ de termes positifs. Alors*

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{\varepsilon(j-k)\leq 0} a^{\varepsilon(j-k)}x_j\right)^q\right)^{1/q} \leq c\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j^q\right)^{1/q} \qquad (\varepsilon = \mp 1), \tag{2.3}$$

c dépend de q et a.

Nous aurons besoin de l'inégalité suivante, dite de Fefferman-Stein, par rapport à la fonction maximale de Hardy-Littlewood. Sa preuve est dans [53, Proposition 2.3].

Proposition 2.2.3. *Soient $1 < p < \infty$ et $0 \leq \tau < 1/p$.*

i. *Si $1 < q < \infty$, alors il existe une constante positive c, telle que pour toute suite $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de*

$L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, on ait

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\mathscr{M}(f_j))^q\right)^{1/q}\right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \leq c\sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^q\right)^{1/q}\right\|_{L_p(P_{k,\nu})}. \tag{2.4}$$

ii. *Si $0<q<\infty$, alors il existe une constante positive c, telle que pour toute suite $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, on ait*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|\mathscr{M}(f_j)\|^q_{L_p(P_{k,\nu})}\right)^{1/q} \leq c\sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|f_j\|^q_{L_p(P_{k,\nu})}\right)^{1/q}. \tag{2.5}$$

2.3 Inégalités de type de Nikol'skij 1

Tout d'abord on va définir l'entier μ, et on justifiera sa valeur au cours des démonstrations. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et s,p,q,τ de $\mathbb{R}$ on associe l'entier $\mu\in\mathbb{N}_0$ défini par :

Dans le cas de l'espace de type de Besov

$$\mu=\begin{cases}[s+n\tau-n/p]+1 & \text{si}\quad s+n\tau-n/p\notin\mathbb{N}_0 \quad\text{ou}\quad q>1,\\ s+n\tau-n/p & \text{si}\quad s+n\tau-n/p\in\mathbb{N}_0\quad\text{et}\quad 0<q\leq 1.\end{cases} \tag{2.6}$$

Dans le cas de l'espace de type de Triebel-Lizorkin

$$\mu=\begin{cases}[s+n\tau-n/p]+1 & \text{si}\quad s+n\tau-n/p\notin\mathbb{N}_0 \quad\text{ou}\quad p>1,\\ s+n\tau-n/p & \text{si}\quad s+n\tau-n/p\in\mathbb{N}_0\quad\text{et}\quad 0<p\leq 1.\end{cases} \tag{2.7}$$

2.3.1 Le cas $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}$

Dans [4] nous avons démontré le résultat suivant qui concerne la convergence des séries $\sum_{j\in\mathbb{Z}}u_j$ dans $\mathscr{S}'_\mu$.

Théorème 2.3.1. *Soient $s,\tau\in\mathbb{R}$ et $p,q\in]0,+\infty]$. Soient a,b deux nombres réels tel que $0<a<b$. Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\mathscr{S}'$ telle que*

- *$\widehat{u_j}$ est portée par la couronne $a2^j\leq|\xi|\leq b2^j$,*
- *$A:=\sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n}2^{kn\tau}\left(\sum_{j\geq k}\left(2^{sj}\|u_j\|_{L_p(P_{k,\nu})}\right)^q\right)^{1/q}<\infty$.*

Alors la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}}u_j$ converge dans $\mathscr{S}'_\mu$ vers une limite u qui appartient à $\mathscr{S}'_\mu$ et vérifie

$$\|[u]_\mu\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}\leq cA, \tag{2.8}$$

la constante c dépend que de n, s, τ, p, q, a et b.

2.3.2 Le cas $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$

Le théorème suivant est l'un des résultats de ce manuscrit.

Théorème 2.3.2. *Soient $s, \tau \in \mathbb{R}$, $p \in]0,+\infty[$ et $q \in]0,+\infty]$. Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\mathscr{S}'$ telle que*

- *$\widehat{u_j}$ est portée par la couronne $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$,*
- *$A := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{kn\tau} \left\| \left(\sum_{j\geq k} 2^{sjq}|u_j|^q\right)^{1/q} \right\|_{L_p(P_{k,\nu})} < \infty$.*

Alors la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ converge dans $\mathscr{S}'_\mu$ vers une limite u qui appartient à $\mathscr{S}'_\mu$ et vérifie

$$\|[u]_\mu\|_{\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}} \leq cA, \tag{2.9}$$

la constante c dépend de n, s, τ, p, q, a et b.

2.3.3 Preuve du Théorème 2.3.2

Pour simplifier la démonstration, on va la diviser en quelques étapes. On utilisera les méthodes de [19] et [33].

Convergence dans $\mathscr{S}'_\mu$

Etape 1 : $s + n\tau - n/p \notin \mathbb{N}_0$ ou $p > 1$.

Dans ce cas $\mu = ([s + n\tau - n/p] + 1)_+$ c'est à dire que $\mu > s + n\tau - n/p$. Soit $f \in \mathscr{S}_\mu$. On introduit une fonction positive et radiale $\widetilde{\gamma} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ telle que $\widetilde{\gamma}(\xi) = 1$ si $a \leq |\xi| \leq b$, et on définit $\widetilde{Q}_k := \widetilde{\gamma}(2^{-k}D)$; c'est à dire $\widehat{\widetilde{Q}_k f} = \widetilde{\gamma}(2^{-k}(\cdot))\widehat{f}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On a $\widetilde{Q}_k u_k = u_k$.

Par conséquent on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle u_k, f\rangle| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \|u_k\|_{L_\infty(P_{k,\nu})} \left\|\widetilde{Q}_k f\right\|_{L_1(P_{k,\nu})}. \tag{2.10}$$

On va estimer le terme $\|u_k\|_{L_\infty(P_{k,\nu})}$. Si on fixe un réel r par $r = \max(p,q)$, et par l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{j\geq k} 2^{sjr} \|u_j\|_p^r\right)^{1/r} \leq \left\| \left(\sum_{j\geq k} 2^{sjr} |u_j|^r\right)^{1/r} \right\|_p,$$

d'après l'injection $\ell_q \subset \ell_r$ il vient

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{j\geq k}2^{jsr}\left\|u_j\right\|^r_{L_p(P_{k,\nu})}\right)^{1/r}\leq 2^{-kn\tau}A. \tag{2.11}$$

Mais d'après (2.11) on obtient

$$\begin{aligned}\|u_k\|_{L_p(P_{k,\nu})} &\lesssim 2^{-ks}\left(\sum_{j\geq k}2^{sjr}\left\|u_j\right\|^r_{L_p(P_{k,\nu})}\right)^{1/r}\\ &\lesssim 2^{-k(s+n\tau)}A \qquad (\forall k\in\mathbb{Z},\ \forall\nu\in\mathbb{Z}^n).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Etape 1.1. $p\geq 1$. Par l'inégalité de Hölder et l'inégalité (2.12) on aura

$$\begin{aligned}|u_k(x)| &= \left|\widetilde{Q}_k u_k(x)\right|\lesssim 2^{nk}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\int_{P_{k,\eta}}(2+2^k|x-y|)^{-n-1}\ |u_k(y)|\,dy\\ &\lesssim 2^{kn}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\|u_k\|_{L_p(P_{k,\eta})}\left(\int_{P_{k,\eta}}(2+2^k|x-y|)^{-(n+1)p'}dy\right)^{1/p'}\\ &\lesssim 2^{k(n-s-n\tau)}A\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{P_{k,\eta}}(2+2^k|x-y|)^{-(n+1)p'}dy\right)^{1/p'}\end{aligned} \tag{2.13}$$

Pour $x\in P_{k,\nu}$ et $y\in P_{k,\eta}$ on a

$$1+|\nu-\eta|\leq\sqrt{n}(2+2^k|x-y|),$$

donc

$$\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{P_{k,\eta}}(2+2^k|x-y|)^{-(n+1)p'}dy\right)^{1/p'}\lesssim 2^{-kn/p'}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}(1+|\nu-\eta|)^{-(n+1)}\lesssim c2^{-kn/p'}.$$

En remplaçant cette dernière majoration dans (2.13) et en majorant sur les $P_{k,\nu}$, on aura

$$\|u_k\|_{L_\infty(P_{k,\nu})}\lesssim 2^{-k(s+n\tau-n/p)}A \qquad (\forall k\in\mathbb{Z},\ \forall\nu\in\mathbb{Z}^n). \tag{2.14}$$

Etape 1.2. $0<p<1$. On a

$$
\begin{aligned}
|u_k(x)| &= \left|\widetilde{Q}_k u_k(x)\right| \lesssim 2^{nk} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \int_{P_{k,\eta}} (2+2^k|x-y|)^{-n-1} \, |u_k(y)|\, dy \\
&\lesssim 2^{kn} \sup_{\beta\in\mathbb{Z}^n} \|u_k\|^{1-p}_{L_\infty(P_{k,\nu})} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \int_{P_{k,\eta}} (2+2^k|x-y|)^{-(n+1)} |u_k(y)|^p \, dy
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

pour $x \in P_{k,\nu}$ et $y \in P_{k,\eta}$ on a $1+|\nu-\eta| \leq \sqrt{n}(2+2^k|x-y|)$, et par (2.13)on a aussi le côté droit de (2.15) (avec $x \in P_{k,\nu}$) est borné par

$$
c 2^{kn} 2^{-(s+n\tau)kp} A^p \sup_{\omega\in\mathbb{Z}^n} \|u_k\|^{1-p}_{L_\infty(P_{k,\nu})} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} (1+|\nu-\eta|)^{-n-1}.
$$

Par l'invariance par translation suivant la sommation sur η, on obtient

$$
\|u_k\|_{L_\infty(P_{k,\nu})} \lesssim 2^{(n/p-s-n\tau)kp} A^p \sup_{\omega\in\mathbb{Z}^n} \|u_k\|^{1-p}_{L_\infty(P_{k,\omega})} \qquad (\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \nu \in \mathbb{Z}^n);
$$

le Sup est pris sur tout $\nu \in \mathbb{Z}^n$ dans le côté droit, l'estimation (2.14) reste vraie pour $0 < p < 1$.

Revenons à (2.10). Par le Lemme 1.1.5 on a, puisque $f \in \mathscr{S}$, on a pour un certain entier N_1 :

$$
\left\|\widetilde{Q}_k f\right\|_{L_1(P_{k,\nu})} \lesssim 2^{-kN_1} \zeta_{N_1,n+1}(f) \int_{P_{k,\nu}} (1+|y|)^{-n-1} dy \qquad (k>0). \tag{2.16}
$$

Tant que $f \in \mathscr{S}_\mu$ et en faisant le changement de variable $x = 2^k y$ dans $2^{kn}\int_{P_{k,\nu}}(1+|y|)^{-n-1}dy$, on aura

$$
\left\|\widetilde{Q}_k f\right\|_{L_1(P_{k,\nu})} \lesssim 2^{\mu k} \zeta_{\mu,n+1}(f) \int_{P_{0,\nu}} (1+|x|)^{-n-1} dy \qquad (k \leq 0). \tag{2.17}
$$

En utilisant (2.14), (2.16) et (2.17) dans (2.10), c'est à dire

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle u_k, f\rangle| \leq c(f) A \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1} \mathrm{d}x \right) \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(-s-n\tau+n/p)k} \min(2^{\mu k}, 2^{-kN_1}),
$$

En choisissant N_1 tel que $N_1+s+n\tau-n/p>0$ et en utilisant le fait que $\mu-s-n\tau+n/p>0$, on obtient la conclusion voulue.

Étape 2. $\mu := s + n\tau - n/p \in \mathbb{N}_0$ **et** $0 < p \leq 1$**.** Nous avons

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle u_k, f\rangle| \leq \sum_{k>0}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \|u_k\|_{L_\infty(P_{k,\nu})} \left\|\widetilde{Q}_k f\right\|_{L_1(P_{k,\nu})} + \sum_{k\leq 0} |\langle u_k, f\rangle|. \tag{2.18}$$

Pour la partie $\sum_{k>0}\cdots$ on procède comme dans l'étape 1.1, on obtient

$$\sum_{k>0}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \|u_k\|_{L_\infty(P_{k,\nu})} \left\|\widetilde{Q}_k f\right\|_{L_1(P_{k,\nu})}\right) \leq cA\sum_{k>0} 2^{-(N+s+n\tau-n/p)k}.$$

Pour la partie $\sum_{k\leq 0}\cdots$, on introduit $0 < d < p \leq 1$, d sera choisi plu tard. La fonction $\widehat{u_k * \widetilde{Q}_k f}$ est à support dans la boule $|\xi| \leq (b+3/2)2^k$, donc par l'inégalité de Bernstien on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k\leq 0} |\langle u_k, f\rangle| &\lesssim \sum_{k\leq 0} 2^{kn(1/d-1)}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|u_k(x)\widetilde{Q}_k f(x)\right|^d \mathrm{d}x\right)^{1/d} \\
&\lesssim \sum_{k\leq 0} 2^{kn(1/d-1)}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\int_{P_{k,\nu}}\left|u_k(x)\widetilde{Q}_k f(x)\right|^d\right)^{1/d}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski, le dernier terme de (2.19) est majoré par

$$c\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\left\{\sum_{k\leq 0}\left(2^{kn(1-d)}\int_{P_{k,\nu}} |u_k(x)|^d \left|\widetilde{Q}_k f(x)\right|^d \mathrm{d}x\right)^{1/d}\right\}^d\right)^{1/d}. \tag{2.20}$$

À nouveau, par l'inégalité de Hölder avec comme exposants p/d et $w := \frac{p}{p-d}$, on obtient

$$\left(\int_{P_{k,\nu}} |u_k(x)|^d \left|\widetilde{Q}_k f(x)\right|^d \mathrm{d}x\right)^{1/d} \leq \|u_k\|_{L_p(P_{k,\nu})}\left\|\widetilde{Q}_k f\right\|_{L_{pw}(P_{k,\nu})}. \tag{2.21}$$

En appliquant le Lemme 1.1.5, en tenant compte du fait que $k \leq 0$ et donc pour N assez grand on a

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{Q}_k f\right\|_{L_{pw}(P_{k,\nu})} &\lesssim 2^{k(\mu+n)}\zeta_{\mu,N}(f)\left(\int_{P_{k,\nu}} (1+2^k|x|)^{-Ndw}\mathrm{d}x\right)^{1/(dw)} \\
&\lesssim 2^{k(\mu+n-\frac{n}{d}+\frac{n}{p})}\zeta_{\mu,N}(f)\left(\int_{P_{0,\nu}} (1+|y|)^{-Ndw}dy\right)^{1/(dw)}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

En remplaçant (2.22) et (2.21) dans (2.20), il vient

$$\sum_{k\leq 0}|\langle u_k,f\rangle| \lesssim \zeta_{\mu,N}(f)\left\{\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{k\leq 0}2^{k(s+n\tau)}\|u_k\|_{L_{pw}(P_{k,\nu})}\right)^d \times\left(\int_{P_{0,\nu}}(1+|y|)^{-Ndw}dy\right)^{1/w}\right\} \tag{2.23}$$

Dans un autre côté, comme $\widehat{u}_j$ est portée par la couronne $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$, cette couronne a la propriété suivante :

$$\{\xi\in\mathbb{R}^n : a2^j \leq |\xi| \leq b2^j\}\cap\{\xi\in\mathbb{R}^n : a2^\ell \leq |\xi| \leq b2^\ell\} = \emptyset \text{ pour } |j-\ell| \geq \log_2(b/a). \tag{2.24}$$

Donc $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{u_j}(\xi)$ est localement finie pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, et elle contient au plus $2m+1$ termes non-nuls qui correspond à la couronne compacte $2^{k-\ell}\leq|\xi|\leq 2^{k+\ell}$ où $\ell=-m,\cdots,m$ ($m=[\log_2(b/a)]+1$). En conséquence,

$$\sum_{k\leq 0}|\langle u_k,f\rangle| = \sum_{k\leq 0, k\in\Lambda}|\langle u_k,f\rangle|,$$

où Λ est un ensemble formé par des éléments consécutifs et $k\in\Lambda$ avec Λ ayant $2m+1$ éléments.

Soit par exemple

$$\Lambda = \{J, J+1,\cdots,J+2m\},$$

où $J<0$. Maintenant on a

$$k\geq J \Longrightarrow P_{k,\nu}\subset P_{J,E(2^{J-k}\nu)}\cup P_{J,E(2^{J-k}\nu)+\omega_0},$$

où $\omega_0=(1,1,\cdots,1)\in\mathbb{Z}^n$. Alors

$$\|u_k\|_{L_p(P_{k,\nu})} \leq 2^{(1/p)-1}\left(\|u_k\|_{L_p(P_{J,E(2^{J-k}\nu)})}+\|u_k\|_{L_p(P_{J,E(2^{J-k}\nu)+\omega_0})}\right), \tag{2.25}$$

sa nous donne

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\le 0} 2^{(s+n\tau)k}\|u_k\|_{L_p(P_{k,\nu})} &= \sum_{k\le 0,\, k\in\Lambda} 2^{(s+n\tau)k}\|u_k\|_{L_p(P_{k,\nu})} \\
&\le \max(2^{2mn\tau},1)\, 2^{(1/p)-1}\, 2^{Jn\tau}\sum_{k=J}^{J+2m} 2^{sk}\big(\|u_k\|_{L_p(P_{J,E(2^{J-k}\nu)})} + \|u_k\|_{L_p(P_{J,E(2^{J-k}\nu)+w_0})}\big) \\
&\le 2\max(2^{2mn\tau},1)\, 2^{(1/p)-1}\sum_{k=J}^{J+2m}\Big(2^{Jn\tau}2^{sk}\sup_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\|u_k\|_{L_p(P_{J,\eta})}\Big) \\
&\le \max(2^{2mn\tau},1)\, 2^{(1/p)-1}\sum_{k=J}^{J+2m} 2^{n\tau j}\sup_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\Bigg(\sum_{l\ge j} 2^{slr}\|u_l\|^r_{L_p(P_{j,\eta})}\Bigg)^{1/r} \\
&\le \max(2^{2mn\tau},1)\, 2^{(1/p)-1}\sum_{k=J}^{J+2m}\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{n\tau j}\sup_{\eta\in\mathbb{Z}^n} 2^{jn\tau}\Bigg(\sum_{l\ge j} 2^{slr}\|u_l\|^r_{L_p(P_{j,\eta})}\Bigg)^{1/r} \\
&\lesssim \sup_{j\in\mathbb{Z}}\sup_{\eta\in\mathbb{Z}^n} 2^{n\tau j}\Big(\sum_{l\ge j} 2^{slr}\|u_l\|^r_{L_p(P_{j,\eta})}\Big)^{1/r}
\end{aligned}
$$

où $r=\max(p,q)$, alors par l'inégalité de Minkowski et le fait que $\ell_q \hookrightarrow \ell_r$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\le 0} 2^{k(s+n\tau)}\|u_k\|_{L_p(P_{k,\nu})} &\lesssim \sup_{j\in\mathbb{Z}}\sup_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\Bigg\| 2^{jn\tau}\Bigg(\sum_{l\ge j} 2^{slr}|u_k|^r\Bigg)^{1/r}\Bigg\|_{L_p(P_{k,\nu})} \\
&\lesssim \sup_{j\in\mathbb{Z}}\sup_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\Bigg\| 2^{jn\tau}\Bigg(\sum_{l\ge j} 2^{slq}|u_k|^q\Bigg)^{1/q}\Bigg\|_{L_p(P_{k,\nu})} \lesssim A \qquad \forall\nu\in\mathbb{Z}^n. \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

En remplaçant (2.26) dans

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\le 0}\|u_k\|_{L_p(P_{k,\nu})}\|\widetilde{Q}_k f\|_{L_{p'}(P_{k,\nu})} \\
&\quad\le c\zeta_{\mu,n+1}(f)\Big(\sum_{k\le 0} 2^{(s+n\tau)k}\|u_k\|_{L_p(P_{k,\nu})}\Big)\Big(\int_{P_{0,\nu}}(1+|x|)^{-(n+1)p'}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p'}, \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

et en tenant compte que $x\in P_{0,\nu}$ implique $1+|\nu|\le\sqrt{n}(2+|x|)$, on aura, du côté droit de (2.27),

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\le 0}|\langle u_k,f\rangle| &\le cA\zeta_{\mu,n+1}(f)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\Big(\int_{P_{0,\nu}}(1+|x|)^{-(n+1)p'}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p'} \\
&\le cA\zeta_{\mu,n+1}(f)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}(1+|\nu|)^{-n-1} \lesssim A\zeta_{\mu,n+1}(f).
\end{aligned}
$$

Par la l'inégalité (2.11) nous donne le résultat voulu.

Pour $f \in \mathscr{S}$, et en utilisant l'inégalité de Hölder on aura

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle u_k, f\rangle| &\leq \int_{P_{k,\nu}} |f(x)| \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |u_k(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq c\int_{P_{k,\nu}} |f(x)| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |u_k(x)|^q\right)^{1/q} \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.28}$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle u_k, f\rangle| &\leq c_1 \|f\|_{L_1^\tau} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \|u_k\|^q_{L_\infty(P_{k,\nu})}\right)^{1/q} \\ &\leq c_2 \|f\|_{L_1^\tau} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{jq(n/p-n\tau)} \|u_k\|^q_{L_p(P_{k,\nu})}\right)^{1/q}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

encore, une autre fois la formule(2.11) nous permet de conclure.

Preuve de (2.9).

On a $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j =: u$ dans $\mathscr{S}'_\mu$ est bien définie, et on va estimer $\left\|[u]_\mu\right\|_{\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$.

Tant que $\widehat{u_j}$ est portée par $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$, il existe deux entiers m_1 et m_2, dépendants de a et b, tels que $Q_k(u_j) = 0$ si $j \leq k+m_1$ ou $j \geq k+m_2$ ($m_1 = [\log_2(1/2a)]-1$ et $m_2 = [\log_2(1/3a)]+1$).

On introduit $d \geq \max(p,q)$, pour $k+m_1 \leq j \leq k+m_2$ on a

$$\left|Q_k u_j\right| \leq \left(\sum_{k+m_1<j<k+m_2} 2^{sjd}2^{-sjd}\left|Q_k u_j\right|^d\right)^{1/d}$$

$$\begin{aligned} |Q_k u(x)| &\leq \left(\sum_{k+m_1<j<k+m_2} 2^{sjd}\left\|Q_k u_j(x)\right\|^d\right)^{1/d} \left(\sum_{k+m_1<l<k+m_2} 2^{-sl}\right) \\ &\leq c2^{-ks}\left(\sum_{k+m_1<j<k+m_2} 2^{sjd}\left\|Q_k u_j(x)\right\|^d\right)^{1/d}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

On va maintenant diviser la preuve en deux cas : $p \geq 1$ et $p < 1$.

Etape 1. *Le cas* $p \geq 1$. On a par l'inégalité de Hölder

$$
\begin{aligned}
\left|Q_k u_j(x)\right| &= \sum_{\omega\in\mathbb{Z}^n} \int_{P_{l,\omega}} \left|u_j(y)\right| \left|2^{kn}\mathscr{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y))\right| \mathrm{d}y \\
&\leq \sum_{\omega\in\mathbb{Z}^n} \left\|u_j\right\|_{L_p(l,\omega)} \left(\int_{P_{l,\omega}} \left|2^{kn}\mathscr{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y))\right|^{p'} \mathrm{d}y\right)^{1/p'},
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

On prend maintenant $x \in P_{l,\eta}$, alors si $y \in P_{l,\omega}$ on aura

$$
1+|\omega-\eta| \leq 2\sqrt{2n}(1+2^l\,|x-y|) \leq 2\sqrt{2n}(1+2^k\,|x-y|) \quad \text{avec } \ k \geq l,
$$

donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$
\left(\int_{P_{l,\nu}} \left|2^{kn}\mathscr{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y))\right|^{p'} \mathrm{d}y\right)^{1/p'} \leq c2^{kn-ln/p'}(1+|\omega-\eta|)^{-N}, \quad (k \geq l). \tag{2.32}
$$

En choisissant $N := n+1$. La formule (2.31) devient

$$
\left|Q_k u_j(x)\right| \leq c2^{(kn-ln/p'} \sum_{\omega\in\mathbb{Z}^n} \left\|u_j\right\|_{L_p(P_{l,\omega})} (1+|\omega-\nu|)^{-n-1}, \tag{2.33}
$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour tout $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $k \geq l$, tout $\eta \in \mathbb{Z}^n$ et pour tout $x \in P_{l,\eta}$. D'un côté, et comme dans (2.24), pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, les séries $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{Q_k u}(\xi)$ contiennent au plus trois termes non-nuls correspondants à la couronne

$$
2^{k-r-1} \leq |\xi| \leq 3\cdot 2^{k+r-1} \quad (r=-1,0,1),
$$

en conséquence, $k \in \Lambda$ avec $\mathrm{Card}\Lambda = 3$. Alors de (2.31) on a

$$
\sum_{k\geq l} 2^{skq}\,|Q_k u(x)|^q \lesssim \sum_{k\geq l, k\in\Lambda} \left(\sum_{j=k+m_1}^{k+m_2} 2^{sjd}\left|Q_k u_j(x)\right|^d\right)^{q/d} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{2.34}
$$

On pose $\Lambda = \{J, J+1, J+2\}$ (Λ est constituée de termes consécutifs), et en utilisant (2.31) et (2.33) et en prenant $l := J$, donc puisque on a $1 \leq 2^{(k-J)n} \leq 2^{2n}$, on peut majorer le deuxième côté de (2.34) par

$$
\begin{aligned}
&c_1 2^{Jnq/p} \sum_{k=J}^{J+2} \Big(\sum_{j=k+m_1}^{k+m_2} 2^{jds} \Big\{ \sum_{\omega\in\mathbb{Z}^n} \|u_j\|_{L_p(P_{J,\omega})} (1+|w-\nu|)^{-(n+1)} \Big\}^d \Big)^{q/d} \lesssim \\
&\leq c_2 2^{Jnq/p} \sum_{k=J}^{J+2} \Big(\sum_{\omega\in\mathbb{Z}^n} \Big(\sum_{j=k+m_1}^{k+m_2} 2^{jds} \|u_j\|^d_{L_p(P_{J,\omega})} \Big)^{1/d} (1+|\omega-\eta|)^{-(n+1)} \Big)^q \\
&\leq c_3 2^{Jnq/p} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \Big(\sum_{j\geq J+m_1} 2^{jds} \|u_j\|^d_{L_p(P_{J,\nu})} \Big)^{q/d} \Big(\sum_{\omega\in\mathbb{Z}^n} (1+|\omega-\eta|)^{-(n+1)} \Big)^q \\
&\leq c_4 2^{Jnq/p} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \left(\sum_{j\geq J+m_1} 2^{jds} \|u_j\|^d_{L_p(P_{J,\nu})} \right)^{q/d}. \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

Les constantes c_1, c_2, c_3 et c_4 sont indépendantes de x, η et J. D'un autre côté, en utilisant l'inégalité suivante

$$
[2^{m_1}\eta_j] \leq 2^{J+m_1} x_j < [2^{m_1}\eta_j] + [2^{m_1}] + 2 \qquad (x \in P_{J,\eta},\ j=1,\ldots,n)
$$

on obtient

$$
P_{J,\eta} \subset \bigcup_{r=0}^{[2^{m_1}]+1} P_{J+m_1, E(2^{m_1}\eta)+\omega_r} \qquad (2.36)
$$

où $\omega_0 = (1,1,\cdots,1) \in \mathbb{Z}^n$. On majore encore la formule (2.35) et on trouve

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\geq J+m_1} 2^{jds} \|u_j\|^d_{L_p(P_{J,\nu})} &\leq \sum_{j\geq J+m_1} 2^{sdj} \Big(\sum_{r=0}^{([2^{m_1}]+1)^n} \|u_j\|_{L_p(P_{J+m_1,E(2^{m_1}\nu)+w_r})} \Big)^d \\
&\lesssim \sum_{r=0}^{([2^{m_1}]+1)^n} \sum_{j\geq J+m_1} 2^{sjd} \|u_j\|^d_{L_p(P_{J+m_1,E(2^{m_1}\nu)+w_r})} \\
&\lesssim \sum_{r=0}^{([2^{m_1}]+1)^n} \left\| \left(\sum_{j\geq J+m_1} 2^{sjd} \left|u_j\right|^d \right)^{1/d} \right\|^d_{L_p(P_{J+m_1,E(2^{m_1}\nu)+w_r})}.
\end{aligned}
$$

Alors, la dernière inégalité est bornée par

$$
c \sum_{r=0}^{([2^m_1]+1)^n} \left\| \left(\sum_{k\geq j+m_1} 2^{sjq} \left|u_j\right|^q \right)^{1/q} \right\| L_p(P_{J+m_1,E(2^{m_1}\nu)+w_r})^d \leq c'(2^{-n\tau J} A)^d,
$$

par conséquent on a

$$\left(\sum_{k\geq J} 2^{skq}\,|Q_k u(x)|^q\right)^{1/q} \lesssim 2^{Jn/p-Jn\tau}A, \quad (\forall x \in P_{J,\eta}). \tag{2.37}$$

Par suite, en divisant les deux côtés par $2^{-Jn\tau}$ et en calculant la norme $L_p(P_{J,\eta})$, on arrive au résultat voulue.

Etrape2. *Le cas* $p < 1$. On procède comme dans l'étape 1, on pose maintenant $0 < d < p$ et $\frac{1}{u} := \frac{1}{d} - \frac{1}{p}$, donc on a

$$\begin{aligned}|Q_k u_j(x)| &\lesssim 2^{jn(1/d-1)}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |2^{kn}|u_j(y)\mathscr{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y))|^d \mathrm{d}y\right)^{1/d}\\ &\lesssim 2^{jn(1/d-1)}\left[\sum_{\omega\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{P_{l,w}}|u_j(y)|^p\right)^{d/p}\left(\int_{P_{l,\omega}} 2^{knu}|\mathscr{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y))|^u\,\mathrm{d}y\right)^{d/u}\mathrm{d}y\right]^{1/d}.\end{aligned} \tag{2.38}$$

On procède comme dans (2.32) en prenant $x \in P_{l,\eta}$ et $N \in \mathbb{N}$, alors

$$\left(\int_{P_{l,\omega}} |2^{kn}\mathscr{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y))|^u \mathrm{d}y\right)^{1/u} \leq c2^{n(k-l/u)}(1+|\omega-\eta|)^{-N}, \quad (k \geq l).$$

où c est indépendante de k, l et x. On insère l'inégalité dans (2.38) et on utilise l'inégalité de Minkowski par rapport à $\ell_{1/d}(\mathbb{Z};\ell_1(\mathbb{Z}^n))$, on trouve

$$\begin{aligned}|Q_k u(x)| &\leq \sum_{j>k+m_1} |Q_k u_j(x)| \qquad (\text{ on rappelle que } k \geq l)\\ &\leq c\,2^{n(k-l/u)}\sum_{j>l+m_1} 2^{jn(1/d-1)}\left[\sum_{w\in\mathbb{Z}^n}\|u_j\|^d_{L_p(P_{l,w})}(1+|w-\eta|)^{-Nd}\right]^{1/d}\\ &\leq c\,2^{n(k-l/u)}\left(\sum_{w\in\mathbb{Z}^n}\left[\sum_{j>l+m_1} 2^{jn(1/d-1)}\|u_j\|_{L_p(P_{l,w})}(1+|w-\eta|)^{-N}\right]^d\right)^{1/d}\end{aligned} \tag{2.39}$$

pour out $x \in P_{l+m_1,\eta}$. Puis, par l'inclusion (2.36) appliquée à $P_{l+m_1,w}$, et on choisissant d tel que $s+n-\frac{n}{d} > 0$, ce qui est légale car $s > \frac{n}{p} - n$, et le fait que

$$\|u_j\|_{L_p(P_{l+m_1,w})} \leq \left(\sum_{r=0}^{([2^{m_1}]+1)^n} \|u_j\|^p_{L_p(P_{l+m_1,E(2^{m_1}w)+w_r})}\right)^{1/p} \leq c\sum_{r=0}^{([2^{m_1}]+1)^n} \|u_j\|_{L_p(P_{l+m_1,E(2^{m_1}w)+w_r})}$$

où $c := 2^{([2^{m_1}]+1)^n(1/p-1)}$ (qui vient de (1.2)), on aboutit à

$$\sum_{j>l+m_1} 2^{jn(1/d-1)}\|u_j\|_{L_p(P_{l+m_1,w})} \leq c_1 \sum_{j>l+m_1} 2^{jn(1/d-1)}\Big(\sum_{r=0}^{([2^{m_1}]+1)^n} \|u_j\|_{L_p(P_{l+m_1,E(2^{m_1}w)+w_r})}\Big)$$
$$\leq c_2 2^{-ln\tau} A \sum_{j>l+m_1} 2^{j(n/d-n-s)} \leq c_3 2^{l(n/d-n-s-n\tau)} A\,,$$

ce qui donne

$$|Q_k u(x)| \lesssim 2^{kn} 2^{l(n/p-n-s-n\tau)} A \qquad (\forall k \geq l,\, x \in P_{l,\eta}). \tag{2.40}$$

En choisissant une autre fois $l := J$ et en suivant le raisonnement comme dans (2.37) on arrive au résultat.

Remarque 2.3.1. Les Théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 restent vrais, si on remplace dans leur conclusions, les séries $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ par n'importe quelle série du type $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j - v$, pour tout polynôme $v \in \mathscr{P}_\mu$.

2.4 Inégalité de type de Nikol'skij 2

2.4.1 Théorème principal

Théorème 2.4.1. *Soient $s > (\frac{n}{p} - n)_+$. Soit b un réel positif. Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\mathscr{S}'$ telle que*

- *$\widehat{u_j}$ est portée par la boule $|\xi| \leq b2^j$,*
- *$A := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\eta\in\mathbb{Z}^n} 2^{kn\tau}\big(\sum_{j\geq k} \big(2^{js}\|u_j\|_{L_p(P_{k,\eta})}\big)^q\big)^{1/q} < \infty$ dans le cas-B,*
  $A := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\eta\in\mathbb{Z}^n} 2^{kn\tau}\big\|\big(\sum_{j\geq k}(2^{js}|u_j|)^q\big)^{1/q}\big\|_{L_p(P_{k,\eta})} < \infty$ dans le cas-F.

Alors la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ converge dans $\mathscr{S}'_\mu$ vers une limite u qui appartient à $\mathscr{S}'_\mu$ et vérifie

$$\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j\|_{\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}} \leq cA \tag{2.41}$$

la constante c dépend de n, s, τ, p, q et b.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant, dont la preuve est disponible dans [27, p.782,(2.11)]. Vous pouvez également consulter [49, proof of prop. 2.6] pour plus d'informations.

Lemme 2.4.2. *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\sup_{x\in P_{j,w}} |g(x)| \leq c\,2^{jn/p} \sup_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \|g\|_{L_p(P_{j,\eta})} \qquad (\forall j \in \mathbb{Z}, \forall w \in \mathbb{Z}^n)$$

soit vraie, pour tout $g \in \mathscr{S}'$ *avec* $\operatorname{supp} \widehat{g} \subset \{\xi : |\xi| \leq 2^{j+1}\}$.

2.4.2 Preuve du Théorème 2.4.1

Preuve. *Etape 1 : La convergence dans* $\mathscr{S}'_\infty$. On commence par la preuve de l'estimation suivante :

$$\sup_{x \in P_{j,w}} \left| u_j(2x/b) \right| \leq c\, 2^{j(n/p-s-n\tau)} A\,, \quad (\forall j \in \mathbb{Z}, \forall w \in \mathbb{Z}^n)\,. \tag{2.42}$$

En appliquant le Lemme 2.4.2 avec $g(x) := u_j\left(\frac{2}{b}x\right)$, et en utilisant l'assertion suivante,

$$x \in P_{j,\eta} \;\Rightarrow\; 2x/b \in \bigcup_{r=0}^{([2/b]+1)^n} P_{j,E(2\eta/b)+w_r}\,, \quad w_r \in \mathbb{Z}^n\,,$$

on obtient

$$\|u_j\big(2(\cdot)/b\big)\|_{L_p(P_{j,\eta})} \leq \Big((2/b)^{-n} \sum_{r=0}^{([2/b]+1)^n} \|u_j\|^p_{L_p(P_{j,E(2\eta/b)+w_r})}\Big)^{1/p} \leq c \sup_{v \in \mathbb{Z}^n} \|u_j\|_{L_p(P_{j,v})}\,,$$

donc, on trouve

$$\sup_{x \in P_{j,w}} \left| u_j\big(2x/b\big) \right| \leq c\, 2^{jn/p} \sup_{v \in \mathbb{Z}^n} \|u_j\|_{L_p(P_{j,v})}\,, \quad (\forall j \in \mathbb{Z}, \forall w \in \mathbb{Z}^n)\,. \tag{2.43}$$

D'un autre côté, pour tout $j, l \in \mathbb{Z}$ tel que $j \geq l$, on obtient

$$\|u_j\|_{L_p(P_{l,v})} \leq 2^{-js-ln\tau} \times 2^{ln\tau} \Big(\sum_{k \geq l} 2^{ksq} \|u_k\|^q_{L_p(P_{l,v})}\Big)^{1/q} \leq 2^{-js-ln\tau} A \tag{2.44}$$

dans le cas-B, et

$$\|u_j\|_{L_p(P_{l,v})} \leq 2^{-js-ln\tau} \times 2^{ln\tau} \Big\| \Big(\sum_{k \geq l} 2^{ksq} |u_k|^q\Big)^{1/q} \Big\|_{L_p(P_{l,v})} \leq 2^{-js-ln\tau} A \tag{2.45}$$

dans le cas-F. Puis dans (2.43), en insérant (2.44) dans le cas-B ((2.45) dans le cas-F) avec $j = l$, on aboutit à l'estimation voulue, c'est-à-dire (2.42).

Maintenant, pour la convergence. Soit $f \in \mathscr{S}_\infty$. Par $\operatorname{supp} \widehat{u_j}$, il existe un entier r, dépendant seulement de b, tel que $S_{j+r}(u_j) = u_j$, alors $\langle u_j, f \rangle = \langle u_j, S_{j+r} f \rangle$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. En suite, en continuant $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \langle u_j, f \rangle \right| = I_1 + I_2$ où $I_1 := \sum_{j<0} \ldots$ et $I_2 := \sum_{j \geq 0} \ldots$.

• *Estimation de'* I_1. En effectuant un changement de variable et en écrivant $\int_{\mathbb{R}^n} = \sum_{w \in \mathbb{Z}^n} \int_{P_{j,w}}$, on trouve

$$I_1 \le (2/b)^n \sum_{j<0} \sum_{w\in\mathbb{Z}^n} \int_{P_{j,w}} |u_j(2x/b)|\,|S_{j+r}f(2x/b)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Par le Lemme 1.1.6, on choisit un entier N tel que $\|S_{j+r}f\|_1 = O(2^{jN})$ $(j<0)$ et $N > s+n\tau-\frac{n}{p}$, donc la formule (2.42) nous donne

$$\begin{aligned} I_1 &\le c_1 A \sum_{j<0} 2^{j(n/p-s-n\tau)} \sum_{w\in\mathbb{Z}^n} \int_{P_{j,w}} |S_{j+r}f(2x/b)|\,\mathrm{d}x \\ &\le c_2 A \sum_{j<0} 2^{j(n/p-s-n\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} |S_{j+r}f(x)|\,\mathrm{d}x \le c_3 A \sum_{j<0} 2^{j(N+n/p-s-n\tau)} \le c_4 A\,. \end{aligned}$$

• *Estimation de of* I_2. D'abord on applique (2.44)–(2.45) avec $l=0$ (c'est-à-dire $j\ge 0$), on obtient

$$\|u_j\|_{L_p(P_{0,w})} \le 2^{-js} A\,.$$

De l'autre côté, on va introduire d de sorte que $0<d<p$ si $0<p\le 1$ et $d:=1$ si $p>1$, alors l'inégalité de Bernstein et l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{u} := \frac{1}{d} - \frac{1}{p}$, donnent

$$\begin{aligned} I_2 &\le c_1 \sum_{j\ge 0} 2^{jn(1/d-1)} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u_j(x) S_{j+r}f(x)|^d\,\mathrm{d}x \Big)^{1/d} \\ &\le c_2 \sum_{j\ge 0} 2^{jn(1/d-1)} \Big[\sum_{w\in\mathbb{Z}^n} \Big(\int_{P_{0,w}} |u_j(x)|^p \mathrm{d}x \Big)^{d/p} \Big(\int_{P_{0,w}} |S_{j+r}f(x)|^u \mathrm{d}x \Big)^{d/u} \Big]^{1/d} \\ &\le c_2 A \sum_{j\ge 0} 2^{j(-s-n+n/d)} \Big(\sum_{w\in\mathbb{Z}^n} \Big(\int_{P_{0,w}} |S_{j+r}f(x)|^u \mathrm{d}x \Big)^{d/u} \Big)^{1/d}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

On remarque que si $x\in P_{0,w}$, alors $1+|w| \le c(1+|x|)$ avec $c:=c(n)>0$; et en utilisant l'inégalité $1+|x| \le (1+|y|)(1+|x-y|)$ et en choisissant d de sorte que $u\ge 1$, ce qui veut dire

$$\frac{p}{p+1} < d < p \le 1 \quad \text{et} \quad d=1 \text{ si } p>1\,, \tag{2.47}$$

Maintenant, on applique l'inégalité de Minkowski par rapport à $L_u(P_{0,w};L_1(\mathbb{R}^n))$ on trouve

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{P_{0,w}}|S_{j+r}f(x)|^u\mathrm{d}x\Big)^{1/u} &\le c_1(1+|w|)^{-N}\Big(\int_{P_{0,w}}(1+|x|)^{Nu}|S_{j+r}f(x)|^u\mathrm{d}x\Big)^{1/u}\\
&\le c_1 2^{(j+r)n}(1+|w|)^{-N}\Big[\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|)^N|\mathscr{F}^{-1}\rho(2^{j+r}y)|\\
&\qquad\qquad\times\Big(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x-y|)^{Nu}|f(x-y)|^u\mathrm{d}x\Big)^{1/u}\Big]\mathrm{d}y\\
&\le c_2 2^{(j+r)n}(1+|w|)^{-N}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|)^N|\mathscr{F}^{-1}\rho(2^{j+r}y)|\mathrm{d}y\,,
\end{aligned}$$

où $f\in\mathscr{S}_\infty$; et le nombre $N\in\mathbb{N}$ est à notre portée. Alors, on a

$$2^{(j+r)n}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|)^N|\mathscr{F}^{-1}\rho(2^{j+r}y)|\mathrm{d}y\le\int_{\mathbb{R}^n}(1+2^{-r}|z|)^N|\mathscr{F}^{-1}\rho(z)|\mathrm{d}z\le c\,,$$

on rappelle que $r:=r(b)$. Donc,

$$\Big(\int_{P_{0,w}}|S_{j+r}f(x)|^u\mathrm{d}x\Big)^{1/u}\le c(1+|w|)^{-N}\,.$$

puisque nous avons la supposition $s>(\frac{n}{p}-n)_+$, en choisissant d tel que

$$s+n-\frac{n}{d}>0\,, \tag{2.48}$$

en choisit aussi N de sorte que $Nd\ge n+1$ (i.e. $\sum_{w\in\mathbb{Z}^n}(1+|w|)^{-Nd}<\infty$), donc d'après (2.46) on obtient

$$I_2\le c_1A\sum_{j\ge0}2^{-j(s+n-n/d)}\le c_2A\,.$$

Alors, des formules (2.47)–(2.48) on doit trouver d tel que

$$d=1\ \text{ si }\ p>1\qquad\text{et}\qquad \frac{1}{p}<\frac{1}{d}<\min\Big(1+\frac{s}{n},1+\frac{1}{p}\Big)\ \text{ si }\ 0<p\le1\,.$$

Étape 2 : Preuve de l'estimation $\|\sum_{j\in\mathbb{Z}}u_j\|_{\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}}\le cA$. On pose $u:=\sum_{j\in\mathbb{Z}}u_j\in\mathscr{S}'_\infty$, de l'étape précédente. Du fait que supp$\widehat{u}_j$, il existe un entier m, dépendant de b, tel que $Q_k(u_j)\equiv0$ si $j\le k+m$ (m est l'entier le plus proche de $\log_2\frac{1}{2b}$). On sépare encore le cas $p\ge1$ de $p<1$.

Sous-étape 2.1 : cas $p\ge1$. On étudie le cas-F puisque le cas-B est similaire à [4, pp. 358–360].

On introduit $q_1 \geq \max(p,q)$. Pour $j > k+m$ on a

$$|Q_k u_j(x)| \leq 2^{-js}\Big(\sum_{\ell>k+m} 2^{\ell s q_1}|Q_k u_\ell(x)|^{q_1}\Big)^{1/q_1},$$

alors on trouve

$$\begin{aligned}|Q_k u(x)| &\leq \Big(\sum_{\ell>k+m} 2^{\ell s q_1}|Q_k u_\ell(x)|^{q_1}\Big)^{1/q_1}\Big(\sum_{j>k+m} 2^{-js}\Big)\\ &\leq c2^{-ks}\Big(\sum_{j>k+m} 2^{jsq_1}|Q_k u_j(x)|^{q_1}\Big)^{1/q_1} \qquad (2.49)\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $k \in \mathbb{Z}$. En utilisant l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{p'} := 1 - \frac{1}{p}$, on obtient

$$\begin{aligned}|Q_k u_j(x)| &\leq \sum_{w\in\mathbb{Z}^n}\int_{P_{l,w}} |u_j(y)|\,|2^{kn}\mathscr{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y))|\mathrm{d}y\\ &\leq \sum_{w\in\mathbb{Z}^n}\|u_j\|_{L_p(P_{l,w})}\Big(\int_{P_{l,w}}|2^{kn}\mathscr{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y))|^{p'}\,\mathrm{d}y\Big)^{1/p'}. \qquad (2.50)\end{aligned}$$

Maintenant, on prend $x \in P_{l,\eta}$, donc si $y \in P_{l,w}$ on obtient

$$1+|w-\eta| \leq 2\sqrt{2n}(1+2^l|x-y|) \leq 2\sqrt{2n}(1+2^k|x-y|) \quad \text{with} \quad k \geq l,$$

ce qui implique, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\Big(\int_{P_{l,w}}|2^{kn}\mathscr{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y))|^{p'}\,\mathrm{d}y\Big)^{1/p'}\mathrm{d}x \leq c2^{kn-ln/p'}(1+|w-\eta|)^{-N}, \quad (k \geq l). \qquad (2.51)$$

on choisit $N := n+1$. En conséquence (2.50) devient

$$|Q_k u_j(x)| \leq c2^{kn-ln/p'}\sum_{w\in\mathbb{Z}^n}\|u_j\|_{L_p(P_{l,w})}(1+|w-\eta|)^{-(n+1)} \qquad (2.52)$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$, et tout $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $k \geq l$, tout $\eta \in \mathbb{Z}^n$ et tout $x \in P_{l,\eta}$.

D'un autre côté, tant que les deux couronnes $\frac{1}{2}2^j \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}2^j$ et $\frac{1}{2}2^k \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}2^k$ sont disjoints $|j-k| \geq 2$, alors $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{Q_k u}(\xi)$ est localement fini pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Par conséquent, la somme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k u(x)$ contient au plus trois termes non-nuls ; donc, $k \in \Lambda \subsetneq \mathbb{Z}$ avec $\operatorname{Card}\Lambda = 3$, où l'ensemble Λ est constitué *d'éléments consécutifs*, c'est à dire $\Lambda := \{J, J+1, J+2\}$. Donc, de

(2.49) on obtient

$$\sum_{k\geq l} 2^{ksq}|Q_k u(x)|^q \leq c \sum_{k\geq l, k\in\Lambda} \Big(\sum_{j>k+m} 2^{jsq_1}|Q_k u_j(x)|^{q_1}\Big)^{q/q_1} \qquad (\forall x\in\mathbb{R}^n)\,. \tag{2.53}$$

En choisissant $l := J$, et en insérant (2.52) dans (2.53) avec $x \in P_{J,\eta}$, donc, en utilisant l'estimation $0 \leq 2^{kn-Jn/p'} \leq 2^{2n+Jn/p}$ $(k\in\Lambda)$ et l'inégalité de Minkowski par rapport $\ell_{q_1}(\mathbb{Z};\ell_1(\mathbb{Z}^n))$ (on rappelle que $q_1 \geq p \geq 1$), le côté droit de (2.53) est borné par

$$\begin{aligned}
& c_1 2^{Jqn/p} \sum_{k=J}^{J+2} \Big[\sum_{j>k+m} 2^{jsq_1} \Big(\sum_{w\in\mathbb{Z}^n} \|u_j\|_{L_p(P_{J,w})} (1+|w-\eta|)^{-(n+1)} \Big)^{q_1} \Big]^{q/q_1} \\
&\leq c_1 2^{Jqn/p} \sum_{k=J}^{J+2} \Big[\sum_{w\in\mathbb{Z}^n} \Big(\sum_{j>k+m} (2^{js}\|u_j\|_{L_p(P_{J,w})})^{q_1}\Big)^{1/q_1} (1+|w-\eta|)^{-(n+1)} \Big]^q \\
&\leq c_2 2^{Jqn/p} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \Big(\sum_{j\geq J+m} 2^{jsq_1} \|u_j\|^{q_1}_{L_p(P_{J,\nu})}\Big)^{q/q_1} \Big(\sum_{w\in\mathbb{Z}^n} (1+|w-\eta|)^{-(n+1)}\Big)^q \\
&\leq c_3 2^{Jqn/p} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \Big(\sum_{j\geq J+m} 2^{jsq_1} \|u_j\|^{q_1}_{L_p(P_{J,\nu})}\Big)^{q/q_1}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

où c_1, c_2, c_3 sont indépendants de x, η et J. D'un autre côté, par l'inégalité

$$[2^m \nu_\ell] \leq 2^{J+m} x_\ell < [2^m\nu_\ell] + [2^m] + 2 \qquad (x\in P_{J,\nu}\,, \ell = 1,\ldots,n)\,,$$

on obtient

$$P_{J,\nu} \subset \bigcup_{r=0}^{([2^m]+1)^n} P_{J+m,E(2^m\nu)+w_r} \tag{2.55}$$

où $w_r \in \mathbb{Z}^n$. Alors, du dernier terme de (2.54) on trouve que

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq J+m} 2^{jsq_1} \|u_j\|^{q_1}_{L_p(P_{J,\nu})} &\leq \sum_{j\geq J+m} 2^{jsq_1} \Big(\sum_{r=0}^{([2^m]+1)^n} \|u_j\|_{L_p(P_{J+m,E(2^m\nu)+w_r})}\Big)^{q_1} \\
&\leq c_1 \sum_{r=0}^{([2^m]+1)^n} \sum_{j\geq J+m} 2^{jsq_1} \|u_j\|^{q_1}_{L_p(P_{J+m,E(2^m\nu)+w_r})} \\
&\leq c_1 \sum_{r=0}^{([2^m]+1)^n} \Big\| \Big(\sum_{j\geq J+m} 2^{jsq_1} |u_j|^{q_1}\Big)^{1/q_1} \Big\|^{q_1}_{L_p(P_{J+m,E(2^m\nu)+w_r})}\,,
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Minkowski par rapport à $\ell_{q_1}(\mathbb{Z}; L_p(P_{J+m,E(2^m\nu)+w_r}))$. L'inclusion

$\ell_q(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \ell_{q_1}(\mathbb{Z})$, nous garantie que la dernière inégalité est bornée par

$$c_2 \sum_{r=0}^{([2^m]+1)^n} \Big\| \Big(\sum_{j \geq J+m} 2^{jsq} |u_j|^q \Big)^{1/q} \Big\|^{q_1}_{L_p(P_{J+m,E(2^m \nu)+w_r})} \leq c_3 \big(2^{-Jn\tau} A\big)^{q_1}.$$

Donc, de (2.53) et (2.54) on trouve

$$\Big(\sum_{k \geq J} 2^{ksq} |Q_k u(x)|^q \Big)^{1/q} \leq c\, 2^{Jn/p - Jn\tau} A, \qquad (\forall x \in P_{J,\eta}). \tag{2.56}$$

Maintenant, en divisant les deux côtés de cette inégalité par $2^{-Jn\tau}$ et en calculant la norme de $L_p(P_{J,\eta})$; comme J est arbitraire on obtient le résultat voulue.

Sous-étape 2.2 : cas $p < 1$. On procède comme l'étape 1/Estimation de I_2, On utilise également les notations de la sous-étape précédente. On remarque que le support de la transformée de Fourier de la fonction $y \mapsto 2^{kn} u_j(y) \mathscr{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y))$ est la boule $|\xi| \leq (b + \frac{3}{2} 2^{-m}) 2^j$ (on rappelle $j > k+m$, voir par exemple l'étape 2). On introduit les paramètres d et u tels que $0 < d < p$ et $\frac{1}{u} := \frac{1}{d} - \frac{1}{p}$, donc par l'inégalité de Bernstein et de Hölder on obtient

$$\begin{aligned} |Q_k u_j(x)| &\leq c 2^{jn(1/d-1)} \Big[\int_{\mathbb{R}^n} \big| 2^{kn} u_j(y) \mathscr{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y)) \big|^d \, \mathrm{d}y \Big]^{1/d} \qquad (2.57) \\ &\leq c 2^{jn(1/d-1)} \Big[\sum_{w \in \mathbb{Z}^n} \Big(\int_{P_{l,w}} |u_j(y)|^p \mathrm{d}y \Big)^{d/p} \Big(\int_{P_{l,w}} |2^{kn} \mathscr{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y))|^u \mathrm{d}y \Big)^{d/u} \Big]^{1/d}, \end{aligned}$$

pour $l \in \mathbb{Z}$. On procède comme dans (2.51) en prenant $x \in P_{l,\eta}$ et $N \in \mathbb{N}$, alors

$$\Big(\int_{P_{l,w}} |2^{kn} \mathscr{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y))|^u \, \mathrm{d}y \Big)^{1/u} \mathrm{d}x \leq c\, 2^{n(k-l/u)} (1 + |w - \eta|)^{-N}, \quad (k \geq l),$$

où c est indépendante de k, l et x. On insère l'inégalité dans (2.57) et on utilise l'inégalité de Minkowski par rapport à $\ell_{1/d}(\mathbb{Z}; \ell_1(\mathbb{Z}^n))$, on trouve

$$\begin{aligned} |Q_k u(x)| &\leq \sum_{j > k+m} |Q_k u_j(x)| \qquad \text{(on rappelle que } k \geq l) \\ &\leq c\, 2^{n(k-l/u)} \sum_{j > l+m} 2^{jn(1/d-1)} \Big[\sum_{w \in \mathbb{Z}^n} \|u_j\|^d_{L_p(P_{l,w})} (1 + |w - \eta|)^{-Nd} \Big]^{1/d} \\ &\leq c\, 2^{n(k-l/u)} \Big(\sum_{w \in \mathbb{Z}^n} \Big[\sum_{j > l+m} 2^{jn(1/d-1)} \|u_j\|_{L_p(P_{l,w})} (1 + |w - \eta|)^{-N} \Big]^d \Big)^{1/d} \qquad (2.58) \end{aligned}$$

pour out $x \in P_{l,\eta}$. Puis, par l'inclusion (2.55) appliquée à $P_{l,w}$, et on choisissant d tel que

$s+n-\frac{n}{d}>0$, ce qui est légale car $s>\frac{n}{p}-n$, et le fait que

$$\|u_j\|_{L_p(P_{l,w})} \leq \Big(\sum_{r=0}^{([2^m]+1)^n} \|u_j\|^p_{L_p(P_{l+m,E(2^m w)+w_r})}\Big)^{1/p} \leq c \sum_{r=0}^{([2^m]+1)^n} \|u_j\|_{L_p(P_{l+m,E(2^m w)+w_r})}$$

où $c := 2^{([2^m]+1)^n(1/p-1)}$ (qui vient de (1.2)), on aboutit à

$$\sum_{j>l+m} 2^{jn(1/d-1)}\|u_j\|_{L_p(P_{l,w})} \leq c_1 \sum_{j>l+m} 2^{jn(1/d-1)}\Big(\sum_{r=0}^{([2^m]+1)^n} \|u_j\|_{L_p(P_{l+m,E(2^m w)+w_r})}\Big)$$
$$\leq c_2 2^{-ln\tau} A \sum_{j>l+m} 2^{j(n/d-n-s)} \leq c_3 2^{l(n/d-n-s-n\tau)} A\,,$$

où nous avons utilisé (2.44) dans le cas-B et (2.45) dans le cas-F avec $l+m$ au lieu de l (c'est à dire $j\geq l+m$). On insère l'estimation dans (2.58), et on choisit N tel que $Nd\geq n+1$ (c'est à dire $\sum_{w\in\mathbb{Z}^n}(1+|w-\eta|)^{-Nd}<\infty$), ça donne

$$|Q_k u(x)| \leq c\, 2^{kn+l(n/p-n-s-n\tau)} A\,, \quad (k\geq l\,,\ x\in P_{l,\eta})\,. \tag{2.59}$$

Maintenant, puisque dans le cas-B, on a

$$\Big(\sum_{k\geq l} 2^{ksq}\|Q_k u(x)\|^q_{L_p(P_{l,\eta})}\Big)^{1/q} \leq c\, 2^{-l(n+s+n\tau)} A \Big(\sum_{k\geq l,\, k\in\Lambda} 2^{k(n+s)q}\Big)^{1/q}.$$

en choisissant $l := J$ (l'entier J est donné par $k\in\Lambda=\{J,J+1,J+2\}$, voir la sous-étape 2.1), il vient que

$$\Big(\sum_{k\geq J} 2^{ksq}\|Q_k u(x)\|^q_{L_p(P_{J,\eta})}\Big)^{1/q} \leq c\, 2^{-Jn\tau} A\,.$$

Enfin, en divisant les deux côtés de l'inégalité par $2^{-Jn\tau}$ et puisque J arbitraire, on aura le résultat désiré.

Dans le cas-F, de (2.59) on choisit $l := J$ et on procède comme dans (2.56). □

Chapitre 3

La composition dans l'espace de type de Besov

Le problème de composition dans les espaces fonctionnels a été le sujet de l'attention de nombreux mathématiciens. Il consiste à caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que l'opérateur $T_f : g \longmapsto f \circ g$ envoie un espace fonctionnel E dans lui même. On dit qu'une telle fonction opère sur E par composition à gauche. Donc, ce problème a été étudié par plusieurs auteurs dans les espaces de type de Sobolev. Par exemple, Igari [28], Marcus et Mizel [29], Bourdaud [10], Bourdaud et Kateb [16], Bourdaud, Moussai et Sickel [18, 19], Mousai et Saadi [38]...

Soit $C_b(\mathbb{R})$ l'algèbre de Banach des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$. Supposons que E soit une sous-algèbre de $C_b(\mathbb{R})$. Supposons en outre que E soit dotée d'une norme qui rende l'injection canonique $E \longrightarrow C_b(\mathbb{R})$ continue, et telle que E soit une algèbre de Banach. Dans une telle algèbre, le calcul symbolique consiste à associer à toute fonction $g \in E$ la fonction composée $f \circ g$, sous certaines conditions appropriées sur f. Ainsi, nous disons qu'une fonction f, définie sur un sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$, opère dans E si nous avons $f \circ g \in E$ pour toute fonction $g \in E$ dont l'image est contenue dans Ω. La notion ci-dessus a un sens dans n'importe quel espace de fonctions E, même s'il n'est pas une algèbre de Banach. L'opérateur $T_f : g \mapsto f \circ g$ est souvent appelé un opérateur de composition ou opérateur de superposition.

Certaines estimations de l'opérateur de composition ne seront pas évidentes sans quelques restrictions sur la fonction f et les paramètres s, n et τ. C'est la cause pour laquelle on introduit un nouveaux espaces. Nous désignerons par $\mathscr{E}^{s,\tau}_{p,q}$, l'espace des fonctions de L_∞ qui appartiennent à l'espace homogène $\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$. ces nouveaux espaces sont des algèbres de fonctions.

De tel travail à été fait par Bourdaud, Moussai et Sickel dans les espaces usuels de Besov et de Triebel-Lizorkin à savoir [17, 19, 20] puis par Moussai [35].

Dans notre cas, on va étendre quelques résultats dans les espaces de type de Besov et de type de Triebel-Lizorkin, en se basant sur le travail de Moussai [35].

D'abord, on définit de nouvels espaces de type de Besov et de type de Triebel-Lizorkin, puis on donne des outils et lemmes nécessaires pour ce chapitre.

3.1 Les algèbres $\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathscr{F}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Dans cette section nous définirons une autre classe d'espaces de type de Besov et de type de Triebel-Lizorkin dites algèbres, puis on étudie les algèbres de ces espaces.

Définition 3.1.1. Soient $s, \tau \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$ ($p < \infty$ dans le cas des espaces F). L'espace $\mathscr{E}^{s,\tau}_{p,q}$ est l'ensemble des fonctions $f \in L_\infty$ tel que $[f]_\infty \in \dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$ (où $\mathscr{E}^{s,\tau}_{p,q}$ désigne $\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}$ ou $\mathscr{F}^{s,\tau}_{p,q}$)

$$\mathscr{E}^{s,\tau}_{p,q} = \left\{ f \in L_\infty;\ [f]_\infty \in \dot{A}^{s,\tau}_{p,q} \right\}, \tag{3.1}$$

muni par la quasi-norme

$$\|f\|_{\mathscr{E}^{s,\tau}_{p,q}} = \|f\|_\infty + \|[f]_\infty\|_{\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}}. \tag{3.2}$$

Proposition 3.1.1. *Les espaces $\mathscr{E}^{s,\tau}_{p,q}$ sont des quasi-Banach et on a*

$$\mathscr{S}_\infty \hookrightarrow \mathscr{E}^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow L_\infty \hookrightarrow \mathscr{S}'_\infty.$$

Preuve. Ce résultat est une conséquence immédiate du fait que

$$\mathscr{S}_\infty \hookrightarrow \dot{A}^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow \mathscr{S}'_\infty,$$

et de la Définition 3.1.1. □

Le théorème suivant donne la relation entre les espaces homogènes $\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$, les espaces non-homogènes $A^{s,\tau}_{p,q}$ et les espaces L^τ_p. On se limitera au cas de l'espace de Besov, tandis que le théorème reste valable pour le cas de Triebel-Lizorkin, la preuve se fait d'une manière analogue.

Théorème 3.1.2. **(i)** *Soit $s \in \mathbb{R}$ tel que $s > (\frac{n}{p} - n)_+$ ou $s > \frac{n}{p} - n\tau$ et $\tau \geq \frac{1}{p}$.*
Alors, si $f \in B^{s,\tau}_{p,q}$, on a $[f]_\infty \in \dot{B}^{s,\tau}_{p,q}$.

(ii) *Soit $s \in \mathbb{R}$ tel que $s > (\frac{n}{p} - n)_+$, alors*

$$B^{s,\tau}_{p,q} = \left\{ f \in L^\tau_p\ :\ [f]_\infty \in \dot{B}^{s,\tau}_{p,q} \right\}.$$

De plus, on a une quasi-norme équivalente dans $B^{s,\tau}_{p,q}$ donnée par

$$\|f\|_{L^\tau_p} + \|[f]_\infty\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}$$

Preuve. On donne une esquisse de preuve, pour plus de détails voir [5]. Encore pour simplifier, la preuve sera divisée en quelques étapes.

Étape 1 : preuve de (i). On prend $f \in B^{s,\tau}_{p,q}$. On commence par la division de la somme suivant les valeurs de k (positives ou négatives). Puis, on obtient une majoration de la norme dans l'espace homogène comme suit

$$\begin{aligned} \|[f]_\infty\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} \leq \sup_{k>0}\sup_{\eta\in Z^n} 2^{kn\tau}\Big(\sum_{j\geq k}\big(2^{js}\|Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})}\big)^q\Big)^{1/q} \\ + \sup_{k\leq 0}\sup_{\eta\in Z^n} 2^{kn\tau}\Big(\sum_{j\geq k}\big(2^{js}\|Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})}\big)^q\Big)^{1/q}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Le second terme est borné par $\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}$. Pour le troisième terme, tant que $k \leq 0$, on divise $\sum_{j\geq k}$ en $\sum_{j=k}^{0} + \sum_{j>0}$, et on utilise l'égalité $\sum_{j>0}\ldots = \sum_{j>k_+}\ldots$, donc

$$2^{kn\tau}\Big(\sum_{j>0}\big(2^{js}\|Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})}\big)^q\Big)^{1/q} \leq \|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}. \tag{3.4}$$

ce qui nous amène à estimer le terme

$$\sup_{k\leq 0}\sup_{\eta\in Z^n} 2^{kn\tau}\Big(\sum_{j=k}^{0}\big(2^{js}\|Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})}\big)^q\Big)^{1/q}. \tag{3.5}$$

On traite maintenant les deux cas où $s > (\frac{n}{p} - n)_+$ puis $s > \frac{n}{p} - n\tau$ et $\tau \geq \frac{1}{p}$.
Pour le cas $s > (\frac{n}{p} - n)_+$. On utilise la partition par des cubes dyadiques et on sépare en deux sous-cas, où $p \geq 1$ et $p < 1$. L'inclusion $B^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow L^\tau_p$ puisque $s > 0$ nous permet de conclure dans le premier cas, et pour le second ($0 < p < 1$). On estimera (3.5) dans laquelle le facteur qui vient après $\sup_{k\leq 0}\sup_{\eta\in Z^n}$ soit borné par $\big(\sum_{j\leq 0}\big(2^{js}\|Q_j f\|_{L^\tau_p}\big)^q\big)^{1/q}$ du fait que $2^{kn\tau}\|Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})} \leq \|Q_j f\|_{L^\tau_p}$. Après, par le Lemme 1.2.3 et la Proposition 1.3.3 on trouve la borne $c_1\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}\big(\sum_{j\leq 0} 2^{j(s+n-n/p)q}\big)^{1/q}$ qui est elle même bornée par $c_2\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}$.
Pour le cas $s > \frac{n}{p} - n\tau$ et $\tau \geq \frac{1}{p}$. En appliquant la Proposition 1.3.4 avec (1.28), il suffira d'estimer (3.5) en utilisant

$$\begin{aligned} \|Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})} &\leq \|\mathscr{F}^{-1}\gamma\|_1\|f\|_\infty\Big(\int_{P_{k,\eta}} \mathrm{d}x\Big)^{1/p} \\ &\leq c_1 2^{-nk/p}\|f\|_\infty \leq c_2 2^{-nk/p}\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}} \quad (\forall k \leq 0), \end{aligned} \tag{3.6}$$

alors, on obtient la borne $c\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}$.

Étape 2 : preuve de (ii). L'inclusion dans un sens est claire de (i) et la Proposition 1.3.3. Pour l'autre sens, soit $f \in L_p^\tau$ telle que $[f]_\infty \in \dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$. Pour simplifier, on pose,

$$B_k := 2^{kn\tau}\Big(\sum_{j\geq k_+}\big(2^{js}\|Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})}\big)^q\Big)^{1/q}.$$

Si $k\geq 1$ on a $B_k \leq \|[f]_\infty\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}$, donc, on suppose que $k\leq 0$, on a :

$$\begin{aligned}B_k &= 2^{kn\tau}\Big(\|S_0 f\|^q_{L_p(P_{k,\eta})} + \sum_{j\geq 1}\cdots\Big)^{1/q} \leq c2^{kn\tau}\Big(\|S_0 f\|_{L_p(P_{k,\eta})} + \Big(\sum_{j\geq 1}\cdots\Big)^{1/q}\Big)\\ &\leq c\Big(2^{kn\tau}\|S_0 f\|_{L_p(P_{k,\eta})} + \|[f]_\infty\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}\Big),\end{aligned} \tag{3.7}$$

sachant qu'on a $\sum_{j\geq 1}\ldots \leq \sum_{j\geq k}\ldots$ puisque $k\leq 0$. Puis en étudie le cas où $p\geq 1$ et le cas $p<1$.

• Le cas $p\geq 1$: On continue la preuve comme dans l'étape 1 en remplaçant Q_j par S_0, on trouve

$$\|S_0 f\|_{L_p(P_{k,\eta})} \leq c2^{-kn\tau}\|f\|_{L_p^\tau} \quad (\forall k\leq 0)\,. \tag{3.8}$$

• Le cas $p<1$: Comme $S_0 f = f - \sum_{j\geq 1} Q_j f$, voir la Proposition 1.1.7, on obtient

$$\|S_0 f\|_{L_p(P_{k,\eta})} \leq 2^{1/p-1}\Big(\|f\|_{L_p(P_{k,\eta})} + \Big\|\sum_{j\geq 1} Q_j f\Big\|_{L_p(P_{k,\eta})}\Big)\,. \tag{3.9}$$

Puisque $\|f\|_{L_p(P_{k,\eta})} \leq c2^{-kn\tau}\|f\|_{L_p^\tau}$ ($\forall k\leq 0$). On a

$$\Big\|\sum_{j\geq 1} Q_j f\Big\|_{L_p(P_{k,\eta})} \leq \Big\|\Big(\sum_{j\geq 1}|Q_j f|^p\Big)^{1/p}\Big\|_{L_p(P_{k,\eta})} = \Big(\sum_{j\geq 1}\|Q_j f\|^p_{L_p(P_{k,\eta})}\Big)^{1/p},$$

mais $2^{js}\|Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})} \leq 2^{-kn\tau}\|[f]_\infty\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}$ ($\forall j\geq 1$) tant que $k\leq 0$. Donc, on obtient

$$2^{-kn\tau}\|[f]_\infty\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}\Big(\sum_{j\geq 1}2^{-jsp}\Big)^{1/p} \leq c2^{-kn\tau}\|[f]_\infty\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}\,.$$

En conséquence, de ce qui précède on obtient

$$\|S_0 f\|_{L_p(P_{k,\eta})} \leq c2^{-kn\tau}\big(\|f\|_{L_p^\tau} + \|[f]_\infty\|_{\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}}\big) \quad (\forall k\leq 0)\,. \tag{3.10}$$

En combinant les formules trouvées, on trouve la borne $c(\|f\|_{L_p^\tau} + \|[f]_\infty\|_{\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}})$. Enfin, en prenant en compte le cas où $k\geq 1$ on arrive au résultat désiré.

□

Maintenant, on donne un outil important pour les preuves de la multiplication ponctuelle, à savoir les algèbres dans $\mathscr{E}^{s,\tau}_{p,q}$. On peut consulter la définition et quelques propriétés dans [40] ou [49].

Définition 3.1.2. Soient f et g de $\mathscr{S}'$. On définit

$$f \cdot g = \lim_{j \to +\infty} S_j f \cdot S_j g, \tag{3.11}$$

si la limite de $S_j f \cdot S_j g$ quand $j \to +\infty$ existe dans $\mathscr{S}'$ on appelle $f \cdot g$ le produit de f et g.

Le lemme suivant est une conséquence directe des Théorèmes 2.3.1 et 2.3.2.

Lemme 3.1.3. *Soient $s > 0$ et $m \in \mathbb{Z}$. Pour tout $f \in L_\infty$ et tout $g \in \dot{A}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, on définit*

$$\pi_m(f,g) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (S_{j-m} f)(Q_j g).$$

Alors π_m est une application bilinéaire et continue de $L_\infty \times \dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$ dans $\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$.

Théorème 3.1.4. *Soient $\tau \geq 0$, $0 < p,q \leq \infty$ et $s > (\frac{n}{p} - n)_+$. Alors, l'espace $\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}$ est une algèbre de Banach unitaire pour la multiplication ponctuelle. De plus, on a*

$$\|f \cdot g\|_{\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}} \leq c\big(\|f\|_\infty \|g\|_{\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}} + \|g\|_\infty \|f\|_{\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}}\big)$$

pour tous f,g dans $\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}$.

Preuve. On présente une esquisse du preuve. On prend f,g dans $\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. La transformée d'Abel nous permet d'écrire ; pour tout $j > 0$,

$$\sum_{k=-j}^{j} (S_k f)(Q_k g) + \sum_{k=-j}^{j-1} (S_k g)(Q_{k+1} f) = (S_j f)(S_j g) - (S_{-j} f)(S_{-j-1} g). \tag{3.12}$$

En supposant

$$\lim_{j \to -\infty} (S_{-j} f)(S_{-j-1} g) = 0 \quad \text{dans } \mathscr{S}'_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Rappelons que $\left\|S_j f\right\|_\infty \lesssim \|f\|_\infty$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Donc, pour $u \in \mathscr{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle (S_j f)(S_{j-1} g), u \rangle = \langle (S_j f)(S_{j-1} g), S_{j+2} u \rangle.$$

Donc on utilise le para-produit (voir [18]) et la propriété de Fatou pour conclure la preuve dont on pourra trouver les détails dans [5]. $\square$

Remarque 3.1.1. Le théorème précédent reste valable pour les espaces de type de Triebel-Lizorkin, et la preuve se fait d'une manière analogue.

3.2 L'opérateur de composition sur les espaces de type de Besov

Dans cette section, on va donner un résultat de composition dans les espaces de type de Besov. De tel problème a été étudié par Bourdaud, Moussai et Sickel en 2010 [19], Moussai [33]. Puis sur les espaces définis par $\mathscr{B}^s_{p,q} = \dot{B}^s_{p,q} \cap L_\infty$ par Bourdaud, Moussai et Sickel en 2014 [20].

Nous allons exploiter cette idée pour démontrer un résultat dans ce sens.

3.2.1 Théorème principal

Théorème 3.2.1. *Soient* $1 < p < \infty$, $p \leq q \leq \infty$, $\tau \in [0, +\infty[$ *et* $1 + 1/p < s < 2$. *On pose* $\alpha = \min(1, q/p)$. *Alors, il existe une constante* $c > 0$ *telle que l'inégalité*

$$\left\|(f \circ g)'\right\|_{\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} \leq c \left\|f'\right\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} \left(\|g\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} + \|g\|^{s-1/p}_{BV^1_{\alpha(sp-1)}(\mathbb{R})}\right) \tag{3.13}$$

est vraie pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mesurable telle que* $f' \in \mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})$ *et toute* $g \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}) \cap BV^1_p(\mathbb{R})$.

Un corollaire immédiat de ce théorème est le suivant.

Corollaire 3.2.2. *Soient* $1 < p < \infty$, $p \leq q \leq \infty$, $\tau \in [0, +\infty[$ *et* $1 + 1/p < s < 2$. *On pose* $\alpha := \min(1, q/p)$.

i. *Il existe une constante* $c > 0$ *telle que l'inégalité*

$$\|f \circ g\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} \leq c \left\|f'\right\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} \left(\|g\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} + \|g\|^{s-1/p}_{BV^1_{\alpha(sp-1)}}\right) \tag{3.14}$$

soit vraie pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f' \in \mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})$ *et* $f(0) = 0$, *et toute* $g \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}) \cap BV^1_p(\mathbb{R})$.

ii. *Il existe* $c > 0$ *telle que (3.14) soit vraie pour tout* $f \in \mathscr{B}^{s,\tau,loc}_{p,q}(\mathbb{R})$ *qui vérifie* $f(0) = 0$ *et tout* $g \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}) \cap BV^1_p(\mathbb{R})$, *avec* $\left\|(f\rho_{\|g\|})'\right\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})}$ *au lieu de* $\|f'\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})}$.

3.2.2 Préparation

Nous commençons par introduire des quasi-normes continues à l'aide des opérateurs de différences

$$\Delta_h f := \tau_{-h} f - f, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

alors, on a

$$\Delta_h^1 f(x) = \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

On définit également les opérateurs $\Delta_h^m f$ par la relation de récurrence

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x)),\ m \geq 2. \tag{3.15}$$

On déduit donc que

$$\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h(\Delta_h^1 f(x)) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

Proposition 3.2.3. *Soient $p \in [1,+\infty]$, $0 < s \leq \max\{s, s+n\tau - n/p\} < 1$ et $0 \leq \tau < \frac{1}{p} + \frac{s}{n}$.*
Alors, $f \in B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si $f \in L_\tau^p(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f\|^1_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \left(\int_0^{2\min(l(P_{k,\nu}),1)} t^{-sq} \sup_{t/2\leq|h|<t} \Big(\int_{P_{k,\nu}} |f(x+h) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x \Big)^{p/q} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q} < +\infty. \tag{3.16}$$

De plus, $\|f\|_{L_\tau^p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|^1_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$ et $\|f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}$ sont équivalentes.

Preuve. On peut trouver la preuve de cette proposition dans [49, Théorème 4.7.]. □

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui nous donnera la propriété de Fatou dans les espaces de type de Besov et les espaces de type de Triebel-Lizorkin, pour plus de détails on pourra voir [49, Proposition 2.8].

Lemme 3.2.4. *Soient $s \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$, $p, q \in]0,+\infty]$ et une suite de fonction $(f_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ de $A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ qui converge faiblement vers f dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \|f_m\|_{A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Alors, $f \in A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\|f\|_{A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{m\in\mathbb{Z}} \|f_m\|_{A_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}.$$

La définition suivante va nous permettre de découvrir l'espace des fonctions à p-variations bornées, pour plus de détails on pourra voir Peetre [39].

Définition 3.2.1. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors, $BV_p(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions à p-variations bornées, c'est à dire $f \in BV_p(\mathbb{R})$ si, et seulement si pour toute famille finie d'intervalles disjoints $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$ il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |f(b_k) - f(a_k)|^p\right)^{1/p} \leq c < \infty \tag{3.17}$$

où la constante c dépend de f.(Voir [39, p. 114]).

Remarque 3.2.1. i. On peut donner une version plus générale de l'espace $BV_p(\mathbb{R})$, qui est l'espace $BV_p^{\alpha}(\mathbb{R})$ définie par

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{|f(b_k) - f(a_k)|^p}{|b_k - a_k|^{\alpha p}}\right)^{1/p} \leq c < \infty. \tag{3.18}$$

ii. On a $BV_p^0(\mathbb{R}) = BV_p(\mathbb{R})$.

iii. $f \in BV_p^1(\mathbb{R})$ si f est Lipschitzienne et $f' \in BV_p(\mathbb{R})$.

Maintenant, on donne un théorème qui présente une de nos contributions, qui est un résultat de composition dans les espaces de type de Besov. Donnons avant une norme équivalente par les différences qui nous sera utile dans la preuve du Théorème 3.13.

Proposition 3.2.5. *Soient* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $1 + |\tau - 1/p| < s < \min(2 + 1/p - \tau, 2)$. *Alors,* $f \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})$ *si, et seulement si* $f \in L^{\tau}_p(\mathbb{R})$, *et*

$$\|f\|^1_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} \equiv \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\int_0^{2\min(l(P_{k,\nu}),1)} t^{-sq-1} (\int_{P_{k,\nu}} |f(x+h) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x)^{q/p} \mathrm{d}t\right)^{1/q} < \infty. \tag{3.19}$$

De plus, $\|f\|_{L^{\tau}_p(\mathbb{R})} + \|f\|^1_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})}$ *et* $\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})}$ *sont équivalentes.*

Preuve. D'après la Proposition 3.2.3 en la prenant en dimension 1 et en adaptant le paramètre s selon nos besoin, alors on a

$$0 < s \leq \max(s, s + \tau - 1/p) < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \tau < s + 1/p,$$

donc

$$\begin{cases} \frac{1}{p} - \tau < s < 1 + \frac{1}{p} - \tau \\ s > \tau - \frac{1}{p} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\left|\tau - \frac{1}{p}\right| < s < \min(1 + \frac{1}{p} - \tau, 1).$$

Maintenant, pour

$$\left|\tau-\frac{1}{p}\right| < s-1 < \min(1+\frac{1}{p}-\tau, 1),$$

on aura

$$1+\left|\tau-\frac{1}{p}\right| < s < \min(2+\frac{1}{p}-\tau, 2).$$

□

3.2.3 Preuve du théorème principal

Preuve. La preuve du Théorème 3.2.1 revient à montrer l'assertion :

l'inégalité (3.13) est vraie, pour tous s, p, q, τ et toute f et g vérifiant

i. f est de classe C^1, $f' \in \mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$.

ii. g est une fonction réelle analytique et $g \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}) \cap BV^1_p(\mathbb{R})$.

Commençons la preuve de (3.13) pour toute f et g telles que $f' \in \mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ et $g \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}) \cap BV^1_p(\mathbb{R})$.

Alors, on pose

$$f_j := S_j f - S_j f(0)\rho \quad \text{et} \quad g_j := S_j g$$

Les fonctions f_j et g_j sont analytiques et on a

g_j converge vers g dans L_p, en effet

$$\begin{aligned} \left|S_j g(x) - g(x)\right| &= \left|\sum_{k\geq j+1} Q_k g(x)\right| \\ &\leq \sum_{k\geq j+1} 2^{-sk} \left\|2^{sk} Q_k g\right\|_\infty . \end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder nous donne

$$\begin{aligned} \left|S_j g(x) - g(x)\right| &\leq \left(\sum_{k\geq j+1} 2^{-skq'}\right)^{1/q'} \left(2^{skq} \left\|Q_k g\right\|^q_\infty\right)^{1/q} \\ &= c 2^{-sj} \left\|g\right\|_{B^s_{\infty,q}} . \end{aligned}$$

On obtient alors $\lim_{j\to\infty} S_j g = g$.

$$\left\|Q_k S_j g\right\|_{L_p(P_{k,v})} = \left\|\varphi_j * Q_k g\right\|_{L_p(P_{k,v})} \quad \text{avec} \ \ \varphi_j := 2^j \mathscr{F}^{-1}\rho(2^j\cdot).$$

Alors,

$$\left\|g_j\right\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} \leq c \left\|g\right\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} \quad \text{pour tout } j \geq 0. \tag{3.20}$$

En appliquant (3.2) on obtient

$$\lim_{j\to+\infty}\left\|(S_jf)'-f'\right\|_\infty=0 \quad \text{et} \quad \left\|S_jf-f\right\|_\infty\leq c2^{-j}\left\|f'\right\|_\infty. \tag{3.21}$$

Nous avons également

$$\left\|f_j'\right\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})}\leq c\left(\left\|f'\right\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}}+\left|S_jf(0)\right|\right), \tag{3.22}$$

et

$$\left\|g_j\right\|_{BV^1_{sp-1}(\mathbb{R})}\leq c\left\|g\right\|_{BV^1_{sp-1}(\mathbb{R})}. \tag{3.23}$$

D'un autre côté, on peut écrire $f\circ g$ comme

$$f\circ g=f\circ S_0g+(f\circ S_1g-f\circ S_0g)+\cdots+(f\circ S_{j+1}g-f\circ S_jg)+\cdots$$

Le fait que $f(0)=0$ nous assure que

$$\left\|f\circ g\right\|_p\leq\left\|f'\right\|_\infty\left\|g\right\|_p. \tag{3.24}$$

Supposons que l'inégalité (3.13) soit vraie sous les hypothèses (i) et (ii), alors en utilisant (3.21) et (3.20) on trouve

$$\left\|f_j\circ g_j\right\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}\leq c\left(\left\|f'\right\|_{\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}}+\left|S_jf(0)\right|\right)\left(\left\|g\right\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}+\left\|g\right\|^{s-1/p}_{B^{s,\tau}_{p,q}}\right). \tag{3.25}$$

Mais, on sait que pour tout $j\geq 0$ on a

$$\begin{aligned}\left\|f\circ g-f_j\circ g_j\right\|_p &= \left\|f\circ g-f\circ g_j+f\circ g_j-f_j\circ g_j\right\|_p\\ &\leq \left\|f\circ g-f\circ g_j\right\|_p+\left\|f\circ g_j-f_j\circ g_j\right\|_p\\ &\leq \left\|f'\right\|_\infty\left\|g-g_j\right\|_p+c\left\|f'-f_j'\right\|_\infty\left\|g\right\|_p. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Puisque $\lim_{j\to+\infty}S_jf(0)=f(0)=0$, on obtient

$$\lim_{j\to+\infty}\left\|f_j'-f'\right\|_\infty=0. \tag{3.27}$$

De ce qui précède, on obtient la convergence de la suite $(f_j\circ g_j)_{j\geq 0}$ dans L_p.

Alors, on peut appliquer la propriété de Fatou. Encore une fois, on utilise le fait que $\lim_{j\to+\infty}S_jf(0)=f(0)=0$ on arrive à (3.13).

Étape 2. On va montrer l'inégalité (3.13) pour toute fonction f et toute fonction g telles que $f'\in\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})$, et $g\in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})\cap BV^1_{\alpha(sp-1)}(\mathbb{R})$. On sait que $B^{s,\tau}_{p,q}\hookrightarrow C_b$, et par le Théorème 3.1.2, et si on pose $\widetilde{f} := f - f(0)$ en appliquant l'étape précédente à $\widetilde{f}$ et g on aura

$$\begin{aligned}
\left\|(\widetilde{f}\circ g)'\right\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} &= \left\|(\widetilde{f}\circ g)'\right\|_{\infty} + \left\|(\widetilde{f}\circ g)'\right\|_{\dot{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} \\
&\leq \left\|f'\right\|_{\infty}\left\|g'\right\|_{\infty} + c_1\left\|\widetilde{f}\circ g\right\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} \\
&\leq \left\|f'\right\|_{\infty}\left\|g'\right\|_{\infty} + c_2\left\|f'\right\|_{\infty}\left\|g\right\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} \\
&\leq c_3\left\|f'\right\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})}\left(\left\|g\right\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} + \left\|g\right\|^{s-1/p}_{BV^1_{sp-1}}\right)
\end{aligned}$$

Étape 3. Le fait que $(f\circ g)' = ((f-f(0))\circ g)'$, l'inégalité (3.13) est vraie dans le cas général.
Étape 4. On suppose que l'inégalité (3.13) est vraie sous l'hypothèse (i). On supposera aussi que $f' \in \mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $g \in B^{s+1,\tau}_{p,q} \cap BV_p$.
Le Théorème 3.1.4 nous assure que la multiplication est une algèbre unitaire dans $\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\left\|(f\circ g)'\right\|_{\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}} &\leq c\left\|f'\circ g\right\|_{\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}}\left\|g'\right\|_{\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}}. \\
&\leq c\left(\left\|f'\circ g\right\|_{\infty} + \left\|f'\circ g\right\|_{\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}}\right)\left\|g\right\|_{B^{s+1,\tau}_{p,q}\cap BV_p} \\
&\leq c\left\|f\right\|_{\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}}\left(\left\|g\right\|_{B^{s,\tau}_{p,q}} + \left\|g\right\|^{s+1-1/p}_{BV_p}\right).
\end{aligned}$$

Revenons à la preuve du théorème. Alors, pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, tout entier positif non-nul m et $t = 2\min(l(P_{k,\nu}, 1)$ on pose

$$\Omega^m_p(f,t) := \left(\int_{P_{k,\nu}} \sup_{|h|\leq t} |\Delta^m_h f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Par la Proposition 3.2.5 on pose

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{k\tau}\left(\int_{|h|<t}|h|^{-sp-1}\int_{P_{k,\nu}}\left|\Delta^1_h(f\circ g)'\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}h\right)^{1/p}, \\
U_2 &:= \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{k\tau}\left(\int_{P_{k,\nu}}\left|(f\circ g)'\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

On se servira de l'égalité

$$\Delta_h((f'\circ g)g')(x) = f'(g(x+h)\Delta g'(x) + g'(x)\Delta_h(f'\circ g)(x).$$

On va estimer les deux termes U_1 et U_2.

Estimation de U_2. La formule (3.24) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} U_2 &\leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{k\tau} \left(\int_{P_{k,\nu}} (\sup_{|h|\leq t} \|f'\|_\infty |g'|)^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\ &\leq c \|f'\|_\infty \|g'\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})} . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Estimation de U_1. Supposons que g' ne s'annule pas. Par le théorème des accroissement finis on obtient

$$\begin{aligned} U_1 &\leq \|g'\|_\infty^{1-1/p} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{k\tau} \left(\int_{|h|<t} |h|^{-sp-1} \int_{P_{k,\nu}} |g'(x)| \sup_{|h|\leq 1} \left|\Delta_h^1(f'\circ g)\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}h \right)^{1/p} \\ &\leq \|g'\|_\infty^{1-1/p} \Omega_p^1(f', \|g'\|_\infty t). \end{aligned}$$

Donc on peut écrire U_1 comme

$$U_1(t) = \|g'\|_\infty^{1-1/p} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{(k+k')\tau} \left(\int_{|h|<t} |h|^{-sp-1} \int_{P_{(k+k'),\nu}} |g'(x)| \sup_{|h|\leq 1} \left|\Delta_h^1(f'\circ g)\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}h \right)^{1/p},$$

où k' est un entier. Supposons maintenant g est une fonction analytique et que l'ensemble où g' s'annule n'est pas vide, alors c'est un ensemble discret et son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est la réunion d'une famille d'intervalles ouverts disjoints de la forme $I_l =]a_l, b_l[$.
On pose

$$I'_{l,t} := \{x \in P_{k+k',\nu} : |a_l - x| > 2t \quad \text{et} \quad |b_l - x| > 2t\}.$$

Et

$$I''_{l,t} I_l \setminus I'_{l,t} \quad \text{et} \quad r_l := \sup_{x\in I_l} |g'(x)|.$$

L'intervalle $I'_{l,t}$ est une ouvert et peut être vide. S'il est non vide on a

$$\left| g(g^{-1}_{|I_l}(y) + h) - g(g^{-1}_{|I_l}(y)) \right| \leq r_l t, \tag{3.29}$$

pour tout y de $g(I'_{l,t})$ et tout h tel que $|h| \leq t$. Si cet intervalle est vide alors $I''_{l,t} = I_l$ pour tout $t > 0$. Donc, en posant

$$J_1 := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{(k+k')\tau} \left(\int_{-t}^{t} |h|^{-sp-1} \sum_l \int_{I'_{l,t}} \left(\sup_{|h|\leq t} |g'(x)| |\Delta_{-h}(f'\circ g)(x)| \right)^p \mathrm{d}x\mathrm{d}h \right)^{1/p},$$

et

$$J_1 := \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{(k+k')\tau}\left(\int_{-t}^{t}|h|^{-sp-1}\sum_l\int_{I''_{l,t}}\big(\sup_{|h|\le t}|g'(x)||\Delta_{-h}(f'\circ g)(x)|\big)^p\mathrm{d}x\mathrm{d}h\right)^{1/p}.$$

En effectuant le changement de variable $y = g_{|I_l}(x)$ et en utilisant la formule (3.29) on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_{I'_{l,t}}\big(|g'(x)|\sup_{|h|\le t}|\Delta_h(f'\circ g)(x)|\big)^p\mathrm{d}x\\
&\qquad\le r_l^{p-1}\int_{g(I'_{l,t})}\big(\sup_{|h|\le t}\left|f'(g(g_{|I_l}^{-1}(y)+h)-f'(g(g_{|I_l}^{-1}(y))\right|\big)^p\mathrm{d}y\\
&\qquad\le r_l^{p-1}\big(\Omega_p^1(f',r_lt)\big)^p.
\end{aligned}$$

En prenant $\alpha := \min(1,q/p)$ il vient

$$\sum_l\int_{I'_{l,t}}\big(\sup_{|h|\le t}\left|g'(x)\Delta_{-h}(f'\circ g)(x)\right|\big)^p\mathrm{d}x \le \left(\sum_l r_l^{\alpha(p-1)}\big(\Omega_p^1(f',r_lt)\big)^{\alpha p}\right)^{1/\alpha}. \tag{3.30}$$

Par le changement de variable $\omega = r_lt$ on trouve

$$J_1 \le \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{(k+k')\tau}\left(\int_{|h|\le\omega}|h|^{-sp-1}\sum_l r_l^{\alpha(sp-1)}\int_{P_{k+k',\nu}}\big(\sup_{|h|\le\omega}\left|\Delta_hf'(y)\right|\big)^p\mathrm{d}y\mathrm{d}h\right)^{1/p}.$$

En appliquant l'inégalité de Minkowski on obtient

$$J_1 \le \big(\sum_l r_l^{\alpha(sp-1)}\big)^{1/(\alpha p)}\left\|f'\right\|_{B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R})}.$$

De plus on a

$$\big(\sum_l r_l^{\alpha(sp-1)}\big)^{1/(\alpha p)} \le c\left\|g\right\|_{BV_{\alpha(sp-1)}(\mathbb{R})}^{s-1/p},$$

par conséquent on aboutit à

$$J_1 \le c\left\|f'\right\|_{B_{p,q}^{s-1,\tau}(\mathbb{R})}\left\|g\right\|_{BV_{\alpha(sp-1)}(\mathbb{R})}^{s-1/p}. \tag{3.31}$$

On se tourne maintenant à l'estimation de J_2. Par les propriétés de $I''_{l,t}$ on remarque que

$$|g'(x)| \le \sup_{|h|\le 2t}|g'(x)-g'(x+h)|, \quad \forall x\in I''_{l,t}.$$

De fait que $|(f'\circ g)(x+h)-(f'\circ g)(x)|\leq 2\,\|f'\|_\infty$ il vient

$$\begin{aligned} J_2 &\leq 2\left\|f'\right\|_\infty \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{(k+k')\tau}\left(\int_{|h|\leq t}|h|^{-1-sp}\sum_l\int_{I''_{l,t}}\big(\sup_{|h|\leq t}\left|\Delta_h g'(x)\right|\big)^p\mathrm{d}x\mathrm{d}h\right)^{1/p}\\ &\leq \left\|f'\right\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})}\left\|g'\right\|_{B^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$U_1\leq c\left\|f'\right\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})}\big(\|g\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})}+\|g\|^{s-1/p}_{BV_{\alpha(sp-1)}(\mathbb{R})}\big).$$

En prenant les estimations de U_1 et de U_2 on conclue

$$\left\|(f\circ g)'\right\|_{\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})}\leq c\left\|f'\right\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})}\big(\|g\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R})}+\|g\|^{s-1/p}_{BV_{\alpha(sp-1)}(\mathbb{R})}\big).$$

□

3.2.4 Preuve du Corollaire 3.2.2

Preuve. *Preuve de (i).* Nous avons d'après le Théorème 3.1.2 et la Proposition 1.4.2

$$\|f\circ g\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}\leq c\big(\|f\circ g\|_{L^\tau_p}+\left\|(f\circ g)'\right\|_{\dot{B}^{s-1,\tau}_{p,q}}\big),$$

Maintenant, par (3.2) et le Théorème 3.13 et le fait que $f(0)=0$, on peut majorer le côté droit de l'inégalité précédente par

$$c\big(\left\|f'\right\|_\infty\|g\|_{L^\tau_p}+\left\|f'\right\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}}(\|g\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}+\|g\|_{BV^{s-1/p}_{\alpha(sp-1)}})\big)$$

Alors, on arrive à

$$\|f\circ g\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}\leq c\left\|f'\right\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}}\big(\|g\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}+\|g\|^{s-1/p}_{BV_{\alpha(sp-1)}}\big).$$

Preuve de (ii). Pour $t=\|g\|_\infty$ on a $f\circ g=(f\rho_t)\circ g$. Par l'inclusion $B^{s,\tau}_{p,q}\hookrightarrow\mathscr{B}^{s,\tau}_{p,q}$ on obtient

$$\left\|(f\rho_t)'\right\|_{\mathscr{B}^{s-1,\tau}_{p,q}}\leq c\left\|(f\rho_t)'\right\|_{B^{s-1,\tau}_{p,q}}\leq c\,\|f\rho_t\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}$$

qui est une quantité finie. Puis, tant que $f\rho_t(0)=0$ et en utilisant (i) on arrive au résultat voulu. □

Chapitre 4

Réalisation des espaces homogènes

Dans l'étude des espaces homogènes, on est toujours confronté à des problèmes de maniabilité, ces problèmes sont dus au fait que les espaces homogènes sont des espaces de classes d'équivalences. Par conséquent, ils ne constituent pas des espaces de distributions tempérées, mais des espaces de classes d'équivalences de distributions tempérées. Alors, on va, par une application linéaire et continue, choisir un élément de chaque classe. Cette opération s'appelle "Réalisation". En outre, les espaces homogènes sont connus pour avoir des propriétés très importantes telles que l'invariance par translation et l'invariance par dilatation. Ainsi, grâce aux réalisations de ces espaces, on souhaite préserver ces propriétés.

Bourdaud est le premier à avoir introduit cette théorie dans les espaces classiques. Dans [9] on trouve les réalisations des espaces $\dot{B}^s_{p,q}$, dans [13]les réalisations de espaces de Sobolev homogènes puis dans [14] il y a les réalisations des espaces des espaces $\dot{B}^s_{p,q}$ et $\dot{F}^s_{p,q}$ avec les constructions et exemples des réalisations. On trouve également le travail de [34] qui généralise ce qui a été fait notamment lorsque $0 < p,q < 1$. Benalia et Moussai ont introduit la réalisation des espaces homogènes de Triebel-Lizorkin avec $p = \infty$ [3]. On remarque aussi des applications des réalisations [7], [2] et [36] ou encore dans Moussai [37] où l'auteur a étudié des inégalités de Hardy dans les espaces réalisés de Besov et de Triebel-Lizorkin.

Notre objectif dans ce travail est des réalisé les espaces $\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$ en se basant sur les travaux cités ci-dessus.

4.1 Généralités sur les réalisations

Dans les premières définitions et propositions, nous nous appuyons sur les travaux de Bourdaud [8, 9, 13, 14, 15]. Notamment, on utilise quelques techniques de démonstration de ces travaux là.

Définition 4.1.1. Soient $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et E un E.B.D. dans $\mathscr{S}'_m(\mathbb{R}^n)$. Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}_m(\mathbb{R}^n)$, on appelle réalisation de E modulo V une application linéaire continue $\sigma : E \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/V$ telle que tout élément $f \in E$ soit la classe d'équivalence de $\sigma(f)$ modulo $\mathscr{P}_m(\mathbb{R}^n)$. L'image de E par σ est appelé l'espace réalisé de E par σ.

Remarque 4.1.1. L'ensemble des réalisations possède une propriété héréditaire, ce qui signifie que dès que l'on connaît une réalisation, on peut en générer les autres.

Nous allons présenter quelques résultats sur les réalisations et leurs classifications qu'on trouve dans à [9] et [15].

Proposition 4.1.1. *Soit $\sigma_0 : E \to \mathscr{S}'_k$ une réalisation. Pour toute famille finie $(\mathscr{L}_\alpha)_{k\leq|\alpha|\leq m}$ de formes linéaires continues sur E, la formule suivante définit une réalisation de E dans $\mathscr{S}'_k$:*

$$\sigma(f)(x) := \sigma_0(f)(x) + \sum_{k\leq|\alpha|\leq m} \mathscr{L}_\alpha(f)\, x^\alpha .$$

Réciproquement, toute réalisation de E est donnée de la forme ci-dessus.

Le fait qu'un espace homogène soit isométriquement invariant par translations et/ou invariant par dilatations nous conduit à souhaiter que l'espace réalisé possède également ces propriétés, ce qui garantirait l'unicité d'une telle réalisation (si elle existe).

Rappelons qu'un espace E est dit invariant par translation si

$$\forall f \in E, \forall a \in \mathbb{R}^n : \tau_a f \in E. \tag{4.1}$$

De même, E est dit invariant par dilatation si

$$\forall f \in E, \forall \lambda > 0 : h_\lambda f \in E. \tag{4.2}$$

Proposition 4.1.2. *Soit E un sous-espace de $\mathscr{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ invariant par les translations (resp. dilatations). Soit σ une réalisation de E modulo $\mathscr{P}_k(\mathbb{R}^n)$. Alors $\sigma(E)$ est invariant par les translations si et seulement si σ commute avec les translations (resp. dilatations).*

Proposition 4.1.3. *Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ isométriquement invariant par translation et $k < m$. Soit σ_0 une réalisation de E modulo $\mathscr{P}_k(\mathbb{R}^n)$ commutant aux translations. Soit $(\mathscr{L}_\alpha)_{k=|\alpha|}$ une famille finie de formes linéaires continues sur E, invariantes par translations au sens où $\mathscr{L}_\alpha \circ \tau_a = \mathscr{L}_\alpha$, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$. Alors, la formule suivante définit une réalisation de E modulo $\mathscr{P}_k(\mathbb{R}^n)$, qui commute aux translations :*

$$\sigma(f) = \sigma_0(f) + \sum_{|\alpha|=m} \mathscr{L}_\alpha(f)[x^\alpha]_m; \tag{4.3}$$

inversement, toute réalisation σ de E modulo $\mathscr{P}_k(\mathbb{R}^n)$, commutant aux translations, est de la forme ci-dessus.

Proposition 4.1.4. *Soit E un sous-espace de $\mathscr{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ invariant par translations. On suppose que $\mathscr{S}_N(\mathbb{R}^n) \subset E$. Si $\mathscr{L}$ est une forme linéaire continue sur E, invariante par translations, alors la restriction de $\mathscr{L}$ à $\mathscr{S}_N(\mathbb{R}^n)$ est un polynôme de degré N.*

Proposition 4.1.5. *Soit E un sous-espace de $\mathscr{S}'_m(\mathbb{R}^n)$ invariant par dilatations et homogène de degré ℓ, et soit $k < m$.*

i. *Si $\ell \notin \{k, k+1, \cdots\}$, alors E admet au plus une réalisation modulo $\mathscr{P}_k(\mathbb{R}^n)$ qui commute aux dilatations.*

ii. *Supposons que ℓ est un entier au moins égale à k. Soit σ_0 une réalisation de E modulo $\mathscr{P}_k(\mathbb{R}^n)$, commutant aux dilatations, et $(\mathscr{L}_\alpha)_{\ell=|\alpha|}$ une famille de formes linéaires continues sur E, telle que $\mathscr{L}_\alpha \circ h_\lambda = \lambda^{-\ell}\mathscr{L}_\alpha$ pour tout $\lambda > 0$. Alors la formule suivante définit une réalisation de E modulo $\mathscr{P}_k(\mathbb{R}^n)$, qui commute aux dilatations :*

$$\sigma(f) = \sigma_0(f) + \sum_{|\alpha|=\ell} \mathscr{L}_\alpha(f)[x^\alpha]_m; \tag{4.4}$$

inversement, toute réalisation σ de E modulo $\mathscr{P}_k(\mathbb{R}^n)$, commutant aux dilatations, est de la forme ci-dessus.

Rappelons la signification de $[x^\alpha]_m$:
$\forall \varphi \in \mathscr{S}_m, \forall \beta \in \mathbb{N}^n$ avec $|\beta| < m$, on a

$$\langle x^\alpha + x^\beta, \varphi \rangle = \langle x^\alpha, \varphi \rangle,$$

par conséquent, si $\alpha = \beta + \mu$ avec $|\beta| < m$ on a $[x^\alpha]_m = [x^\mu]_m$. Il est à noter que pour chaque $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ on associe un entier μ définit en (4.5) et (4.6) respectivement.

4.2 Réalisation des espaces de type de Besov Homogènes

Dans cette section, nous présentons une de nos contributions, à savoir les réalisations des espaces de type Besov homogènes. Nous nous référons à notre article [4, Théorème 1]. On rappelle que

$$\mu = \begin{cases} [s+n\tau-n/p]+1 & \text{si} \quad s+n\tau-n/p \notin \mathbb{N}_0 \quad \text{ou} \quad q>1, \\ s+n\tau-n/p & \text{si} \quad s+n\tau-n/p \in \mathbb{N}_0 \quad \text{et} \quad 0<q\leq 1. \end{cases} \tag{4.5}$$

Dans le cas de l'espace de type de Triebel-Lizorkin

$$\mu = \begin{cases} [s+n\tau-n/p]+1 & \text{si} \quad s+n\tau-n/p \notin \mathbb{N}_0 \quad \text{ou} \quad p>1, \\ s+n\tau-n/p & \text{si} \quad s+n\tau-n/p \in \mathbb{N}_0 \quad \text{et} \quad 0<p\leq 1. \end{cases} \tag{4.6}$$

Théorème 4.2.1. *Soient $\tau, s \in \mathbb{R}$ et $0 < p,q \leq +\infty$. Soit $f \in \dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Alors, la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f$ converge dans $\mathscr{S}'_\mu$, notons par $\sigma_\mu(f)$ sa somme qui appartient à $\mathscr{S}'_\mu$. Alors l'application σ_μ : $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q} \to \mathscr{S}'_\mu$ définie une réalisation invariante par translation et par dilatation de $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}$ dans $\mathscr{S}'_\mu$, et $\sigma_\mu(f)$ est l'unique représentant de f vérifiant $\partial^\alpha \sigma_\mu f \in \widetilde{C}_0$ pour tout $|\alpha| = \mu$.*

Proposition 4.2.2. *Soient $s \in \mathbb{R}$, $p,q \in]0,+\infty]$ et $\tau \geq 0$ tel que $\mu \geq 1$. Soient a et b deux réels tel que $0 < a < b$. Alors, il existe une suite $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $\mathscr{S}'$ vérifiant*

i. Le support de u_j est $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$.

ii. $A := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{kn\tau} \left(\sum_{j\geq k} 2^{sjq} \left\|u_j\right\|^q_{L_p(P_{k,\nu})}\right)^{1/q} < \infty$,

telle que la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ diverge dans $\mathscr{S}'_{\mu-1}$.

Proposition 4.2.3. *Soient $s, \tau \in \mathbb{R}$ et $p,q \in]0,+\infty]$. Si $\mu \geq 1$ alors $\widetilde{\dot{B}}^{s,\tau}_{p,q}$ est l'ensemble des distributions f qui vérifie $[f]_\mu \in \dot{B}^{s,\tau}_{p,q}$ et*

(i) *$f^{(\alpha)} \in \widetilde{C}_0$ pour tout $|\alpha| = \mu$.*

(ii) *$\langle f^{(\alpha)}, \gamma\rangle = 0$ pour tout $|\alpha| = \mu - 1$.*

(iii) *$f \in \mathscr{S}'_{\mu-1}$.*

Preuve. Voir [4, Proposition 6]. □

4.3 Réalisations des espaces de type de Triebel-Lizorkin homogènes

Théorème 4.3.1. *Soient $\tau, s \in \mathbb{R}$, $0 < p < +\infty$ et $0 < q \leq +\infty$. Soit $f \in \dot{F}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Alors, les séries $\sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f$ convergent dans $\mathscr{S}'_\mu$, notons par $\sigma_\mu(f)$ à sa somme qui appartient à $\mathscr{S}'_\mu$. Alors l'application $\sigma_\mu : \dot{F}^{s,\tau}_{p,q} \to \mathscr{S}'_\mu$ définie une réalisation invariante par translations et par dilatations de $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$ dans $\mathscr{S}'_\mu$, et $\sigma_\mu(f)$ est l'unique représentant de f vérifiant $\partial^\alpha \sigma_\mu f \in \widetilde{C}_0$ pour tout $|\alpha| = \mu$.*

Corollaire 4.3.2. *Soit σ_μ l'application définie dans les Théorème 4.2.1 et 4.3.1. Alors, l'espace réalisé $\sigma(\dot{A}^{s,\tau}_{p,q})$ coïncide avec l'ensemble des $f \in \mathscr{S}'_\mu$ tel que $[f]_\mu \in \dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$ et $f^{(\alpha)} \in \widetilde{C}_0$ pour tout $|\alpha| = \mu$, cet ensemble sera noté $\widetilde{\dot{A}}^{s,\tau}_{p,q}$. L'espace $\widetilde{\dot{A}}^{s,\tau}_{p,q}$ est muni de la quasi-norme $\|f\|_{\widetilde{\dot{A}}^{s,\tau}_{p,q}} = \left\|[f]_\mu\right\|_{\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}}$.*

Remarque 4.3.1. Les constructions des réalisations de l'espace $\dot{B}^s_{p,q}$ dans $\mathscr{S}'$ ont été données par Bourdaud dans [13, 14], ces constructions restent aussi valables dans les espaces $\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$. En effet, pour tout $f \in \dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$ on a

$$\sigma_{\mu,1}(f) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k f, \text{ si } s+n\tau < n/p \text{ ou } s+n\tau = n/p \text{ et } q \leq 1 \ (p \leq 1 \text{ Cas de l'espaces } F), \tag{4.7}$$

$$\sigma_{\mu,2}(f) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(Q_k f - \sum_{|\alpha|<\mu} (Q_k f)^{(\alpha)}(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \Big), \text{ si } s+n\tau-n/p \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}_0 \text{ ou}$$
$$s+n\tau-n/p \in \mathbb{N} \text{ et } q \leq 1 \ (p \leq 1 \text{ Cas de l'espaces } F), \tag{4.8}$$
$$\sigma_{\mu,3}(f) := \sum_{k>0} Q_k f + \sum_{k\leq 0} \Big(Q_k f - \sum_{|\alpha|<\mu} (Q_k f)^{(\alpha)}(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \Big) \text{ si } s+n\tau-n/p \in \mathbb{N}_0$$
$$\text{et } q > 1 \ (p \geq 1 \text{ Cas de l'espaces } F). \tag{4.9}$$

Proposition 4.3.3. *Soient $s,\tau \in \mathbb{R}$ et $p,q \in]0,+\infty]$. Si $\mu \geq 1$ alors $\dot{\tilde{F}}^{s,\tau}_{p,q}$ est l'ensemble des distributions f qui vérifie $[f]_\mu \in \dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$ et*

(i) *$f^{(\alpha)} \in \widetilde{C}_0$ pour tout $|\alpha| = \mu$.*

(ii) *$\langle f^{(\alpha)}, \gamma\rangle = 0$ pour tout $|\alpha| = \mu - 1$.*

(iii) *$f \in \mathscr{S}'_{\mu-1}$.*

La proposition suivante nous donne une caractérisation de $\dot{\tilde{F}}^{s,\tau}_{p,q}$ comme un sous ensemble de $\mathscr{S}'$ par d'autres propriétés, dans le cas $\mu > 1$, et on se réfère à [14].

Proposition 4.3.4. *Soient $s,\tau \in \mathbb{R}$, $p \in]0,+\infty[$ et $q \in]0,+\infty]$ vérifiant $s+n\tau-n/p \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}_0$ ou $s+n\tau-n/p \in \mathbb{N}$ et $0 < p \leq 1$. Alors, tout élément f de $\dot{\tilde{F}}^{s,\tau}_{p,q}$ vérifie $f \in \mathscr{S}'$, $[f]_\mu \in \dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$ et les propriétés suivantes :*

(i) *f est une fonction de $C^{\mu-1}$.*

(ii) *$f^{(\alpha)}(0) = 0$ pour tout $|\alpha| \leq \mu - 1$.*

(iii) *$f^{(\alpha)} \in \widetilde{C}_0$ pour tout $|\alpha| = \mu$.*

4.4 Preuves

Preuve du Théorème 4.3.1.

Soit $f \in \dot{F}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Pour la convergence des séries $\sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f$ dans $\mathscr{S}'_\mu$ on l'aura du Théorème 2.3.2.

Maintenant, on va montrer que $\partial^\alpha \sigma_\mu(f) \in \widetilde{C_0}$ pour tout $|\alpha| = \mu$. En tenant compte des propriétés (1.22) et (1.23), dans le cas $s+n\tau-n/p \notin \mathbb{N}_0$ ou $p>1$ car $\left[\partial^\alpha \sigma_\mu(f)\right]_\infty \in \dot{F}^{s-\mu,\tau}_{p,q} \hookrightarrow \dot{F}^{s+n\tau-n/p-\mu}_{\infty,\infty}$ $(|\alpha| = \mu)$ et $s+n\tau-n/p-\mu<0$.

On va voir maintenant le cas $\mu = s+n\tau-n/p \in \mathbb{N}_0$ et $0<p\leq 1$. En utilisant (1.22) et (1.23) on aura $\left[\partial^\alpha \sigma_\mu(f)\right]_\infty \in \dot{F}^{s-\mu}_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{0}_{\infty,\infty}$ $(|\alpha| = \mu)$ qui donne $\left|Q_j f^{(\alpha)}\right| \lesssim 2^{-j\mu} \left\|[\sigma_\mu(f)]_\infty\right\|_{\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On pose

$$f_m := \sum_{|j|\leq m} Q_j f^{(\alpha)} \qquad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ est fixé tel que } |\alpha| = \mu \text{ et } m = 1,2,\cdots,$$

alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $g \in \mathscr{S}$ on a

$$\langle h_\lambda \partial^\alpha \sigma_\mu(f), g\rangle = \langle h_\lambda(\partial^\alpha \sigma_\mu(f) - f_m), g\rangle + \langle h_\lambda f_m, g\rangle. \tag{4.10}$$

Puisque $\|f_m\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty$ et $\widehat{f_m}$ a pour support dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la couronne $2^{-m-1} \leq |\xi| \leq 3\cdot 2^{m-1}$, et par le Lemme 1.1.4 on obtient $\langle h_\lambda f_m, g\rangle$ tend vers 0 quand λ tend vers 0.

Maintenant, on introduit un entier positif r tel que $2^{-r-1} < \lambda \leq 2^{-r}$. La fonction $\mathscr{F}\left(h_\lambda(Q_j f^{(\alpha)}\right)$ est portée par la couronne $2^{j+r-1} \leq |\xi| \leq 3\cdot 2^{j+r}$. Alors

$$\mathscr{F}\left(Q_{k+r} h_\lambda (Q_j f^{(\alpha)})\right) = 0 \quad \text{si} \quad k-j \geq 3 \text{ ou } k-j \leq -2.$$

Donc

$$\langle h_\lambda(Q_j f^{(\alpha)}), g\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle Q_{k+r} h_\lambda (Q_j f^{(\alpha)}), g\rangle = \sum_{l=-2}^{3} \langle h_\lambda(Q_j f^{(\alpha)}), Q_{j+r+l}\, g\rangle;$$

on a utilisé ici le fait que γ est une fonction radiale sur $\mathbb{R}^n$. Alors on obtient

$$\langle h_\lambda(\partial^\alpha \sigma_\mu(f) - f_m), g\rangle = \sum_{|j|>m} \sum_{l=-2}^{3} \langle h_\lambda(Q_j f^{(\alpha)}), Q_{j+r+l}\, g\rangle. \tag{4.11}$$

Alors

$$\begin{aligned} \left|\langle h_\lambda(\partial^\alpha \sigma_\mu(f) - f_m), g\rangle\right| &\leq \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \sum_{|j|>m} \sum_{l=-2}^{3} \left\|h_\lambda(Q_j f^{(\alpha)})\right\|_{L_\infty(P_{k,\nu})} \|Q_{j+r+l}\, g\|_{L_1(P_{k,\nu})} \\ &\lesssim \sum_{r=0}^{1+[1/\lambda]} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \sum_{|j|>m} \sum_{l=-2}^{3} \|Q_j f^{(\alpha)}\|_{L_\infty(P_{j,E(\nu/\lambda)+rw_0})} \|Q_{j+r+l}\, g\|_{L_1(P_{j,\nu})}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

où $\omega_0 := (1,1,\cdots,1) \in \mathbb{Z}^n$, d'une part. D'autre part, dans (4.11) on a l'égalité $\sum_{|j|>m} \cdots = \sum_{|j|>m, j\in\Lambda} \cdots$ avec le cardinal de Λ est 3, (il est à noter que $\Lambda = \{J, J+1, J+2\}$). Donc en utilisant le fait que

$$\|u_k\|_{L_\infty(P_{k,\nu})} \lesssim 2^{-k(s-n/p+n\tau)}A, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall \nu \in \mathbb{Z}^n,$$

et en remplaçant u_k par $Q_j f^{(\alpha)}$, $P_{k,\nu}$ par $P_{j,E(\nu/\lambda)+r\omega_0}$ et s par $s-\mu$, on obtient

$$\|Q_j f^{(\alpha)}\|_{L_\infty(P_{j,E(\nu/\lambda)+rw_0})} \lesssim 2^{j(n/p-s+|\alpha|-n\tau)}\|f^{(\alpha)}\|_{\dot{F}^{s-\mu,\tau}_{p,q}} = c\|f^{(\alpha)}\|_{\dot{F}^{s-\mu,\tau}_{p,q}},$$

alors,

$$\begin{aligned} \left|\left\langle h_\lambda\left(\partial^\alpha \sigma_\mu(f)-f_m\right),g\right\rangle\right| &\le c(2+[1/\lambda])\|f^{(\alpha)}\|_{\dot{F}^{s-\mu,\tau}_{p,q}} \sum_{l=-2}^{3}\sum_{j=J}^{J+2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\|Q_{j+r+l}g\|_{L_1(P_{j,\nu})} \\ &= c(2+[1/\lambda])\|f^{(\alpha)}\|_{\dot{F}^{s-\mu,\tau}_{p,q}} \sum_{l=-2}^{3}\sum_{j=J}^{J+2}\|Q_{j+r+l}g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\,. \end{aligned}$$

l'inégalité de Young nous donne $\|Q_j g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$, alors

$$\left|\left\langle h_\lambda\left(\partial^\alpha \sigma_\mu(f)-f_m\right),g\right\rangle\right| \lesssim (2+[1/\lambda])\|f^{(\alpha)}\|_{\dot{F}^{s-\mu,\tau}_{p,q}}\|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\,,$$

qui donne

$$\lim_{m\to\infty}\left|\left\langle h_\lambda\left(\partial^\alpha \sigma_\mu(f)-f_m\right),g\right\rangle\right| = 0,$$

Une fois encore par (4.11) et (5.15). Donc de la formule (4.10), pour $\varepsilon>0$ arbitrairement fixé, il existe un entier positif m_0, tel que pour tout $m\ge m_0$ on a

$$\left|\langle h_\lambda \partial^\alpha \sigma_\mu(f),g\rangle\right| \le \varepsilon + |\langle h_\lambda f_m, g\rangle|,$$

qui donne $\lim_{\lambda\to 0}\langle h_\lambda \partial^\alpha\sigma_\mu(f),g\rangle = 0$, et ceci prouve que $\partial^\alpha\sigma_\mu(f)\in\widetilde{C}_0$ si $|\alpha|=\mu$ dans tous les cas.

On note que si on pose $\widetilde{\sigma}(f) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f + \nu$ avec n'importe quel polynôme non nul $\nu\in\mathscr{P}_\mu$, alors $\widetilde{\sigma}$ sont des réalisations de $\dot{F}^{s-\mu,\tau}_{p,q}$ en $\mathscr{S}'_\mu$, et il est clair que $\partial^\alpha\widetilde{\sigma}(f)\in\widetilde{C}_0$ si $|\alpha|=\mu$ et $\widetilde{\sigma}(f)=\sigma_\mu(f)$ dans $\mathscr{S}'_\mu$, i.e., $[\widetilde{\sigma}(f)]_\mu = [\sigma_\mu(f)]_\mu$.

Etape 3. Tant que $\tau_a\circ Q_j = Q_j\circ\tau_a$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$ et tout $a\in\mathbb{R}^n$, l'application $f\to\sigma_\mu(f) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f$ commute avec τ_a. Pour l'invariance par dilatations, d'abord on observe l'inégalité

$$\langle h_\lambda\left(h_\beta f\right)^{(\alpha)},\varphi\rangle = \beta^{n-|\alpha|}\langle h_\lambda f^{(\alpha)}, h_{1/\beta}\varphi\rangle \qquad (\forall\lambda>0,\forall\beta>0,\forall\varphi\in\mathscr{S}),$$

on a, si $f^{(\alpha)}\in\widetilde{C}_0$ alors $\left(h_\beta f\right)^{(\alpha)}\in\widetilde{C}_0$. On obtient que l'espace réalisé $\tilde{\dot{F}}^{s,\tau}_{p,q}$ est invariant par dilatations. On obtient alors $\sigma_\mu(f) - f =: v_1$ avec $v_1 \in \mathscr{P}_\mu$. Également, pour tout $\lambda > 0$ on a $\sigma_\mu(h_\lambda f) - h_\lambda f =: v_2$ avec $v_2 \in \mathscr{P}_\mu$. Donc, cela nous donne

$$\sigma_\mu(h_\lambda f) - h_\lambda \sigma_\mu(f) = v_2 - h_\lambda v_1;$$

comme $v_2 - h_\lambda v_1 \in \mathscr{P}_\mu$, alors $\sigma_\mu(h_\lambda f) = h_\lambda \sigma_\mu(f)$ dans $\mathscr{S}'_\mu$, i.e., $[\sigma_\mu(h_\lambda f)]_\mu = [h_\lambda \sigma_\mu(f)]_\mu$. L'application σ_μ définie de $\dot{F}^{s-\mu,\tau}_{p,q}$ dans $\mathscr{S}'_\mu$ commute avec les dilations.

Etape 4. L'unicité de $\sigma_\mu(f)$, le représentant de f, découle directement du Lemme 1.1.3.

Preuve du Corollaire 4.3.2

On va montrer que $\sigma_\mu\left(\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}\right) = \dot{\widetilde{F}}^{s,\tau}_{p,q}$.

Par définition nous avons $\sigma_\mu\left(\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}\right) \subset \dot{\widetilde{F}}^{s,\tau}_{p,q}$. Maintenant, soit $h \in \dot{\widetilde{F}}^{s,\tau}_{p,q}$, alors on a par le Théorème 4.3.1

$$\partial^\alpha(f - \sigma_\mu([f]_\mu)) \in \widetilde{C}_0 \quad \forall |\alpha| = \mu,$$

c'est à dire $f - \sigma_\mu([f]_\mu) \in \mathscr{P}_\mu$, donc f et $\sigma_\mu([f]_\mu)$ coïncident dans $\mathscr{S}'_\mu$, ce qui nous donne la deuxième inclusion.

Preuve de la Proposition 4.2.2

Dans [15], cette proposition a été démontrée dans les espaces classiques. Cependant, dans cette preuve on apportera les changements nécessaires.

On pose $m = \mu - 1$. Soit une fonction $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, positive et qui a pour support l'ensemble $\{\xi \in \mathbb{R}^n : 3/2 \le |\xi| \le 2 \ \text{avec} \ \xi_1 \ge 0\}$. On définit les deux fonctions θ et θ_1 de $\mathscr{S}_\infty$ par

$$\widehat{\theta} = \rho_1 \quad , \quad \widehat{\theta}_1 = \rho\rho_1.$$

Pour l'existence de telles fonctions on peut consulter [8] ou [15]. Donnons nous maintenant une suite (α_j) positive telle que

$$\left[\sum_{j\ge 0}\left(\alpha_j 2^{-j(s+n\tau-n/p)}\right)^q\right]^{1/q} < +\infty, \tag{4.13}$$

et

$$\sum_{j\ge 0} \alpha_j 2^{-jm} = +\infty. \tag{4.14}$$

Une telle suite pourra être obtenue en posant

- $\alpha_j = 2^{jr}$ si $\mu \notin \mathbb{N}^*$ ou $\mu \in \mathbb{N}^*$ et $q = 1$, avec $m < r < 1 - 1/q$.
- $\alpha_j = (j+1)^{r-1} 2^{jm}$ si $\mu \in \mathbb{N}$ et $q > 1$, avec $0 < r < 1 - 1/q$.

On remarquera que

$$\sum_{j \geq 0} \alpha_j 2^{-j\mu} < +\infty. \tag{4.15}$$

Posons maintenant

$$g(x) := \sum_{j \geq 0} \alpha_j \theta(2^{-j}x), \tag{4.16}$$

la condition (4.13) et le Théorème 2.3.2 nous donne que $g \in \dot{F}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. En prenant en compte le support de ρ_1, on aura

$$\forall j \geq 0, \quad Q_{-j}(f) = \alpha_j \theta_1(2^{-j}x).$$

Soit une fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$, cela implique que $\partial^m_{x_1}\varphi \in \mathscr{S}_m$. Donc, on a

$$\langle \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j, \partial^m_{x_1}\varphi \rangle = (-1)^n \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\partial^m_{x_1} u_j(x) - \partial^m_{x_1} u_j(0) \right) \varphi(x)dx + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \partial^m_{x_1} u_j(0) \right].$$

il suffira de choisir la suite (u_j) telle que (i) et (ii) soient vérifiées, de plus et en utilisant (4.15) et (4.14) on obtient

$$\left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\partial^m_{x_1} u_j(x) - \partial^m_{x_1} u_j(0) \right) \varphi(x)dx \right| \leq c \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\nabla \partial^m_{x_1} u_j\|_\infty < +\infty,$$

et

$$\left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \partial^m_{x_1} u_j(0) \right| = \infty,$$

ce qui donne le résultat.

Remarque 4.4.1. S'il existe une suite $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ dans $\mathscr{S}'$ qui vérifie (ii) de la Proposition 4.2.2 avec $\tau < 0$, alors $u_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. En effet, en remplaçant $Q_j f$ par u_j dans la preuve de la Proposition 1.4.5.

Remarque 4.4.2. Les constructions des réalisations des espaces homogènes $\dot{B}^s_{p,q}$ et $\dot{F}^s_{p,q}$ dans l'espace des distributions tempérées $\mathscr{S}'$, ont été données par Bourdaud dans [9], [14]. Ces constructions sont également valables pour les espaces $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}$ et $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$. Cependant, pour tout $f \in \dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$

on a

$$\sigma_{\mu,1}(f) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k f, \text{ si } s+n\tau < n/p \text{ ou } s+n\tau = n/p \text{ et } q \leq 1. \tag{4.17}$$

$$\sigma_{\mu,2}(f) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(Q_k f - \sum_{|\alpha|<\mu} (Q_k f)^{(\alpha)}(0) x^\alpha/\alpha! \right), \text{ si } s+n\tau-n/p \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}_0 \text{ ou } s+n\tau-n/p \in \mathbb{N} \text{ et } q \leq 1, \tag{4.18}$$

$$\sigma_{\mu,3} := \sum_{k>0} Q_k f + \sum_{k\leq 0} \left(Q_k f - \sum_{|\alpha|<\mu} (Q_k f)^{(\alpha)}(0) x^\alpha/\alpha! \right), \text{ si } s+n\tau-n/p \in \mathbb{N}_0 \text{ et } q > 1. \tag{4.19}$$

où les séries convergent dans $\mathscr{S}'$ et satisfont $\partial^\alpha \sigma_{\mu,i} \in \widetilde{C}_0$ $(i=1,2,3)$ pour tout $|\alpha| = \mu$.

Preuve de la Proposition 4.3.4.

Soit g une fonction de $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$, nous avons $[\sigma_{\mu,2}(g)]_\mu = [\sigma_\mu(g)]_\mu$, où $\sigma_{\mu,2}$ est la réalisation définie dans (4.18) et σ_μ est la réalisation définie dans le Théorème 4.3.1. Alors, on obtient la convergence de $\sigma_{\mu,2}(g)$ dans $\mathscr{S}'_\mu$ de la Remarque 2.3.1 et on a

$$\left\| [\sigma_{\mu,2}(g)]_\mu \right\|_{\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}}.$$

La fonction définie par

$$f := \sigma_{\mu,2}(g),$$

vérifie (i) et (ii), pour cela on pourra faire une démonstration analogue à [14, Prop. 4.8]. Alors, en tenant compte des injections vues dans la Proposition 1.3.1, on peut se limiter aux cas des espaces $B^{s,\tau}_{\infty,\infty}$.

Posons

$$w_j = Q_k f - \sum_{|\alpha|<\mu} (Q_k f)^{(\alpha)}(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

Montrons que $f \in C^{\mu-1}$. Soit le multi-indice β tel que $|\beta| < \mu$, par l'injection (1.26) et [34, Prop. 4.5] on aura le résultat.

Le Théorème 4.2.1 et le Théorème 4.3.1, nous garantira (iii) pour f puisque $\partial^\alpha \sigma_{\mu,2}(g) =$

$\partial^\alpha \sigma_\mu(g)$ si $|\alpha| = \mu$.

Remarque 4.4.3. Si $s, \tau \in \mathbb{R}$ et $p, q \in]0, +\infty]$ qui vérifient $s + n\tau - n/p \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}_0$, alors tout élément f de $\dot{\widetilde{F}}{}^{s,\tau}_{p,q}$ vérifie

$$\left| f^{(\alpha)}(x) \right| \leq c\, |x|^{s+n\tau-n/p-\mu+1} \left\| [f]_\mu \right\|_{\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall\, |\alpha| = \mu - 1).$$

La constante c est indépendante de f et x.

En effet, par l'inclusion $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{s+n\tau-n/p}_{\infty,\infty}$ et [34, prop. 5.1] on aura le résultat voulu.

Preuve de la Proposition 4.3.3

La démonstration est similaire à celle du théorème précédent.

En utilisant les assertions (i) et (ii) des Propositions 4.2.3 et 4.3.3, dans la section 4.4.2 de [14] il a été démontré que la non-existence des réalisations invariantes par dilatations des espaces $\dot{A}^s_{p,q}$ dans $\mathscr{S}'_{\mu-1}$ dans le cas $s - n/p \in \mathbb{N}$ et $q > 1$ ($p > 1$ dans le cas de l'espace de Triebel-Lizorkin) ; ici $\tau = 0$ et $\mu := s - n/p + 1$. Nous avons les mêmes caractérisations des espaces $\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$ quand $s + n\tau - n/p \in \mathbb{N}$ et $q > 1$ ($p > 1$ dans le cas de l'espace de Triebel-Lizorkin), rappelons que $\dot{A}^{s,\tau}_{p,q} = \mathscr{P}_\infty$ pour $\tau < 0$.

Donc,

(i) Si $\sigma : \dot{A}^{s,\tau}_{p,q} \longrightarrow \mathscr{S}'_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$), est une réalisation invariante par dilatation, alors on a

$$|\langle h_\lambda(\partial^\alpha \sigma(f)), g\rangle| \leq c \lambda^{|\alpha|-s-n\tau+n/p} \zeta_{N,k}(g)\, \|[\sigma(f)]_m\|_{\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}}, \tag{4.20}$$

pour tout $\lambda > 0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $f \in \dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$ et pour tout $g \in \mathscr{S}_m$, la constante c ne dépend pas de λ, α, N, k, f et g. En effet, supposons que σ soit donnée, tant qu'on a

$$\langle \sigma^{(\alpha)}(h_\alpha(f), g\rangle = \lambda^{-|\alpha|} \langle h_\lambda(\sigma^\alpha(f)), g\rangle \qquad (\forall g \in \mathscr{S}_m),$$

alors, l'égalité $\sigma^{(\alpha)}(h_\lambda f) = \lambda^{-|\alpha|} h_\lambda(\sigma^{(\alpha)}(f))$ in $\mathscr{S}'_m$ nous donne (4.20), Alors, l'inégalité

$$\|[\sigma^{(\alpha)}(h_\lambda f)]_{m+|\alpha|}\|_{\dot{B}^{s-|\alpha|,\tau}_{p,q}} \lesssim \|[\sigma(h_\lambda f)]_m\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} \lesssim \lambda^{n/p-s-n\tau} \|[\sigma(f)]_m\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}},$$

on rappelle que $\partial^\alpha \sigma : \dot{B}^{s-|\alpha|,\tau}_{p,q} \to \mathscr{S}'_{m+|\alpha|}$.

(ii) L'ensemble des $f \in \mathscr{S}'_\mu$ d'après le théorème précédent, est invariant par dilatation, il s'en suit que σ_μ également commute avec les dilatations.

On suppose que $s+n\tau-n/p\in\mathbb{N}$ et $p>1$ (alors $\mu=s+n\tau-n/p+1$). Si on pose $m:=\mu-1$ l'inégalité (4.20) devient

$$\left|\left\langle h_\lambda\left(\partial^\alpha\sigma(f)\right),g\right\rangle\right|\leq c\zeta_{N,k}(g)\|[\sigma(f)]_{\mu-1}\|_{\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}},\quad (\forall|\alpha|=\mu-1,\forall\lambda>0).\tag{4.21}$$

cependant, dans [13, pp. 486-487] on a démontré l'existence d'une fonction f_0 (voir [13, (4.8)] telle que $[f_0]_\mu\in\dot{A}^s_{p,q}$ et l'inégalité (4.21), avec $f:=f_0$, $g:=\gamma$ et $\tau=0$, ne peut avoir lieu. Ce qui est aussi vrai dans $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$ pour tout $\tau>0$ par la même fonction f_0, puisque $[f_0]_\mu\in\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$ qui peut être obtenue de la propriété de l'homogénéité de l'espace et les propriétés de f_0. Donc, dans ce cas, il n'existe pas des réalisation invariantes par dilatation de $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$ dans $\mathscr{S}'_{\mu-1}$.

Preuve de la Proposition 4.3.4

Soit g une fonction de $\dot{F}^{s,\tau}_{p,q}$, on a $[\sigma_{\mu,2}(g)]_\mu=[\sigma_\mu(g)]_\mu$ car $\sigma_{\mu,2}$ et σ_μ sont des réalisations définies dans la remarque 4.3.1 et le Théorème 4.1 de [14], respectivement. Alors on obtient la convergence de $\sigma_{\mu,2}(g)$ dans $\mathscr{S}'_\mu$ de la remarque 4.3.1 et on a $\|[\sigma_{\mu,2}(g)]_\mu\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}\lesssim\|g\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}$. La fonction

$$f:=\sigma_{\mu,2}(g)$$

vérifie (i)–(ii), qui peut être obtenue comme dans [13, prop. 4.8] et [34, thm. 4.5] ; alors par le Théorème 4.1 de [14], le point (iii) est vérifié pour f puisque $\partial^\alpha\sigma_{\mu,2}(g)=\partial^\alpha\sigma_\mu(g)$ si $|\alpha|=\mu$.

Chapitre 5

Annexe

Exemples de fonctions de $\widetilde{C}_0$

L'exemple suivant nous donne des fonctions de $\widetilde{C}_0$ et une fonction qui n'y appartient pas. Voir [2], [14] et [34].

Exemple 5.0.1.
On a plusieurs exemples de telles distributions tempérées, pour les trois premiers voir [14] quant aux deux derniers voir [2] :

- Les fonctions de L_p pour $1 \leq p < \infty$.
- Les fonctions appartenant à $C_0(\mathbb{R}^n)$.
- Les dérivées des distributions appartenant à $\widetilde{C}_0(\mathbb{R}^n)$.
- Pour $\beta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, la fonction $f(x) := x^\alpha e^{ix\cdot\beta}$ appartient à $\widetilde{C}_0$.

  En effet, pour $\gamma \in \mathscr{S}$ il existe une constante $c > 0$ indépendante de β, telle que l'on a

  $$\left|\langle g(\lambda^{-1}(\cdot)), \gamma\rangle\right| = \lambda^{-|\alpha|}\left|(\mathscr{F}^{-1}\gamma)^{(\alpha)}(\lambda^{-1}\beta)\right| \leq c\lambda^{N-|\alpha|}\,|\beta|^{-N},$$

  est vraie pour tout $\lambda > 0$, où l'entier positif $\mathbb{N}$ est suffisamment grand. Lorsque $\lambda \to 0$ le terme de droite tend vers 0.

  Généralement, Si $\mathscr{P}$ est un polynôme non-nul, les fonction $f(x) := e^{ix\cdot\beta}\mathscr{P}(x)$ appartiennent à $\widetilde{C}_0$.
- Si $f \in L_p$ avec $0 < p < 1$ alors $f \notin \widetilde{C}_0$.

  En effet, soit la fonction $g(x) := |x|^{-n}\rho(x)$, où la fonction ρ dans $\mathscr{D}$ telle que $\rho(0) = 1$ et $\rho(x) \geq 0$. Il est claire que $g \in L_p$ avec $0 < p < 1$. Car, si $A > 0$ tel que $\operatorname{supp}\rho \subset \{x : |x| \leq A\}$, alors on a

  $$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \mathrm{d}x \leq \int_{S^{n-1}} \int_0^A \left|t^{-1}\rho(tx')\right|^p \mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma_{x'}$$

où $|x'| = 1$, comme $|\rho(tx')| \leq \|\rho\|_\infty$ on obtient $\|g\|_p \leq cA^{\frac{1}{p}-1}$ où $c = c(x) > 0$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} \langle g(2^N(\cdot)), \rho \rangle &= 2^{-nN} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n} \rho(2^N x) \rho(x) \mathrm{d}x \\ &\geq 2^{-nN} \int_{r<|x|<2^{-nN}} |x|^{-n} \mathrm{d}x \qquad (\text{avec } \log r := -2^{N(n+1)}), \end{aligned}$$

ce dernier terme tend vers l'infini lorsque N tend vers l'infini.

Preuve de la Proposition 1.4.4

On pose $\lambda = 2^m$, $m \in \mathbb{Z}$. Soit $f \in \dot{B}^{s,\tau}_{p,q}$ et on pose $f_m = h_{2^{-m}} f$. Alors, on a

$$\left\|Q_j f_m\right\|_{L_p(P_{k+m},\nu)} = 2^{-nm/p} \left\|Q_{j-m} f\right\|_{L_p(P_{k,\nu})} \qquad (\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \nu \in \mathbb{Z}^n). \tag{5.1}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left(2^{n\tau(k+m)q} \sum_{j\geq k+m} 2^{sjq} \left\|Q_j f_m\right\|^q_{L_p(P_{k+m,\nu})}\right)^{1/q} &= 2^{(n\tau-n/p)m} \left(2^{n\tau kq} \sum_{j\geq k+m} 2^{sjq} \left\|Q_{j-m} f\right\|^q_{L_p(P_{k,\nu})}\right)^{1/q} \\ &= 2^{(s+n\tau-n/p)m} \left(2^{n\tau kq} \sum_{l\geq k} 2^{sjq} \|Q_l f\|^q_{L_p(P_{k,\nu})}\right)^{1/q} \\ &\leq 2^{(s+n\tau-n/p)m} \|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

En prenant le sup sur tous les $k \in \mathbb{Z}$ et tous les $\nu \in \mathbb{Z}^n$ sur le premier terme de gauche on aura

$$\|f_m\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} \leq 2^{(s+n\tau-n/p)m} \|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}.$$

On procède de la même façon que l'inégalité précédente pour l'autre sens. Cependant, par la formule $Q_j f(2^m(\cdot)) = Q_{j+m} f_m$ on aura $\left\|Q_j f\right\|_{L_p(P_{k-m,\nu})} = 2^{nm/p} \left\|Q_{j+m} f_m\right\|_{L_p(P_{k,\nu})}$ $(\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \nu \in \mathbb{Z}^n)$, et,

$$\begin{aligned} \left(2^{n\tau(k-m)q} \sum_{j\geq k-m} 2^{sjq} \left\|Q_j f\right\|^q_{L_p(P_{k-m,\nu})}\right)^{1/q} &= 2^{(-n\tau+n/p)m} \left(2^{n\tau kq} \sum_{j\geq k-m} 2^{sjq} \left\|Q_{j+m} f_m\right\|^q_{L_p(P_{k,\nu})}\right)^{1/q} \\ &= 2^{(-s-n\tau+n/p)m} \left(2^{n\tau kq} \sum_{l\geq k} 2^{sjq} \|Q_l f_m\|^q_{L_p(P_{k,\nu})}\right)^{1/q} \\ &\leq 2^{-(s+n\tau-n/p)m} \|f_m\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

En prenant le sup sur tous les $k \in \mathbb{Z}$ et tous les $\nu \in \mathbb{Z}^n$ on trouve

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} \le 2^{-(s+n\tau-n/p)m}\, \|f_m\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}\,.$$

Maintenant on pose $\lambda > 0$. Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $2^m \le \lambda < 2^{m+1}$. Soit la fonction $f \in \dot{B}^{s,\tau}_{p,q}$ et on pose $f_{m,\lambda} := f\big(2^{-m}\lambda(\cdot)\big)$. D'après ce qui précède, on a

$$\|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} = 2^{(s+n\tau-n/p)m}\|f_{m,\lambda}\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}.$$

Donc il suffit de montrer que $c_1\|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} \le \|f_{m,\lambda}\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} \le c_2\|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}$ avec c_1 et c_2 indépendantes de m, λ et f. On introduit la quasi-norme équivalente de $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}$ définie par la fonction $\gamma_1 := \gamma\big(2^m\lambda^{-1}(\cdot)\big)$ qui est portée par la couronne $1/2 \le |\xi| \le 3$ (on rappelle que $1 \le 2^{-m}\lambda < 2$). On fait un changement de variables et on aura

$$\big(2^{jn}h_{2^{-j}}\mathscr{F}^{-1}\gamma_1\big) * f_{m,\lambda} = Q_j f(2^{-m}\lambda(\cdot))\,. \tag{5.4}$$

Pour tout $\nu \in \mathbb{Z}^n$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$x \in P_{k,\nu} \;\Rightarrow\; 2^{-m}\lambda x \in P_{k,E(2^{-m}\lambda\nu)} \cup P_{k,E(2^{-m}\lambda\nu)+w_0} \cup P_{k,E(2^{-m}\lambda\nu)+2w_0}, \tag{5.5}$$

où $w_0 := (1,1,\dots,1) \in \mathbb{Z}^n$, et

$$\begin{aligned}\|Q_j f(2^{-m}\lambda(\cdot))\|_{L_p(P_{k,\nu})} &\le \max(1,\, 2^{2(1/p-1)})\Big(\|Q_j f\|_{L_p(P_{k,E(2^{-m}\lambda\nu)})} + \\ &+ \|Q_j f\|_{L_p(P_{k,E(2^{-m}\lambda\nu)+w_0})} + \|Q_j f\|_{L_p(P_{k,E(2^{-m}\lambda\nu)+2w_0})}\Big) \qquad (\forall j \in \mathbb{Z}, \forall \nu \in \mathbb{Z}^n).\end{aligned}$$

alors on aura

$$\begin{aligned}\|f_{m,\lambda}\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} &= c_1 \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k}\Big(\sum_{j\ge k} 2^{sjq}\big\|\big(2^{jn}h_{2^{-j}}\mathscr{F}^{-1}\gamma_1\big) * f_{m,\lambda}\big\|^q_{L_p(P_{k,\nu})}\Big)^{1/q} \\ &\le c_2 \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k}\Big(\sum_{j\ge k} 2^{sjq}\Big\{\sum_{l=0}^{2}\|Q_j f\|_{L_p(P_{k,E(2^{-m}\lambda\nu)+lw_0})}\Big\}^q\Big)^{1/q} \\ &\le c_3 \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{w\in\mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k}\Big(\sum_{j\ge k} 2^{sjq}\|Q_j f\|^q_{L_p(P_{k,w})}\Big)^{1/q} \;=\; c_3\|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}.\end{aligned}$$

L'autre inégalité sera obtenue comme pour la première en échangeant les rôles de $f_{m,\lambda}$ et f. Cependant, on écrit $Q_j f = \big(2^{jn}h_{2^{-j}}\mathscr{F}^{-1}\gamma_1\big) * f_{m,\lambda}(2^m\lambda^{-1}(\cdot))$, et

$$x \in P_{k,\nu} \;\Rightarrow\; 2^m\lambda^{-1}x \in P_{k,E(2^m\lambda^{-1}\nu)} \cup P_{k,E(2^m\lambda^{-1})+w_0}.$$

On continue comme dessus, et on aura $\|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} \leq c\|f_{m,\lambda}\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}$.

Preuve du Lemme 1.2.3

Pour simplifier les notations, on pose $\gamma_j := \gamma(2^{-j}\cdot)$ et $w := \min(1,p,q)$. On a $Q_\ell Q_j f \equiv 0$ si $|j-\ell| \geq 2$. Alors, la transformée de Fourier de la fonction $y \mapsto \mathscr{F}^{-1}(\gamma_j)(y)Q_\ell f(x-y)$ a son support dans la boule $|\xi| \leq (\frac{3}{2}2^j + \frac{3}{2}2^\ell) \leq \frac{9}{2}2^j$ (puisque $|j-\ell| \leq 1$). Donc, par l'inégalité de Bernstein on obtient

$$|Q_\ell Q_j f(x)| \leq c2^{jn(1/w-1)}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} \big|\mathscr{F}^{-1}(\gamma_j)(y)Q_\ell f(x-y)\big|^w \mathrm{d}y\Big]^{1/w}. \tag{5.6}$$

• On commence par le cas-B. En se servant de l'inégalité de Minkowski par rapport à $L_p(P_{k,\eta};L_w(\mathbb{R}^n))$, on trouve

$$\|Q_\ell Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})} \leq c2^{jn(1/w-1)}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F}^{-1}\gamma_j(y)|^w \big\|Q_\ell f(\cdot-y)\big\|^w_{L_p(P_{k,\eta})}\mathrm{d}y\Big]^{1/w}. \tag{5.7}$$

On pose $k_1 := \max(k,1)$, une autre fois l'inégalité de Minkowski par rapport à $\ell_q(\mathbb{Z};L_w(\mathbb{R}^n))$ nous donne

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{\ell\geq k_1}(2^{\ell s}\|Q_\ell Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})})^q\Big)^{1/q} \leq \\ &\leq c2^{jn(1/w-1)}\Big[\int_{\mathbb{R}^n}|\mathscr{F}^{-1}\gamma_j(y)|^w\Big(\sum_{\ell\geq k_1}(2^{\ell s}\big\|Q_\ell f(\cdot-y)\big\|_{L_p(P_{k,\eta})})^q\Big)^{w/q}\mathrm{d}y\Big]^{1/w}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Dans le côté droit de (5.8)

on utilise le fait que, si $x \in P_{k,\eta}$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on a $x-y \in \cup_{r=1}^{2^n} P_{k,\eta-E(2^k y)+w_r}$où $w_r \in \mathbb{Z}^n$ indépendante de y. Alors,

$$\|f(\cdot-y)\|_{L_p(P_{k,\eta})} \leq c\sum_{r=1}^{2^n}\|f\|_{L_p(P_{k,\eta-E(2^k y)+w_r})}, \tag{5.9}$$

avec $Q_\ell f$ au lieu de f, et comme

$$2^{jn(1/w-1)}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathscr{F}^{-1}\gamma_j(y)|^w\mathrm{d}y\Big)^{1/w} = \|\mathscr{F}^{-1}\gamma\|_w, \tag{5.10}$$

alors, en prenant le supremum convenablement, on obtient

$$\Big(\sum_{\ell\geq k_1}(2^{\ell s}\|Q_\ell Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})})^q\Big)^{1/q} \leq c2^{-kn\tau}\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}. \tag{5.11}$$

On s'occupe du terme $\|S_0 Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})}$; ici $k \le 0$. On pose $d := \min(1,p)$. On a $S_0 Q_j f \equiv 0$ si $j \ge 2$, et la transformée de Fourier de la fonction $y \mapsto \mathscr{F}^{-1}(\gamma_j)(y) S_0 f(x-y)$ a pour support $|\xi| \le 3$. Donc, comme dans (5.6)–(5.7) on trouve

$$\|S_0 Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})} \le c_1 \Big[\int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F}^{-1}\gamma_j(y)|^d \big\| S_0 f(\cdot - y)\big\|^d_{L_p(P_{k,\eta})} \mathrm{d}y \Big]^{1/d},$$

où $c_1 := 3^{n(1/d-1)} c$. On utilise encore (5.9) avec $S_0 f$ au lieu de f, et en prenant en considération que $\|S_0 f\|_{L_p(P_{k,\mu})} \le c 2^{-kn\tau} \|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}}$ reste vraie pour tout $\mu \in \mathbb{Z}^n$ et tout $k \le 0$, alors en se servant de l'inégalité (5.10) avec d au lieu de w, on obtient

$$\|S_0 Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})} \le c 2^{jn(1-1/d)} 2^{-kn\tau} \|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}} \quad (\forall j \le 1, \forall k \le 0). \tag{5.12}$$

Le fait que $\sum_{\ell \ge k_+} \big(2^{\ell s} \|Q_\ell Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})}\big)^q$ est borné par :

$$\|S_0 Q_j f\|^q_{L_p(P_{k,\eta})} + \sum_{\ell \ge 1} \big(2^{\ell s} \|Q_\ell Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})}\big)^q \quad \text{if} \quad k \le 0$$
$$\text{et} \quad \sum_{\ell \ge k} \big(2^{\ell s} \|Q_\ell Q_j f\|_{L_p(P_{k,\eta})}\big)^q \quad \text{if} \quad k \ge 1,$$

donc en divisant chaque terme de l'inégalité obtenue $2^{-kn\tau}$, en utilisant (5.11) et (5.12) et en prenant le supremum, on trouve le résultat.

• On traite maintenant la cas-F avec les mêmes notations. On procède comme dans (5.6) et (5.8) en appliquant deux fois l'inégalité de Minkowski, we obtient

$$\Big\| \Big(\sum_{\ell \ge k_1} (2^{\ell s} |Q_\ell Q_j f|)^q \Big)^{1/q} \Big\|_{L_p(P_{k,\eta})} \le$$
$$\le c 2^{jn(1/w-1)} \Big[\int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F}^{-1}\gamma_j(y)|^w \Big\| \Big(\sum_{\ell \ge k_1} (2^{\ell s} |Q_\ell f(\cdot - y)|)^q \Big)^{1/q} \Big\|^w_{L_p(P_{k,\eta})} \mathrm{d}y \Big]^{1/w}.$$

Alors, on utilise (5.9) avec $\big(\sum_{\ell \ge k_1} (2^{\ell s} |Q_\ell f(\cdot - y)|)^q\big)^{1/q}$ à la place de $f(\cdot - y)$ et on continue comme dans le cas-B. L'étude de $S_0 Q_j f$ sur $L_p(P_{k,\eta})$ si $k \le 0$ est exactement similaire, qui nous donne une estimation similaire à (5.12) avec $B^{s,\tau}_{p,q}$ remplacé par $F^{s,\tau}_{p,q}$. on déduit le résultat voulue.

Preuve de la Proposition 1.4.5

Preuve de i. On sait que $\|f\|_{\dot{B}^{s,0}_{p,q}} \le \|f\|_{\dot{B}^{s}_{p,q}}$ pour tout $f \in \dot{B}^s_{p,q}$. Réciproquement, On suppose que $q < \infty$ (le cas $q = \infty$ peut être traité de la même façon) et on applique deux fois le lemme de Fatou. On considère l'union de deux cubes dyadiques $P_{-k,\nu_0} \cup P_{-k,\nu_1} =: \widetilde{P}_k$ avec $\nu_0 := (0,0,\dots,0)$

et $\nu_1 := (-1,-1,\ldots,-1)$, $((\nu_0,\nu_1)\in(\mathbb{Z}^n)^2)$, c'est à dire, si $x\in\widetilde{P}_k$ alors $-2^k\le x_j<2^k$ pour $j=1,\ldots,n$. Soit $f\in\dot{B}^{s,0}_{p,q}$. Alors l'inégalité

$$\|Q_jf\|_{L_p(P_{l,\nu})}\lesssim 2^{-js}\|f\|_{\dot{B}^{s,0}_{p,q}}\qquad(\forall l\in\mathbb{Z},\forall j\ge l,\forall\nu\in\mathbb{Z}^n)$$

implique que $\left|Q_jf(\cdot)\right|^p\mathbf{1}_{\widetilde{P}_k}(\cdot)$ avec $-j\le k$ sont des fonctions mesurables et positives sur $\mathbb{R}^n$, où $\mathbf{1}_{\widetilde{P}_k}$ désigne la fonction caractéristique du pavé $\widetilde{P}_k$. Alors d'un coté, on a

$$\begin{aligned}\|Q_jf\|^q_{L_p(\mathbb{R}^n)}&=\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\liminf_{k\to\infty}\left|Q_jf(x)\right|^p\mathbf{1}_{\widetilde{P}_k}(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{q/p}\\&\le\Big(\liminf_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left|Q_jf(x)\right|^p\mathbf{1}_{\widetilde{P}_k}(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{q/p}\\&\le\liminf_{k\to\infty}\|Q_jf\|^q_{L_p(\widetilde{P}_k)}\qquad(\forall j\in\mathbb{Z}),\end{aligned}$$

(on obtient le dernier terme en utilisant : si $g_n\ge0$ sont des fonctions mesurables $\beta\ge0$ alors $\left(\liminf_{n\to\infty}g_n(x)\right)^\beta\le\liminf_{n\to\infty}g_n^\beta(x)$), et

$$\begin{aligned}\sum_{j\ge l}2^{jsq}\|Q_jf\|^q_{L_p(\mathbb{R}^n)}&\le\sum_{j\ge l}\liminf_{k\to\infty}2^{jsq}\|Q_jf\|^q_{L_p(\widetilde{P}_k)}\\&\le\liminf_{k\to\infty}\sum_{j\ge l}2^{jsq}\|Q_jf\|^q_{L_p(\widetilde{P}_k)}.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Mais dans le dernier terme de (5.13) et puisque k est large, il existe un entier positif k_0 tel que pour tout $k\ge\max(k_0,l)$ on a $\sum_{j\ge l}\ldots\le\sum_{j\ge -k}\ldots$, et en mettant $l\to-\infty$ dans le côté gauche de (5.13) on trouve

$$\|f\|^q_{\dot{B}^s_{p,q}}\le\liminf_{k\to\infty}\sum_{j\ge -k}2^{jsq}\|Q_jf\|^q_{L_p(\widetilde{P}_k)}.\tag{5.14}$$

D'un autre côté, tant que $P_{-k,\nu_0}\cap P_{-k,\nu_1}=\emptyset$, alors ça donne

$$\sum_{j\ge -k}2^{jsq}\|Q_jf\|^q_{L_p(\widetilde{P}_k)}\lesssim\sum_{j\ge -k}2^{jsq}\|Q_jf\|^q_{L_p(P_{-k,\nu_0})}+\sum_{j\ge -k}2^{jsq}\|Q_jf\|^q_{L_p(P_{-k,\nu_1})}.$$

Maintenant, en prenant le Sup sur tout $\nu\in\mathbb{Z}^n$ et sur tout $k\in\mathbb{Z}$ dans le côté droit de la dernière inégalité et en introduisant (5.14), on obtiendra l'estimation voulue.

Preuve de ii. On suppose que $\tau<0$ et on montre $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}\subset\mathscr{P}_\infty$. On va se restreindre à $q<\infty$ puisque le cas $q=\infty$ se fait de la même façon. On considère $f\in\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}$. Pour tout $\nu\in\mathbb{Z}^n$ et tout $k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ nous avons $P_{0,\nu}\subset P_{k,E(2^k\nu)}\cup P_{k,E(2^k\nu)+w_0}$, où $w_0=(1,1,\ldots,1)\in\mathbb{Z}^n$. Donc en premier lieu on aura

$$\|Q_j f\|_{L_p(P_{0,\nu})} \leq c\big(\|Q_j f\|_{L_p(P_{k,E(2^k\nu)})} + \|Q_j f\|_{L_p(P_{k,E(2^k\nu)+w_0})}\big) \quad (\forall j \in \mathbb{Z}, k \leq 0), \tag{5.15}$$

où $c = \max(1, 2^{1/p-1})$, Puis, par hypothèse sur f, on obtient

$$2^{n\tau k}\Big(\sum_{j\geq k} 2^{sjq}\|Q_j f\|^q_{L_p(P_{k,E(2^k\nu)})}\Big)^{1/q} \leq \|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} \qquad (\forall k \in \mathbb{Z}),$$

La même inégalité résulte $P_{k,E(2^k\nu)+w_0}$ au lieu de $P_{k,E(2^k\nu)}$. Donc en utilisant (5.15), on se ramène à

$$\|Q_j f\|_{L_p(P_{0,\nu})} \lesssim 2^{-sjq}2^{-n\tau k}\|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}} \qquad (\forall k \leq 0, \forall j \geq k, \forall \nu \in \mathbb{Z}^n).$$

En prenant $k \to -\infty$ on conclu que $Q_j f = 0$ et pour un $P_{0,\nu}$ et tout $j \in \mathbb{Z}$, et tant que ν est quelconque on trouve $Q_j f = 0$ sur $\mathbb{R}^n$, ce qui implique que $f \in \mathscr{P}_\infty$.

Preuve de iii. On introduit une fonction $\psi \in \mathscr{S}_\infty$ telle que $\widehat{\psi}(\xi) := \xi_1\gamma(\xi)$, et on mets $\psi_j := 2^{jn}h_{2^{-j}}\psi$, $(j \in \mathbb{Z})$. Par la remarque 1.2.1, on peut remplacer dans la Définition 1.2.2 l'opérateur Q_j par ψ_j. Maintenant, tant que $Q_j(\partial_1 f) = 2^j\psi_j * f$, on aura le résultat voulu.

Preuve de iv. On a

$$\begin{aligned}|Q_j f(x)| &\lesssim \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{jn}\int_{P_{j,\nu}} \big|\mathscr{F}^{-1}\widetilde{\gamma}\big(2^j(x-y)\big)\,Q_j f(y)\big|\,\mathrm{d}y \\ &\lesssim \Big(2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}\big|\mathscr{F}^{-1}\widetilde{\gamma}(2^j z)\big|\,\mathrm{d}z\Big)\sup_{\omega\in\mathbb{Z}^n}\|Q_j f\|_{L_\infty(P_{j,\omega})} \lesssim 2^{(n/p-s-n\tau)j}\|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}}\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $j \in \mathbb{Z}$. Le résultat s'en suit.

Preuve de v. Pour ces propriétés, on peut voir la preuve dans [51].

Conclusion

Dans cette thèse nous avons traité trois axe principaux.
Le premier axe est des inégalités de type de Nikol'skij dans les espaces de type de Besov et de type de Triebel-Lizorkin homogènes, ces théorèmes ont été une généralisation dans les cas des espaces de Besov, de Triebel-Lizorkin et de Sobolev classiques.
Le deuxième axe était d'étudier de nouvel espace qui est l'intersection entre l'espace de type de Besov ou de type de Triebel-Lizorkin avec l'espace L_∞ appelés algèbre de fonctions, puis nous avons donné un résultat de l'opérateur de composition dans ces algèbres.
Le troisième axe est de réaliser les espaces homogènes de type de Besov et de type de Triebel-Lizorkin avec quelques résultats secondaires.
Perspectives :

- Étendre et généraliser les inégalités de type de Nikol'skij dans d'autres espaces fonctionnels.
- Caractériser les algèbres de type de Besov et de type de Triebel-Lizorkin par d'autres méthodes, par exemple par les différences.
- Étudier la composition dans ces espaces avec des conditions différentes, ou trouver un lien entre les espaces BV_p est les espaces $\dot{A}^{s,\tau}_{p,q}$.
- Étudier et appliquer ces résultats dans par exemple les EDPs.

Bibliographie

[1] D.R ADAMS ET L.I. HEDBERG, *Function spaces and potential theory*. Springer-Verlag, Berlin heidelberg (1996). ▷ 3

[2] M. BENALIA, M. MOUSSAI, *Inequalities of Fagliardo-Nirenberg type in realzied homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces*, Math. Reports 22(72), 1(2020), 19-39. ▷ 51, 63

[3] M. BENALIA, M. MOUSSAI, *Realization of homogeneous Triebel-Lizorkin spaces with $p = \infty$ and charcterizations via differences* , Ufimsk. Mat. Zh., 2019, Volume 11, Issue 4, 114–129. ▷ 51

[4] F. BENSAID, M. MOUSSAI, *Realizations of the homogeneous Besov-type spaces*, Methods and applications of analysis, Vol. 26, No4, pp. 349-370, December 2019. ▷ VI, 18, 32, 53, 54

[5] F. BENSAID, M. MOUSSAI, *Function algebras of Besov and Triebel-Lizorkin-type*, Czech Math J 73, 1281–1300 (2023) ▷ VI, 39, 41

[6] J. BERGH, ET J. LÖFSTRÖM, *Interpolation spaces*. Springer, Berlin (1976). ▷ 3

[7] S. BISSAR, M. MOUSSAI, *Pointwise multiplication in the realized homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces*, Probl. Anal. Issues Anal. **7(25)** (2018), no. 1, 3–22. ▷ 51

[8] G. BOURDAUD, *Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien, Pub.Math*. Univ.Paris VII,23(1987). ▷ 4, 51, 58

[9] G. BOURDAUD, *R*éalisations des espaces de Besov homogènes, Ark. Mat. **26** (1988), no. 1, 41–54. ▷ VII, 5, 51, 52, 59

[10] G. BOURDAUD , *Le calcul fonctionnel dans l'espace de Besov critique*, Proceedings of the American Mathematical society, Decembre 1992, Vol. 116(4) : 983-986. ▷ VII, 37

[11] G. BOURDAUD, *Fonctions qui opèrent sur les espaces des Besov et de Triebel*, Ann. Inst. Univ. Henri Poincaré, Vol. 10, n 04, 1993, P. 413-422. ▷ VII

[12] G. BOURDAUD, *Recent progresses on superposition in Besov-Triebel-Lizorkin spaces*, Proceedings of the conference FSDONA-2011. ▷ VII

[13] G. BOURDAUD, *Realizations of homogeneous Sobolev spaces,* Complex Var. Elliptic Equ. **56** (2011), no. 10-11, 857–874. ▷ VII, 51, 55, 62

[14] G. BOURDAUD, *Realizations of homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces*, Math. Nachr. **286** (2013), no. 5-6, 476–491. ▷ VII, 5, 51, 55, 59, 60, 61, 62, 63

[15] G. BOURDAUD, *Ce qu'il faut savoir sur les espaces de Besov*. Cours Univ.Paris VII,(2018). ▷ 4, 14, 51, 52, 58

[16] G. BOURDAUD ET D. KATEB, *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov*, Proceedings of the American Mathematical society, Aout 1991, Vol. 112(4) : 1067-1076. ▷ VII, 37

[17] G. BOURDAUD, M. MOUSSAI ET W. SICKEL, *An optimal symbolic calculus on Besov algebras*, Ann. I. H. Poincaré – AN 23 (2006) 949–956. ▷ 37

[18] G. BOURDAUD, M. MOUSSAI ET W. SICKEL, *Towards sharp superposition theorems in Besov and Triebel-Lizorkin spaces*, Nonlinear analysis, 68(2008), 2889-2912. ▷ VII, 37, 41

[19] G. BOURDAUD, M. MOUSSAI ET W. SICKEL, *Composition operators on Triebel-Lizorkin spaces*, Journal of functional analysis, 259(2010), 1098-1128. ▷ VI, VII, 14, 19, 37, 42

[20] G. BOURDAUD, M. MOUSSAI ET W. SICKEL, *Composition operators acting on Besov spaces on the real line*, Ann. Math. Pura. Appl, 193(2014), 1519-1554. ▷ VII, 37, 42

[21] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Éditions Masson, Paris, 1983. ▷ 2

[22] A. EL BARAKA, *An embedding theorem for Campanato spaces*. Electron. J. Differential equations 66(2002), 1-17. ▷ VI

[23] A. EL BARAKA, *Function spaces of BMO and Campanato type*. Proceedings of the 2002 Fez conference on partial differential equations, 109-115 (electronic), Electron. J. Differ. Equ. Conf. 9, Southwest Texas State Univ. San Marcos, TX, 2002. ▷ VI

[24] A. EL BARAKA, *Littlewood-Paley characterization for Campanato spaces*. J. Funct. Spaces appl 4(2006), 193-220. ▷ VI

[25] D. DRIHEM, *Characterizations of Besov-type and Triebel-Lizorkin-Type spaces by differences*. Hindawi Publishing Corporation. Journal of function spaces and applications. Vol 2012, Article ID 328908, 24 pages. ▷ VI

[26] D. DRIHEM, *Atomic decomposition of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces*. Sci. China Math. 56, 1073–1086 (2013). ▷ VI

[27] M. FRAZIER ET B. JAWERTH, *A discrete transform and decomposition of distribution spaces*. J. Funct. Anal., 93(1) :34-170, 1990. ▷ 29

[28] S. IGARI, *Sur les fonctions qui opèrent sur $\hat{A}^2$*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 15 (1965), 525-536. ▷ VII, 37

[29] M. MARCUS ET V. MIZEL, *Complete characterization of functions which act via superposition on Sobolev spaces*. TRans. Amer. Math. Soc. 251(1979), 187-218. ▷ 37

[30] J. MARSCHALL, *Nonregular pseudo-differential operators*. Z. Anal. Anwend. 15(1996), 109-148. ▷ 14

[31] M. MOUSSAI, *The composition in Triebel-Lizorkin spaces via para-differential operators*. Math. Reports 13(63), 2(2011), 151-170. ▷ VII

[32] M. MOUSSAI, *The composition in multidimensional Triebel-Lizorkin spaces*. Math. Nachr. 284, No. 2-3, 317-331 (2011). ▷ VII

[33] M. MOUSSAI, *Composition operators on Besov algebras*, Rev. Mat. Iberoam. 28 (2012), no. 1, 239–272. ▷ VI, 14, 19, 42

[34] M. MOUSSAI, *Realizations of homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces and an application to pointwise multipliers*, Anal. Appl.(Singap.) 13(2015), no. 2, 149–183. ▷ VI, VII, 5, 7, 14, 15, 51, 60, 61, 62, 63

[35] M. MOUSSAI, *On the composition of functions in multidimentional Besov spaces*, Math. Ineq. and applications 20 (2) (2017), 501–514. ▷ 37

[36] M. MOUSSAI, *Characterizations of realized homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces via differences*. Appl. Math. J. Chin. Univ. 33, 188–208 (2018). ▷ 51

[37] M. MOUSSAI, *Some Hardy-type estimates in realized homogeneous Besov and Triebel–Lizorkin spaces*, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques (2020), 29. 39-55. ▷ 51

[38] M. MOUSSAI ET M. SAADI, *Some calculus of the composition of functions in Besov-type spaces*, Math. Vesnik, 70 2(2018), 120-133. ▷ 37

[39] J. PEETRE, *New thaughts on Besov spaces,* Duke Univ. Math. Series I, Durham, N.C (1976). ▷ 43, 44

[40] T. RUNST ET W. SICKEL, *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators and nonlinear partial differential equations*, De Gruyter, Berlin,(1996). ▷ 14, 41

[41] G. SAVARÉ, *On regularity of the positive part of functions*, Nolinear Anal. 27 (1996), 1055-1074. ▷ VII

[42] H. TRIEBEL, *Interpolation theory, Function spaces, Differentiel operators,* North-Holland, Amsterdam (1978). ▷ VI

[43] H. TRIEBEL, *Theory of function spaces,* Birkhäuser (1983). ▷ VI, 2, 3, 9, 10, 11, 14

[44] H. TRIEBEL, *Theory of function spaces*, Birkhäuser (1992). ▷ VI

[45] D. YANG ET W. YUAN, *A new class of function spaces connectiong Triebel-Lizorkin spaces and Q spaces*. J. Funct. Anal. 255(2008), 2760-2809. ▷ VI, 7

[46] D. YANG ET W. YUAN, *New Besov-type spaces and Triebel-Lizorkin-type spaces including Q spaces*. Math. Z. 265(2010), 451-480. ▷ VI, 9

[47] M. YAMAZAKI, *A quasi-homogeneous version of paradifferential operators, I : Boundedness on spaces of Besov type*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 33, 131–174 (1986), II : A Symbolic calculus, ibidem 33, 311–345 (1986). ▷ 14

[48] W. H. YOUNG, *On the multiplication of successions of Fourier constants*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, vol. 87 (1912), 331-339. ▷ 3

[49] W. YUAN, W. SICKEL ET D. YANG, *Morrey and Campanato meet Besov, Lizorkin and Triebel*. Lecture notes in mathematics 2005, Springer-Verlag, Berlin, 2010, xi+281 pp. ▷ VI, 3, 7, 9, 10, 11, 14, 29, 41, 43

[50] W. YUAN, D. D. HAROSKE, L. SKRZYPCZAK AND D. YANG, *Embedding properties of Besov-type spaces*. Applicable Analysis, type spaces, Applicable Analysis, Vol. 94(2) (2015), 318-340. ▷ 11

[51] W. YUAN ET D. YANG , *Relations among Besov-type spaces, Triebel-Lizorkin-type spaces and generalized Carleson measure spaces*. Applicable Analysis, Vol. 92, No. 3 (2013), 549–561. ▷ VI, 11, 69

[52] S. WU, D. YANG ET W. YUAN, *Equivalent Quasi-Norms of Besov–Triebel–Lizorkin-Type Spaces via Derivatives*. Results in Mathematics, 72(1-2) (2017), 813–841. ▷ 11

[53] C. ZHOU, W. SICKEL, D. YANG ET W. YUAN, *Characterizations of Besov-Type and Triebel-Lizorkin-Type Spaces via Averages on Balls*. Canad. Math. Bull. Vol. 60 (3) (2017), 655 - 672. ▷ 17

ملخص

في هذه الأطروحة، سنقوم بدراسة بعض الخصائص لفضاءات من نوع بيزوف ونوع تريبيل-ليزوركين.
أولاً، سنقدم نتائج تُعتبر تعميماً لمتباينات نيكولسكي في فضاءات من نوع بيزوف وفضاءات من نوع تريبيل-ليزوركين. ستأتي هذه النتائج في نسختين، إحداهما حيث تكون الدعامات عبارة عن حلقات والأخرى حيث تكون الدعامات عبارة عن كرات.
ثانياً، نقوم بتعريف جبر الدوال من نوع بيزوف ونوع تريبيل-ليزوركين ثم ندرس التركيب ضمن هذه الفضاءات.
أخيراً، سنقدم تحقيقات لفضاءات من نوع بيزوف ومن نوع تريبيل-ليزوركين متجانسة، وهذا يعني اختيار ممثل من كل صنف تكافؤ من خلال تطبيق خطي مستمر يحافظ على خصائص الانسحاب و\أو التحاكي.
الكلمات المفتاحية : تفكيك ليتلوود- بايلي، فضاء بيزوف، فضاء تريبل-ليزوركين، مؤثر التركيب، التحقيقات.

Résumé

Dans cette thèse, nous allons étudier quelques propriétés des espaces de type de Besov et du type de Triebel-Lizorkin.
En premier lieu, On va donner des résultats qui présentent des généralisations des inégalités de Nikol'skij dans les espaces de type de Besov et de type de Triebel-Lizorkin, ces résultats vont être en deux versions, une où les supports sont des couronnes et l'autre où les supports sont des boules.
Deuxièmement, on définit les algèbres de fonctions de type de Besov et de type de Triebel-Lizorkin puis on étudie la composition dans ces espaces.
Finalement, on va donner les réalisations des espaces de type de Besov et de Type de Triebel-Lizorkin homogènes, c'est-à-dire de choisir un représentant de chaque classe d'équivalence par une application linéaire continue de sorte sue l'on préserve les propriétés d'invariance par translation et/ou dilatation.
Mots clés : Décomposition de Littlewood-Paley, Espace de Besov, Espace de Triebel-Lizorkin, Opérateur de composition, Réalisations.

Abstract

In this thesis, we will study some properties of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces.
Firstly, we will provide results that generalize Nikol'skij's inequalities in Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces. These results will come in two versions: one where the supports are annuli and the other where the supports are balls.
Secondly, we define the function algebras of Besov-type and Triebel-Lizorkin-type and then study composition within these spaces.
Finally, we will present realizations of homogeneous Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces. This means selecting a representative from each equivalence class through a continuous linear mapping that preserves the properties of translation and/or dilation invariance.
Key words : Littlewood-Paley decomposition, Besov space, Triebel-Lizorkin space, Composition operator, Realizations.