

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option : Équations aux dérivées partielles et applications

Par

AICHE ZINEB

Sujet

Etude Numérique d'un Ecoulement Potentiel

-un jet devant un obstacle-

Date de soutenance :04/06/2017

Devant le jury :

Mr. B.Bouderah	Prof. Univ de M'sila	Président
M ^d . W.Delloum	MAA. Univ de M'sila	Examinatrice
M ^d . N.Bounab	MCB. Univ de M'sila	Promotrice

Promotion : 2016 / 2017

Remerciements

Je tenons tuot d'abord à remercier Allah le tout puissant et miséricordieux qui nous a
donné

la santé, le courage, la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu Je remercions ma famille pour leur soutien morale et physiques et
encouragement tout au long des mon étude.

Je tenons à remercier également ma encadreur **M^{me}.Bounab** Noura pour tout les efforts
qu'il a fourni pour nous faciliter et aider a accomplir mon travail je le remarcions pour ses
conseils avisées qui ont rendu ce travail possible.

Mes remerciements vont aussi aux membres de jury d'avoir accepté
d'examiner et évaluer mon travail et pour

l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et de l'enrichir par leur propositions

Je remercions également tous les enseignants et les étudiants De département
mathématique de

l'université Mohamed Boudiaf de M'SILA et sans oublier tous ceux qui ont contribué de
prés ou de loin

à notre formation dans cette département.

Merci

Dédicace

*J*e dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon père.

- A ma soeurs *MALIKA*

-A mes frères *ABDERRAZAK, HAMZA, KHALED, SOFIEN, SAIFFE*

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- *J*e tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Table des Figures	1
Notation	2
Introduction	4
1 Notions préliminaires et définitions	5
1.1 Les écoulements des fluides	6
1.1.1 Écoulement stationnaire	7
1.1.2 Écoulement incompressible	7
1.1.3 Écoulement potentiel	7
1.1.4 Écoulement irrotationnel	8
1.1.5 Écoulement uniforme	8
1.2 Description d'un fluide en mouvement	8
1.3 Quelques équations de la mécanique des fluides	10
1.3.1 Équation de continuité	10
1.3.2 Conservation de l'énergie du fluide	12
1.3.3 Équation du mouvement des fluides	13
1.3.4 Les équations de Stokes	14
1.3.5 Théorème de Bernoulli	14
1.3.6 Ligne et Fonction de courant	14
1.3.7 Équations différentielles des fonctions ϕ et ψ	16
1.4 Utilisation de la théorie de la variable complexe.	17

1.5	Théorie des lignes de courant libres	18
1.6	Transformation de <i>Schwartz-Christoffel</i>	20
2	Application de la méthode des Volumes finis sur un problème de type jet	23
2.1	Introduction	24
2.2	Position du problème	24
2.2.1	Sur la solution exacte	25
2.3	Méthode des volumes finis	29
2.3.1	Schémas volumes finis :	32
2.3.2	Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement	34
2.3.3	Discrétisation de l'équation de continuité	35
2.4	Résolution de problème	35
2.5	Discussion des résultats	36
2.5.1	La Vitesse	36
2.5.2	La Pression Statique	36
2.5.3	Fonction de courant	36
	Conclusion général	40
	Bibliographie	41

Table des Figures

Figure 1.2.1: Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme

Figure 1.6.1: Plan de Ω .

Figure 1.6.2: Plan de variable λ

Figure 2.2.1: Plan de Z

Figure 2.2.2: Plan de Ω Transformé du plan Z par la transformation de *Kirchoff*

Figure 2.2.3: Plan de λ Transformé du plan Ω par la transformation de *Schwartz-Cristoffel*

Figure 2.2.4: Plan f Transformé du plan Z par l'application du $f = \Phi + i\psi$

Figure 2.3.1: principaux d'élément utilisé en 2D

Figure 2.3.2: Maillage d'un disque par des triangles.

Figure 2.3.3: Volume de contrôle pour la discrétisation de l'équation de transport d'un scalaire.

Figure 2.3.4: Grille volumes finis

Figure 2.5.1: Le schéma de l'écoulement

Figure 2.5.2: Le contour de la vitesse.

Figure 2.5.3: La vitesse(amplitude)

Figure 2.5.4: Contour de la pression statique.

Figure 2.5.5: La pression statique.

Figure 2.5.6: Le contour de fonction de courant.

Figure 2.5.7: La fonction de courant.

Notation

ρ	Masse volumique
\vec{u}	Le vecteur vitesse
m	La masse
\vec{a}	L'accélération
P	La pression
S	La surface
V	Le volume
n	La normale
f	La force
C	Une courbe
(x, y)	Le plan
g	Accélération de la pesanteur
$W:$	Nombre de Weber
$Fr:$	Nombre de Froude
i	Le nombre complexe
z	La variable complexe
\hat{p}	La <i>pression motrice</i>
L_c	Longueur caractéristique
T	Tension superficielle
(u, v)	Composantes du vecteur vitesse
g	L'accélération de la pesanteur
ψ	Fonction de courant
σ	Le tenseur des contraintes
$M_0(x_0, y_0, z_0)$	Position initiale
$\vec{r}(M_0, t)$	Le vecteur position
ds	élément de surface de normale n
$\phi(x, t)$	la fonction potentielle
Plan Z	Le domaine d'écoulement réel

Introduction

L'étude de la mécanique des fluides remonte au moins à l'époque de la Grèce antique avec le célèbre savon Archimède, connu par son principe qui fut à l'origine de la statique des fluides. Aujourd'hui, la dynamique des fluides est un domaine actif de la recherche avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus.

En mécanique des fluides, les problèmes des écoulements à surface libre d'un fluid parfait sont étudiés grace à leur importance d'application dans plusieurs domaines. Les premiers travaux dans ce secteur sont caractérisés par l'utilisation de la méthode d'hodographe et de la transformation de Schwartz-Christoffel, qui peuvent traiter les écoulements qui ont une géométrie polygonale.

L'écoulement d'un fluid parfait a été étudié par plusieurs chercheurs tel Dias et J.M Vanden-Broeck (1990) [1]; où ont étudié un écoulement en émergeant un bec bidimensionnel sous un angle. Différents problèmes de ce genre ont été étudié par Vanden-Broeck [2], H.Mekias et B.Bouderah[3] , A.Gasmi et H.Mekias [4]et N.Bounab[5] et d'autres.

Dans ce travail on propose d'étudier numériquement un écoulement à surface libre d'un fluide parfait devant un obstacle à la forme d'un creux triangulaire(type jet); l'écoulement est supposé bidimensionnel et potentiel. Pour ça, le plan de variable (x, y) d'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$. Théoriquement, La solution exacte pour la forme de la surface libre est calculer par Madam H.Sekhri [6], l'effet des forces de la tension de surface et de la gravité sont négligés.

Notre travail est composé de deux chapitres :

Le premier chapitre présent les notions préliminaires et les équations de la mécanique des fluide: la théorie de la variable complexe, les lignes de courant,et comment transforme

l'intérieur d'un polygone en demi-plan supérieur (ou inférieur) d'un autre plan par la transformation de Schwartz-Christoffel.

Dans le deuxième chapitre: on a étudié numériquement un problème d'un écoulement potentiel bidimensionnel (type jet) en utilisant la méthode des Volumes finis et à l'aide de logiciel Fluent pour traiter quelques caractéristiques telles que: la pression, la vitesse et la fonction de courant.

Chapitre 1

Notions préliminaires et définitions

Résumé

Dans ce chapitre on présente quelques définitions et notions de base pour la mécanique des fluides

Contenu

- 1-1 Les écoulements des fluides
- 1-2 Description d'un fluide en mouvement
- 1-3 Quelques équations de la mécanique des fluides
- 1-4 Utilisation de la théorie de la variable complexe.
- 1-5 Théorie des lignes de courant libres
- 1.6 Transformation de *Schwartz-Christoffel*

Les fluides

Un fluide (liquide ou gaz), selon les physiciens, est un corps simple composé d'atomes ou de molécules identiques. Du point de vue mécanique, la définition d'un matériau est liée à sa déformation en fonction des contraintes : "un fluide, c'est quelque chose qui coule" sous l'action d'une contrainte donnée et même si la déformation est grande, ceci ne provoque pas la perte de cohésion entre ses molécules.

Les deux états de la matière :

Un liquide a "un volume propre, mais pas de forme propre", alors qu'un **gaz** n'a pas de "volume propre mais tend à occuper tout l'espace qui lui est offert". Sous les conditions normales de pression et de température, la distinction entre liquide et gaz est évidente mais à cause de la continuité de l'état fluide le passage de la phase gazeuse à la phase liquide peut se faire sous simple modification (augmentation de la température par exemple).

Fluides visqueux

La viscosité d'un fluide, qui est la propriété inverse de la fluidité, est la caractéristique de résistance au glissement ou à la déformation d'un fluide.

Fluides parfaits

Un fluide parfait, dont l'écoulement se fait "sans frottements internes", est un fluide considéré comme non visqueux. Le modèle du fluide parfait permet de rendre compte assez convenablement de la structure de certaines régions d'écoulements réels ou de la modéliser, mais jamais de la structure complète de ceux-ci. Une des caractéristiques principales de la mécanique des fluides apparaît ici : pour représenter des faits ou des observations, elle fait appel à des modèles, dont le degré de raffinement est variable. En raison de l'extrême complexité des phénomènes qu'elle tente de décrire, elle ne peut se passer de tests expérimentaux (réalisation de maquettes, testées dans un bassin, qui serviront à la conception des navires ; essais en soufflerie pour la construction aéronautique, etc.).

1.1 Les écoulements des fluides

Dans la vie quotidienne, dans la nature et dans le domaine industriel, les écoulements sont toujours présents. La circulation de l'oxygène dans notre organisme est l'un des exemples de

l'importance de l'écoulement dans la vie humaine. Les tsunamis, les cyclones ou les coulées de lave sont aussi des exemples de l'écoulement mais qui conduisent quelquefois à de grands dégâts pour l'humanité

1.1.1 Écoulement stationnaire

Les écoulements stationnaires, sont les l'écoulements dont les composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps.

Dans ce type des écoulement on a:

$$\partial_t u = \partial_t \rho = \partial_t T = \partial_t p = 0$$

Un tel écoulement est possible lorsque le domaine, les forces massiques appliquées, les sources de chaleur et les conditions de bord sont elles aussi indépendantes du temps. par exemple Les équations de *Navier-Stokes* stationnaires s'écrivent

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

1.1.2 Écoulement incompressible

Un écoulement est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donné ne varie pas en fonction de la pression extérieure sa masse volumique est constante

$$\rho = \text{cte}$$

1.1.3 Écoulement potentiel

On dit qu'un écoulement est potentiel si sa vecteur vitesse est derivé d'un potentiel c'est-à-dire:

$$\vec{u} = \nabla \phi$$

La fonction $\phi(x, t)$ est le potentiel des vitesses.

1.1.4 Écoulement irrotationnel

Un écoulement est appelé écoulement irrotationnel si:

$$\overrightarrow{rot} u = 0 \quad (1.1.2)$$

Naturellement, un écoulement qui n'est pas irrotationnel est dit rotationnel.

Un écoulement potentiel est un écoulement irrotationnel. En effet, on a :

$$U = \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)$$

$$rotU = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \right\} = 0$$

1.1.5 Écoulement uniforme

Un écoulement bidimensionnel à surface libre est dit uniforme si l'écoulement est de vitesse constante

$$A1=A$$

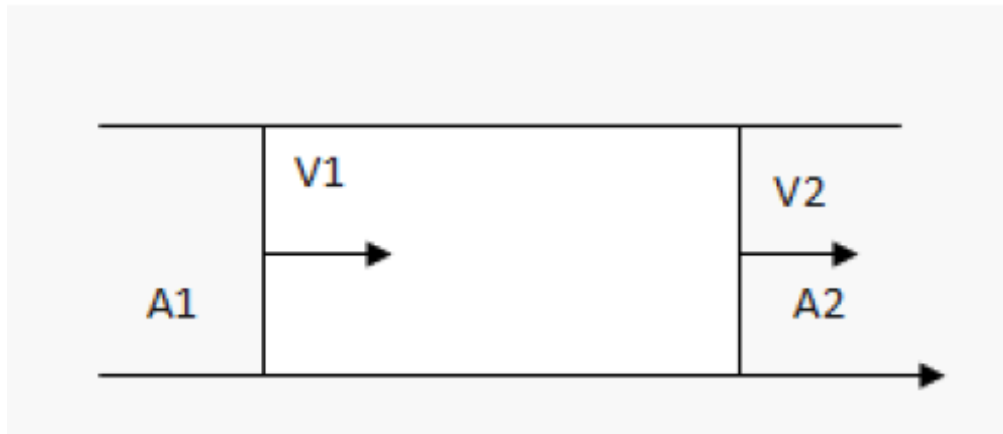


Figure 1.1.1 Représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme

1.2 Description d'un fluide en mouvement

En mécanique, il y a deux façons pour décrire les mouvement des particule:

Description de Lagrange

Cette méthode consiste à étudier les différentes quantités (P, ρ , température T ...etc.) pour chaque particule individuellement lors de son mouvement.

Dans la description Lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées. L'identité d'un particule est donnée par sa position initiale $M_0(x_0, y_0, z_0)$. La description du mouvement est donc de déterminer le vecteur position $\vec{r}(M_0, t)$ à tout instant t pour toutes les particules du fluide.

$$\vec{r} = \vec{r}(M_0, t) \text{ ou } \vec{r} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0, t).$$

C'est-à dire :

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t).$$

Et

$$\vec{u} = \vec{u}(M_0, t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(M_0, t); \vec{a} = \vec{a}(M_0, t) = \frac{d\vec{u}}{dt}(M_0, t)$$

Description d'Euler

La méthode d'Euler consiste à décrire l'écoulement en donnant composantes de la vecteur vitesse et autres quantités physiques en chaque point de l'espace i.e. on fixe un point dans l'espace et on remarque les variations des quantités liées aux particules du fluide passant par ce point.

A l'instant t_1 , on détermine en M une particule P_1 de vitesse \vec{u} et d'autres caractéristiques physique K .

A l'instant $t_2 = t_1 + dt_1$, on trouve au même point M de l'espace, une autre particule P_2 de vitesse et des caractéristiques physique différentes.

Donc, on a en M et à l'instant t_1

$$\vec{u} = \vec{u}(P_1, t_1) = \vec{u}(x, y, z, t_1).$$

Et

$$K = K(P_1, t_1) = K(x, y, z, t_1).$$

Et à l'instant t_2 , on a au même point M

$$\vec{u} = \vec{u}(P_2, t_2) = \vec{u}(x, y, z, t_2).$$

Et

$$K = K(P_2, t_2) = K(x, y, z, t_2).$$

1.3 Quelques équations de la mécanique des fluides

1.3.1 Équation de continuité

Soit une partie d'un fluide de masse volumique ρ délimitée par une surface fermée S (de volume V). Soit dS un vecteur élémentaire de cette surface, orienté vers l'extérieur à la surface fermée. La partie de fluide a une masse $m = \iiint_V \rho dV$. Le débit massique sortant de la surface S est égal à $\iint_S \rho \vec{u} dS$. La conservation de la masse s'écrit

$$\frac{dm_s}{dt} - \iint_S \rho \vec{u} dS = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Où $\frac{dm_s}{dt}$ représente le **débit massique** de fluide interne au volume considéré, compté positivement s'il s'agit d'une source et négativement s'il s'agit d'un puits. Compte tenu du théorème d'Ostrogradsky pour transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume,

$$\iint_S \vec{u} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dV$$

L'équation de conservation de la masse écrite

$$\frac{dm_s}{dt} = \iiint_V \left\{ \operatorname{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} dV$$

L'égalité écrite ci-dessus est valide quel que soit le volume V considéré et l'intégrale est nulle, ce qui conduit à l'expression locale de la conservation de la masse :

$$\operatorname{div} (\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.3.1)$$

Deux cas particuliers sont alors à considérer

1. Si **le fluide est incompressible** la masse volumique n'évolue pas au cours du temps et l'équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (1.3.2)$$

Pour un écoulement stationnaire ou non stationnaire. Cet écoulement est dit **isovolume**.

L'équation (1.3.2) exprime la conservation du volume d'un élément de fluide au cours de sa déformation par l'écoulement.

2. Le cas d'un **écoulement stationnaire** $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ alors

$$\operatorname{div}(\rho u) = 0 = \rho \operatorname{div} u + (u \cdot \nabla)\rho$$

En dehors du cas 1, l'écoulement peut être isovolume si $(u \cdot \nabla)\rho = 0$, c'est-à-dire les variations de masse volumique sont orthogonales, en tout point, au vecteur vitesse. Ce cas correspond à des écoulements stratifiés par salinité ou température (courants marins), ou par température et humidité (atmosphère).

En pratique, un fluide en écoulement peut être considéré comme incompressible si plusieurs conditions sont réunies :

a. La vitesse typique de l'écoulement U est petite devant la vitesse du son c , c'est-à-dire, le nombre de Mach $\varepsilon = U/c$ est petit devant l'unité. Dans l'eau où la vitesse du son est voisine de 1500m/s cette condition est presque toujours vérifiée. En revanche, dans l'air où c est de l'ordre de 300m/s , de nombreux écoulements, en particulier en aéronautique, sont influencés par la compressibilité du fluide.

b. Dans un écoulement non stationnaire, si v est la fréquence typique de variation temporelle de la vitesse, v doit être telle que $1/v \ll c/L$ où L est une dimension caractéristique de l'écoulement. C'est-à-dire qu'à l'échelle du temps typique de fluctuation de la vitesse, une onde de pression se propage très rapidement à travers tout l'écoulement. Il est

évident que si on s'intéresse à la propagation des ondes sonores, il faut tenir compte de la compressibilité du fluide.

c. Il est nécessaire que la variation de pression due à une force extérieure (la gravité par exemple) soit petite devant la pression absolue. Cette dernière condition est presque toujours satisfaite, même si on considère des écoulements atmosphériques sur des échelles verticales très grandes.

1.3.2 Conservation de l'énergie du fluide

Nous allons évaluer l'évolution temporelle de l'énergie cinétique d'un élément de fluide de volume unité et de masse, en nous limitant aux écoulements de fluides incompressibles :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (1.3.3)$$

En utilisant l'équation de mouvement pour exprimer la dérivée eulérienne de la vitesse, (1.3.3) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = \rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} + u_i f_i$$

Soit, en décomposant le tenseur des contraintes comme précédemment en une partie isotrope $-p\delta_{i,j}$ et en un déviateur $d_{i,j}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = -u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho u^2}{2} + p \right) + \frac{\partial u_i d_{i,j}}{\partial x_j} + d_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i f_i \quad (1.3.4)$$

Ou bien, en notation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} \right) = -u \cdot \nabla \left(\frac{\rho u^2}{2} + p \right) + \nabla \cdot (u \cdot d) - d \cdot \nabla u + u \cdot f \quad (1.3.5)$$

Enfin, en tenant compte de la condition d'incompressibilité ($\nabla \cdot u = 0$), nous pouvons mettre le premier terme du membre de droite de (1.3.5) sous la forme d'une divergence, soit :

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[u \left(\frac{\rho u^2}{2} + p \right) - u \cdot d \right] - d \cdot \nabla u + u \cdot f \quad (1.3.6)$$

Récrivons cette équation d'évolution de l'énergie cinétique sous forme intégrale, en intégrant chacun des termes sur un volume V fixe dans le repère "eulérien" et en utilisant le théorème de la divergence :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V e_c dV \right) = - \int_S \frac{\rho u^2}{2} u \cdot n dS + \int_S (\sigma \cdot u) \cdot n dS + \int_V u \cdot f dV - \sigma \cdot \nabla u dV \quad (1.3.7)$$

Quelle est la signification physique des différents termes de (1.3.7) :

- le premier terme du second membre est le flux d'énergie cinétique "convectée" par l'écoulement à travers la surface S .
- le second terme est le travail, par unité de temps, des contraintes exercées sur la surface S .
- le troisième terme est le travail, par unité de temps, des forces en volume.
- enfin, le quatrième terme est associé à la déformation du volume V . Il représente l'énergie dissipée par viscosité lors de cette déformation.

1.3.3 Équation du mouvement des fluides

Par la relation fondamentale de la dynamique, la variation temporelle de la quantité de mouvement d'un élément de volume V est égale à la somme des forces qui s'exercent sur cet élément de volume, soit :

$$\frac{d}{dt} \int_V [\rho u dx] = \int_V f dx + \int_{\Sigma} \sigma \cdot n dS,$$

Où Σ est la surface délimitant le volume V , ds est un élément de surface de normale n , f est la force exercée par unité de volume et σ le tenseur des contraintes. La masse de l'élément de fluide ρdx reste constante dans ce mouvement. Il est donc possible d'écrire

$$\frac{d}{dt} \int_V [\rho u dx] = \int_V \rho \frac{du}{dt} dx.$$

L'intégrale des forces de surface peut s'écrire, à l'aide du théorème d'Ostrogradsky sous la forme $\int_v \operatorname{div} \sigma dx$. En faisant tendre le volume V vers zéro l'équation de mouvement devient :

$$\rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) = f + \operatorname{div} \sigma. \quad (1.3.8)$$

1.3.4 Les équations de Stokes

En négligeant dans l'équation de Navier-Stokes incompressible stationnaire les termes proportionnels à la masse volumique du fluide $(u \cdot \nabla)u$, on obtient l'équation de Stokes

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (1.3.9)$$

Plus la vitesse de l'écoulement est petite en regard des dimensions de Ω et de la valeur de la viscosité, plus le modèle de Stokes est une approximation valable des équations de *Navier-Stokes*. La différence fondamentale entre les deux équations est que le terme non linéaire en vitesse a disparu, l'équation de Stokes est une équation aux dérivées partielles linéaire.

1.3.5 Théorème de Bernoulli

Premier théorème de Bernoulli

Dans un écoulement stationnaire, le long d'une trajectoire on a conservation de la charge,

$$H = \frac{\widehat{p}}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{constante}$$

$$\widehat{p} = p + \rho g z$$

Second théorème de Bernoulli

Dans un écoulement potentiel l'équation d'Euler s'écrit

$$\begin{aligned} \rho \left[\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \frac{u^2}{2} \right] &= -\nabla \widehat{p} \\ \iff \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{\widehat{p}}{\rho} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = \frac{\partial \phi}{\partial t} + g H \end{aligned}$$

1.3.6 Ligne et Fonction de courant

Dans le cas des écoulements bidimensionnelles, le concept de lignes de courant est rattaché à l'équation de continuité si on considère que le fluide est incompressible i.e. $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ alors :

$$\overrightarrow{\text{div}}u = 0$$

Ou encore

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.3.10)$$

On introduit une nouvelle fonction ψ de x et y que l'on appelle **fonction de courant**, vérifiant

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.3.11)$$

Les surfaces définies par ($\psi = cte$) sont des **lignes de courant**, en effet, la différentielle exacte de ψ est donne

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy \quad (1.3.12)$$

Puisque $\psi = cte$, alors $\partial \psi = 0$, on trouve l'équation de la ligne de courant d'après (1.3.11). Soient, C une courbe fine qui part d'un ligne de courant vers autre caractérisée par $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$ respectivement.

Soient \vec{n} un vecteur unitaire normale à C et orienté dans le sens de l'écoulement, le flux à travers C donné par

$$Q = \int_C \vec{u} \cdot \vec{n} = \left(\int_C -u \frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \int_C (v dx - u dy) dt$$

D'où

$$Q = \int_C \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \int_C d\psi$$

Par conséquent

$$Q = \psi_1 + \psi_2 \quad (1.3.13)$$

1.3.7 Équations différentielles des fonctions ϕ et ψ

Soit un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible non-visqueux. Puisque :

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$$

Et

$$\text{div } \vec{u} = 0$$

Il vient que:

$$\text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}}\phi \right) = 0$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

C'est-à-dire

$$\Delta \phi = 0 \quad (1.3.14)$$

De même, d'après :

$$\vec{u} = (u, v) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

Et

$$\overrightarrow{\text{Rot}}u = 0$$

On trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

C'est-à-dire

$$\Delta\phi = 0$$

D'où, la fonction potentielle ϕ et la fonction ligne de courant ψ et vérifient l'équation de **Laplace**. Un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible, non visqueux est dit écoulement potentiel.

1.4 Utilisation de la théorie de la variable complexe.

Soient ϕ et ψ la fonction potentielle et la fonction de courant respectivement d'un écoulement potentiel bidimensionnel. On rapport le plan d'écoulement au plan complexe en écrivant $z = x + iy$, puis on définit la fonction complexe $f(z)$ par

$$f(z) = \phi + i\psi \tag{1.4.1}$$

Tel que $i^2 = -1$

$f(z)$ est appelé le potentiel complexe de l'écoulement.

Puisque la partie réel et la partie imaginaire de $f(z)$ vérifient l'équation de Laplace, de plus on a

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Alors les relations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.4.2}$$

La théorie des variable complexe offre une méthode, très puissante pour obtenir des solutions de quelques écoulement. Si le plan (x, y) est considéré comme plan de $z = x + iy$ la fonction $f(z)$ sera analytique dans le domaine de l'écoulement.

De plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ &= u - iv \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Sera aussi analytique le plan de l'écoulement. Cette très importante propriété va nous paramètre d'utiliser, par la suite, la théorie des fonctions analytiques complexe pour résoudre notre problème considéré.

Transformations conformes

Dans un certain nombre de problèmes, on cherche à résoudre une équation, par exemple l'équation de Laplace $\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy}$, dans le plan (x, y) avec des conditions aux limites. L'idée est de se ramener à des domaines d'intégration plus simples en faisant un changement de variable. Ce changement de variable $(x, y) \rightarrow (X, Y)$ est une transformation géométrique ; si cette transformation conserve les angles, il n'y a souvent que peu de changements dans la forme de l'équation. Par exemple pour l'équation de Laplace, on aura à résoudre $\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$ dans le nouveau domaine.

Une transformation $z = x + iy \rightarrow Z(z) = X(x, y) + iY(x, y)$ est dite conforme si elle conserve les angles. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation soit conforme est que la fonction $Z(z)$ soit analytique. Les points où la dérivée $Z'(z)$ est nulle/infinie peuvent être des points singuliers de la transformation. Au voisinage de tels points, on peut exprimer Z de la façon suivante :

$$Z = Z_0 + (z - z_0)^p f(z_0) + O((z - z_0)^{1+p}),$$

avec $p \in \mathbb{N}^+$ et $f(z_0) \neq 0$. Si $p = 1$, la transformation est conforme en ce point ; si $p > 1$, les angles ne sont pas conservés : là où les points où Z' s'annule, l'image d'une ligne continue présente un point anguleux. L'idée de base de la transformation conforme est d'utiliser les singularités locales pour transformer des conditions aux limites compliquées en conditions plus simples.

1.5 Théorie des lignes de courant libres

La théorie des lignes de courant libres consiste à étudier les problème d'écoulement potentiel, bornés par des parois rigides rectilignes et des lignes de courant libres de formes inconnues, sur les quelles la pression est supposée constant. Si les lignes de courant libres ne sont pas présentes et les effets de gravité sont négligées, la région d'écoulement dans le plan physique

est un polygone. Aussi les lignes de courant libres présentes et les effets de gravité ainsi que les effets de la tension de surface sont négligées, la région d'écoulement peut être transformée par une transformation conforme à une région polygonale. Cette région est un parfait du plan hodographe défini

$$\Omega = \log(1/\frac{df}{dz})$$

Dans le cas où l'écoulement est délimité partiellement par des surfaces libres on donne la méthode de résolution introduite par *Kirchhoff* (1869).

L'idée est d'introduire la fonction complexe Ω définie par :

$$\begin{aligned}\Omega &= \log(U/\frac{df}{dz}) = \log(\frac{U}{u-iv}) \\ \Omega &= \log(\frac{U}{q}) + i\theta\end{aligned}$$

Où $f = \phi + i\psi$, $\frac{df}{dz} = u - iv$, $q = \sqrt{u^2 + v^2}$, (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse suivant de l'axe x et l'axe y respectivement, θ est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et U la vitesse de référence.

La partie réelle de Ω est constante sur la ligne de courant libre, i.e. $\log(\frac{U}{q}) = cte$

La partie imaginaire de Ω est constant sur chaque paroi rectiligne, i.e. $\theta = cte$. Par conséquent, l'écoulement est représenté par un figure plane de côtés rectiligne (polygone) noté Ω . A l'aide de transformation de *Schwarz-Christoffel*, le domaine Ω polygonal est transformé en un demi plan supérieur de la variable auxiliaire λ , Ainsi, dans le plan λ l'écoulement est uniforme représenté par la fonction potentielle $F(\lambda) = c\lambda$. Et par conséquent, par les transformations inverses des transformations conformes utilisées, on peut retrouver l'écoulement original $f(z)$.

Pour illustre ce qui précède, on donne quelques propriétés de la transformation conforme de *Schwarz-Christoffel*

1.6 Transformation de *Schwartz-Christoffel*

On considérons un polygone [figure 1.6.1] dans le plan Ω , ayant pour sommets A_1, A_2, \dots, A_n et pour angle intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Soient A_1, A_2, \dots, A_n les points correspondant respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de l'axe réel du plan des λ [figure 1.6.2]. Transformation de *Schwartz-Christoffel*, transforme l'intérieur d'un polygone en demi-plan supérieur (ou inférieur) d'un autre plan. La transformation est donnée par :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \alpha(\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} \quad (1.6.1)$$

Ou bien

$$\Omega = \alpha \int \alpha(\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\lambda + \beta \quad (1.6.2)$$

Ou α et β sont des constantes complexes. On notera que:

- 1-Parmi les points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ on peut en choisir trois arbitrairement.
- 2-Les constantes α et β déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
- 3-Il est commode de choisir un point, par exemple λ_n , à l'infini, cas dans lequel le facteur de (1.20) n'existe pas.
- 4-Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limités de polygones.

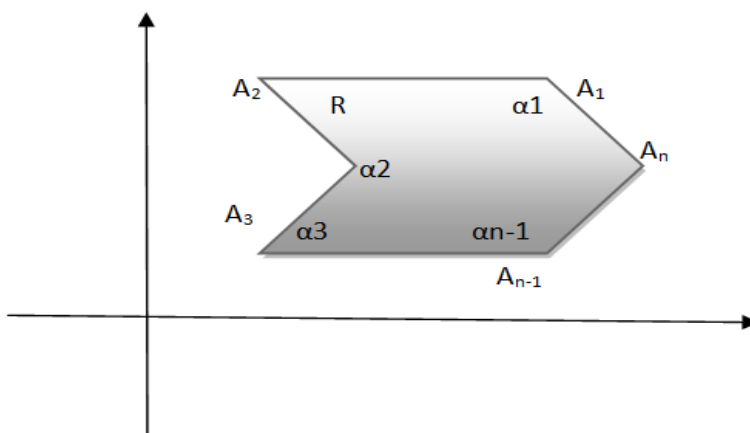


Figure 1.6.1 Plan de Ω

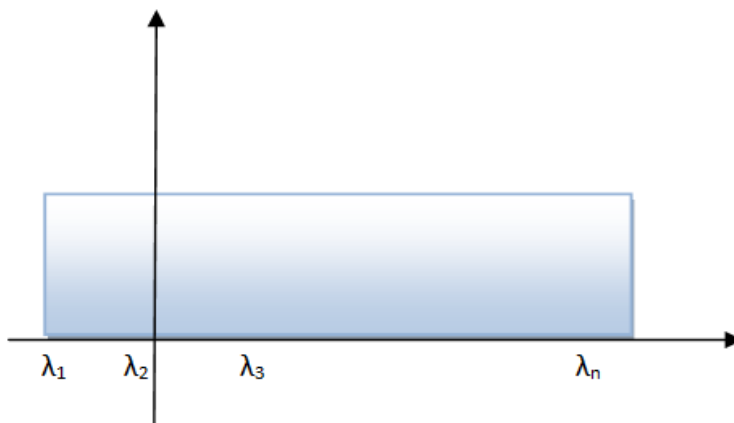


Figure 1.6.2 Plan de variable λ

Nombre de Weber

Le nombre de Weber (W) est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser l'écoulement de fluides à l'interface d'un système multiphasique. Il correspond au rapport des forces d'inertie et la tension superficielle.

On le définit de la manière suivante :

$$W = \frac{\rho u^2 L_c}{T}$$

Le nombre de Weber est principalement utilisé pour l'étude d'écoulement film et la formation de gouttes ou bulles.

Nombre de Froude

Le nombre de Froude étant le rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle gravitationnelle (mgL_c). Il se définit donc de la manière suivante

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gL_c}}$$

Chapitre 2

Application de la méthode des Volumes finis sur un problème de type jet

Résumé

Dans ce chapitre, on va cité la solution exacte d'un écoulement potentiel bidimensionnel à surface libre dans un creux triangulair, ensuite etudion les caracterctiques (Vitesse, la pression statique et la pression toutal) en utilisant la méthode de volume fini.

Contenu

- 2-1 Introduction
- 2-2 Position du problème
- 2-3 Méthode des volumes finis
- 2-4 Resolution de problème
- 2-5 Discussion des Resultats

2.1 Introduction

Les méthodes des volumes finis (sont méthode de résolution numérique) ont été parmi les premières à atteindre un stade de développement avancé pour les calculs d'écoulements stationnaires et instationnaires, cette méthode comme toute méthode de résolution numérique continue comporte une phase de maillage et une phase de discrétisation.

La phase de maillage consiste à diviser le domaine d'étude en de petits volumes appelés volumes de contrôle. La phase de discrétisation transforme le problème continu en un problème discret. Les équations ainsi que les conditions aux limites sont approchées par des équations et conditions discrètes.

L'objectif de ce chapitre est de appliquer la méthode des volumes finis sur un problème d'écoulement bidimensionnel à surface libre d'un fluide parfait avec les effets de gravité et de tension de surface sont négligées.

2.2 Position du problème

On considère un écoulement bidimensionnel d'un fluide incompressible, délimité par un fond rigide rectiligne $ABCDE$ avec $\left(AB = 2.5m, BC = CD = \frac{1}{\sqrt{3}}m = 0.57m, DE = 1.5m \right)$ du creux triangulaire d'angle au sommet $C : \theta = \frac{2\pi}{3}$ et une surface libre, $(FGHIJ)$ (figure 2.2.1) on suppose que l'écoulement à l'infini est uniforme de vitesse U . Sur la surface libre, puisque la tension de surface et les forces de gravité sont négligées, l'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = cte$$

On a le problème suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi = 0 \quad \text{avec les conditions limite} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \quad \text{sur AB, DE} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{p}{\rho} = cte \quad \text{sur la surface libre } FHJ \end{array} \right.$$

2.2.1 Sur la solution exacte

Une solution exacte est calculée (par Madame SAKHRI) en utilisant la transformation hodographe et transformation de *Schwartz-Christoffel* . Pour trouver la solution, a utilisée les étapes suivantes :

1^{ère} étape

La transformation hodographe Ω transforme le domaine d'écoulement réel dans le plan (x, y) en un domaine d'écoulement de frontière polygonal dans le plan $\left(\log\left(\frac{U_0}{q}\right), \theta\right)$ (Figure 2.2.2).

2^{ème} étape : La transformation de Ω à λ

Par la transformation de *Schwartz-Christoffel* le domaine d'écoulement dans le plan Ω est transformé en un demi plan supérieur de la variable complexe λ . tel que, dans le plan λ , les points correspondants sont $A = F(\lambda = -1)$, $B(\lambda = -a)$, $C(\lambda = 0)$, $D(\lambda = +a)$, $E(\lambda = +1)$, $G(\lambda = -b)$, $H(\lambda = \pm\infty)$, et $I(\lambda = +b)$ (Figure 2.2.3). On trouve la représentation conforme

3^{ème} étape

Le domaine d'écoulement réel dans le plan Z est transformé à une bande de largeur LU_0 dans le plan de la variable $f = \phi + i\psi$, en choisissant $\psi = 0$ sur la ligne de courant (AB, BC, CD, DE) et $\phi = 0$ au sommet C du creux triangulaire; ainsi que $\psi = +LU_0$ sur la surface libre $FGHIJ$ (Figure 2.2.4).

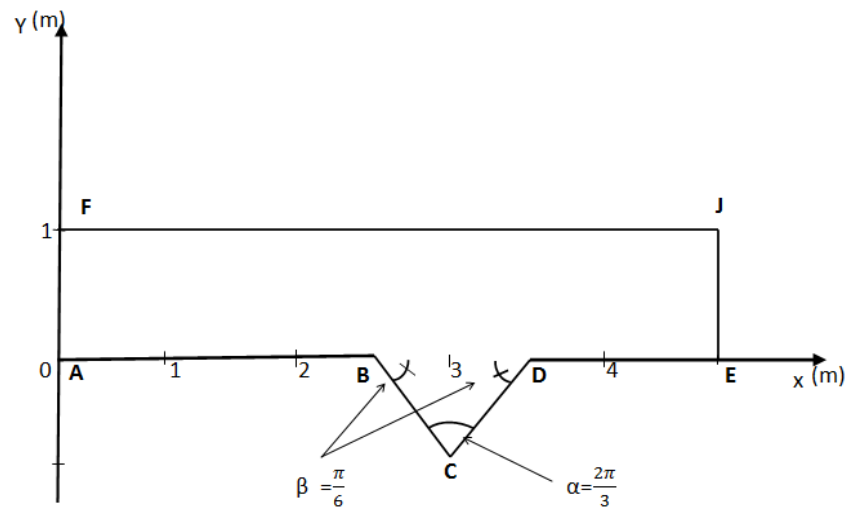


Figure 2.2.1 Plan Z . Schéma d'un écoulement bidimensionnel dans une canal avec un creux triangulaire

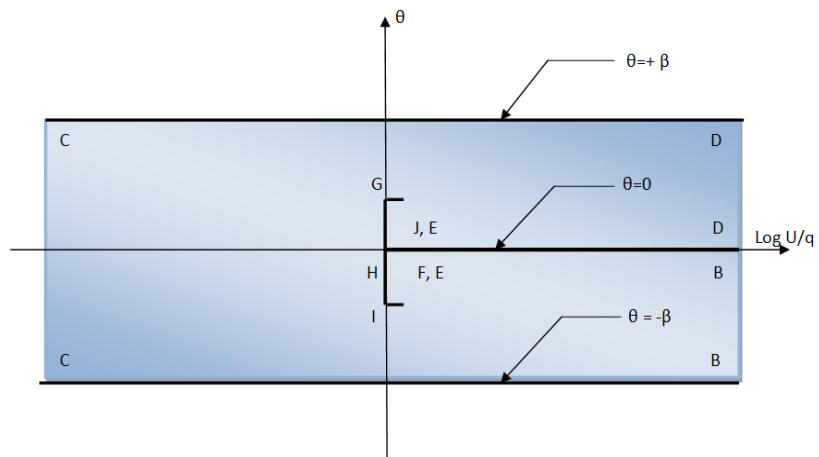


Figure 2.2.2 plan Ω

Transformation du plan Z par la transformation de Kirchoff.

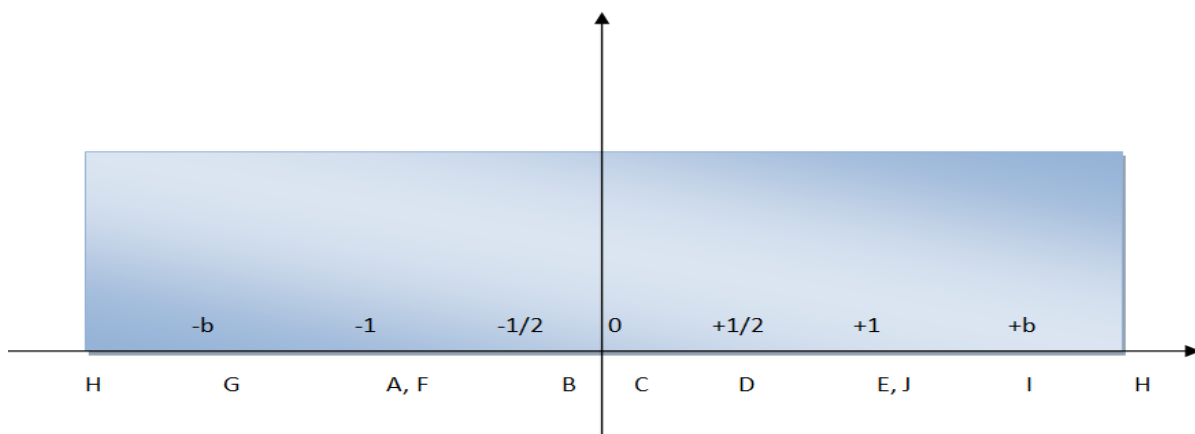
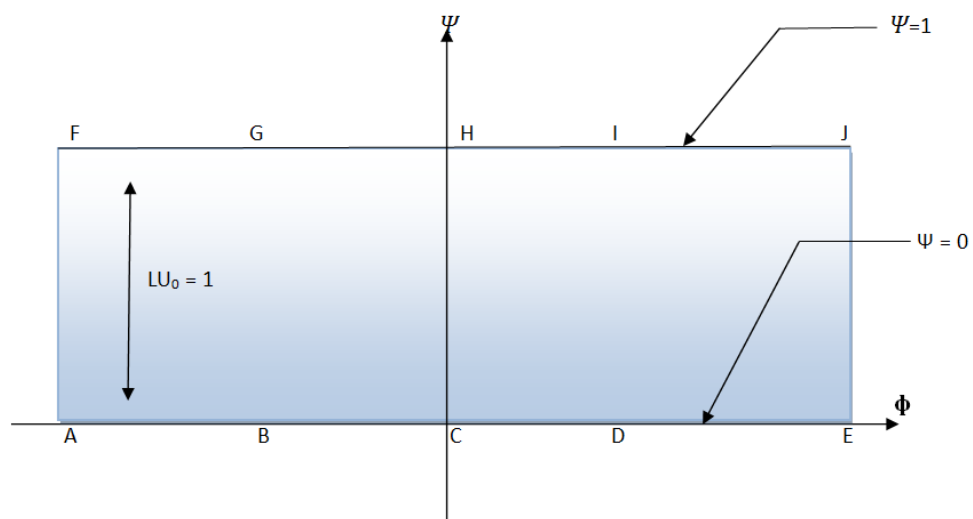


Figure 2.2.3 plan λ

transformation du plan Ω par la transformation de Schwartz-Christoffel.

Figure 2.2.4 Plan de f

Transformation du plan Z par l'application du $f = \phi + i\psi$

2.3 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est caractérisée par son avantage à satisfaire la conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie dans tous les volumes finis ainsi dans tout le domaine de calcul. Elle facilite la linéarisation des termes non linéaires dans les équations de conservation telle que le terme source par exemple. La méthode consiste à partager le domaine de calcul en plusieurs volumes, ou chaque volume entoure un nœud. En utilisant différents schémas d'approximations on peut intégrer des équations différentielles modelisantes sur chaque volume de contrôle, ou les valeurs et les quantités sont stockées aux nœuds du volume de contrôle

Ces équations algébriques produites exécriment la conservation des quantités pour le volume de contrôle et pour tout le domaine de calcul.

Maillage

"Fluent" traite plusieurs types de maillages très compliqués qui sont en général importés directement d'autres logiciels de génération de maillages ("GAMBIT" par exemple) . pour l'utilisation correcte de "Fluent" et pour connaître le lien entre les nœuds (cellules) ciblées et les nœuds ou faces voisines, il est à noter que "Fluent" mentionne (dans ses mécanismes internes) les points avec les indices $i, j, k, 1...etc$. En plus il donne des topologies de certaines grilles qu'il accepte de résoudre selon le problème pose, on donne comme exemple les figures suivantes

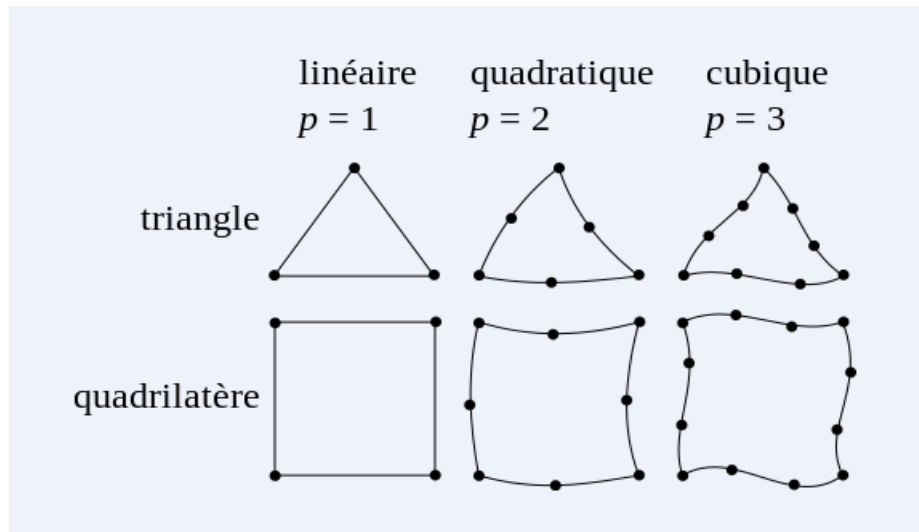


Figure 2.3.1 principaux d'élément utilisé en 2D

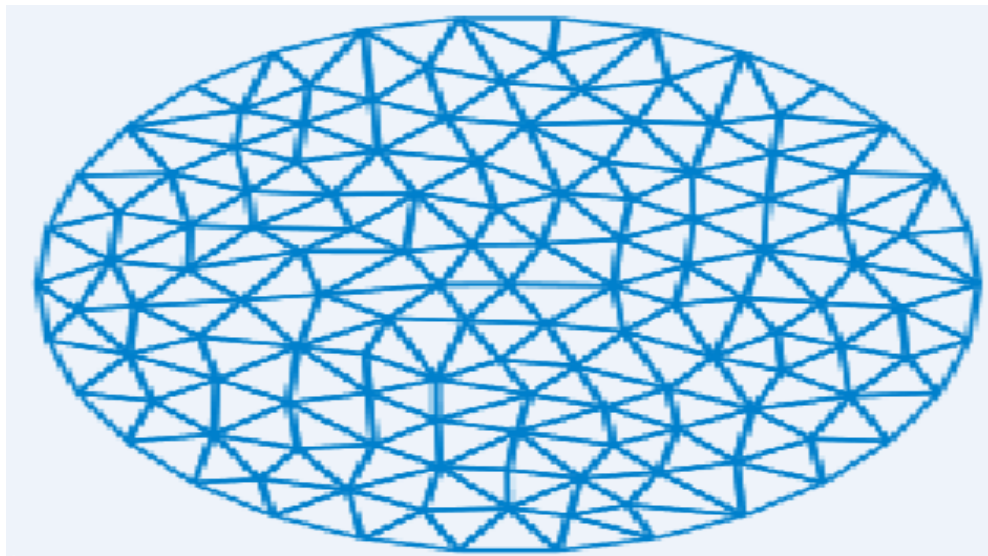


Figure 2.3.2 Maillage d'un disque par des triangles

Discrétisation

Le code "Fluent" utilise une technique qui consiste à intégrer les équations différentielles sur chaque volume de contrôle puis de les convertir en équation algébriques. En prenant la figure (2.3.2) comme exemple d'un maillage tétraédrique et pour un cas stationnaire du transport d'un scalaire Φ , la discrétisation se fera par rapport aux faces des cellules comme suit :

$$\oint \rho \Phi u dA = \oint \Gamma_{\Phi} \nabla \Phi dA + \int_v S_{\Phi} dV$$

F_{Φ} : coefficient de diffusion.

Dernière équation exprime que la quantité de Φ produit par unité de temps à l'intérieur du polyèdre est égale à la quantité de Φ qui sort nette par unité de temps à travers la surface (les N faces) enveloppant le volume de contrôle V , par convection et par diffusion. Pour chaque volume de contrôle on aura:

$$\sum_f^{N \text{ faces}} \rho u_f \Phi_f A_f = \sum_f^{N \text{ faces}} \Gamma_{\Phi} (\Delta \Phi)_n A_f + S_{\Phi} v$$

Remarque : les valeurs discrètes du scalaire sont stockées au centre des cellules. Les valeurs aux faces du terme convectif nécessaires à la résolution de la dernière équation sont interpolées un schéma amont des valeurs aux centres des cellules.

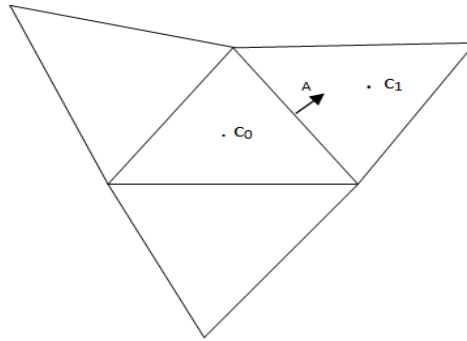


Figure 2.3.4 Volume de contrôle pour la discrétisation de l'équation de transport d'un scalaire

2.3.1 Schémas volumes finis :

Schémas centrés :

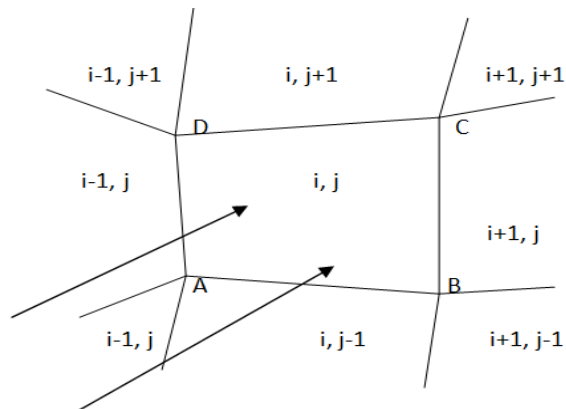


Figure 2.3.4 Grille volumes finis

En se plaçant dans le cas d'inconnues au centre des mailles on a les choix suivants

1. $F_{AB} = \frac{1}{2}[F_{i,j} + F_{i,j-1}]$ avec $F_{i,j} = F(u_{i,j})$

$$2. F_{AB} = F\left(\frac{u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2}\right)$$

$$3. F_{AB} = \frac{1}{2}[F_A + F_B]$$

$$\text{avec } F_A = \frac{1}{4}[F(u_{i,j})F(u_{i-1,j}) + F(u_{i,j-1}) + F(u_{i-1,j-1})]$$

$$\text{et } F_B = \frac{1}{4}[F(u_{i,j})F(u_{i+1,j}) + F(u_{i,j-1}) + F(u_{i+1,j-1})]$$

$$\text{et } F_A = F\left(\frac{u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4}\right) \text{ et } F_B = F\left(\frac{u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}}{4}\right)$$

Schémas décentrés

Prenons le cas d'un flux dirigé comme sur la figure (2.3) ci-dessus. Dans le cas de schémas décentrés, on calcule le flux à travers AB en prenant la valeur $F(u_{i,j-1})$ et ainsi de suite pour les flux à travers les faces BC, CD, et DA. On prend donc

$$F_{AB} = F(u_{i,j-1}) \quad F_{BC} = F(u_{i,j}) \quad F_{CD} = F(u_{i,j}) \quad F_{DA} = F(u_{i-1,j})$$

Ce choix conduit à des approximations du premier ordre.

Schéma du premier ordre amont

"Fluent" considère pour ce schéma que la valeur stockée au centre d'une cellule est la moyenne de toutes les valeurs de la même cellule. Les valeurs aux faces sont égales à celles se trouvant à l'amont.

Schéma du second ordre amont

Il y a lieu d'une reconstruction linéaire multidimensionnelle. C'est-à-dire qu'on effectue un développement en série de Taylor des valeurs aux centres des cellules. La valeur sur la face sera:

$$\Phi_f = \Phi + \nabla\Phi\Delta S$$

Φ et $\nabla\Phi$; sont la valeur du scalaire dans la cellule centrale et son gradient. ΔS :est le vecteur déplacement de la cellule centrale en amont vers la face centrale.

D'après le théorème de divergence :

$$\nabla\Phi = \frac{1}{V} \sum_f^{N \text{ faces}} \Phi_f \tilde{A}$$

La dernière équation représente une deuxième approche basée sur le calcul d'un gradient à partir d'un bilan sur un volume de contrôle au lieu de faire la somme des dérivées dans toutes les directions.

Schéma Quick

Pour un maillage quadrilatéral ou hexaédrique on n'a qu'une seule face ou cellule en amont et on aval, ce schéma est décrit comme suit :

$$\Phi_e = \theta \left[\frac{S_d}{S_c + S_d} \Phi_P + \frac{S_c}{S_c + S_d} \Phi_E \right] + (\theta - 1) \left[\frac{S_u}{S_c + S_u} \Phi_P + \frac{S_c}{S_c + S_u} \Phi_w \right]$$

$\theta = 1$: c'est une interpolation centrée au second ordre.

$\theta = 0$: c'est le schéma second ordre amont.

$\theta = 1/8$: c'est le schéma Quick traditionnel dans le code "Fluent". θ est choisi d'une manière dépendante de la solution pour éviter d'introduire un nouvel extremum à celle-ci (à noter que pour un maillage hybride θ sera pris nul pour les faces des cellules non quadrilatérales ou non hexaédriques).

2.3.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

L'équation différentielle de transport de quantité de mouvement est la suivante :

$$\oint \rho \vec{U} d\vec{A} = - \oint P I d\vec{A} + \oint \tau d\vec{A} + \int_v \vec{F} dV$$

$-\oint P I d\vec{A}$: est la force totale de pression sur les N faces de polydre, ou :

I : est la matrice identité \vec{A} est le vecteur de surface.

A est la force totale visqueuse sur les N faces du polydre. Ou :

τ : est le tenseur de contraintes.

$\int_v \vec{F} dV$: est la force totale de volume sur le volume du polydre, ou :

\vec{F} est le vecteur de force.

L'équation discrétisée aura la forme suivante :

$$a_p U = \sum_f^{N \text{ faces}} a_{nb} U_{nb} + \sum_f^{N \text{ faces}} P \check{A} + S$$

Ou : a et a_{nb} sont les coefficients de linearisation. L'indice nb (neighbor) correspond aux cellules adjacentes.

2.3.3 Discrétisation de l'équation de continuité

$$\oint \rho U dA = 0$$

Sous forme discrétisée

$$\sum_f^{N \text{ faces}} J_f A_f = \sum_f^{N \text{ faces}} \rho U_n A_f = 0$$

A_f : est l'aire de l'une des N faces enveloppant le volume fini.

U_n : est le composant de vitesse normale à la face.

L'équation de continuité sert comme équation pour la pression.

2.4 Résolution de problème

Un fichier de données (extension .cas) est créé suite à la lecture du fichier contenant les détails de la géométrie (extension .msh). Après vérification du maillage, on passe au type de solveur. Pour notre cas, c'est un solveur d'écoulement avec une formulation implicite pour un cas dimensionnel et un écoulement stationnaire prenant en considération des vitesses absolues. D'autres équations peuvent être ajoutées selon les phénomènes étudiés (transfert de chaleur, combustion, multi phases ...).

Les autres étapes du menu "define" sont le choix du fluide (air), des conditions d'opération (introduction de l'effet de la gravité et de la pression de référence) et l'introduction des conditions aux limites.

Le dernier menu utilisé pour entamer le calcul est le menu "solve". On doit choisir les équations à résoudre, les schémas de discrétisation, les facteurs de sous-relaxation et les critères de convergence. Le calcul est initialisé d'après les conditions aux limites.

2.5 Discussion des résultats

2.5.1 La Vitesse

A l'aide de la simulation de CFD, on aboutit à les résultats ci-dessous .

D'après les figures (2.5.1) et (2.5.2), on remarque que la vitesse de l'écoulement atteint ses valeurs bas (presque nulle) dans le creux juste au prés de son centre de gravité (au prés de point critique $x_0 = 2.24 \times 10^{-1}m/s$) et aussi à coté des angles B et D , mais elle augmente peu à peu au prés de la surface libre (au bord des paroi: CD et DE)et elle continue son augmentation de puis la sortie du creux (sommet D qui est le point critique) de $3.13m/s$ jusqu'à $4.47m/s$.

2.5.2 La Pression Statique

D'après les figures ((2.5.3)–(2.5.4)) , on remarque que la pression statique est presque nulle au point ($x = 3$ m) juste au centre de gravité de creux.Puis elle s'augmente au sommets de triangle depuis 1.26×10^3 Pa (sommet B), jusqu'à: où elle atteint son maximum 3.82×10^3 Pa au sommet critique D .

On peut considérer alors que le point d'angle D est $\beta = \frac{\pi}{6}$ comme un point de choc pour le fluide c'est-à-dire si on change l'angle le liquide peut se changer en ce point.(c'est -à-dire le fluide change quelques propriétés comme sa pression statique) .

2.5.3 Fonction de courant

Concernant la fonction de courant , sur la figure(2.5.6) on observe que cette fonction est dense au prés du parois FJ ($4.31 \times 10^3 kg/s$) et elle diminue au premiers temps au prés dde la surface libre ($8.63 \times 10^2 kg/s$) elle se continue de diminuer jusqu'au prés des parois AB , BC , CD , DE et aussi dans le creux triangulaire presque qu'elle sera nulle.



Figure 2.5.1 Le schéma de l'écoulement

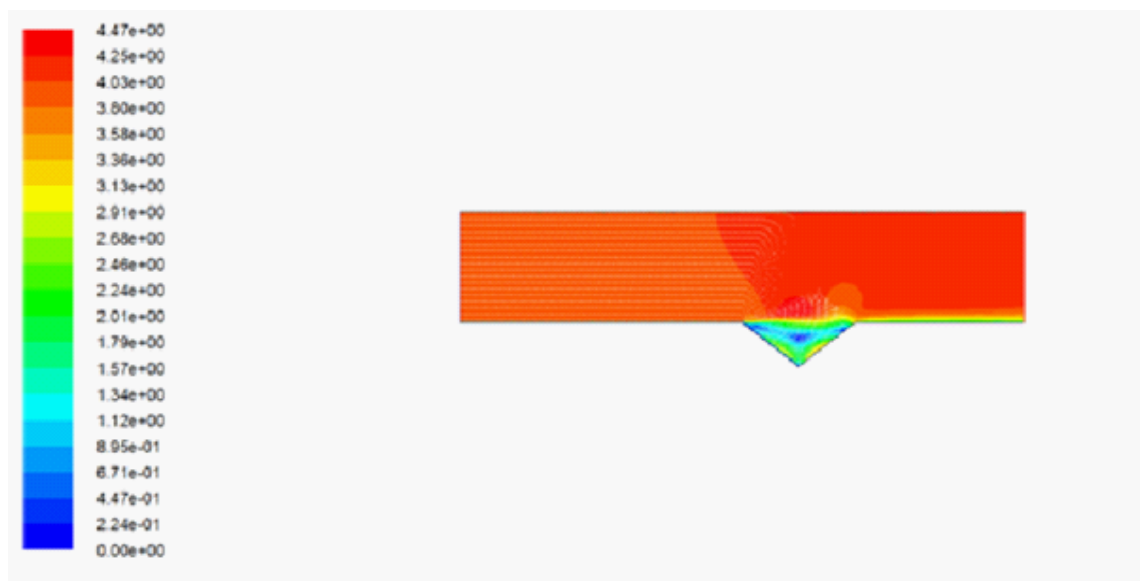


Figure 2.5.2 Le contour de la vitesse.

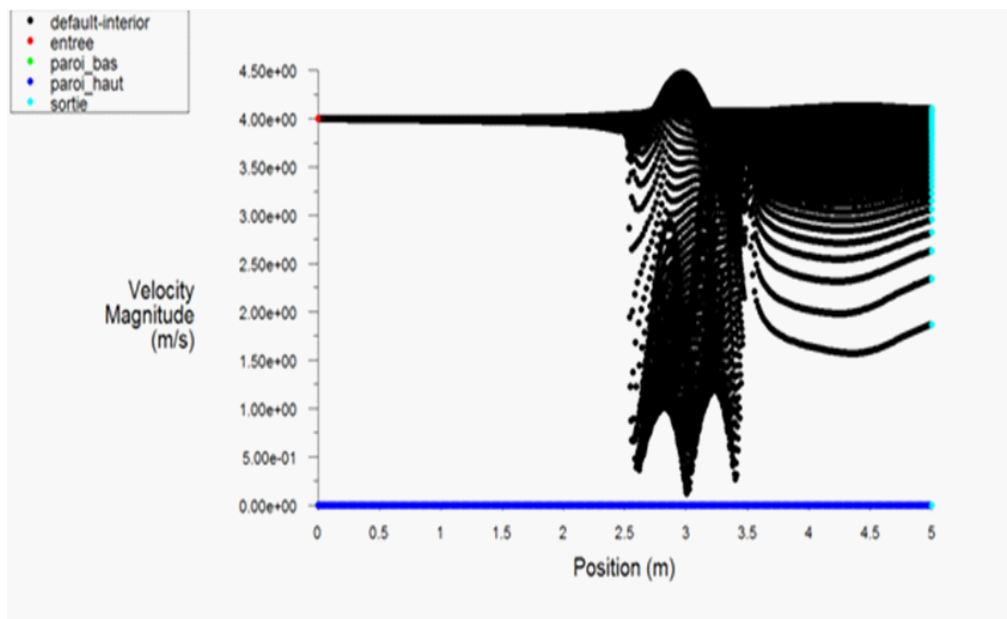


Figure 2.5.3 La vitesse(amplitude)



Figure 2.5.4 Contour de la pression stastique.

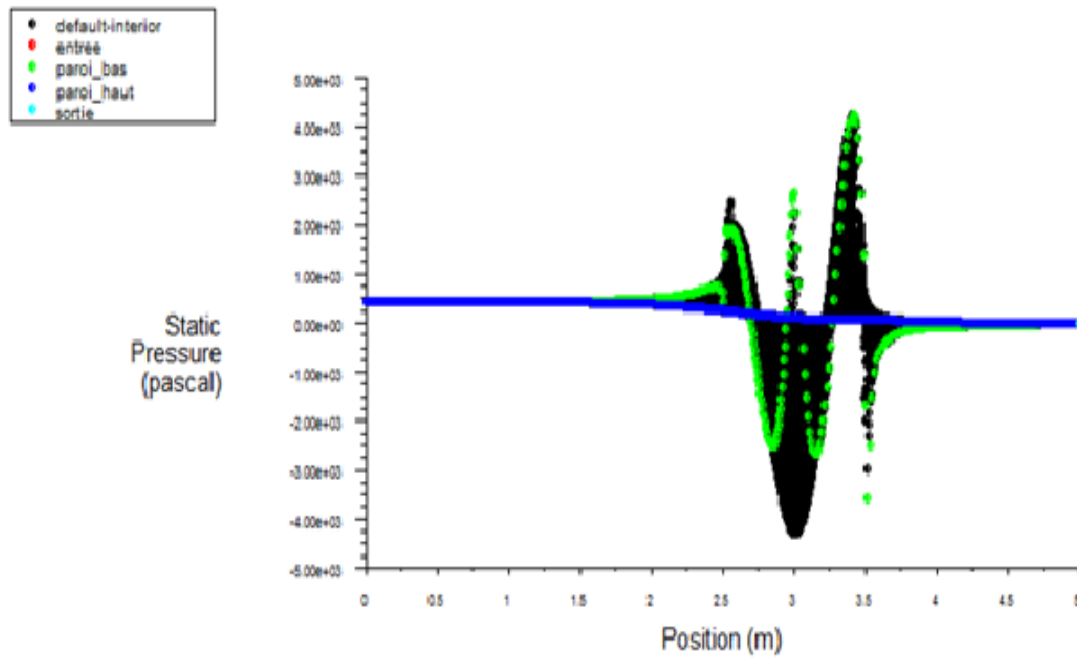


Figure 2.5.5 La pression statique.

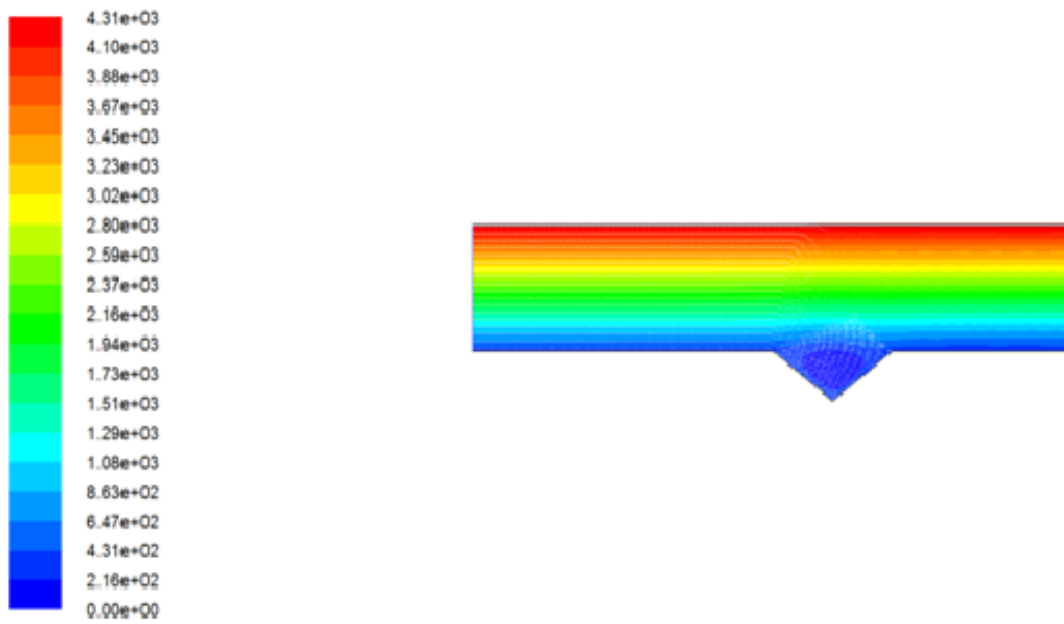


Figure 2.5.6 Le contour de fonction de courant.

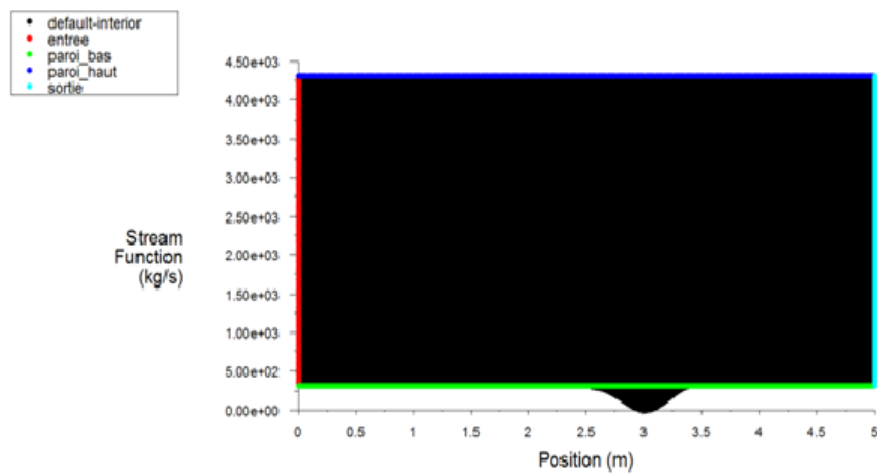


Figure 2.5.7 Fonction de courant

Conclusion générale

Dans ce mémoire on a étudié numériquement un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel à surface libre d'un fluide parfait et incompressible , où on a appliqué la méthode des volumes finis à l'aide du logiciel de calcul Fluent qui nous a donné des résultats puissantes concernant : la vitesse, la pression statique et la fonction de courant.

En fin, changeant la géométrie d'obstacle , l'état de l'écoulement (quelques caractéristiques de fluide) ou bien l'application d'autres techniques de calculs seront notre perspectives et des futures recherches dans plusieurs angle ($\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$...).

Bibliographie

- [1] F.Dias and J.M. Vanden-Broeck, Flows emerging from a nozzle and filling under gravity, J. Fluid. Mech, 213 (1990), 465-477.
- [2] J M Vanden-Brock, Free streamline model for a rising bubble, phys. fluids, 29(9) (1986), 2798-2801.
- [3] B.Bouderah and H.Mekias, The effets of surface-tention on the free surface flow due to submerged source, far J.Appl .Math 4(2)(2000), 159169
- [4] A. Gasmi and H. Mekias, A jet from a container and flow past a vertical. at plate, Appl. Math, Sci. 1 (2007), 2687-2698.
- [5] N.Bounab, Simulation Numérique de Quelques écoulements potentiels en 2D "Curved Nozzle" Thèse de doctorat de l'Université Mohamed Boudiaf de M'sila (2015).
- [6] H.Sekhri, Ecoulement a surface libre sur une depression de forme triangulaire. Mémoire de Magistere , Université de Batna
- [7] Zaynab Salloum, Étude mathématique d'écoulements de fluides viscoélastiques dans des domaines singuliers, Thèse de doctorat de l'Université Paris-Est (2008)
- [8] Mame Souhila, SUR Les Applications de la techniques des transformations conforme à un probleme d'écoulement d'un fluide Université Mohamed Boudiaf de M'sila (2015/2016)
- [9] Mécanique des fluides, par Emmanuel Plaut a Mines Nancy Version du 31 Août 2016

- [10] Marc Fermigier, Mécanique des Fluides, ParisTech - ESPCI - Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes
- [11] Christophe Ancey, Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides École Polytechnique Fédérale de Lausanne Écublens CH-1015 Lausanne page(14-16)
- [12] W.Delloum, Résolution numériques d'un problème non linéaire dans un domaine à frontière libre devant un obstacle (Moèle House), Mémoire de Magistère , Université Mohamed Boudiaf de M'sila
- [13] Mr DJERAD Abdelkader, Étude numérique d'un écoulement réactif dans une configuration axisymétrique par la méthode de volumes finis, Mémoire de Magistère , Université Mohamed Boudiaf de M'sila (2009/2010)
- [14] GAMBIT 2.0 documentation:User's guide.Modeling guide.tutorial guide .fluent.Inc (2001).
- [15] Fluent 6.0 Documentation :User's guide fluent .Inc(2001).

RESUMES

Ce travail consiste à étudier numériquement un écoulement potentiel bidimensionnel (type jet) devant un creux triangulaire en négligeant les force de la gravité et les tensions de la surface, et en utilisant la méthode des volumes finis à l'aide du logiciel Fluent pour traiter quelques caractéristiques de fluide telles que : la pression, la vitesse et la fonction de courant .

Les mots clé : surface libre, écoulement, incompressible, Fluent.

ABSTRACT

The aim of this work is a numerical study of an incompressible and tow-dimensional potential flow problem (jet type) in front of an obstacle triangular excavation without the gravity and the surface tension. We applied the finite volumes method using the Fluent logiciel in order to examine some proprieties of the fluid that: the pressure, velocity and the streamline function.

Key words: free surface, flow, incompressible, Fluent

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة تدفق كموني ثنائي الأبعاد لسائل غير قابل للانضغاط ذو سطح حر امام عائق متمثل في حفرة مثلثية الشكل، مع اهمال قوي الجاذبية و تأثير السطح .

لدراسة خصائص السطح الحر السائل و ذلك باستعمال طريقة الحجوم المنتهية بهدف دراسة بعض خصائص السائل مثل: السرعة , الضغط ودالة التدفق.

كلمات مفتاحيه : سطح حر , تدفق , سائل غير قابل للانضغاط , برنامج الفليانت,