



Mohamed Boudiaf University - M'sila  
Faculty of Mathematics and Computer Science



Department of Mathematics

## *Master Dissertation*

**Domain:** Mathematics and Computer Sciences

**Sector:** Mathematics

**Specialty:** Mathematical and numerical analysis

By  
HERAIZ DOUNYA

**Topic**

# **On The Paranormal Operators on Banach Spaces**

Directed by

**Dr. Toufik Heraiz**

**Composition of the jury :**

|                   |     |                               |            |
|-------------------|-----|-------------------------------|------------|
| Abdelhamid Tallab | MCA | Mohamed Boudiaf Univ. -M'sila | President  |
| Toufik Heraiz     | MCB | Mohamed Boudiaf Univ. -M'sila | Supervisor |
| Khelifa Chadi     | MAA | Mohamed Boudiaf Univ. -M'sila | Examiner   |
|                   |     |                               |            |

**College year: 2021/2022**



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques



## MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Spécialité:** Analyse mathématique et numérique

**Par**

HERAIZ DOUNYA

**Sujet**

**Sur les Opérateurs Paranormaux Dans  
Les Espaces De Banach**

**Devant le jury :**

|                   |     |                               |            |
|-------------------|-----|-------------------------------|------------|
| Abdelhamid Tallab | MCA | Univ. Mohamed Boudiaf. M'sila | Président  |
| Toufik Heraiz     | MCB | Univ. Mohamed Boudiaf. M'sila | Rapporteur |
| Khelifa Chadi     | MAA | Univ. Mohamed Boudiaf. M'sila | Examineur  |
|                   |     |                               |            |

**Promotion: 2021/2022**

# *Remerciements*

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à :  
Dieu tout puissant, pour la volonté, et la santé et la patience qu'il  
nous donnait durant toutes ces années d'études afin que nous  
puissions en arriver là.

Comme je tiens à remercier mon

Encadreur: **Mr.Toufik HERAIZ.**

Je remercie également mes professeurs **Mr.K. CHADI** et **Mr.A. TALLAB**

Pour avoir accepté d'examiner mon mémoire

Merci à tous les enseignants et les étudiants

De département **mathématique**

Pour leurs aides judicieuses, les moyens qu'ils ont

Met à notre disposition pour réaliser ce travail.

Enfin à toute personne qui a collaborée à la réalisation

Du présent mémoire.

Merci

# Table des matières

|                                                            |          |
|------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Introduction</b>                                        | <b>1</b> |
| <b>1 Préliminaires</b>                                     | <b>2</b> |
| 1.1 Espaces normés . . . . .                               | 2        |
| 1.2 Espaces de Banach . . . . .                            | 4        |
| 1.3 Espaces de Hilbert . . . . .                           | 5        |
| 1.3.1 Espaces Euclidiens . . . . .                         | 5        |
| 1.3.2 Produit scalaire . . . . .                           | 5        |
| 1.3.3 La norme euclidienne . . . . .                       | 6        |
| 1.3.4 Espaces de Hilbert . . . . .                         | 6        |
| <b>2 Opérateurs linéaires</b>                              | <b>8</b> |
| 2.1 Généralités sur les opérateurs linéaires . . . . .     | 8        |
| 2.2 Opérateurs continus . . . . .                          | 10       |
| 2.2.1 L'espace des opérateurs linéaires continus . . . . . | 10       |
| 2.2.2 Théorème de Banach-Steinhaus . . . . .               | 11       |
| 2.3 Somme et produit d'opérateurs . . . . .                | 11       |
| 2.4 Résolvante et spectre d'un opérateur . . . . .         | 12       |
| 2.4.1 Spectre d'un opérateur . . . . .                     | 13       |
| 2.5 Les opérateurs compacts Auto-adjoint . . . . .         | 16       |
| 2.5.1 Opérateur compact . . . . .                          | 16       |
| 2.5.2 Opérateurs adjoints . . . . .                        | 17       |
| 2.5.3 Opérateur auto-adjoint . . . . .                     | 19       |

|          |                                                               |           |
|----------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.5.4    | Opérateur compact auto-adjoint . . . . .                      | 20        |
| 2.6      | Spectre d'un opérateur compact auto-adjoints . . . . .        | 21        |
| 2.7      | Opérateur de Fredholm . . . . .                               | 22        |
| <b>3</b> | <b>Les Opérateurs Paranormaux</b>                             | <b>27</b> |
| 3.1      | Opérateur normal . . . . .                                    | 27        |
| 3.2      | Opérateur hyponormal . . . . .                                | 28        |
| 3.3      | Opérateur normaloïde . . . . .                                | 29        |
| 3.4      | Opérateur paranormal . . . . .                                | 31        |
| 3.5      | La classe des opérateurs Paranormaux . . . . .                | 32        |
| 3.6      | Le théorème de Weyl pour les Opérateurs paranormaux . . . . . | 38        |
|          | <b>Bibliographie</b>                                          | <b>45</b> |

# Introduction.

A la différence des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie, pour lesquels il existe une description exhaustive, l'étude des opérateurs linéaires arbitraires dans un espace de dimension infinie est un problème assez compliqué, dont l'étendue est pratiquement impossible à imaginer. Cependant certaines classes de ces opérateurs peuvent être décrites de manière assez complète. L'une des plus importantes de ces classes est constituée par les opérateurs dits compacts auto-adjoints. La théorie spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints a conduit à plusieurs tentatives de généralisation en affaiblissant l'exigence de l'égalité avec l'adjoint. L'un de ces classes d'opérateurs qui incluent des opérateurs auto-adjoints est la classe des opérateurs paranormaux, qui est le sujet de notre mémoire. La notion d'opérateur paranormal remonte aux années 1960 et est due à V. Istratescu en [6] sous le nom "Opérateurs de classe N" et en 1967 T. Furuta a introduit le terme "Opérateur paranormal" en [3], pour objectif de traiter le sujet nous divisons ce mémoire en trois chapitres. Le premier chapitre est un préliminaire contient des notions générales et les éléments d'analyse fonctionnelle (l'espace normé, l'espace de Banach, l'espace de Hilbert ). Le deuxième chapitre est consacré sur les opérateurs linéaires, le spectre d'un opérateur linéaire et la théorie spectrale d'un opérateur compact auto-adjoint. Et dans le troisième chapitre on a étudié les opérateurs paranormaux où nous citons les propriétés générales de l'opérateur paranormal et quelques propriétés spectrales et plus précisément le théorème de Weyl sur cette classe d'opérateurs.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Espaces normés

#### Définition 1.1.1 (*Semi-norme*)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{k}$  ( $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou bien  $\mathbb{C}$ ).

une **semi-norme** sur  $E$  est une fonction  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ , (définie sur  $E$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ ) vérifie les propriétés suivantes:

1-  $\forall \mu \in E, \forall \nu \in E : \| \mu + \nu \| \leq \| \mu \| + \| \nu \|$  (inégalité triangulaire).

2-  $\forall \mu \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k} : \| \lambda \mu \| = |\lambda| \| \mu \|$  (homogène)

#### Proposition 1.1.1 (*Propriétés*)

1)  $\| 0 \| = 0$ , en effet soit  $\lambda \in \mathbb{k}$  tel que  $|\lambda| \neq 1$ , alors

$$\| 0 \| = \| \lambda - \lambda \| = |\lambda| \| 0 \| \Rightarrow (1 - |\lambda|) \| 0 \| = 0 \Rightarrow \| 0 \| = 0.$$

2)  $\forall x \in E, \| x \| \geq 0$

3) pour tout  $\mu \in E : \| -\mu \| = |-1| \| \mu \| = \| \mu \|$

#### Définition 1.1.2 (*Normes*)

On appelle norme toute semi-norme  $\| \cdot \|$ , définie sur  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , vérifiant la condition

$$\| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$$

pour  $x \in E$ , le nombre réel positive  $\|x\|$  est appelé norme de  $x$

**Définition 1.1.3** (*Espace normé*)

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$ ,  $E$  est dit espace vectoriel normé que l'on note  $(e.v.n)$ , s'il est muni d'une norme.

**Proposition 1.1.2** (*Propriétés importantes d'une norme*)

1)  $\forall \mu \in E, \forall \nu \in E :$

$$\|\mu - \nu\| \leq \|\mu\| + \|\nu\|$$

2)  $\forall \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in E$  et  $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\sum_i \|\lambda_i \mu_i\| \leq \sum_i |\lambda_i| \cdot \|\mu_i\|$$

**Définition 1.1.4** (*Normes équivalentes*)

Soit  $E$  un espace vectoriel, muni de deux normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ , ces deux normes sont dites équivalentes, s'il existe deux constantes positives,  $\alpha, \beta$  telle que  $\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$ ,  $\forall x \in E$ , la suite convergente dans un espace normé, converge vers la même valeur en les deux normes équivalentes

**Proposition**

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

1)  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\}$ .

2)  $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ . pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ .

Les normes sont équivalentes car,

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (n \max |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq n^{\frac{1}{p}} \max |x_i| \\ &\leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|x\|_p &= \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p} \geq \max |x_i| \\ \|x\|_p &\geq \max |x_i| \\ \|x\|_p &\geq \|x\|_\infty\end{aligned}$$

donc,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

**Exemple 1.1.1** (en dimension infinie)

On considère par exemple l'espace  $C([0, 1])$  des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs complexes, muni de la structure d'espace vectoriel complexe habituelle. Les normes

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx, \text{ et } \|f\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

ne sont pas équivalentes sur  $C([0, 1])$ , mais on a l'inégalité  $\|f\| \leq \|f\|_\infty$  pour tout  $f \in C([0, 1])$ , pour montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes, on considère la suite de fonctions  $\{f_n\}$  avec  $f(x) = x^n$ . Alors

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &= \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty, \\ \|f\|_\infty &= \sup_{x \in [0, 1]} x^n = 1 \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt = \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $\{f_n\}$  converge vers 0 par rapport norme  $\|\cdot\|_1$  mais elle ne converge pas en norme  $\|\cdot\|_\infty$  vers la même valeur, alors, ces deux normes ne sont pas équivalentes.

## 1.2 Espaces de Banach

**Définition 1.2.1** On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé et complet, i.e., toute suite de Cauchy est convergente.

**Remarque 1.2.1** 1) Tout espace vectoriel normé de dimension finie est (en particulier  $\mathbb{R}^n$ ) est un espace de Banach.

2)  $C([0, 1], \mathbb{R})$  est un espace de Banach pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Preuve.** Soit  $f_n(x)$  est une suite de Cauchy dans  $C([0, 1], \mathbb{R})$ .

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$x \rightarrow f_n(x)$  dans  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$   
 $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0, m, n \geq n_0, \max |f_m - f_n| < \varepsilon$   
 $f_n(x)$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  (complet)  $\Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x), \forall \varepsilon > 0, \exists N_1, n \geq N_1$ , et  $|f_n - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . On vérifie que  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ .  
 soit  $x_0 \in [0, 1]$ .  $\lim f_n(x_0) = f(x_0)$   
 $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x) + f_n(x_0) - f(x_0)|$   
 $\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$ .  
 pour tout  $\varepsilon > 0$ .  
 $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  car:  $\lim f_n(x) = f(x)$ .  
 $\exists n_1 \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .  
 En prenant  $n = \max(n_0, n_1)$  et  $\sigma > 0$  ou bien  $|x - x_0| \leq \sigma \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ .  
 Donc,  $f$  est continue en  $x_0$ .  
 Alors,  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  un Banach. ■

## 1.3 Espaces de Hilbert

### 1.3.1 Espaces Euclidiens

Les espaces Euclidiens sont en général les espaces vectoriels munis d'un produit scalaire. Ce concept permet d'étendre à des espaces fonctionnels de dimension infinie les raisonnements de la géométrie euclidienne classique.

### 1.3.2 Produit scalaire

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel  $E$  (réel ou complexe) une fonction  $\langle x, y \rangle$  définie sur  $E \times E$  dans ( $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) possédant les propriétés suivantes:

- 1)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- 2)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- 3)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- 4)  $\langle x, x \rangle \geq 0$
- 5)  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

où les éléments  $x, y$  et  $z$  appartiennent à  $E$  et  $\lambda$  appartiennent à  $\mathbb{K}$ . La définition du produit scalaire nous donne les relations suivantes:

$$1) \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

$$3) \langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle.$$

### 1.3.3 La norme euclidienne

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien naturellement, on peut lui introduire une norme définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1) Le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$  est définie par

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \text{ pour } x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2) Le produit scalaire usuel de  $\mathbb{C}^n$  est définie par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

### 1.3.4 Espaces de Hilbert

**Définition 1.3.1** On appelle *espace de Hilbert*, un espace euclidien complet.

**Théorème 1.3.1** (*inégalité de Cauchy-Schwartz*)

Quel que soient les vecteurs  $x$  et  $y$  appartenants à un espace euclidien  $E$ , on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

**Preuve.** Pour démontrer cette inégalité, on considère l'expression  $\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle$  qui est toujours positive pour tout vecteurs non nuls  $x, y \in E$  et tout scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$ , en effet

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle,$$

posons  $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ , on aura

$$\langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \geq 0,$$

d'où l'inégalité

$$\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \geq 0,$$

Cependant, l'inégalité triangulaire découle directement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en effet

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

On remarque que l'inégalité de Cauchy-Schwarz se réduit à une égalité si et seulement si, les deux vecteurs sont linéairement dépendantes, c'est-à-dire  $y = \lambda x$  où  $\lambda$  est un scalaire.

# Chapitre 2

## Opérateurs linéaires

### 2.1 Généralités sur les opérateurs linéaires

**Définition 2.1.1** Soit  $(E, N_1), (F, N)$  deux espaces vectoriels normés sur le corps  $\mathbb{K}$  (en pratique  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et soit  $U$  une application de  $E$  dans  $F$  est dite linéaire si pour tout  $x, y \in E$  et tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  :

$$U(\lambda x + \mu y) = \lambda U(x) + \mu U(y)$$

On note  $L(E; F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ . Si  $E = F$  on note simplement  $L(E)$ .

On rappelle que l'opérateur identité  $I \in L(E)$

1)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 5x$$

On a

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= 5(\lambda x + \mu y) \\ &= 5\lambda x + 5\mu y \\ &= \lambda(5x) + \mu(5y) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

2) On considère  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $g(x) = (x, 3x) = x(1, 3)$ , il est clair que  $g \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ .

**Définition 2.1.2** (*Domaine, image, Noyau, graphe et l'inverse d'un opérateur linéaire*)

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach, on appelle opérateur linéaire  $A$  de  $X$  dans  $Y$ , une application linéaire définie sur un sous espace  $D(A)$  de  $X$  et à valeurs dans  $Y$ .

1) Le sous espace  $D(A)$  est appelé **domaine** de  $A$ . Si  $D(A) = X$ ,  $A$  est définie par tout. Si le sous espace  $D(A)$  est dense dans  $X$ ,  $A$  est dit densément défini.

2) Soit  $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$  un opérateur linéaire. On appelle **image** de  $A$  le sous espace  $\text{Im } A$  de  $Y$  défini par

$\text{Im } A \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y, \text{ il existe } x \in D(A) \text{ tel que } y = Ax\}$ . Et aussi noté parfois  $R(A)$ .

Soit  $E$  un sous espace de  $X$ , on notera  $A(E)$  l'image dans  $Y$  de  $E \cap D(A)$  par  $A$ .

En particulier, on a

$$R(A) = A(D(A)).$$

3) On appelle **noyau** de  $A$  le sous espace  $N(A)$  de  $X$ , tel que,  $N(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in D(A), Ax = 0\}$ . Et aussi noté parfois  $\ker A$ .

4) On appelle **graphe** de  $A$  le sous espace de  $X \times Y$ , noté par  $G(A)$ , défini par  $G(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in X \times Y, x \in D(A), y = Ax\}$ .

Soit  $A$  un opérateur linéaire de  $X$  dans  $Y$ , de noyau  $N(A) = 0$ , c'est à dire injectif, on peut définir son **inverse**  $A^{-1}$  comme l'opérateur de  $Y$  dans  $X$ , de domaine  $R(A)$ , tel que

$$x = A^{-1}y \Leftrightarrow y = Ax.$$

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $T \in \mathcal{L}(H, H)$ . Si  $\dim H < +\infty$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $T$  est inversible.
- 2)  $T$  est injectif.
- 3)  $T$  est surjectif.
- 4)  $T$  admet un inverse à droite (i.e., il existe  $U \in \mathcal{L}(H, H)$  tel que  $T \circ U = I_H$ ).
- 5)  $T$  admet un inverse à gauche (i.e., il existe  $V \in \mathcal{L}(H, H)$  tel que  $V \circ T = I_H$ ).

## 2.2 Opérateurs continus

Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces normés, un opérateur  $U$  défini sur un sous ensemble  $A \subset E$  dans  $F$  est dit continu au point  $x_0$  de  $A$ , si pour toute suite  $x_n$  de  $A$  converge vers  $x_0$ , on a  $U(x_n)$  converge vers  $U(x_0)$ .

L'opérateur  $U$  est dit continu sur  $A$ , s'il est continu en chaque point de  $A$ .

**Théorème 2.2.1** *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur linéaire  $U$  défini sur  $D(A) \subset E$  dans  $F$ , continue en  $x_0$  de  $D(A)$ , alors  $U$  est continu partout sur  $D(A)$ , c'est à dire en chaque point de  $D(A)$ .*

**Notation 2.2.1** *On note par  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des opérateurs linéaires continus de  $E$  dans  $F$ , et par  $\mathcal{L}(E)$  si  $E = F$ .*

**Définition 2.2.1** *(Les opérateurs bornés)*

Un opérateur linéaire  $U$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit borné s'il existe une constante positive  $C$ , telle que

$$\|U(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \forall x \in E$$

Pour  $U \in \mathcal{L}(E, F)$ , la norme de l'opérateur  $U$  noté par  $\|U\|_{\mathcal{L}(E, F)}$  est la plus petite constante  $C$  telle que

$$\forall x \in E : \|U(x)\|_F \leq C \|x\|_E. \text{ D'où}$$

$$\|U\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\|x\|=1} \|U(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \frac{\|U(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

On note par  $B(E, F)$  l'espace des opérateurs bornés de  $E$  dans  $F$  et par  $B(E)$  si  $E = F$

**Théorème 2.2.2** *Un opérateur linéaire  $U$  est continu, si et seulement s'il est borné.*

### 2.2.1 L'espace des opérateurs linéaires continus

L'espace  $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)})$  est un espace vectoriel normé.

**Proposition 2.2.1** *Soit  $E$  un espace normé et  $F$  un espace de Banach, alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace de Banach.*

On remarque que, l'ensemble des formes linéaires continues  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  est un espace de banach, car l'espace des scalaires  $\mathbb{K}$  est complet

$\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  est appelé **le dual topologique** de  $E$  noté  $E^*$ .

**Proposition 2.2.2** *Soit  $f \in L(E, F)$ . Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i)  $\exists M \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$ .
- ii)  $f$  est continue en 0.
- iii)  $f$  est continue sur  $E$
- iv)  $f$  est bornée sur la boule unité fermée.
- v)  $f$  est bornée sur la sphère unité.

Soit  $B(E)$  l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de banach  $E$ , Si deux suit  $(A_n)$  et  $(B_n)$  d'opérateurs appartenant à  $B(E)$  convergent (au sens de la norme), respectivement, vers  $A$  et  $B$  et si la suite de scalaires  $(\lambda_n)$  converge vers  $\lambda$ , les suit  $(\lambda_n A_n)$ ,  $(A_n + B_n)$  et  $(A_n B_n)$  convergent respectivement vers  $\lambda A$ ,  $A + B$  et  $AB$ .

### 2.2.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Soit  $E$  un espace de Banach et  $F$  un espace normé, si  $\{U_n(x)\}$  une suite d'opérateurs dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , alors

$$\forall x \in E, \sup \|U_n(x)\| < \infty \implies \|U_n\| < \infty.$$

## 2.3 Somme et produit d'opérateurs

1) Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs linéaires de l'espace vectoriel  $E$  dans l'espace  $E_1$ . la somme  $A + B$  de ces opérateurs est défini par  $(A + B)(x) = Ax + Bx$ . Il est défini pour tout.

2) Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs linéaires tels que  $A$  de  $E$  dans  $E_1$ , et  $B$  de  $E_1$  dans  $E_2$ . On appelle produit  $BA$  de ces opérateurs, l'opérateur  $C$  qui à un élément  $x \in E$  fait correspondre l'élément  $z = B(Ax) \in E_2$ . Le domaine de définition  $D_C$  de l'opération  $C$  est constitué par les  $x \in D_A$  telles que  $Ax \in D_B$ . il est clair que l'opérateur  $BA$  est linéaire. Il est continue lorsque  $A$  et  $B$  sont continus.

Soit  $A, B$  deux opérateurs linéaire bornés et  $\lambda$  un scalaire;  $\lambda A, A + B$  et  $AB$  sont des opérateurs linéaires bornés et on a

- 1)  $\| \lambda A \| = |\lambda| \| A \|$ .
- 2)  $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$ .
- 3)  $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$ .

Soit  $U \in \mathcal{L}(H, H)$  un opérateur de l'espace de Hilbert  $H$  dans lui même. On définit les puissances de l'opérateur  $U$  comme étant les opérateurs de  $H$  dans  $H$  définis de la manière suivante

$U^0 = I$  (l'opérateur identité),  $U^1 = U$ ,  $U^2 = U \circ U, \dots, U^n = U \circ U^{n-1} = U^{n-1} \circ U$  ( $n \geq 1$ ).

$\forall n \in \mathbb{N}, \|U^n\| \leq \|U\|^n$ , La série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} U^n$  converge dans  $\mathcal{L}(H, H)$ . Sa somme est un opérateur de  $H$  dans  $H$  appelé exponentielle de l'opérateur  $U$  et noté  $e^U$  ou  $\exp U$ . Sa norme vérifie  $\|\exp U\| \leq \exp(\|U\|)$ .

Soit  $E$  un espace de Banach,  $I$  l'opérateur identique dans  $E$  et  $A$  un opérateur linéaire borné, appliquant  $E$  dans lui même et tel que  $\|A\| < 1$ . Alors l'opérateur  $(I - A)$  admet un inverse  $(I - A)^{-1}$  borné qui peut être représenté sous la forme  $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$

## 2.4 Résolvante et spectre d'un opérateur

Soit  $A$  un opérateur linéaire dans l'espace  $\mathbb{C}^n$  à dimension  $n$ . Un nombre  $\lambda$  s'appelle valeur propre de l'opérateur  $A$ , si l'équation  $Ax = \lambda x$  admet des solutions non nulles, l'ensemble de toutes les valeurs propres s'appelle **spectre de l'opérateur**  $A$ . Toutes les autres valeurs de  $\lambda$  sont dites **régulières** autrement dit,  $\lambda$  est un point régulier, si l'opérateur  $A - \lambda I$  est inversible.

L'opérateur  $(A - \lambda I)^{-1}$  est alors définie sur l'espace  $\mathbb{C}^n$  tout entier et, comme tout opérateur dans un espace de dimension finie, est borné. Ainsi, dans un espace de dimension finie on a deux possibilités suivantes:

1) L'équation  $Ax = \lambda x$  admet une solution non nulle, c'est-à-dire  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ ; dans ce cas l'opérateur  $(A - \lambda I)^{-1}$  n'existe pas;

2) L'opérateur  $(A - \lambda I)^{-1}$  existe, est borné et défini sur l'espace tout entier, c'est-à-dire  $\lambda$  est une point regulier. Si  $A$  est un opérateur donné dans un espace de dimension infinie  $E$ , il y a encore une troisième possibilité

3) L'opérateur  $(A - \lambda I)^{-1}$  existe, c'est -à-dire l'équation  $Ax = \lambda x$  n'a pas de solution non nulle, mais cet opérateur n'est pas défini sur l'espace  $E$  tout entier (et, peut être, n'est pas bornée). Introduisons la terminologie suivante

### 2.4.1 Spectre d'un opérateur

**Définition 2.4.1 (*Point régulier*)** Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , le nombre  $\lambda \in \mathbb{C}$  s'appelle un point régulier de l'opérateur  $T$  si  $(T - \lambda I)$  est inversible.

**Définition 2.4.2 (*Ensemble résolvant et la résolvante*)** On appelle ensemble résolvant de  $T$  l'ensemble des points réguliers de l'opérateur  $T$  et note  $\rho(T)$  tel que

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \text{ inversible}\}$$

L'ensemble résolvant  $\rho(T)$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ . On définit la résolvante de  $T$  comme application

$$R_\lambda(T) : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(H)$$

$$\lambda \mapsto R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$$

**Théorème 2.4.1** Si  $|\lambda| > \|T\|$ , alors  $\lambda$  est un point régulier de l'opérateur  $T$  (i.e.  $\lambda \in R_\lambda(T)$ )

**Théorème 2.4.2 (*spectre d'un opérateur*)** On appelle spectre de  $T$  l'ensemble

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \text{ non inversible}\}$$

L'ensemble  $\sigma(T)$  est un fermé de  $\mathbb{C}$ .

**Exemple 2.4.1** Soit l'opérateur  $I \in \mathcal{L}(H)$ , on cherche  $\sigma(T)$

$$\begin{aligned}\sigma(T) &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : I - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C} : (1 - \lambda)I \text{ n'est pas inversible} \}\end{aligned}$$

$(1 - \lambda)I$  non inversible ssi  $\lambda = 1$ , alors  $\sigma(I) = \{1\}$

**Théorème 2.4.3 (le spectre ponctuel)** On appelle spectre ponctuel de  $T$  l'ensemble des valeurs propres de  $T$ , noté  $\sigma_p(T)$  tel que

$$\sigma_p(T) = \{ \lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ non injectif} \}$$

**Remarque 2.4.1** Lorsque  $E$  est de dimension finie  $n$ , alors

$$\sigma_p(T) = \sigma(T)$$

et le spectre de  $T$  est un ensemble fini ayant au plus  $n$  éléments qui sont les racines du polynôme caractéristique de  $T$ . Mais si  $E$  est de dimension infinie on a

$$\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$$

**Définition 2.4.3 (le spectre continu)** On appelle spectre continu de  $T$  et on note par  $\sigma_c(T)$ , l'ensemble

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(T - \lambda I)} = E \right\}$$

**Définition 2.4.4 (le spectre résiduel)** On appelle spectre résiduel de  $T$  et on note par  $\sigma_r(T)$ , l'ensemble

$$\sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \sigma(T), T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(T - \lambda I)} \neq E \right\}$$

**Remarque 2.4.2** Le spectre  $\sigma(T)$  est la réunion disjointe de trois ensembles

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

**Définition 2.4.5 (rayon spectrale)** Soit  $T \in \mathcal{L}(E)$ , on définit le rayon spectral de  $T$  comme suit

$$r(T) = \sup \{ |\lambda|, \lambda \in \sigma(T) \}$$

**Théorème 2.4.4** Soit  $T \in \mathcal{L}(E)$  alors on a

1. La limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{1/n}$  existe et elle est égale à  $\inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{1/n}$
2. Si l'espace  $H$  est complexe alors  $r(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{1/n}$

**Théorème 2.4.5** Si  $T$  est un opérateur de  $\mathcal{L}(H)$  alors  $\sigma(T)$  est un sous ensemble compact du plan complexe. Si  $\lambda \in \sigma(T)$  alors

$$|\lambda| \leq \|T\|$$

**Preuve.** Si  $\lambda_0 \notin \sigma(T)$  alors  $T - \lambda_0 I$  est inversible donc

$$\begin{aligned} \|I - (T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)\| &= \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\{(T - \lambda_0 I) - (T - \lambda I)\}\| \\ &= \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| |\lambda - \lambda_0| \end{aligned}$$

alors  $\|I - (T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)\| < 1$  chaque fois que  $|\lambda - \lambda_0|$  est suffisamment petite.

Il en suit que  $(T - \lambda_0 I)^{-1}(T - \lambda I)$  est inversible et par conséquent  $T - \lambda I$  aussi inversible. Il en résulte la complément de  $\sigma(T)$  est un sous ensemble ouvert du plan complexe, alors  $\sigma(T)$  est un sous ensemble fermé du plan complexe. Ensuite, nous allons montrer la deuxième assertion du théorème si  $|\lambda| > \|T\|$ , alors  $\|\frac{T}{\lambda}\| < 1$  et donc  $I - \frac{T}{\lambda}$  est inversible, il s'ensuit que  $\lambda \notin \sigma(T)$  et par conséquent contraposition affirme que si  $\lambda \in \sigma(T)$  alors  $|\lambda| \leq \|T\|$  ■

## 2.5 Les opérateurs compacts Auto-adjoint

### 2.5.1 Opérateur compact

Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire  $T : X \longrightarrow Y$  est dit compact si pour tout sous-ensemble borné  $B \subseteq X$ , son image  $T(B)$  est un sous-ensemble relativement compact dans  $Y$ , c'est-à-dire que l'adhérence de  $T(B)$  est compact dans  $Y$ . L'ensemble des opérateurs compact de  $X$  vers  $Y$  est noté  $K(X, Y)$ . Si  $X = Y$ , on note simplement  $K(X)$ .

**Proposition 2.5.1** *Tout opérateur linéaire compact entre deux espaces de Banach est borné.*

**Preuve.** En effet, si on désigne par  $B(0, 1) = \{x \text{ tel que } \|x\| \leq 1\}$ , la boule fermée de rayon unité, alors l'ensemble  $\overline{A(B(0, 1))}$  est compact donc borné, c'est à dire,  $\|Ax\| < \infty$ , et par conséquent,  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty$ , ce qui signifie que l'opérateur  $A$  est borné. Pour les opérateurs de rang fini, la réciproque de cette dernière propriété est aussi vraie. ■

**Proposition 2.5.2** *Un opérateur linéaire de rang fini entre deux espaces de Banach est compact si et seulement s'il est borné.*

**Proposition 2.5.3** *Soit  $T : X \rightarrow Y$ , un opérateur linéaire entre deux espaces de Banach  $X, Y$ , Alors les propriétés suivantes sont équivalents :*

- 1)  $T$  est compact.
- 2)  $T(U_x)$  est un sous-ensemble relativement compact de  $Y$ .
- 3)  $T(B)$  est un sous-ensemble totalement borné de  $Y$  quand  $B$  est un sous-ensemble borné de  $X$ .
- 4) Toute suite bornée  $(X_n)$  de  $X$  admet une sous-suite  $(X_{n_k})$  telle que  $T(X_{n_k})$  converge dans  $Y$ .

**Proposition 2.5.4** *Soient  $X, Y, Z$  et  $W$  des espaces de Banach et soient  $S, T$  et  $R$  des opérateurs bornés  $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z \xrightarrow{R} W$ , tel que  $T$  soit compact. Alors on a*

- 1)  $K(X, Y)$  est un sous espace fermé de  $B(X, Y)$ ;
- 2) La composition  $R \circ T \circ S$  est un élément de  $K(X, W)$ .

**Théorème 2.5.1** *Si  $\{A_n\}$  est une suite d'opérateurs compacts dans un espace de Banach  $E$ , convergente en norme vers un opérateur  $A$ , alors l'opérateur  $A$  est aussi compact.*

**Théorème 2.5.2** *Si  $A$  est un opérateur compact et  $B$  est un opérateur borné, les opérateurs  $AB$  et  $BA$  sont compacts.*

**Preuve.** Si l'ensemble  $M \subset E$  est borné, l'ensemble  $B(M)$  l'est aussi. Par conséquent, l'ensemble  $AB(M)$  est précompact, ce qui signifie que l'opérateur  $AB$  est compact. De même, si  $M$  est borné,  $A(M)$  est précompact d'où, en raison de la continuité de  $B$ , l'ensemble  $BA$  est compact. le théorème est démontré. ■

Dans un espace  $E$  de dimension infinie l'inverse d'un opérateur compact ne peut pas être borné.

En effet, dans le cas contraire, l'opérateur identique  $I = A^{-1}A$  serait compact dans  $E$ , ce qui est impossible.

Dans un espace de Hilbert tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rangs finis

## 2.5.2 Opérateurs adjoints

Soient  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  deux espaces normés et  $T \in B(X, Y)$  un opérateur borné. Alors, on appelle adjoint de  $T$ , au sens des espaces normés, l'opérateur

$$T^* : Y^* \longrightarrow X^* \\ y^* \circ T = y^* \circ T$$

En utilisant la notation  $\langle x, f \rangle = f(x)$ , l'action de l'adjoint sur  $X$  est caractérisée par

$$\langle x, T^*y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle, \forall x \in X, \forall y^* \in Y^*.$$

**Proposition 2.5.5 (Propriétés)** *Soient  $S$  et  $T$  deux opérateurs linéaires bornés entre deux espaces normés  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  et  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  respectivement. Alors,*

1. L'application  $T \longrightarrow T^*$  est une isométrie linéaire.
2.  $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$ .

$$3. (I_X)^* = I_{X^*}.$$

**Définition 2.5.1** Soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace normé,  $A \subset X$ , un sous-ensemble de  $X$ , et  $B \subset X^*$  un sous-ensemble de  $X^*$ . Définissons

$$\begin{aligned} A^\perp &= \{x^* \in X^* / x^*(x) = 0 \text{ pour tout } x \in A\} \\ B^\perp &= \{x \in X / x^*(x) = 0 \text{ pour tout } x^* \in B\}. \end{aligned}$$

On dit que  $A^\perp$  et  $B^\perp$  sont les ensembles polaires de  $A$  et  $B$  dans  $X$  et  $X^*$  respectivement.

Les ensembles  $A^\perp$  et  $B^\perp$  sont fermés.

**Preuve.** L'ensemble  $B^\perp = \bigcap_{x^* \in X^*} \ker x^*$  est fermé en tant qu'intersection de fermés. Soit  $\{z_n^*\}$  une suite dans  $A^\perp$  qui converge vers un certain  $z^* \in X^*$ ; alors en particulier,  $z_n^*(x) \rightarrow z^*(x)$  pour tout  $x \in X$ . Or  $z_n^*/A = 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ; ce qui entraîne que  $z^*/A = 0$ . par conséquent,  $z^* \in A^\perp$ , donc  $A^\perp$  est fermé. ■

**Théorème 2.5.3** Soit  $M$  un sous-ensemble fermé d'un espace normé  $(X, \|\cdot\|_X)$ , alors sont isomorphes:

- 1)  $M^\perp \cong (X/M)^*$
- 2)  $M^* \cong X^*/M^\perp$ .

**Lemme 2.5.1** Soient  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  deux espaces normés et  $T \in B(X, Y)$  un opérateur borné alors,

- 1)  $\ker T^* = (\text{Im } T)^\perp$ ,
- 2)  $\ker T = (\text{Im } T^*)^\perp$ .

**Définition 2.5.2** (Indice de nullité et de défaut) Soit  $E$  un sous espace vectoriel de l'espace de Banach  $X$ . Si  $E^\perp$  est de dimension finie  $\beta$ , on dit que  $E$  est de codimension finie  $\beta$  dans  $X$ . On définit alors l'indice de défaut  $\beta(A)$  d'un opérateur linéaire  $A$  comme la codimension de son image  $\text{Im}(A)$  dans  $Y$ . On appelle indice de nullité  $n(A)$  la dimension du noyau  $\ker A$ .

**Exemple 2.5.1** (Exemples des opérateurs adjoints)

1) Soit  $H = L^2([a, b])$  ( $a < b$ ) l'espace des classes de fonctions  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  de carré sommable avec le produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$  et soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue fixée. L'application  $T$  qui à la fonction  $x \in H$  fait correspondre la fonction  $Tx$  définie sur  $[a, b]$  par  $(Tx)(t) = f(t)x(t)$  l'opérateur  $T \in \mathcal{L}(H, H)$  appelé opérateur de multiplication par  $f$ . L'opérateur  $T^* \in \mathcal{L}(H, H)$  est alors l'opérateur de multiplication par la fonction  $\overline{f}$

2) Soit  $k : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ( $c < d, a < b$ ) une fonction continue de deux variables réelles. On considère l'application  $K : \mathcal{L}^2([a, b]) \rightarrow \mathcal{L}^2([c, d])$  telle que pour tout  $x \in \mathcal{L}^2([a, b])$ ,  $Kx$  est la fonction définie par

$$\forall t \in [c, d], (Kx)(t) = \int_a^b k(t, s)x(s)ds.$$

$K$  est un opérateur de  $\mathcal{L}^2([a, b])$  dans  $\mathcal{L}^2([c, d])$  qu'on appelle opérateur intégral de noyau  $k(t, s)$ . On abrège souvent en disant que  $K$  est un opérateur à noyau (égal à  $k$ ). L'opérateur adjoint  $K^*$  est aussi un opérateur à noyau. C'est l'opérateur intégral de  $\mathcal{L}^2([c, d])$  dans  $\mathcal{L}^2([a, b])$  dont le noyau est la fonction  $(s, t) \rightarrow \overline{k(s, t)}$  de  $[a, b] \times [c, d]$  dans  $\mathbb{C}$  (attention les intervalles sont maintenant dans l'ordre inverse !) i.e., pour tout  $y \in \mathcal{L}^2([c, d])$ ,  $K^*y \in \mathcal{L}^2([a, b])$  est la fonction définie par

$$\forall s \in [a, b], (K^*y)(s) = \int_c^d \overline{k(s, t)}y(t)dt.$$

**Théorème 2.5.4** *L'opérateur adjoint d'un opérateur compact est compact.*

### 2.5.3 Opérateur auto-adjoint

On suppose dans la suite que  $H$  est un espace de Hilbert et que  $A \in \mathcal{L}(H)$ . Identifiant  $H'$  et  $H$  on peut considérer que  $A^* \in \mathcal{L}(H)$ .

On dit qu'un opérateur  $A \in \mathcal{L}(H)$  est auto-adjoint si  $A^* = A$ , c'est-à-dire si  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in H$ .

### 2.5.4 Opérateur compact auto-adjoint

Pour les opérateurs linéaires auto-adjoints dans un espace euclidien de dimension finie on a le théorème bien connu sur la possibilité de réduire la matrice d'un tel opérateur à la forme diagonale par le choix d'une base orthonormée convenable. Dans ce paragraphe nous étendrons ce théorème aux opérateurs compacts auto-adjoints dans l'espace de Hilbert. Les résultats de ce paragraphe sont valables aussi bien pour un espace de Hilbert réel que pour un espace de Hilbert complexe. Pour fixer les idées, nous supposons  $H$  complexe. Établissons tout d'abord quelques propriétés des vecteurs et des valeurs propres des opérateurs auto-adjoints dans  $H$ , tout à fait analogue, d'ailleurs, aux propriétés correspondantes des opérateurs auto-adjoints dans un espace de dimension finie.

1) Toutes les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint  $A$  dans  $H$  sont réelles.

En effet, soit  $Ax = \lambda x, \|x\| \neq 0$ , alors,  $\lambda(x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$ , d'où  $\lambda = \bar{\lambda}$ .

2) Les vecteurs propres d'un opérateur auto-adjoint dans  $H$ , associés à des valeurs propres distinctes, sont orthogonaux.

En effet si  $Ax = \lambda x, Ay = \mu y$  et  $\lambda \neq \mu$ , on a  $\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$ , d'où  $(x, y) = 0$ .

**Théorème 2.5.5 (Hilbert-Schmidt)** *Pour tout opérateur linéaire compact auto-adjoint  $A$  dans un espace de Hilbert  $H$  il existe un système orthonormé  $\{Q_n\}$  de vecteurs propres, associés aux valeurs propres non nulles  $\{\lambda_n\}$ , tel que tout élément  $\Psi \in H$  peut s'écrire de manière unique sous la forme*

$$\Psi = \sum_K C_K Q_K + \Psi', \text{ où } \Psi' \in \ker A, \text{ c'est-à-dire } A\Psi' = 0;$$

en outre,  $A\xi = \sum \lambda_k C_k \varphi_k$  et si le système  $\{\varphi_n\}$  est infini, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ .

**Lemme 2.5.2** *Si la suite  $\{\xi_n\}$  converge faiblement vers  $\xi$  et l'opérateur linéaire  $A$  est compact on a*

$$\varphi(\xi_n) = (A\xi_n, \xi_n) \rightarrow (A\xi, \xi) = \varphi(\xi)$$

## 2.6 Spectre d'un opérateur compact auto-adjoints

**Proposition 2.6.1** Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint. On pose

$$m = \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} (Tu, u) \text{ et } M = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} (Tu, u) \text{ Alors, } \sigma(T) \subset [m, M], m \in \sigma(T) \text{ et } M \in \sigma(T).$$

**Preuve.** Soit  $\lambda \in \rho(T)$ ; montrons que  $\lambda \in \rho(T)$ . On a  $(Tu, u) \leq M \|u\|^2 \forall u \in H$ , et par conséquent  $(\lambda u - Tu, u) \geq (\lambda - M) \|u\|^2 = x \|u\|^2 \forall u \in H$ , avec  $x > 0$ . Appliquant le théorème de Lax-Milgram voir [3] on voit que  $\lambda I - T$  est bijectif. Montrons que  $M \in \sigma(T)$ . la forme  $a(u, v) = (Mu - Tu, v)$  est bilinéaire, symétrique et  $a(u, v) \geq 0 \forall v \in H$  en appliquant l'inégalité de Cauchy-schwarz à la forme à  $(u, v)$  il vient

$$|(Mu - Tu, v)| \leq (Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}} (Mu, Tu, v)^{\frac{1}{2}} \forall u, v \in H \quad (*)$$

D'où il résulte en particulier que

$|Mu - Tu| \leq C(Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}} \forall u \in H$ . soit  $(u_n)$  une suite telle que  $\|u_n\| = 1$  et  $(Tu, u_n) \rightarrow M$ . Grâce à (\*) on voit que  $\|Mu_n - Tu_n\| \rightarrow 0$ , et donc  $M \in \sigma(T)$  (car si  $M \in \rho(T)$ , alors  $u_n = (MI - T)^{-1} (Mu_n - Tu_n) \rightarrow 0$ ). les propriétés de  $m$  s'obtiennent en remplaçant  $T$  par  $-T$ . ■

**Corollaire 2.6.1** Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint tel que  $\sigma(T) = \{0\}$ . Alors  $T = 0$ .

**Preuve.** D'après la proposition 3.3.1 On sait que

$$(Tu, u) = 0 \forall u \in H. \text{ il en résulte que}$$

$$2(Tu, u) = (T(u + v), u + v) - (Tu, u) - (Tv, v) = 0 \forall u, v \in H \text{ donc, } T = 0. \quad \blacksquare$$

Le résultat suivant est fondamental, il montre qu'un opérateur auto-adjoint compact est diagonalisable dans une base convenablement choisie.

On suppose que  $H$  est séparable. Soit  $T$  un opérateur auto-adjoint compact alors  $H$  admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de  $T$ .

**Preuve.** Soit  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  la suite des vecteurs propres distinctes de  $T$ . excepté 0; on note  $\lambda_0 = 0$ . On pose  $E_0 = N(T)$  et  $E_n = N(T - \lambda_n I)$ ; rappelons que  $0 \leq \dim E_0 \leq \infty$  et que  $0 < \dim E_n < \infty$ . Montrons d'abord que  $H$  est somme hilbertienne des  $(E_n)_{n \geq 0}$  :

i) les  $(E_n)_n \geq 0$  sont deux à deux orthogonaux. En effet si  $u \in E_m$  et  $v \in E_n$  avec  $m \neq n$ , alors,  $Tu = \lambda_m u$ ,  $Tv = \lambda_n v$  et  $(Tu, v) = \lambda_m (u, v) = (u, Tv) = \lambda_n (u, v)$ . Donc  $(u, v) = 0$ .

ii) soit  $F$  l'espace vectoriel engendré par les  $(E_n)_{n \geq 0}$ . vérifions que  $F$  est dense dans  $H$ . Il est clair que  $T(F) \subset F$ . Il s'en suit que  $T(F^\perp) \subset F^\perp$ ; en effet si  $u \in F^\perp$  et  $v \in F$ , alors  $(Tu, v) = (u, Tv) = 0$ . l'opérateur  $T_0 = T|_{F^\perp}$  est auto-adjoint compact. D'autre part  $\sigma(T_0) = \{0\}$ ; en effet si  $\lambda \in \sigma(T_0) \setminus \{0\}$ , alors  $\lambda \in \text{vp}(T_0)$  et donc il existe  $u \in F^\perp$ ,  $u \neq 0$  tel que  $T_0 u = \lambda u$ . par conséquent  $\lambda$  est l'une des valeurs propres  $\lambda_n$  de  $T$  et  $u \in F^\perp \cap E_n$  donc  $u = 0$ , ce qui est absurde. Il résulte du **corollaire précédent** que  $T_0 = 0$ ; par suite  $F^\perp = \{0\}$ , donc  $F$  est dense dans  $H$ . Enfin on choisit dans chaque  $E_n$  une base hilbertienne. la réunion de ces bases est une base hilbertienne de  $H$  formée de vecteurs propres de  $T$ . ■

**Remarque 2.6.1** Soit  $T$  un opérateur compact auto-adjoint compact. d'après ce qui précède on peut écrire tout  $u \in H$  sous la forme  $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  avec  $u_n \in E_n$ , de sorte que  $Tu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$ .

On définit  $T_\lambda u = \sum_{n=1}^{\lambda} \lambda_n u_n$ .

Il est clair que  $T_k$  est un opérateur de rang fini que  $\|T_\lambda - T\| \leq \sup_{n \geq \lambda+1} |\lambda_n| \rightarrow 0$  quand  $\lambda \rightarrow \infty$ . On retrouve ainsi le fait que  $T$  est limite d'une suite  $(T_k)$  d'opérateurs de rangs finis rappelons que dans un espace de Hilbert tout opérateur compact non nécessairement auto-adjoint est limite d'une suite d'opérateurs de rangs finis.

## 2.7 Opérateur de Fredholm

**Définition 2.7.1** Soit  $E$  un espace de Banach et  $T \in \mathcal{L}(E)$  on dit que  $T$  est un opérateur de Fredholm si les 3 conditions suivantes sont satisfaites:

- L'image de  $T$  est fermée.
- Le noyau de  $T$  est de dimension finie.
- L'image de  $T$  est de codimension finie.

On note alors  $\text{Ind}(T) = \dim(\text{Ker } T) - \text{codim}(\text{Im } T)$  est le nombre entier s'appelle l'indice de  $T$ .

**Proposition 2.7.1** *Soit  $E$  un Banach,  $F$  un s.e.v de dimension finie. Alors il existe  $M$  fermé tel que  $E = F \oplus M$ .*

**Preuve.** Soit  $F$  de base  $(e_1, \dots, e_n)$ . On définit les coordonnées  $e_i^*$  par  $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ , les  $e_i^*$  sont continues donc par Hahn-Banach, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  prolongements continus des  $e_i^*$ . Soit  $M = \cap_{i=1}^n \text{Ker} \lambda_i$  qui est fermé car les  $\lambda_i$  sont continues. On montre que  $E = F \oplus M$ .  $F \cap M = \{0\}$  car si  $x \in F \cap M$ ,  $\lambda_i(x) = 0$  pour tout  $i$  donc  $x = 0$  car  $x \in F$ . Soit  $y \in E$ , on pose  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(y) e_i$ . On a  $\lambda_i(x) = \lambda_i(y)$  donc  $y - x \in \text{Ker} \lambda_i$  donc  $y - x \in M$  et  $E \subset F \oplus M$ . Un opérateur de Fredholm, en conséquence on a la formule

$$\text{ind}(T) = \dim \ker(T) - \dim \ker(T^*)$$

Soit  $T$  un opérateur de Fredholm. Quitte à remplacer  $T$  par  $T|_{\ker(T)^\perp}$ , on peut supposer que  $T$  est injectif. Comme  $\text{Im} T$  est de codimension finie, il existe  $y_1, \dots, y_n \in H$  tels que  $(\text{Im}(T) + y_1, \dots, \text{Im}(T) + y_n)$  soit une base de  $H / \text{Im}(T)$ . Définissons un opérateur  $T : H \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow H$  par

$$T(x, v) = Tx + \sum_{j=1}^n v_j y_j$$

Alors  $T$  est continu et bijectif, et donc inversible par le théorème de l'opérateur inverse. Ainsi il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\|T(x, v)\| > c \|(x, v)\|$  pour tous  $x, v$ . En particulier  $\|Tx\| > c \|x\|$  pour tout  $x$ , ce qui implique que  $\text{Im} T$  est fermé. ■

**Théorème 2.7.1** (*Alternative de Fredholm*)

Soient  $E$  un espace de Banach,  $A \in \mathcal{L}(E)$  un opérateur compact et  $T = \text{Id}_E - A$ . Alors  $T$  est un opérateur de Fredholm et  $\text{Ind}(T) = 0$ .

- a) L'application  $T \rightarrow \text{Ind} T$  est continue
- b) Tout opérateur  $T$  de Fredholm est inversible modulo i.e. il existe  $S \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que  $(T \circ S - \text{Id}_F)$  et  $(S \circ T - \text{Id}_E)$  soient d'image finie. Inversement, si  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  et s'il existe  $S \in \mathcal{L}(E, F)$  tel que  $T \circ S - \text{Id}_F \in \text{Im}(F)$  et  $S \circ T - \text{Id}_E \in \text{Im}(E)$ , alors  $T$  de Fredholm.
- c) Si  $T$  de Fredholm et si  $S \in \mathcal{L}(E, F)$  alors  $T + S$  de Fredholm et  $\text{Ind}(T + S) = \text{Ind} T$ .

d) Si  $T$  de Fredholm et  $S$  de Fredholm alors  $S \circ T$  de Fredholm et  $Ind(S \circ T) = Ind(T) + Ind(S)$ .

**Remarque 2.7.1** L'opérateur intégral défini par  $(Id - \int_a^b K(x, y)u(y)dy)$  avec  $K(x, y)$  une fonction continue est un opérateur de Fredholm.

### Proposition de Fredholm

Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs de Fredholm.

**Théorème 2.7.2** Soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $T$  est Fredholm si et seulement si il existe un opérateur  $S \in \mathcal{L}(Y, X)$  tel que  $(AS - Id)$  et  $(SA - Id)$  sont compacts. Si  $T$  et  $S$  sont des opérateurs de Fredholm alors,  $ST$  est opérateur de Fredholm et  $ind(ST) = ind(S) + ind(T)$ .

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie, en générale, mais si  $S$  et  $T$  commutent ( $ST = TS$ ) on a  $ST$  est Fredholm implique  $S$  et  $T$  sont tous les deux de Fredholm.

On trouve par contre le résultat important suivant

**Corollaire 2.7.1** Soient  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  et  $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$  tel que  $ST$  est opérateur de Fredholm alors  $T$  est opérateur de Fredholm si et seulement si  $S$  est un opérateur de Fredholm.

Soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  si  $\ker(T)$  est fermé alors

$$\dim(\text{Im}(T^*)) = \text{codim}(\ker(T)) \quad \text{et} \quad \dim(\text{Im}(T)) = \text{codim}(\ker(T^*))$$

Si  $T : X \rightarrow Y$  opérateurs de Fredholm alors son adjoint  $T^* : Y^* \rightarrow X^*$  opérateurs de Fredholm et  $ind(T^*) = -ind(T)$ .

Une caractérisation de la structure des opérateurs de Fredholm est donnée dans le théorème suivant :

**Théorème 2.7.3** Si  $T : X \rightarrow Y$  opérateurs de Fredholm on a les décompositions

$X = X_0 \oplus X_1$  et  $Y = Y_0 \oplus Y_1$  telles que:

- (i)  $X_0$  et  $Y_0$  sont des sous-espaces fermés respectivement de  $X$  et  $Y$
- (ii)  $X_1$  et  $Y_1$  sont de dimensions finies
- (iii)  $X_1 = \text{Im}(T)$  et  $Y_0 = \ker(T)$
- (iv)  $ind(T) = \dim(X_1) - \dim(Y_1)$

### Théorie de Riesz et Alternative de Fredholm

**Théorème 2.7.4** Soit  $A \in K(E)$ . Alors

- a)  $\text{Ker}(Id - A)$  est de dimension finie,
- b)  $\text{Im}(Id - A)$  est fermé, et plus précisément

$$\text{Im}(Id - A) = \text{ker}(Id - A^*)^\perp$$

- c)  $\text{ker}(Id - A) = \{0\} \iff \text{Im}(Id - A) = E$
- d)  $\dim \text{ker}(Id - A) = \dim \text{ker}(Id - A^*)$ .

Le théorème précédent concerne la résolution de l'équation  $u - Au = f$  elle exprime que: Ou bien pour tout  $f \in E$  l'équation  $u - Au = f$  admet une solution unique, ou bien l'équation homogène  $u - Au = 0$  admet  $n$  solutions linéairement indépendantes et, dans ce cas, l'équation non homogène  $u - Au = f$  est résoluble si et seulement si  $f$  vérifie  $n$  conditions d'orthogonalité (i.e.  $f \in \text{ker}(Id - A^*)^\perp$ ).  $A$  défini sur  $\mathcal{L}(X)$  et  $\lambda \neq 0$ , alors on a

(i) Soit l'équation homogène a zéro comme solution, dans ce cas  $\lambda$  est spectre de  $A$  et l'équation non homogène a exactement une solution  $u = (\lambda Id - A)^{-1}f$  pour tout  $f \in X$ .

(ii) Soit l'équation homogène a une solution non nulle, et dans ce cas l'équation non homogène a une solution

(non nécessairement unique) si et seulement si  $\langle g, f^* \rangle = 0$  pour toute solution  $f^*$  de l'équation

$$\text{adjointe: } \lambda f^* = A^* f^* \text{ (i.e } g \in N(\lambda Id - A^*)^\perp).$$

il existe un unique nombre entier non négative  $r$ , dit le nombre de Riesz de l'opérateur compact  $A$ , tel que:

$$\{0\} = \text{ker}(T^0) \subsetneq \text{ker}(T^1) \subsetneq \dots \subsetneq \text{ker}(T^r) = \text{ker}(T^{r+1}) = \dots,$$

et

$$H = \text{Im}T^0 \supsetneq \text{Im}T^1 \supsetneq \dots \supsetneq \text{Im}T^r = \text{Im}T^{r+1} = \dots$$

En outre, nous avons la somme directe

$$H = \text{Ker}(T^r) \oplus \text{Im}(T^r)$$

i.e., pour chaque  $u \in H$ , il existe un unique  $x \in \text{Ker}(T^r)$  et un unique  $y \in \text{Im}(T^r)$ , tel que  $u = x + y$ .

**Lemme 2.7.1** *Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur compact, et posons  $T = \text{Id} - A$ . Soit  $M \subset H$  un sous-espace fermé tel que  $T|_M$  est injectif. Alors il existe  $c > 0$  tel que  $\|Tx\| > c\|x\|$  pour tout  $x$  dans  $M$ , et donc  $T(M)$  est un sous-espace fermé.*

**Preuve.** Sinon, il existerait une suite  $(x_n)$  dans  $M$  avec  $\|x_n\| = 1$  et  $T(x_n) \rightarrow 0$ . Comme  $A$  est compact, quitte à passer à une sous-suite on peut supposer que  $(Ax_n)$  converge, mais comme  $\text{Id} = T + A$ , la suite  $(x_n)$  converge aussi, soit  $x \in M$  sa limite. On obtient  $Tx = 0$  ce qui contredit l'hypothèse. Pour démontrer que  $T(M)$  est fermé, soit  $(y_n)$  une suite dans  $M$  telle que  $(Ty_n)$  converge. L'inégalité démontrée précédemment implique que  $(y_n)$  est aussi de Cauchy, donc converge. Si on note  $y$  sa limite alors  $\lim Ty_n = Ty \in T(M)$ . ■

**Théorème 2.7.5** *Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur compact, et  $T = \text{Id} - A$ . Alors  $T$  est surjectif si et seulement si il est injectif.*

**Preuve.** Supposons  $T$  surjectif et non injectif. Montrons par récurrence que  $\text{Ker}(T^n) \neq \text{Ker}(T^{n+1})$ . Pour l'étape de récurrence, soit  $x \in \text{Ker}(T^{n+1}) \setminus \text{Ker}(T^n)$ . Comme  $T$  est surjectif, il existe  $y \in H$  tel que  $x = Ty$ . Alors  $y \in \text{Ker}(T^{n+2}) \setminus \text{Ker}(T^{n+1})$ . De même, supposons  $T$  injectif et non surjectif. Montrons par récurrence que  $\text{Im}(T^n) \neq \text{Im}(T^{n+1})$ . En effet, si  $x \in \text{Im}(T^n) \setminus \text{Im}(T^{n+1})$ , alors  $Tx \in \text{Im}(T^{n+1})$  et  $Tx \notin \text{Im}(T^{n+2})$  (utiliser l'injectivité de  $T$ ). Dans les deux cas on conclut par le corollaire précédent ■

Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur compact, et  $T = \text{Id} - A$ . Alors  $\text{Ker}T$  est de dimension finie et  $\text{Im}T$  est fermé.

**Définition 2.7.2** *Si  $H$  est un espace de Hilbert et  $F \subset H$  un sous-espace vectoriel (non supposé fermé), on appelle codimension de  $F$  la dimension de  $H \setminus F$ . On note  $\text{codim}F = \dim(H \setminus F)$ . Ici  $H \setminus F$  est l'espace vectoriel quotient, qui est une notion purement algébrique et n'utilise pas la structure d'espace de Hilbert.*

Lorsque  $F$  est fermé, on a la somme directe  $H = F \oplus F^\perp$ , donc  $H \setminus F$  est isomorphe à  $F^\perp$  et  $\text{codim}F = \dim(F^\perp)$ .

# Chapitre 3

## Les Opérateurs Paranormaux

La théorie spectrale des opérateurs auto-ajoints a conduit à plusieurs tentatives de généralisation en affaiblissant l'exigence de l'égalité avec l'ajoint. Les classes d'opérateurs qui incluent des opérateurs auto-ajoints sont (par ordre d'inclusion)

Opérateurs normaux  
Opérateurs quasi normaux  
Opérateurs sous-normaux  
Opérateurs hyponormaux  
Opérateurs paranormaux  
Normaloïdes

### 3.1 Opérateur normal

**Définition 3.1.1** *Un opérateur normal sur un complexe espace de Hilbert  $H$  est un opérateur linéaire  $N : H \rightarrow H$  qui commute avec son opérateur adjoint  $N^*$ , qui est:  $NN^* = N^*N$ .*

Les opérateurs normaux sont importants car le théorème spectral est valable pour eux. La classe des opérateurs normaux est bien comprise. Des exemples d'opérateurs normaux sont

- Opérateurs unitaires :  $N^* = N^{-1}$
- Opérateurs hermitiens (c'est-à-dire opérateurs auto-ajoints):  $N^* = N$

- Opérateurs Skew-Hermitiens:  $N^* = -N$
- Opérateurs positifs :  $N^* = M M^*$  pour certains  $M$  (donc  $N$  est auto-adjoint).

Les opérateurs normaux sont caractérisés par le théorème spectral . Un opérateur normal compact (en particulier, un opérateur normal sur un espace linéaire de dimension finie) est diagonalisable de manière unitaire.

**Proposition 3.1.1** *Soit  $T$  un opérateur borné. Les éléments suivants sont équivalents.*

1.  $T$  est normal.
2.  $T^*$  est normal.
3.  $\|Tx\| = \|T^*x\|$  pour tous  $x$

Si  $N$  est un opérateur normal, alors  $N$  et  $N^*$  ont le même noyau et la même image. Par conséquent, l'image de  $N$  est dense si et seulement si  $N$  est injectif. En d'autres termes, le noyau d'un opérateur normal est le complément orthogonal de sa image. Il s'ensuit que le noyau de l'opérateur  $N^p$  coïncide avec celui de  $N$  pour tout  $p$ . Toute valeur propre généralisée d'un opérateur normal est donc authentique.  $\lambda$  est une valeur propre d'un opérateur normal  $N$  si et seulement si son conjugué complexe  $\bar{\lambda}$  est une valeur propre de  $N^*$ . Les vecteurs propres d'un opérateur normal correspondant à différentes valeurs propres sont orthogonaux, et un opérateur normal stabilise le complément orthogonal de chacun de ses espaces propres. Ceci implique le théorème spectral habituel: tout opérateur normal sur un espace de dimension finie est diagonalisable par un opérateur unitaire. Il existe également une version dimensionnelle infinie du théorème spectral exprimé en termes de mesures à valeur de projection . Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide

## 3.2 Opérateur hyponormal

**Définition 3.2.1** *Un opérateur  $A \in B(H)$  est hyponormal si  $A^*A \geq AA^*$ , qui est équivalent à la condition  $\|A^*x\| \leq \|Ax\|$ . Un opérateur  $A \in B(H)$  est cohyponormal si son adjoint est hyponormal. Si c'est hyponormal ou cohyponormal, alors on l'appelle seminormal.*

**Proposition 3.2.1** Soit  $A \in B(H)$ , alors  $A$  est un opérateur hyponormal si et seulement si  $A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A > 0$ , pour tous  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Preuve.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x \in H$  donnés.  $A$  est opérateur hyponormal, alors

$$\begin{aligned} \|A^*x\| \leq \|Ax\| &\iff \|Ax\|^2 + 2\lambda \|A^*x\|^2 + \lambda^2 \|Ax\|^2 \geq 0 \\ &\iff \langle Ax, Ax \rangle + 2\lambda \langle A^*x, A^*x \rangle + \lambda^2 \langle Ax, Ax \rangle \geq 0 \\ &\iff \langle A^*Ax, x \rangle + 2\lambda \langle AA^*x, x \rangle + \lambda^2 \langle A^*Ax, x \rangle \geq 0 \\ &\iff \langle (A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A)x, x \rangle \geq 0 \\ &\iff A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A > 0 \end{aligned}$$

■

**Remarque 3.2.1** Si  $A \in B(H)$  est hyponormal, alors  $(A - \lambda I)$  est hyponormal pour chaque  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Proposition 3.2.2** Soit  $A \in B(H)$ , et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , si  $A$  est hyponormal et  $(A - \lambda I)^{-1}$  existe, alors  $(A - \lambda I)^{-1}$  est hyponormal.

**Preuve.** Puisque l'hyponormalité est préservée sous la traduction, on peut supposer  $\lambda = 0$ . Ainsi  $A^*A - AA^* \geq 0$  et donc

$$0 \leq A^{-1}(A^*A - AA^*)A^{*-1} = A^{-1}A^*AA^{*-1} - I.$$

Maintenant depuis  $A \geq I$  implique  $A^{-1} \leq I$ , nous avons  $I - A^*A^{-1}A^{*-1}A \geq 0$ . Et donc

$$(T^{*-1}T^{-1} - T^{-1}T^{*-1}) = T^{*-1}(I - T^*T^{-1}T^{*-1}T)T^{-1} \geq 0$$

■

### 3.3 Opérateur normaloïde

**Définition 3.3.1** Un opérateur  $A \in B(H)$  est normaloïde si  $r(A) = \|A\|$ , où

$$r(A) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

est le rayon spectral de  $A$ .

**Proposition 3.3.1**  $r(A) = \|A\|$  si et seulement si  $\|A^n\| = \|A\|^n$ .

**Théorème 3.3.1** Tout opérateur hyponormal est normaloïde.

**Proposition 3.3.2** Un opérateur  $A$  est normaloïde si et seulement si

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{ |\langle Ax, x \rangle| \}$$

**Théorème 3.3.2** Soit  $A$  un opérateur tel que  $(A - \lambda I)$  est normaloïde pour tout numéro complexe  $\lambda$ , alors nous avons

$$\overline{W(A)} = \text{co}\sigma(A)$$

Où  $\text{co}\sigma(A)$  désigne la coque convexe de  $\sigma(A)$ .

Pour prouver le théorème énoncé ci-dessus, nous avons besoin du lemme du suivant

**Lemme 3.3.1** Soit  $A$  un opérateur et  $\lambda \in \overline{W(A)}$  un point de  $\overline{W(A)}$ , alors il existe un nombre complexe  $\lambda_0$  satisfaisant

$$|\lambda - \lambda_0| = \sup \{ |\mu - \lambda_0| : \mu \in \overline{W(A)} \}$$

**Lemme 3.3.2** Soit  $C$  un sous-ensemble convexe compact non vide du plan et  $S$  soit la collection de tous ses points nus. Alors  $C$  est la coque convexe fermée de  $S$ . Pour plus de commodité, nous énonçons le résultat connu suivant sous la forme d'un lemme.

**Lemme 3.3.3** Pour un opérateur  $A$ , et  $\lambda \in \overline{W(A)}$ , et  $\|\lambda\| = \|A\|$  implique  $\lambda \in \sigma(A)$ .

**Corollaire 3.3.1** Si un opérateur  $A \in B(H)$  est compact et normaloïde, alors  $\sigma_p(A) \neq \emptyset$ . Et il existe  $\lambda \in \sigma_p(A)$  tel que  $\|\lambda\| = \|A\|$ .

**Théorème 3.3.3** chaque opérateur hyponormal compact est normal.

### 3.4 Opérateur paranormal

Dans cette section, nous discutons d'une classe d'opérateurs non normaux. Dans [6] cela est nommé un opérateur de classe  $(N)$ .

**Définition 3.4.1** *On appelle un opérateur linéaire borné  $T$  sur un espace de Banach  $H$  paranormal si*

$$\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$$

**Proposition 3.4.1** *tout opérateur hyponormal est paranormal.*

**Preuve.** En effet

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle \leq \|A^*Ax\| \leq \|A^2x\|$$

■

**Théorème 3.4.1** *Soit  $A \in B(H)$  si  $A$  est paranormal alors*

1.  $A$  est normaloid.  $A^{-1}$
2. est également paranormal si  $A$  est inversible.

**Théorème 3.4.2** *Si  $A$  est un opérateur paranormal, alors  $A^n$  est paranormal pour chaque entier  $n \geq 1$ .*

**Preuve.** Est suffisant pour montrer que si  $A$  et  $A^k$  est paranormal, alors  $A^{k+1}$  est paranormal aussi. Nous pouons supposer  $\|A^2x\| \neq 0$  alors

$$\begin{aligned} \|A^{2(k+1)}x\|^2 &= \|A^2x\|^2 \|A^{2k} \frac{A^2x}{\|Ax\|}\|^2 \\ &\geq \|A^2x\|^2 \|A^k \frac{A^2x}{\|Ax\|}\|^2 \\ &\geq \frac{\|A^{k+2}x\|^2}{\|A^2x\|} \\ &\geq \frac{\|A^{k+1}x\|^2 \|A^2x\|}{\|A^2x\|} \\ &\geq \|A^{k+1}x\|^2 \end{aligned}$$

■

**Théorème 3.4.3** Soit  $A$  un opérateur paranormal tel que  $A^{*p_1} A^{q_1} \dots A^{*p_m} A^{q_m}$  est compact pour certains entiers non négatifs  $p_1, q_1, \dots, p_m, q_m$ . Alors  $A$  est nécessairement un opérateur normal

### 3.5 La classe des opérateurs Paranormaux

Il est facile de savoir que la classe des opérateurs paranormaux contient la classe des opérateurs hyponormaux et est incluse dans la classe des opérateurs normaloïdes. On montre ces relations d'inclusion sont propres et donc les opérateurs paranormaux constituent une nouvelle classe plus large que les opérateurs hyponormaux et plus étroite que les opérateurs normaloïdes.

**Lemme 3.5.1** Soit  $T$  un opérateur paranormal, alors

$$\|T^3x\| \geq \|T^2x\|\|Tx\| \quad (1)$$

pour tout vecteur unitaire  $x$  dans  $H$ .

**Preuve.** Pour un vecteur unitaire  $x$  dans  $H$ , on peut supposer  $Tx \neq 0$

$$\begin{aligned} \|T^3x\| &= \|Tx\| \|T^2 \frac{Tx}{\|Tx\|}\| \geq \|Tx\| \|T \frac{Tx}{\|Tx\|}\|^2 \\ &= \frac{\|T^2x\|^2}{\|Tx\|} \\ &\geq \frac{\|T^2x\|\|Tx\|^2}{\|Tx\|} \quad \blacksquare \\ &= \|T^2x\|\|Tx\| \end{aligned}$$

**Proposition 3.5.1** Soit  $T$  un opérateur paranormal, alors

$$\|T^{k+1}x\|^2 \geq \|T^kx\|^2 \|T^2x\| \quad (P_k)$$

pour un entier positif  $k \geq 1$  et tout vecteur unitaire  $x$  dans  $H$ .

**Preuve.** Pour le cas  $k = 1$ ,

$$\|T^2x\|^2 = \|T^2x\|\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2 \|T^2x\|$$

et  $(P_1)$  est clair. Supposons maintenant que  $(P_k)$  est valide pour  $k$  et nous supposons  $\|Tx\|$

$$\begin{aligned} \|T^{k+2}x\|^2 &= \|Tx\|^2 \left\| \frac{T^{k+1}Tx}{\|Tx\|} \right\|^2 \geq \|Tx\|^2 \|T^k \frac{Tx}{\|Tx\|}\|^2 \|T^2 \frac{Tx}{\|Tx\|}\|^2 \\ &\neq 0 \text{ alors} &= \|T^{k+1}x\|^2 \frac{\|T^3x\|}{\|Tx\|} \\ &&\geq \|T^{k+1}x\|^2 \|T^2x\| \end{aligned}$$

Par (1) and  $(P_k)$ . Donc  $(P_{k+1})$  est valide et la preuve est compléter par l'induction mathématique ■

**Théorème 3.5.1** *Si  $T$  est un opérateur paranormal, alors  $T^n$  est paranormal pour tout entier  $n \geq 1$ .*

**Preuve.** Il suffit de montrer que si  $T$  et  $T^k$  sont paranormaux, alors  $T^{k+1}$  est aussi paranormal.

On peut supposer  $\|T^2x\| \neq 0$ , alors

$$\begin{aligned} \|T^{2(k+1)}x\| &= \|T^{2k} \frac{T^2x}{\|T^2x\|}\| \|T^2x\| \geq \|T^k \frac{T^2x}{\|T^2x\|}\|^2 \|T^2x\| \\ &= \frac{\|T^{k+2}x\|^2}{\|T^2x\|} \\ &\geq \frac{\|T^{k+1}x\|^2 \|T^2x\|}{\|T^2x\|} \\ &= \|T^{k+1}x\|^2 \end{aligned}$$

Par  $(P_{k+1})$  du Proposition 3.5.1. Donc  $T^{k+1}$  est paranormal ■

**Théorème 3.5.2** *Il existe un opérateur paranormal qui n'est pas hyponormal. C'est-à-dire que la classe des opérateurs hypernormaux est correctement inclus dans la classe des opérateurs paranormaux.*

**Preuve.** Dans [4] Halmos donne un opérateur hyponormal  $T$  tel que  $T^2$  n'est pas hyponormal. D'après le Théorème 3.5.1  $T^2$  est paranormal. nous obtenons un exemple d'opérateur paranormal non hyponormal. Nous discutons de l'exemple de Halmos dans la section suivante. Dans [3], Nakamoto et Horie ont donné une preuve directe du théorème suivant ■

**Théorème 3.5.3** *Un opérateur paranormal  $T$  est compact si et seulement si  $T^n$  est compact.*

Dans [1], l'auteur a donné un exemple d'opérateur normaloïde non paranormal. Par souci de commodité, nous montrons cet exemple dans la section suivante à nouveau. Par conséquent, la classe des opérateurs paranormaux est correctement inclus dans celui des opérateurs normaloïde. Généralisant le concept de normalité, plusieurs auteurs ont traité des classes d'opérateurs non normaux. Notre classe occupe l'endroit indiqué dans le schéma suivant et les inclusions sont toutes strict.

$$\text{Normale} \subsetneq \text{Quasi-normale} \subsetneq \text{Sous-normale} \subsetneq \text{Hyponormale} \subsetneq \text{Paranormal} \subsetneq \text{Normaloïde}$$

Les relations d'inclusion du côté gauche à partir de l'hyponormal sont bien connues dans [8].

2. Par plusieurs exemples, nous indiquons la relation d'inclusion entre les classes d'opérateurs paranormaux et les opérateurs convexoïdes.

**Définition 3.5.1** *Un opérateur  $T$  est dit normaloïde si*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$$

*On sait que  $T$  est normaloïde si et seulement si le rayon spectral est égal à  $\|T\|$ , ou de façon équivalente  $\|T^n\| = \|T\|^n$  pour tout les entiers positif  $n$  ([2], [4], [8]).*

**Définition 3.5.2** *Un opérateur  $T$  est dit convexoïde si la fermeture du domaine numérique  $\overline{W(T)} = \overline{\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}}$  est égal à l'enveloppe convexe du spectre  $\sigma(T)$  de  $T$ .*

On sait qu'il existe des opérateurs convexoïdes qui ne sont pas normaloïde et inversement [4]

1) Un exemple de non-convexoïde, non-paranormal, normaloïde opérateur [3]

Soit  $T$  une matrice infinie de la forme

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & M & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & M & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & M & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors il est clair que  $T$  est normaloïde [3], non paranormal car

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

et  $\|T^n\| = \|T\|^n = 1$  cependant la relation  $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$  n'est pas vraie pour les vecteurs unitaires  $e_2 = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ ,  $e_4 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$  etc.

$T$  C'est non convexe. En fait  $\overline{W(T)}$  est l'ensemble fermé convexe engendré par le disque  $\{z : |z| \leq \frac{1}{2}\}$  et un point 1,

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{1\}$$

donc l'enveloppe convexe de  $\sigma(T)$  est l'intervalle unitaire fermé  $[0, 1]$  et cet l'intervalle unitaire est proprement inclus dans  $\overline{W(T)}$ .

**Remarque 3.5.1** *Peut-on généraliser le théorème A pour les opérateurs normaloïdes.*

Cette matrice donne un contre-exemple à cette question, car  $T^2$  est compact mais  $T$  n'est pas compact mais normaloïde.

2) Un exemple d'opérateur non paranormal, convexoïde, normaloïde [4].

Mettre  $T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$  où  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  comme dans l'exemple 1 et  $N$  un opérateur normal dont le spectre est le disque unité fermé  $\overline{D}$ . Alors

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\overline{D}\} = \overline{D}, \text{ et } \overline{W(T)} = \text{l'enveloppe convexe de } (W(M) \cup W(N)) = \overline{D} \text{ et } \|T\| = 1.$$

Donc  $T$  est convexoïde et normaloïde, mais il n'est pas paranormal puisque

$$Te_1 = e_2, T^2e_1 = 0 \text{ pour l'unité vecteur } e_1(1, 0, 0, \dots)$$

3) Un exemple (Halmos) de convexoïde paranormal non hyponormal opérateur

Soient  $C$  et  $D$  sont  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  respectivement et donnons  $T, T^2$  par

les matrices infinies suivantes respectivement,

$$T = \begin{pmatrix} \cdot & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & c^{1/2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & c^{1/2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & c^{1/2} \\ & & & & & D^{1/2} \\ & & & & & D^{1/2} \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} \cdot & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & C & & \\ & & & C & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & C & 0 & 0 \\ & & & & & D^{1/2}C^{1/2} & 0 \\ & & & & & 0 & D \\ & & & & & & D \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

(montre la place de l'élément de matrice  $(0, 0)$ ). Clairement  $D \geq C$ , mais cela n'implique pas  $D^2 \geq C^2$ . Sur la base ce fait nous pouvons déterminer que  $T$  est hyponormal mais  $T^2$  ne l'est pas. Comme on le sait, chaque opérateur hyponormal est convexoïde[9]. Nous pouvons confirmer que cet opérateur non hyponormal et paranormal,  $T^2$  est également convexoïde comme suit.  $D$  est un opérateur positif sur un espace à deux dimensions  $E$ . Son les valeurs propres sont  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . Mettre  $\mu = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ , clairement  $1 < \mu$  et  $\|T\| = \sqrt{\mu}$   $\|T^2\| = \mu$

Soit  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  le vecteur propre de  $D$  pour la valeur propre  $\mu$  et mettre  $\psi = (\varphi_1, 0)$ ,  $0 = (0, 0)$ . La matrice  $T$  est considérée comme un opérateur agissant sur la somme directe  $\oplus_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} E_n$  où  $E_n \cong E$ . Prendre un nombre complexe arbitraire  $\lambda$  tel que  $1 < |\lambda| < \mu$  et poser

$$\phi = \left( \dots, 0, \frac{1}{\lambda^3} \psi, 0, \frac{1}{\lambda^2} \psi, 0, \frac{1}{\lambda} \psi, 0, \varphi, 0, \frac{\lambda}{\mu} \varphi, 0, \frac{\lambda^2}{\mu^2} \varphi, 0, \frac{\lambda^3}{\mu^3} \varphi, 0, \dots \right)$$

où chaque composante est un vecteur dans  $E_n$  ( $-\infty < n < +\infty$ ) respectivement et indique l'emplacement de la  $n$ -ième coordonnée. Alors est clairement  $\phi$  un vecteur dans  $\bigoplus_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} E_n$  et par un calcul simple on peut montrer que  $T^2 \phi = \lambda \phi$ . Ceci garantit que  $\lambda$  tout nombre complexe tel que  $1 < |\lambda| < \mu$  est dans le spectre  $\sigma(T^2)$  et donc l'enveloppe convexe du spectre coïncide avec le disque  $\{z : |z| \leq \mu\}$ . D'autre Part contre depuis  $\|T^2\| = \mu$  la plage numérique de  $T^2$  est contenue dans ce disque. Donc  $T^2$  est convexoïde. A partir de cet exemple se pose naturellement une question: Est-ce que tout opérateur paranormal est convexoïde?. La réponse se découle sur l'inégalité fondamentale suivante.

**Proposition 3.5.2** *Soit  $T$  paranormal alors l'inégalité suivante est valable pour chaque vecteur  $x$ , pas nécessairement pour tout vecteur unitaire  $x$ , par l'homogénéité de  $T$ ,*

$$\|T\| \geq \dots \geq \frac{\|T^{n+1}x\|}{\|T^n x\|} \geq \dots \geq \frac{\|T^5 x\|}{\|T^4 x\|} \geq \frac{\|T^4 x\|}{\|T^3 x\|} \geq \frac{\|T^3 x\|}{\|T^2 x\|} \geq \frac{\|T^2 x\|}{\|T x\|} \geq \frac{\|T x\|}{\|x\|} \quad (2)$$

De cette inégalité, nous obtenons des propriétés facilement connues d'opérateurs paranormaux pour chaque vecteur unitaire  $x$

$$\frac{\|T^{2n}x\|}{\|T^n x\|} \geq \frac{\|T^n x\|}{\|x\|}$$

donc  $T^n$  est paranormal.  $T$  est normaloïde, car on a

$$\frac{\|T^n x\|}{\|T x\|} \geq \left( \frac{\|T x\|}{\|x\|} \right)^{n-1}$$

Alors

$$\left( \frac{\|T^{k+1}x\|}{\|T^k x\|} \right)^2 \geq \frac{\|T^2 x\|}{\|Tx\|} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T^2 x\|$$

Si  $T$  est inversible, alors l'inégalité suivante vaut pour tout vecteur  $x$ ,

$$\frac{\|x\|}{\|T^{-1}x\|} \geq \frac{\|T^{-1}x\|}{\|T^{-2}x\|} \geq \frac{\|T^{-2}x\|}{\|T^{-3}x\|} \geq \dots \geq \frac{\|T^{-n+1}x\|}{\|T^{-n}x\|} \geq \dots \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|} \quad (3)$$

alors  $\|T^{-2}x\| \geq \|T^{-1}x\|^2$  donc  $T^{-1}$  est paranormal.

### 3.6 Le théorème de Weyl pour les Opérateurs paranormaux

Dans cette section nous montrons qu'un opérateur paranormal  $T$  sur un espace de Banach satisfait le théorème de Weyl. Ceci est accompli en montrant que

- (i) Chaque point isolé de son spectre est une valeur propre et l'espace propre correspondant a un complément invariant,
- (ii) pour  $\alpha \neq 0$ ,  $\text{Ker}(T - \alpha) \perp \text{Ker}(T - \beta)$  (au sens de Birkhoff) chaque fois que  $\beta \neq \alpha$

Si  $X$  désignera un espace de Banach et  $B(X)$  l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornées sur  $X$ . Notons qu'une isométrie est toujours paranormal. Aussi la restriction à un sous-espace invariant, tout multiple par un scalaire et l'inverse (s'il existe) d'un opérateur paranormal est paranormal. De plus, chaque opérateur paranormal est normaloïde. Soient  $M$  et  $N$  des sous-espaces linéaires de  $X$ . alors  $M$  est dit orthogonal à  $N$  (au sens de Birkhoff) et on écrit  $M \perp N$  si

$\|x + y\| \geq \|x\|$  pour tous  $x \in M$  et  $y \in N$ . C'est une relation non symétrique dans un espace de Banach, mais cela équivaut au concept habituel de orthogonalité dans un espace de Hilbert. Soit  $P_y\{\lambda\}$  la projection propre algébrique associée à  $\{\lambda\}$  chaque fois que  $\lambda$  est un point isolé de  $\sigma(T)$ . Si  $T^* \in B(X^*)$  est l'adjoint de  $T \in B(X)$ , alors

$$(P_T\{\lambda\})' = P_{T'}\{\lambda\}.$$

Le résultat correspondant pour un opérateur d'espace de Hilbert  $T$  est

$$(P_T \{\lambda\})^* = P_{T^*} \{\bar{\lambda}\}$$

**Définition 3.6.1** (*Opérateur isolé*) Un opérateur  $T \in B(X)$  est dit isolé si tout point isolé de  $\sigma(T)$  est une valeur propre de  $T$ .

**Définition 3.6.2** Le domaine numérique de  $T \in B(X)$  est donné par

$$V(B(X), T) = \{F(T) : F \in B(X)^*, \|F\| = F(1) = 1\}$$

et son rayon numérique par

$$V(T) = \sup \{|\lambda| \mid \lambda \in V(B(X), T)\}.$$

Si  $r(T)$  désigne le rayon spectral, alors on sait que

$$r(T) \leq v(T) \leq \|T\|.$$

**Définition 3.6.3** Soit  $T \in B(X)$ , on dit que l'opérateur  $T$  satisfait la propriété d'extension à valeur unique si  $f(\lambda) \cong 0$  pour toute fonction analytique  $f$  de valeur  $x$  définie sur un ensemble ouvert du plan complexe avec  $(T - \lambda I)f(\lambda) \cong 0$ .

On note  $\Pi_{00}(T)$  l'ensemble des points isolés  $\lambda$  de  $\sigma(T)$  pour lesquels  $0 < n(T - \lambda I) < \infty$ , et par  $\Pi_{0A}(T)$  l'ensemble des points isolés  $\lambda$  de  $\sigma(T)$  pour lequel  $R(P_T \{\lambda\})$  est de dimension finie. Notez que  $\Pi_{0A}(T) \subseteq \Pi_{00}(T)$ . Désignons par  $W(T)$  le spectre essentiel de Weyl de  $T$  (tel que défini, pour exemple, dans [17], p. 206), soit

$$\sigma_\iota(T) = W(T) \cup \{\lambda; \lambda \text{ est un point limite de } \sigma(T)\}$$

Notez que

$$\sigma_\iota(T) = \sigma(T) \sim \Pi_{0A}(T)$$

[12] (où  $\sim$  désigne ici la différence d'ensemble). On dit que l'opérateur  $T \in B(X)$  satisfait le théorème de Weyl si

$$w(T) = \sigma(T) \sim \Pi_{00}(T) \quad (3.1)$$

Le résultat de Weyl, que les opérateurs auto-adjoints satisfont (3.1), a été étendu à plusieurs classes d'opérateurs [12]. Il est noté dans [12] que parmi les opérateurs apparentés aux opérateurs normaux, le théorème de Weyl ne s'étend pas sensiblement au-delà des semi-normaux. Ci-dessous nous montrons que pour tout opérateur paranormal  $T$ ,  $T$  et  $T^*$  satisfont le théorème de Weyl, donc étendant le théorème au-delà des semi-normaux. Nous obtenons également une classe d'opérateurs sur l'espace de Banach, y compris les isométries, qui satisfont la théorie de Weyl, dans le processus, dans [20] l'auteur a obtenu des résultats concernant les espaces propres d'un opérateur paranormal.

### Principaux résultats

Notons que si  $T$  est un opérateur paranormal sur  $X$  et  $\sigma(T)$  se trouve sur le cercle unitaire alors  $T$  est une isométrie inversible. En effet,  $T$  étant inversible,  $T$  et  $T^{-1}$  sont tous deux normaloïdes, étant paranormal.

Donc

$$\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$$

et

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|Tx\| \leq \|x\|$$

pour tout  $x \in X$ . Cela montre que  $T$  est une isométrie inversible.

**Théorème 3.6.1** [20] *Si  $T$  est un opérateur paranormal dans  $B(X)$ , alors tout point isolé de  $\sigma(T)$  est un pôle de la résolvante  $R_\lambda(T)$  d'ordre 1 et l'espace propre correspondant a un complément invariant.*

**Preuve.** Supposons que  $\lambda_1$ , soit un point isolé de  $\sigma(T)$ . Si  $\lambda_1 = 0$ , considérons l'opérateur paranormal  $T/R(P_T\{0\})$ . Puisque  $\sigma(T/R(P_T\{0\})) = \{0\}$ ,  $T/R(P_T\{0\}) = 0$ . Ainsi 0 est un pôle de la résolvante  $R_\lambda(T)$  d'ordre 1 [19, P.306]. Si  $\lambda_1 \neq 0$ , considérons  $T_1 = (1/\lambda_1)(T/R(P_T\{\lambda_1\}))$ . Alors  $T_1$  est un opérateur paranormal avec  $\sigma(T_1) = \{1\}$ , donc  $T_1$  et  $T_1^{-1}$  tous deux sont des isométries et  $\|T_1^n\| = 1$  pour  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Aussi nous avons  $T_1 = I + Q$ , où  $Q$  est un opérateur quasinilpotent. Il découle de [13, Sec5.Theorem3], que  $T_1 = I$ . Donc encore  $(T - \lambda_1)R(P_T(\lambda_1)) = 0$  et  $\lambda_1$  est un

pôle de la résolvante  $R_\lambda(T)$  d'ordre 1 . Ainsi, en utilisant [19, Theorem 5.8A],  $R(T - \lambda_1)$  est fermé et  $X = R(T - \lambda_1) \oplus N(T - \lambda_1)$  . Cette achève la preuve du théorème. ■

**Corollaire 3.6.1** *Si  $T \in B(X)$  est paranormal, alors  $T$  est isoloïde.*

**Corollaire 3.6.2** *Si  $T \in B(X)$  est une isométrie, alors chaque point de  $\sigma(T)$  est une valeur propre de  $T$  et l'espace propre correspondant a un complément invariant.*

**Remarque 3.6.1** *Le résultat ci-dessus a été prouvé dans [16] pour inversible isométries sur un espace linéaire normé.*

**Corollaire 3.6.3** [20] *Si  $T \in B(X)$  est paranormal, alors*

$$\Pi_{00}(T) = \Pi_{0A}(T)$$

et

$$\Pi_{00}(T') = \Pi_{0A}(T')$$

*Dans le cas d'un opérateur paranormal de l'espace de Hilbert  $T$  on a*

$$\Pi_{00}(T^*) = \Pi_{0A}(T^*)$$

**Preuve.** Si  $\lambda_1$  est un point isolé de  $\sigma(T)$  , alors  $\lambda_1$  est un pôle de la résolvante  $R_\lambda(T)$  d'ordre 1. Ainsi  $(T - \lambda_1)P_T\{\lambda_1\} = 0$  de sorte que  $R(P_T\{\lambda_1\}) \subseteq N(T - \lambda_1)$  implique que  $\Pi_{00}(T) \subseteq \Pi_{0A}(T)$  . Si  $\lambda_1$  est un point isolé de  $\sigma(T')$ , alors  $\lambda_1$  est un pôle de la résolvante  $R_\lambda(T)$  d'ordre 1. Ainsi  $(T - \lambda_1)P_T\{\lambda_1\} = 0$  . Prendre des conjugués,  $(P_T\{\lambda_1\})'(T - \lambda_1)' = 0$  . Comment  $(P_T\{\lambda_1\})' = P_{T'}\{\lambda_1\}$  et  $P_{T'}\{\lambda_1\}$  commute avec  $T'$ . D'où  $(T' - \lambda_1)P_{T'}\{\lambda_1\} = 0$ , alors  $\Pi_{00}(T') \subseteq \Pi_{0A}(T')$ . le résultat correspondant pour  $T^*$  peut être prouvé de manière similaire en prenant des adjoints. ■

**Théorème 3.6.2** [20] *Si  $T$  est un opérateur paranormal, alors  $N(T - \alpha) \perp N(T - \beta)$  pour des nombres complexes distincts  $\alpha$  et  $\beta$  fourni  $\alpha \neq 0$ .*

**Preuve.** Supposons  $|\alpha| \geq |\beta|$ . Soit  $Tx = \alpha x$  et  $Ty = \beta y$ . On le fera montrer que  $\|x\| \leq \|x + y\|$ . Soit  $M$  le sous-espace engendré par  $x$  et  $y$  et  $T_1 = T|_M$ . Alors  $\sigma(T_1) = (\alpha, \beta)$  et  $T_1$  étant normaloïde,  $\|T_1\| = r(T_1) = |\alpha|$ . Ainsi,  $V(T_1) = |\alpha|$ . Ainsi,  $\alpha \in bd(v(B(M), T_1))$ . Maintenant, d'après ([18, Proposition 1]),  $N(T_1 - \alpha) \perp R(T_1 - \alpha)$ . Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont pôles de la résolvante  $R_\lambda(T_1)$  d'ordre 1

$$R(T_1 - \alpha) = R(I - P_{T_1}\{\alpha\}) = R(P_{T_1}\{\beta\}) = N(T_1 - \beta)$$

[19, Theorem 5.8(A)]. Maintenant,  $x \in N(T_1 - \alpha)$  et  $y \in N(T_1 - \beta)$ . D'où  $\|x + y\| \geq \|x\|$ . Si  $|\alpha| < |\beta|$ ,  $\alpha \neq 0$  comme  $\beta \neq 0$ . Donc  $T_1$  est inversible et  $\sigma(T_1^{-1}) = (\alpha^{-1}, \beta^{-1})$  et  $|\alpha^{-1}| > |\beta^{-1}|$  tant paranormal,  $T_1^{-1}$  est aussi normaloïde. Comme dans le premier cas on obtient

$$N(T_1^{-1} - \alpha^{-1}) \perp N(T_1^{-1} - \beta^{-1})$$

Comme  $x \in N(T_1^{-1} - \alpha^{-1})$  et  $y \in N(T_1^{-1} - \beta^{-1})$ , la preuve est complète. ■

### Question

Est-ce que  $N(T) \perp N(T - \alpha)$  ?

**Remarque 3.6.2** [19, Corollary 3] Pour une isométrie  $T$  sur un espace normé,  $N(T - \alpha) \perp N(T - \beta)$  pour des scalaires distincts  $\alpha$  et  $\beta$ .

Cela peut être montré en complétant l'espace linéaire normal, en prolongeant l'isométrie à l'espace complété et en utilisant le Théorème 3.6.2.

**Corollaire 3.6.4** Si  $T$  est un opérateur paranormal sur un espace de Hilbert, alors  $N(T - \alpha) \perp N(T - \beta)$  pour tous les nombres complexes distincts  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Corollaire 3.6.5** Si  $X$  est un espace de Banach séparable et  $T \in B(X)$  est paranormal, alors  $T$  a une propriété d'extension à valeur unique.

**Preuve.** Nous allons montrer que  $\sigma_P(T)$  est dénombrable. Puis, par [16, P.22],  $T$  a une propriété d'extension à valeur unique. Si  $\sigma_P(T)$  n'est pas dénombrable, on aurait un ensemble indénombrable de vecteurs unitaires tels que  $\|x_i + x_j\| \geq 1$ . Puisque l'espace est séparable, ce n'est pas possible. ■

Dans [16] on remarque que pour un espace de Banach quelconque, il n'est pas savoir si un espace propre d'une isométrie a un complément invariant.

**Corollaire 3.6.6** *Si  $T$  est une isométrie sur un espace de Banach réflexif, alors tout espace propre de  $T$  a un complexe invariant*

**Preuve.** Si  $T$  est une isométrie et  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$ , alors

$$|\lambda| = 1 \text{ et } \|T\| = r(T) = v(T) = 1$$

Ainsi  $\lambda \in \text{bd}(v(B(M), T))$ . Comme  $X$  est réflexif, d'après [18, Remark 4],  $X = N(T - \lambda) \oplus R(T - \lambda)$ . ■

**Théorème 3.6.3** [20] *Si  $T$  est un opérateur paranormal sur un espace Banach, alors  $T$  et  $T'$  ( $T$  et  $T^*$  dans le cas d'un opérateur d'espace de Hilbert  $T$ ) les deux satisfont le théorème de Weyl.*

**Preuve.** D'après [12, Corollary 2.5], il suffit pour montrer que  $W(T) = \sigma_\iota(T)$ , cela prouverait le résultat pour  $T$ , comme  $W(T) = W(T')$  et  $\sigma_\iota(T) = \sigma_\iota(T')$ , le résultat suivrait pour  $T'$  et les relations  $\overline{W(T)} = W(T^*)$ ,  $\overline{\sigma_\iota(T)} = \sigma_\iota(T^*)$  donneraient le résultat pour  $T^*$ . On montrerait que tout  $\lambda$  dans  $\sigma(T) \sim W(T)$  satisfait la condition d'écart d'un sous espace propre de [11]. Alors par [11, Theorem 1(4i)], on obtient  $\sigma(T) \sim W(T) \subseteq \Pi_{00}(T)$ . Il en résulte facilement que  $\sigma_\iota(T) = W(T)$ . Noter que  $\sigma(T) \sim W(T) = \Pi_{0A}(T) \cup \{\sigma_\iota(T) \sim W(T)\}$ . Si  $\lambda \in \Pi_{0A}(T)$ , alors on peut trouver une suite  $\{\lambda_n\}$  telle que  $\lambda_n \in \zeta(T)$  pour tout  $n$  tel que  $\lambda$  est un point isolé de  $\sigma(T)$ . La condition d'écart est donc satisfaite ici. Soit  $\lambda$  dans  $\sigma_\iota(T) \sim W(T)$ , on peut trouver une suite  $\{\lambda_n\}$  valeurs propres non nulles de  $T$  converge vers  $\lambda$ . Maintenant  $N(T - \lambda_n) \perp N(T - \lambda)$  pour tout  $n$  par le Théorème 3.6.2. Donc  $d(x_{\lambda_n}, N(T - \lambda)) \geq 1$  pour tout  $x_{\lambda_n}$  dans  $N(T - \lambda_n)$  tel que  $\|x_{\lambda_n}\| = 1$ . Ainsi

$$\delta(\lambda_n, \lambda) \cong \sup \{d(x_{\lambda_n}, N(T - \lambda)) \mid x_{\lambda_n} \in N(T - \lambda_n) \text{ et } \|x_{\lambda_n}\| = 1\} \geq 1$$

Ce sera vrai pour tout  $n$ . Alors  $|\lambda_n - \lambda| / \delta(\lambda_n, \lambda) \rightarrow 0$  comme  $n \rightarrow \infty$ . ■

**Proposition 3.6.1** *Si  $T$  est un opérateur paranormal d'un spectre fini, alors il existe une base de  $X$  constituée de vecteurs propres de  $T$ , c'est-à-dire que  $X$  est une somme directe des espaces propres de  $T$ .*

**Preuve.** En utilisant [19, Theorem 5.7(A)] , on obtient

$$X = \oplus \sum_{i=1}^n R(P_T(\{\lambda_i\}))$$

où  $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , puisque  $\sigma(T) = \cup_{i=1}^n \{\lambda_i\}$  et chaque  $\{\lambda_i\}$  est un sous-ensemble fermé de  $\sigma(T)$ ,  $\sigma(T)$  étant fini. Mais

$$R(P_T \{\lambda_i\}) = N(T - \lambda_i), (i = 1, \dots, n)$$

puisque chaque  $\lambda_i$  est un pôle de résolvante d'ordre 1 par le théorème 3.6.1. Ainsi

$$X = \oplus \sum_{i=1}^n N(T - \lambda_i)$$

■

**Corollaire 3.6.7** *Si  $T$  est un opérateur paranormal sur un espace de Hilbert d'un spectre fini, alors  $T$  est normal.*

**Preuve.**

$$X = \oplus \sum_{i=1}^n N(T - \lambda_i) \text{ et } N(T - \lambda_i) \perp N(T - \lambda_j)$$

pour  $i \neq j$  donnent le résultat. ■

**Corollaire 3.6.8** [16, Corollary 4] . *Si  $T$  est une isométrie sur un espace linéaire normé de dimension finie  $X$  , alors  $X$  a une base constituée des vecteurs propres de  $T$  .*

**Preuve.** Ceci découle directement du Théorème 3.6.1 car l'espace normé de dimension fini est un espace de Banach. ■

# Bibliographie

- [1] T. Furuta, *On the Classe of Paranormal Operators*, Proc. Japan. Aca., 43, 594-598 (1998).
- [2] T. Andô, *On hyponormal Operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 14, 290-291 (1963).
- [3] T. Furuta, R. Nakamoto, and M. Hories, *A remark on a Classe of Operators*, Proc. Japan. Aca., 43, 607-609 (1967).
- [4] P. R. Halmos, *Hilbert Space Problem Book*. Van Nostrand. The University Series in Higher Mathematics (1966).
- [5] b Naylor, Arch W .; Vendez George R. (1982). *Théorie des opérateurs linéaires en ingénierie et sciences* . New York: Springer. ISBN 978-0-387-95001-3.
- [6] V. Istraescu, T. Saitô, and T. Yoshino: *On a classe of operators*. Tôhoku. Math. Journ., 18, 410-413- (1966).
- [7] V. Istraescu, *On some hyponormal operators*, Pacific Journ. Math., 22(3), 413-417 (1967).
- [8] G. H. Orland, *On a class of Operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 15, 75-79 (1964).
- [9] T. Saitô and T. Yoshino, *On a conjecture of Berberian*, Tôhoku. Math. Journ., 17, 147-149 (1965).
- [10] J. G. Stampfli, *Hyponormal operators*. Pacific Journ. Math., 12, 1453-1458 (1962).
- [11] K. Gustafson, *Necessary and sufficient condition for Weyl's theorem*, Michigan Math. Journ., 19, 71-81 (1972).

- [12] K. Gustafson, *On alebraic multiplicity*, Indiana Univ. Math. Journ., 25, 769-781 (1976).
- [13] S. R. Foguel, The relations between a spectral operator and its scalar part, Pacific Journ. Math., 8, 51-65 (1958).
- [14] J. R. Giles, Classes of semi-inner-product spaces, Tran. Amer. Math. Soc., 129, 436-446 (1967).
- [15] V. Istrătescu, T. Saitô and T. Yoshino, On a classe of operators, Tôhoku. Math. Journ., 18, 410-413 (1966).
- [16] D. Koehler and P. Rosenthal, On isometries of normed linear spaces, Studia Math., 36, 213-216 (1970).
- [17] M. Schechter, On the essential spectrum of an arbitrary operator, I. J. Math. Anal. Appl, 13, 205-215 (1966).
- [18] A. M. Sinclair, Eigenvalues in the boundary of the numerical range, Pacific Journ. Math., 35, 231-234 (1970).
- [19] A. E. Taylor, Introduction to functional analysis, (John Wiley & Sons, New york, London, Sydney, (1958).
- [20] N. N. Chorasias and P. B. Ramanujan, Paranormal operator on Banac pace, Bull. Aus-tra. Math. Soc., 21, 161-168 (1980).

**Résumé :** Dans ce mémoire on a discuté la classe des opérateurs paranormaux qui est une généralisation de la classe des opérateurs auto-adjoints avec quelques propriétés spectrales et plus précisément le théorème de Weyl.

**Mots clés:** Opérateur borné ; Spectre d'un opérateur ; Opérateur paranormal ; Théorème de Weyl.

**Abstract:** In this graduation note, we dealt with the class of paranormal operators as a generalization of the class of self-adjoint operators by presenting some spectral properties. In particular the Weyl's theorem.

**Keywords:** Bounded operator; Spectrum; Paranormal operator; Weyl's Theorem.

**ملخص :** في هذه المذكرة تناولنا صنف المؤثرات شبه التنظيمية، كامتداد لصنف للمؤثرات المطابقة لمرافقها من خلال عرض بعض خصائصها و خصائصها الطيفية وبالخصوص تحقيقها لنظرية ويل،

**كلمات مفتاحية:** المؤثر المحدود، طيف مؤثر خطي، مؤثر شبه تنظيمي، نظرية ويل