



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF - M'SILA  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES



# THÈSE

*Présentée pour l'obtention du diplôme  
de Doctorat en sciences*

**Spécialité**

*Mathématiques*

**Option**

*Mathématiques Appliquées*

**Par**

DELLOUM Wahiba

**Thème**

**ETUDE ET SIMULATION NUMERIQUE DES ECOULEMENT  
AUTOUR DES DIFFERENTS OBSTACLES**

Soutenu le .19/02/2025

Devant le jury composé de :

GASMI Abdelkader	Prof	Université de M'sila	Président
BOUDERAH Brahim	Prof	Université de Mostaganem	Encadreur
MERZOUGUI Abdelkarim	Prof	Université de M'sila	Examineur
ARIOUA Yacine	Prof	Université de M'sila	Examineur
MAROUANI Abdelbaki	Prof	université de Setif	Examineur
RAHMOUNE Azzedine	Prof	université de B.B. Arreridj	Examineur
BOUNAB Noura	MCB	Université de M'sila	Invité

Année Universitaire : 2024/2025

# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma gratitude envers Allah le Tout-Puissant, qui m'a accordé la volonté et le courage nécessaires pour réaliser et achever ce modeste travail. Ce projet a été mené sous la direction du professeur BOUDERAH BRAHIM, auquel je suis très reconnaissant pour l'opportunité qu'il m'a offerte. Ses remarques pertinentes et son esprit de synthèse m'ont permis d'adopter une nouvelle perspective sur la problématique. Je le remercie également pour l'intérêt et le suivi qu'il a manifestés tout au long de ma thèse. J'adresse mes sincères remerciements au Dr BOUNAB pour son aide et son soutien dans la réalisation de ce travail. Je tiens à également mes sincères remerciements à l'honorable professeur MERZOUGUI pour son aide et son intérêt pour le sujet.

Je tiens à exprimer ma gratitude à ceux qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail, en particulier le Professeur GASSMI de l'Université de M'sila qui a bien voulu accepter de présider le comité de discussion. Je remercie également Monsieur ARIWA de l'Université de M'sila et Messieurs MAROUNI de l'Université de Sétif et RAHMONE de l'Université de B.B. Arreridj qui ont accepté de porter un regard critique sur cette thèse en tant que rapporteurs. . J'exprime aussi ma gratitude envers l'ensemble du personnel technique et administratif de l'Université de M'sila pour leur disponibilité et leur gentillesse, ainsi qu'à tous ceux qui ont contribué, de manière indirecte, à l'élaboration de cette thèse dans une atmosphère conviviale. Enfin, je remercie mon amie Dr Ahlam et Dr houria pour son soutien et mes enfants pour leurs encouragements à poursuivre ce travail.

"Enfin, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à ma famille, qui m'a non seulement apporté son aide, mais m'a également soutenu et encouragé durant les moments difficiles, ce qui m'a permis d'atteindre ce niveau de compétences."

---

# Dédicace

"Je dédie ce modeste travail :

À mes enfants Salah, Dounai, Nada et Mourad

À mes parents, ma mère et mon père

À mes sœurs

À mes frères

À toute ma famille

À mes amies Noura, Messouda, Ahlem , houria et Meryam

À toutes mes amies

Je souhaite également remercier l'ensemble des étudiants et étudiantes de ma promotion.

Enfin, je dédie ce mémoire à mes collègues et à tous ceux qui me sont chers."

# NOTATIONS

• Variables contenant un tilde ( $\sim$ ) représentent des variables de dimensions physiques, tandis que les variables sans tilde ( $\sim$ ) sont des variables sans dimensions.

Soit  $\vec{u}$  le champ vectoriel tel que  $\vec{u} = (u(x, y), v(x, y))$

- $Rot(\vec{u}) = \nabla \wedge \vec{u}$
- $div(\vec{u}) = \nabla \cdot \vec{u}$
- $\Delta(u(x, y)) = \frac{\partial^2(u(x, y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u(x, y))}{\partial y^2}$
- $T$  Tension de surface
- $\alpha$  Nombre de Weber
- $\beta$  Angle d'inclinaison à l'horizontale
- $LM$  Courbure de la surface libre
- $\rho$  Densité de fluide
- $p$  Pression du fluide
- $p_0$  Pression atmosphérique
- $q$  Module de la vitesse
- $f$  Fonction potentielle complexe
- $i$  Le nombre complexe
- $Z$  La variable complexe
- $\Psi$  Fonction de courant
- $\sigma$  Le tenseur des contraintes
- $\vec{r}$  Le vecteur position
- $\Phi(x, y)$  La fonction potentielle de la vitesse
- $H$  Hauteur de fluide
- $U$  Vitesse à l'infini
- $\xi$  Vitesse complexe conjugué

---

# Liste des figures

Fig 1.1: Lignes de courant.

Fig 1.2: Tube de courant

Fig 2.1: La description du problème

Fig 2.2: Demi-domaine variable  $Z$

Fig 2.3: Plan  $\Omega$

Fig 2.4: Plan  $\lambda$

Fig 2.5: Plan  $f$

Fig 2.6: Solution exacte

Fig 3.1: Plan  $Z$

Fig 3.2: plan  $F$

Fig 3.3: plan  $W$

Fig 3.4: Comparaison entre la solution réelle et la solution approximative

Fig 3.5: Courbe de la surface pour  $a = 0.6$ ,  $b = 0.3$ ,  $\beta = \frac{\pi}{3}$  avec différentes valeurs de

$\alpha$

Fig 3.6: Courbe de la surface pour  $a = 0.4$ ,  $b = 0.2$  et  $\beta = \frac{\pi}{3}$ , différentes valeurs  $\alpha$

Fig 3.7: Courbe de la surface pour  $a = 0.8$ ,  $b = 0.2$  et  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = 100$

Fig 3.8 : Courbe de la surface pour  $a = 0.8$ ,  $b = 0.4$  et  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , différentes valeurs  $\alpha$

Fig 3.9 : Courbe de la surface pour  $a = 0.8$ ,  $b = 0.4$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$  différentes valeurs de  $\alpha$

Fig 3.10: Courbe de la surface pour différentes valeurs de  $\alpha$  lorsque  $b = 0.8$ ,  $\beta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\alpha =$

100

Fig 3.11: Courbe de la surface pour différentes valeurs du nombre de webre lorsque  $a = 0.8$ ,  $b = 0.4$ ,  $\beta = \frac{\pi}{3}$

---

# Liste des tableaux

Tableau 3.1: Valeurs des coefficients  $a_n$  pour  $\alpha \rightarrow \infty$

Tableau 3.2: Les coefficients  $a_k$  pour certaines valeurs du nombre de Weber  $\alpha$  et certaines valeurs de l'angle  $\beta$ .

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Principes fondamentaux de la mécanique des fluides</b>	<b>6</b>
1.1 Description de Lagrange . . . . .	7
1.2 Description d'Euler . . . . .	8
1.2.1 Dérivée partielle et dérivée matérielle . . . . .	8
1.3 Lignes de courant et Tube de courant . . . . .	11
1.3.1 Débit masse, Débit volume . . . . .	12
1.4 Équation du mouvement des fluides . . . . .	17
1.4.1 Équation de continuité . . . . .	17
1.4.2 Dynamique des fluides Newtoniens . . . . .	19
1.4.3 Équation de Navier -Stokes . . . . .	22
1.4.4 Équation de Bernoulli . . . . .	25
1.5 Écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible à la base de la théorie de la variable complexe . . . . .	27
1.5.1 Fonction potentielle complexe . . . . .	27
1.5.2 Utilisation de la théorie de la variable complexe . . . . .	30
1.6 Analyse dimensionnelle . . . . .	31
<b>2 Ecoulement à surface libre sans tension de surface autour d'un obstacle trapéze</b>	<b>34</b>
2.1 Transformation conforme . . . . .	34
2.1.1 Théorie des lignes de courant libres . . . . .	35

2.1.2	Transformation de Schwarz-Christoffel . . . . .	36
2.2	Description du problème . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Étude de l'écoulement autour d'un obstacle trapéze avec tension de sur-</b>	
	<b>face</b>	<b>49</b>
3.1	Position et formulation du problème . . . . .	49
3.2	Méthode de la série . . . . .	57
3.2.1	Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités . . . . .	61
3.2.2	Formulation de la série . . . . .	70
3.3	Résultats et discussion . . . . .	74
	<b>Conclusion générale</b>	<b>82</b>
	<b>Annexe</b>	<b>84</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>88</b>

# Introduction Générale

La mécanique des fluides est une discipline de la physique et de l'ingénierie qui se concentre sur l'étude des fluides (liquides et gaz) ainsi que sur leurs interactions avec les forces et les surfaces. Elle se divise en deux catégories principales : la mécanique des fluides statique, qui examine les fluides au repos, et la mécanique des fluides dynamique, qui analyse les fluides en mouvement. Cette discipline repose sur des principes fondamentaux tels que la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie, permettant ainsi de modéliser des phénomènes variés allant des courants océaniques aux écoulements dans les canalisations. La dynamique des fluides est au cœur de nombreuses applications pratiques dans des domaines aussi variés que [1,2]:

Ingénierie des systèmes hydrauliques : essentielle pour la conception de barrages, de canaux et de systèmes d'irrigation, elle permet de gérer les flux d'eau de manière efficace [3] [4].

Aéronautique : utilisée pour analyser le comportement de l'air autour des avions, elle contribue à l'optimisation des formes afin d'améliorer l'aérodynamisme et de réduire la consommation de carburant.

Industrie pétrolière : elle aide à comprendre le comportement des fluides dans les réservoirs, ce qui est crucial pour l'extraction et le transport des hydrocarbures.

Médecine : en hémodynamique, elle permet d'étudier le flux sanguin dans le corps, aidant ainsi à diagnostiquer et traiter diverses maladies cardiovasculaires.

Traitement des eaux : elle joue un rôle clé dans le traitement des eaux usées et potables, permettant de concevoir des systèmes efficaces pour la purification de l'eau [5] [6]. Un domaine d'étude important en mécanique des fluides est l'analyse du mouvement de deux fluides non miscibles, où l'on observe une surface de séparation (interface) entre eux. Lorsque l'un de ces fluides est en contact avec l'air à pression atmosphérique, cette interface est appelée (surface libre). Cette configuration se rencontre dans les canaux ainsi que dans de grandes masses d'eau telles que les lacs, les mers et les océans. L'interface entre l'air et l'eau, par exemple, constitue une surface libre avec une pression égale à la pression atmosphérique [7].

Il existe deux types de canaux :

- Canaux naturels : cours d'eau présents naturellement, comme les rivières et les fleuves.
- Canaux artificiels : cours d'eau construits par l'homme pour des besoins spécifiques tels que l'irrigation ou l'assainissement, etc...

Les écoulements en canaux ouverts sont caractérisés par la présence d'une surface libre en contact avec l'atmosphère. L'analyse des écoulements à surface libre autour d'objets aux formes variées est cruciale en raison de son importance pratique. Ces objets, appelés obstacles, peuvent avoir des formes régulières comme des demi-cercles, des cylindres, des triangles, des plaques ou des trapèzes [8], [11]. Dans certains cas, des solutions exactes peuvent être trouvées pour les écoulements bidimensionnels sans gravité et sans tension de la surface. Toutefois, dès que ces forces sont prises en compte, les solutions exactes deviennent impossibles [9], [10], [12]. Plusieurs études ont examiné les écoulements à surface libre autour des obstacles. Par exemple, Forbes L. K et al (1982) [13] a abordé le problème des écoulements à surface libre autour des obstacles en utilisant des méthodes expérimentales et analytiques. Il a étudié la dynamique des fluides dans les rivières, en se concentrant sur l'impact des obstacles sur la forme et la vitesse du flux. Ses recherches ont permis de modéliser les profils de vitesse et les zones d'accumulation ou d'érosion, contribuant ainsi à une meilleure compréhension des interactions entre les écoulements et les obstacles. Cette approche a des applications pratiques en génie hydraulique et en gestion des ressources en eau [14]. Reiner [15], dans ses travaux sur les écoulements à surface libre autour des obstacles, a principalement abordé le sujet à travers une combinaison de modélisation mathématique et d'expérimentations en laboratoire et en absence de tension de surface et gravité, en utilisant la méthode des lignes de courant libres et la transformation hodographe due à Kirchhoff (1869), Keller a pu trouver une solution exacte du problème [16]. Voici quelques points clés de son approche : Reine a développé des équations pour décrire les interactions entre les écoulements et les obstacles, prenant en compte des facteurs comme la vitesse du fluide, la pression, et la géométrie des obstacles. En réalisant des essais dans des canaux hydrauliques, elle a pu observer les effets réels des obstacles sur les profils d'écoulement, la turbulence, et les changements de niveau d'eau. Les résultats expérimentaux ont été analysés pour identifier les schémas de circulation et les zones de recirculation, permettant d'étudier les impacts sur l'érosion et la sédimentation. Ses travaux ont été appliqués dans des contextes

tels que la gestion des rivières et la conception d'infrastructures hydrauliques, contribuant à une meilleure prédiction des comportements des écoulements. Vanden broeck et Keller [17] a abordé le problème des écoulements à surface libre autour des obstacles en se concentrant sur les interactions complexes entre le fluide et les obstacles dans des conditions variées à savoir qu'ils ont négligé l'effet de la tension de surface sans négliger l'effet de gravité. Ils ont utilisé des méthodes de simulation numérique pour modéliser le comportement des écoulements, permettant d'analyser des scénarios complexes et Ils ont étudié la dynamique des fluides en détail. Vanden Broeck a étudié comment la forme et la taille des obstacles influencent les profils d'écoulement, y compris la formation de zones de turbulence et de recirculation. King et Bloor [18] a présenté une méthode, utilisant aussi la transformation de Schwartz-Christoffel, pour calculer des écoulements autour d'un solide ayant un rayon de courbure. Une méthode similaire a été employée par Youngs et Parker [19] pour étudier l'impact d'un jet sur une paroi. Vanden-Broeck [20, 21] a effectivement étudié l'écoulement au-dessus d'un radier en utilisant des méthodes numériques avancées. Il a appliqué des techniques de simulation pour modéliser les écoulements à surface libre, en prenant en compte les effets de la gravité et des interactions avec le radier. Vanden-Broeck a utilisé des méthodes de discrétisation pour résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes, ce qui lui a permis de simuler des scénarios complexes [22, 23]. Ses travaux ont permis d'analyser les profils de vitesse, les vagues générées par l'écoulement, et les zones de turbulence autour du radier. Sarwat N. H [24, 25] a étudié un écoulement bidimensionnel stationnaire et irrotationnel d'un fluide non visqueux et incompressible autour d'un obstacle polygonale ou incurvé sur le fond d'un ruisseau (dans un canal ouvert infini avec un fond non uniforme). L'écoulement est sous l'action de la gravité et la tension superficielle n'est pas négligée. Hocine Mekias [26] a abordé le problème des écoulements à surface libre autour des obstacles en mettant l'accent sur plusieurs approches clés : Mekias a développé des modèles théoriques pour décrire les écoulements autour des obstacles, en utilisant les équations de Navier-Stokes et en prenant en compte les conditions de surface libre. Il a utilisé des méthodes numériques avancées, comme la simulation aux éléments finis, pour étudier la dynamique des fluides et les interactions entre le fluide et les obstacles. Mekias a également conduit des expériences

en laboratoire pour valider ses modèles théoriques, observant les effets des obstacles sur les profils de vitesse et la turbulence.

L'objectif principal de cette recherche est d'examiner le comportement des écoulements en présence d'obstacles d'une forme trapezoidal, tout en négligeant certains facteurs comme la tension superficielle et la gravité dans certaines analyses. Les jets de fluide heurtant des murs ont été étudiés [27], [28], [29], tandis que Peng et Parker ont analysé un jet de fluide frappant une paroi irrégulière [30], [31]. Certains auteurs ont transformé leurs problèmes en équations intégrales sur la frontière libre, ce qui leur a permis de résoudre numériquement les écoulements en utilisant des géométries de parois lisses [32], [33], [34]. Le travail de recherche actuel s'inscrit dans la continuité d'études précédentes, notamment celles de B. Bouderah sur l'Étude et simulation numérique des écoulements autour des différents obstacles (2007), et des recherches de F. Guechi et H. Mekias sur l'effet de la surface sur l'écoulement bidimensionnel (2007) [39]. [35], [36]. D'autres études ont été menées, comme celle de B. Bouderah et H. Mekias sur les effets de la tension superficielle sur l'écoulement à surface libre dû à une source immergée (2000) [37], et celle d'A. Djerad et B. Bouderah concernant l'Étude numérique des écoulements turbulents en deux dimensions par la méthode des volumes finis (2017) [38]. Des recherches récentes (2024) par W. Delloum, B. Bouderah et N. Bounab ont examiné la solution analytique approximative d'un écoulement potentiel autour d'un obstacle [40], et les travaux de H. Serguine et N. Bounab où ils ont réalisé des étude numérique des modèles mathématiques d'écoulement avec des contraintes sur une surface libre [41], [46]. Le travail de recherche actuel vise à approfondir la compréhension des écoulements bidimensionnels autour d'obstacles variés, en se basant sur des modèles numériques et théoriques établis. Cela enrichit le domaine de la dynamique des fluides, offrant de nouvelles perspectives pour des applications pratiques en ingénierie et en gestion des ressources en eau.

Notre travail de recherche est composé de trois chapitres, une introduction générale, une conclusion , et une annexe.

Le premier chapitre est consacré à l'exposition des concepts fondamentaux de la dynamique des fluides;

Le deuxième chapitre présente une étude analytique d'un écoulement irrotationnel bidimensionnel d'un fluide parfait dans un canal comportant au-dessous une cavité de forme trapézoïdale qui forme un angle d'inclinaison  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ . Nous considérons que les effets de la gravité et de la tension de surface sont nuls. La solution exacte a été obtenue en utilisant la méthode des lignes de courant libre introduite par Kirchhoff, qui repose sur les transformations conformes, notamment la transformation de Schwarz-Christoffel;

Le chapitre troisième : consiste à la résolution numérique de notre problème en présence des effets de tension de la surface, où on a étudié le problème posé en appliquant la méthode de troncation de la série. Une solution approchée est trouvée pour le nombre de Weber  $\alpha \simeq 0.05$ , c'est à dire la forme de la surface libre de l'écoulement est calculée pour différentes valeurs  $\alpha \geq 0.05$ .

Nous achevons cette thèse par une conclusion générale dans laquelle nous ouvrons des perspectives sur nos travaux futurs. Dans l'annexe, on présente la méthode de Newton, pour la résolution d'un système

d'équations non linéaires, et son algorithme, et l'algorithme de Jordan avec pivotation totale implicite.

# Chapitre 1

## Principes fondamentaux de la mécanique des fluides

La science des fluides s'intéresse au mouvement des fluides, notamment à l'analyse des comportements statiques et dynamiques de ceux-ci. Les phénomènes étudiés sont de nature macroscopique. On considère les fluides comme des milieux continus. L'hypothèse du continu signifie que tout élément de volume d'un fluide, même petit, renferme un très grand nombre de molécules.

De plus, la particule fluide, qui correspond à un petit volume du fluide, est en mouvement. Ce mouvement n'est pas celui d'une seule molécule, mais la moyenne des mouvements de toutes les molécules qui composent ce volume. Il représente donc les propriétés globales du fluide[46].

Il est également important de noter qu'un fluide, considéré comme occupant un domaine  $\Omega$  dans l'espace, a ses propriétés définies en fonction de la variable  $X \in \Omega$  et du temps  $t$ . Par conséquent, la masse, le volume et la viscosité sont des fonctions de  $X \in \Omega$ , notées  $m(X, t)$ ,  $\rho(X, t)$  et  $\mu(X, t)$ . Un fluide en mouvement est caractérisé par plusieurs grandeurs : les trois composantes de la vitesse  $\vec{v}$ , la pression  $P$ , la densité  $\rho$ , la viscosité  $\mu$  et la température  $T$ . Ces grandeurs sont des fonctions en coordonnées  $x, y, z$  (d'un point dans l'espace occupé par le fluide) ainsi que du temps  $t$ . Les équations du mouvement sont établies en s'appuyant sur les principes de conservation. En mécanique des fluides, il existe deux approches pour décrire le mouvement des particules (Lagrangienne et Eulirienne).

## Résumé

Dans ce chapitre, on présente des préliminaires et les concepts de base de la mécanique des fluides qui permettent d'établir les équations de bilans décrivant les mouvements des fluides pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux.

## 1.1 Description de Lagrange

Cette approche vise à analyser les différentes grandeurs (masse volumique  $\rho$ , température  $T$ , pression  $P$ , etc..) pour chaque particule de manière individuelle durant son mouvement. Dans le cadre de la description lagrangienne, le mouvement est représenté par les trajectoires des particules ayant des identités spécifiques. Il est important de rappeler que la trajectoire correspond à l'ensemble des positions d'une particule au fil du temps. L'identité d'une particule est déterminée par sa position initiale  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Ainsi, la description du mouvement implique de déterminer le vecteur position  $r(M_0, t)$  à chaque instant  $t$  pour toutes les particules du fluide.

$$r = r(M_0, t) \quad , \quad \text{où} \quad r = r(x_0, y_0, z_0)$$

c'est-à-dire :

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t)$$

Et

$$\vec{v} = \vec{v}(M_0, t) = \frac{dr}{dt}(M_0, t) : \vec{a} = \vec{a}(M_0, t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(M_0, t)$$

## 1.2 Description d'Euler

La méthode d'Euler consiste à caractériser l'écoulement en fournissant les composantes du vecteur vitesse ainsi que d'autres grandeurs physiques à chaque point de l'espace. En d'autres termes, on choisit un point fixe dans l'espace et on observe les variations des quantités associées aux particules du fluide qui passent par ce point.

-À l'instant  $t_1$ , on considère en  $M$  une particule  $P_1$  ayant une vitesse  $v$  et d'autres propriétés physiques  $k$ .

-À l'instant  $t_2 = t_1 + dt_1$ , une autre particule  $P_2$ , se trouve au même point  $M$ , mais avec une vitesse et des caractéristiques différentes. Ainsi, on analyse les variations en  $M$  aux instants  $t_1$  et  $t_2$ .

$$v = v(p_1, t_1) = v(x, y, z; t_1)$$

Et

$$k = k(p_1, t_1) = k(x, y, z; t_1)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(p_2, t_2) = \vec{v}(x, y, z; t_2)$$

Et

$$k = k(p_2, t_2) = k(x, y, z; t_2)$$

### 1.2.1 Dérivée partielle et dérivée matérielle

Dans la description d'Euler, le champ du vecteur vitesse  $v(X, t)$  et les autres caractéristiques sont exprimés en fonction du point  $X$  dans l'espace et du temps  $t$  indépendamment de la particule de fluide qui occupe le point  $X$  à l'instant  $t$ . Il est donc nécessaire de faire la distinction entre deux formes de dérivées par rapport au temps.

#### 1. Dérivée partielle

La dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial t}$  est la dérivée usuelle considérant  $X$  et  $t$  comme des variables indépendantes.

## 2. Dérivée matérielle

La dérivée matérielle  $\frac{D}{Dt}$  représente la dérivée par rapport au temps  $t$  d'une caractéristique d'une particule donnée. À l'instant  $t$ , une particule  $P$  occupe le point de l'espace  $M_1(x, y, z)$  et à l'instant  $t + \Delta t$ , la même particule  $P$  se trouve à un autre point de l'espace  $M_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ . Ainsi, on a :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

Où encore

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v \text{ grad})$$

En effet, la différentielle totale d'une quantité  $k = k(x, y, z, t)$  est donnée par la formule suivante :

$$Dk = \frac{\partial k}{\partial t} dt + \frac{\partial k}{\partial x} dx + \frac{\partial k}{\partial y} dy + \frac{\partial k}{\partial z} dz$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial k}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Et lorsque les points  $M_1$  et  $M_2$  représentent les positions successives de la même particule de fluide aux instants  $t$  et  $t + \Delta t$ , on trouve les quantités suivantes :

$$v_1 = \frac{dx}{dt}, v_2 = \frac{dy}{dt}, v_3 = \frac{dz}{dt}$$

Avec  $v_1, v_2, v_3$  représentant les composantes de la vitesse  $v$  de la particule, on déduit que la variation de la position de la particule entre  $M_1$  et  $M_2$  peut être exprimée comme suit :

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial x}v_1 + \frac{\partial k}{\partial y}v_2 + \frac{\partial k}{\partial z}v_3$$

Ainsi, l'accélération  $a$  de la particule est donnée par la dérivée matérielle de la vitesse  $v$ , exprimée comme suit :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{D\vec{v}}{Dt} + \left(\vec{v} \overrightarrow{\text{grad}}\right) \vec{v}$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \left(\vec{v} \overrightarrow{\text{grad}}\right) v &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 + \left(\overrightarrow{\nabla} \times \vec{v}\right) \times \vec{v} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 + \left(\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v}\right) \times \vec{v} \end{aligned}$$

On trouve

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 + \left(\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v}\right) \times \vec{v}$$

**Définition :** Un écoulement est dit stationnaire si:

$$\frac{\partial \vec{v}(X, t)}{\partial t} = 0$$

**Remarque:** Puisque l'accélération  $a$  du fluide est donnée par:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}(X, t)}{\partial t} + \left(\vec{v} \overrightarrow{\text{grad}}\right) \vec{v}$$

Un écoulement stationnaire ne signifie pas qu'il y a une accélération nulle. Alors, la méthode d'Euler est plus commode pour la description du mouvement d'un fluide et plus générale pour la mécanique des milieux continus pour les raisons suivantes :

1. Il est impossible d'identifier les particules d'un fluide.
2. Une particule de fluide perd son identité au cours du mouvement en raison de la diffusion et d'autres phénomènes.

### 1.3 Lignes de courant et Tube de courant

**Définition 1.3.1** *On appelle une ligne de courant une courbe qui est tangente, en chaque point, au vecteur vitesse  $\vec{v}$  à un instant fixe.*

Donc, on a  $d\vec{r} = \lambda \vec{v}(M, t)$  avec  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  représentant le vecteur position de la particule, et  $\lambda$  étant un scalaire.

D'où, par projection sur les axes, on obtient :

$$(dx_1, dx_2, dx_3) = \lambda (v_1(M, t), v_2(M, t), v_3(M, t))$$

Par suite

$$dx_i = \lambda v_i(M, t) \quad i = 1, 2, \dots$$

D'où, on déduit l'équation définissant une ligne de courant :

$$\frac{dx_1}{v_1(M, t)} = \frac{dx_2}{v_2(M, t)} = \frac{dx_3}{v_3(M, t)} \quad (1.1)$$

Les lignes de courant ne coïncident généralement pas avec les trajectoires. Elles ne coïncident que si l'écoulement est stationnaire.

l'ensemble des lignes de courant, s'appuyant sur un contour fermé, forme un tube de courant.

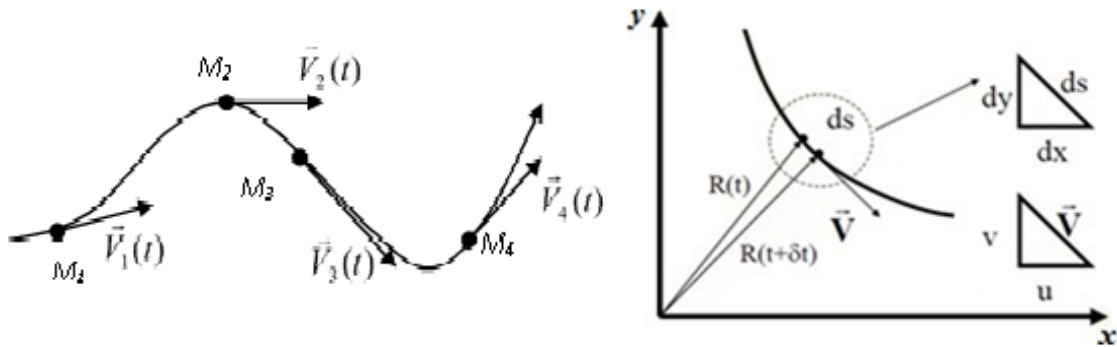


Fig 1.1: Lignes de courant

l'ensemble des lignes de courant, s'appuyant sur un contour fermé, forme un tube de courant.

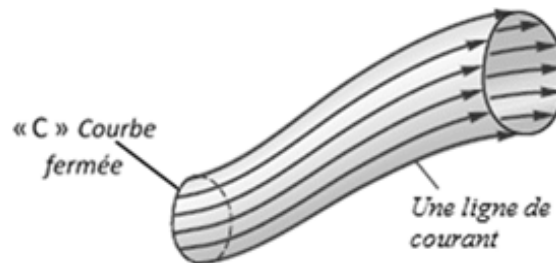
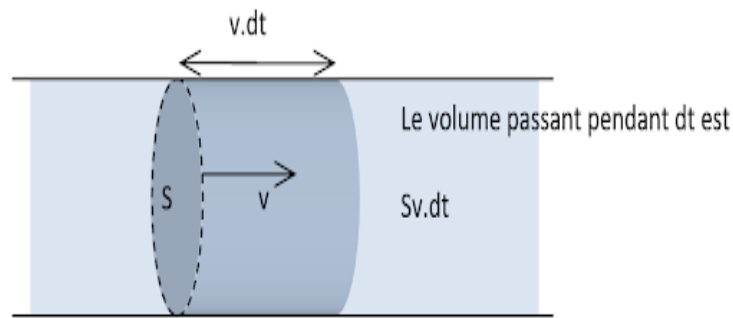


Fig 1.2: Tube de courant

### 1.3.1 Débit masse, Débit volume

Le débit de masse  $q_m$  représente la quantité de masse  $m$  qui traverse une surface donnée  $S$  par unité de temps. En considérant un élément de surface  $ds$  orienté selon la normale  $\vec{n}$  dans un fluide ayant une vitesse  $\vec{v}$  et une durée élémentaire  $dt$ , la quantité de masse qui traverse  $ds$  se trouve à l'intérieur d'un cylindre dont la base est  $ds$  et la hauteur est  $\vec{v} \times \vec{n} dt$



Soit  $\rho$  la masse volumique du fluide considéré, le débit-masse élémentaire  $dq_m$  est

$$dq_m = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho v_n dt ds}{dt} = \rho v_n ds$$

Par conséquent, pour une surface quelconque  $S$

On a

$$q_m = \int_s \rho v_n ds$$

D'où

$$q_m = \int_s \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds \quad (1.2)$$

Le débit volumique  $q_v$  représente le volume  $v$  de matière qui traverse une surface donnée  $S$  par unité de temps. De manière similaire au débit de masse, on peut exprimer le débit volumique pour une surface  $S$  quelconque :

$$q_v = \int_s v_n ds$$

Où

$$q_v = \int_s (\vec{v} \times \vec{n}) ds \quad (1.3)$$

On observe que, dans le cas d'un écoulement incompressible, c'est-à-dire lorsque  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ , la relation entre le débit de masse  $q_m$  et le débit volumique  $q_v$  est donnée par :

$$q_m = \rho q_v$$

### Formule de Green

Soit un volume  $V$  délimité par la surface  $S$  et  $\vec{n}$  le vecteur normal à  $S$  orienté vers l'extérieur du volume  $V$ . Soit  $\vec{F}$  un champ vectoriel défini dans un voisinage de  $V$  ; alors la formule de Green s'énonce comme suit :

$$\int_v \operatorname{div}(\vec{F}) dv = \int_s (F \times \vec{n}) ds \quad (1.4)$$

### Théorème de convection (Dérivée matérielle d'une intégrale de volume)

Soit  $\Omega_t$  un volume occupé à l'instant  $t$  par un fluide, et soit  $F(M, t)$  une caractéristique (scalaire, vecteur, tenseur) définie dans le voisinage de  $\Omega_t$ . La fonction  $F(M, t)$  dépend du temps  $t$  et de la position  $M$  de chaque particule. Alors, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_s F dv = \int_v \left( \frac{dF}{dt} + F \operatorname{div}(\vec{v}) \right) dv \quad (1.5)$$

où  $\vec{v}$  désigne le champ de vitesse du fluide.

**Preuve du théorème** Supposons la continuité de toutes les fonctions de l'écoulement. Soient  $\Omega_0$  le volume initial et  $M_0$  la position de la particule  $M$  à l'instant  $t = 0$ . Alors, pour  $t > 0$  :  $M = M(M_0, t)$  et  $F(M, t) = F(M(M_0, t), t) = G(M_0, t)$

Donc , par un changement de variable  $M = M(M_0, t)$

$$\int_{\Omega_t} F(t, M) dv = \int_{\Omega_0} JG(M_0, t) dv_0$$

où  $J$  est le jacobien du changement de variables, alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} F dv = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} JG(M_0, t) dv_0 = \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} (JG(M_0, t)) dv_0$$

Cela implique :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} F dv = \int_{\Omega_0} \left( \frac{d}{dt} JG(M_0, t) J + G(M_0, t) \frac{dJ}{dt} \right) dv_0$$

Mais

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div}(\vec{v})$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} F dv = \int_{\Omega_0} \left( \frac{d}{dt} JG(M_0, t) J + G(M_0, t) J \operatorname{div}(\vec{v}) \right) dv_0$$

D'où

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} F dv = \int_{\Omega_0} \left( \frac{d}{dt} G(M_0, t) + G(M_0, t) \operatorname{div}(\vec{v}) \right) J dv_0$$

Revenant aux coordonnées  $M(M_0, t) = M$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} F dv = \int_{\Omega_0} \left( \frac{d}{dt} F(M, t) + F(M, t) \operatorname{div}(\vec{v}) \right) dv_0$$

### Écoulement stationnaire

On dit qu'un écoulement est stationnaire ou encore écoulement permanent, si toutes ses caractéristiques quantitatives sont indépendantes du temps, en particulier pour la vitesse, on a

$$\frac{\partial \vec{V}(x, y, z, t)}{\partial t}$$

### Écoulement irrotationnel

Dans les régions d'écoulement, loin des parois solides où le fluide peut être considéré comme non visqueux, l'écoulement est dit irrotationnel et on a alors la condition

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \vec{0}$$

### Écoulement uniforme

On dit qu'un écoulement est uniforme si ses composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées de l'espace, sinon il est non-uniforme.

### Écoulement bidimensionnel

un écoulement est dit bidimensionnel ou un écoulement plan, si toutes ses caractéristiques sont dépendantes de deux variables spatiales  $(x, y)$  et du temps  $t$ .

## Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique est constante par rapport au temps, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Le fluide en mouvement est sans frottements entre les molécules au cours de son déplacement qu'on appelle fluide parfait ou non visqueux.

## 1.4 Équation du mouvement des fluides

### 1.4.1 Équation de continuité

L'équation de continuité représente la conservation de la masse d'une particule au cours de son déplacement. Ce principe de conservation de la masse s'applique à un petit élément de volume dans l'espace. Il stipule que l'augmentation de la masse d'un fluide dans un certain intervalle de temps au sein du volume considéré doit être égale à la somme des masses de fluide qui y pénètrent, moins celles qui en sortent.

Considérons une surface fermée  $S$  entourant un volume  $V_0$  dans l'espace. La masse de fluide présente dans ce volume est exprimée par :

$$\int_{V_0} \rho dV$$

où  $\rho$  est la densité.

Soit  $ds$  un élément de la surface  $S$  et  $\vec{n}$  le vecteur normal extérieur. À travers  $ds$ , il s'écoule, par unité de temps, une quantité de fluide égale à  $\rho \vec{v} \times \vec{n} ds$ . Cette quantité  $\rho \vec{v} \times \vec{n} ds$  est positive si le fluide sort du volume considéré et négative s'il y pénètre.

Ainsi, la quantité totale de fluide sortant du volume  $V_0$  par unité de temps est donnée par :

$$\int_s \rho \vec{v} \times \vec{n} ds$$

D'autre part, la diminution de la quantité de fluide contenue dans le volume  $v_0$  est exprimée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dv$$

En appliquant le principe de conservation de la masse, nous obtenons :

$$-\int \rho dv = \int_s \rho \vec{v} \times \vec{n} ds$$

L'intégrale de surface peut être convertie en une intégrale de volume en utilisant la formule de Green, ce qui donne :

$$\int_s \rho \vec{v} \times \vec{n} ds = \int_v \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dv$$

Ainsi, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{v_0} \rho dv = \int_{v_0} \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dv$$

D'où nous en déduisons :

$$\int_{v_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dv = 0$$

Puisque  $v_0$  est arbitraire, nous pouvons conclure à l'équation de continuité :

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) = 0 \quad (1.6)$$

En utilisant les relations  $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \times \overrightarrow{\operatorname{grad}}\rho$  et  $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \times \overrightarrow{\operatorname{grad}}\rho$ , nous obtenons une autre forme de l'équation de continuité :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (1.7)$$

### 1.4.2 Dynamique des fluides Newtoniens

L'espace dynamique du mouvement des fluides est défini par les équations du mouvement. Ces équations sont dérivées de l'application de la loi de Newton sur des particules en mouvement. Dans un référentiel galiléen, les forces agissant sur une particule de fluide se divisent en deux catégories :

1. **Forces de volume** : Ces forces agissent sur la masse de la particule. Un exemple typique est la force de pesanteur.
2. **Forces de surface** : Ces forces agissent sur les surfaces de la particule considérée. Des exemples incluent la force de pression, ainsi que les forces de frottement ou de viscosité.

Selon la loi fondamentale de la dynamique appliquée aux fluides, nous avons :

$$\sum \vec{F} = \frac{D}{Dt} (m \vec{v}) \quad (1.8)$$

Ici,  $\sum \vec{F}$  représente la somme des forces agissantes sur une particule de fluide de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$ . La quantité de mouvement de cette particule est donnée par  $m\vec{v}$

Soit  $dm = \rho dv$  la masse d'une particule de fluide, où  $\rho$  est la densité du fluide et  $dv$  est le volume élémentaire. La quantité de mouvement dans un volume élémentaire  $dv$  est alors :

$$\rho \vec{v} dv$$

Ainsi, la quantité de mouvement totale dans le volume  $V$  est :

$$\int_v \rho \vec{v} dv$$

En appliquant la loi de Newton, nous obtenons :

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_v \rho \vec{v} dv \quad (1.9)$$

D'après le théorème de convection, nous avons :

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \vec{v} dv = \int_v \left[ \frac{d(\rho \vec{v})}{dt} + \rho \vec{v} \operatorname{div} \right] dv$$

Les forces extérieures qui agissent sur la particule se divisent en deux types :

### 1. Force de volume

$$\vec{F} v = \int_v \rho \vec{F} dv$$

où  $\vec{F}$  est la force par unité de volume.

## 2. Force de surface

$$\vec{F}_s = \int_s \vec{\sigma} ds$$

où  $\vec{\sigma}$  est la force superficielle élémentaire. La force superficielle  $\vec{\sigma}$  dépend de l'orientation de l'élément de surface  $ds$ . Il existe un tenseur des contraintes  $\tilde{c}$  tel que:

$$\vec{\sigma} = \tilde{c} \times \vec{n}$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à  $ds$  et  $\tilde{c} = (\tilde{c}_{ij})$  est indépendant de l'orientation de  $ds$ . L'équation (2.9) devient alors :

$$\int_v \rho \vec{F} dv + \int_s \tilde{c} \cdot \vec{n} ds = \int_v \left[ \frac{d(\rho \vec{v})}{dt} + \rho \vec{v} \operatorname{div} \right] dv \quad (1.10)$$

D'après la formule de Green, nous avons :

$$\int_s \tilde{c} \cdot \vec{n} ds = \int_v \operatorname{div} \tilde{c} dv$$

En utilisant la relation

$$\frac{d(\rho \cdot \vec{v})}{dt} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{d\rho}{dt}$$

l'équation (10) devient :

$$\int_v \left[ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \left( \frac{d(\rho)}{dt} + \rho \operatorname{div} \right) \right] dv = \int_v \left( \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{c} \right) dv \quad (1.11)$$

Puisque

$$\frac{d(\rho)}{dt} + \rho \operatorname{div} = 0 \quad (\text{équation de continuité})$$

et en considérant  $V$  comme un volume arbitraire, nous en déduisons l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \tilde{c} \quad (1.12)$$

Cela peut également être réécrit sous la forme :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \tilde{c} \quad (1.13)$$

### 1.4.3 Équation de Navier -Stockes

**Définition:** Le tenseur taux de déformation ( $e_{ij}$ ) est défini par :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad i, j \in \{1, 2, \dots\} \quad (1.14)$$

Où  $(u_1, u_2, u_3)$  sont les composantes de la vitesse.

**Définition 1.4.1** *L'équation de Navier-Stokes s'écrit comme suit :*

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\rho \overrightarrow{\text{grad}}U - \overrightarrow{\text{grad}}P + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}}\theta + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (1.15)$$

Dans cette équation :

$\rho$  désigne la densité du fluide,  $V$  représente les composantes de la vitesse,  $U$  correspond à une vitesse de référence,  $P$  symbolise la pression,  $\lambda$  et  $\mu$  sont des coefficients associés à la viscosité, et  $\theta$  fait référence à la température.

Cette équation, connue sous le nom d'équation de Navier-Stokes, a été formulée indépendamment par Navier et Stokes.

### Cas particuliers

1. **Fluide incompressible et non-visqueux :** En supposant que  $\lambda = \mu = 0$ , l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\rho \overrightarrow{\text{grad}}U - \overrightarrow{\text{grad}}P \quad (1.16)$$

ce qui correspond à l'équation d'Euler.

À partir de la relation suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}^2 + \left( \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v} \right) \times \vec{v}$$

l'équation d'Euler peut alors être réécrite sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2 + \left( \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v} \right) \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} \left( P + \rho U + \rho \frac{V^2}{2} \right) \quad (1.17)$$

2. **Écoulement stationnaire :** Si l'on considère un écoulement stationnaire, alors

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

Dans un champ de pesanteur, où  $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz)$ , l'équation(2.16) se transforme en:

$$\left( \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v} \right) \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} \left( P + \rho gz + \rho \frac{V^2}{2} \right)$$

Si de plus, l'écoulement est irrotationnel, c'est-à-dire  $\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v} = 0$ , on en déduit:

$$-\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} \left( P + \rho gz + \rho \frac{V^2}{2} \right) = 0 \quad (1.18)$$

Cela signifie que la quantité  $\left( P + \rho gz + \rho \frac{V^2}{2} \right)$  est constante le long des lignes de courant, ce qui est une expression du principe de Bernoulli.

### 1.4.4 Équation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli (1.18), représente l'équation énergétique qui est associée à l'équation d'Euler. Elle est couramment utilisée dans les situations où l'on peut négliger les effets de la viscosité. En examinant l'équation d'Euler pour un fluide incompressible et non-visqueux en présence d'un champ de pesanteur, nous pouvons établir la relation énergétique de Bernoulli. Considérons l'équation d'Euler présentée sous forme vectorielle (1.17) dans le contexte d'un écoulement stationnaire :

$$\left(\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v}\right) \times \vec{v} + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} \left( P + \rho g z + \rho \frac{V^2}{2} \right) = 0$$

En projetant cette équation sur une ligne de courant définie par le vecteur unitaire  $\vec{s}$  nous obtenons :

$$\vec{s} \cdot \left( \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v} \right) \times \vec{v} + \vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{P}{\rho} + g z + \frac{V^2}{2} \right) = 0$$

Étant donné que  $\vec{s}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, nous avons :

$$\vec{s} \cdot \left( \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v} \times \vec{v} \right) = \vec{s} \cdot \left( \vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \times \vec{v} = 0$$

Il reste donc :

$$\vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{P}{\rho} + g z + \frac{V^2}{2} \right) = 0$$

En utilisant le fait que  $\frac{\partial}{\partial s} = \vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$ , nous :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{P}{\rho} + g z + \frac{V^2}{2} \right) = 0$$

Cela nous amène à la conclusion suivante :

$$\frac{P}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = cte \quad (1.19)$$

Cette relation peut également être exprimée sous la forme :

$$P + \rho gz + \rho \frac{V^2}{2} = cte \quad (1.20)$$

C'est la forme la plus simple de l'équation de Bernoulli, valable pour des fluides parfaits et incompressibles dans un champ de pesanteur.

Les termes de l'équation (1.19) ou (1.20) peuvent être définis comme suit :

- $\rho \frac{v^2}{2}$  : énergie cinétique par unité de volume du fluide ;
- $P^* = P + \rho gz$  : énergie potentielle par unité de volume du fluide (pression potentielle).
- $\rho \frac{v^2}{2}$  : pression dynamique.
- $P$  : pression statique.
- $P_0 = P + \rho \frac{v^2}{2}$  : pression totale.

Ainsi, l'équation de Bernoulli représente la conservation de l'énergie totale dans un écoulement de fluide, intégrant les contributions de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de la pression statique.

## 1.5 Écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible à la base de la théorie de la variable complexe

### 1.5.1 Fonction potentielle complexe

#### Vitesse potentiel:

Un écoulement est considéré comme bidimensionnel lorsque ses caractéristiques dépendent de deux variables spatiales  $x$  et  $y$  ainsi que du temps  $t$ . Si, de plus, l'écoulement est stationnaire, cela signifie que ses propriétés ne varient qu'en fonction des deux variables spatiales  $x$  et  $y$ . Dans ce cadre, étant donné que le rotationnel d'un gradient d'une fonction est toujours nul, il existe une fonction  $\phi$  tel que  $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi$ . Cette fonction  $\phi$  est appelée potentiel de vitesse.

Les surfaces définies par ( $\phi = \text{constante}$ ) sont appelées surfaces équipotentielles. Dans ce contexte, le vecteur de vitesse  $\vec{v}$  est toujours perpendiculaire aux surfaces équipotentielles. Cela se traduit par l'équation suivante:

$$\vec{v} dr = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi dr = 0$$

#### Fonction de courant

Dans le contexte des écoulements bidimensionnels, le concept de lignes de courant est étroitement lié à l'équation de continuité. Pour un fluide incompressible, où  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  on a également  $\text{div } \vec{v} = 0$ . ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \tag{1.21}$$

Nous introduisons alors une nouvelle fonction  $\Psi$  de  $x$  et  $y$  appelée **fonction de courant**, qui vérifie les relations suivantes :

1.5. *Écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible à la base de la théorie de la variable complexe*

---

$$v_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_2 = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (1.22)$$

Les surfaces définies par ( $\psi = \text{constante}$ ) correspondent aux lignes de courant. En effet, la différentielle exacte de  $\Psi$  s'écrit comme suit :

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}y = -v_2dx + v_1dy \quad (1.23)$$

Puisque  $\psi = \text{cte}$ , on a  $d\psi = 0$ , Cela nous permet d'obtenir l'équation de la ligne de courant à partir de cette relation.

Soit  $\vec{n}$  un vecteur unitaire normal à la courbe  $C$  et orienté dans le sens de l'intégration. Le flux à travers la courbe  $C$  est alors donné par :

$$qv = \int_C \vec{v} \times \vec{n} dl = \int_C \left( -v_1 \frac{dy}{dt} + v_2 \frac{dx}{dt} \right) dl = \int_C (v_2 dx - v_1 dy)$$

D'où,

$$qv = \int_C \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = \int_C d\psi$$

Par conséquent,

$$qv = \psi_2 - \psi_1 \quad (1.24)$$

1.5. *Écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible à la base de la théorie de la variable complexe*

---

**Équations différentielles  $\phi$  et  $\psi$**

Considérons un écoulement bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non-visqueux. Étant donné que  $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi$  et que  $\text{div } \vec{v} = 0$ , on obtient :

$$\text{div} \left( -\overrightarrow{\text{grad}}\phi \right) = 0$$

Cela implique que :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

ce qui peut être formulé comme suit :

$$\Delta \phi = 0 \tag{1.25}$$

indiquant que  $\phi$  est une fonction harmonique.

De même, en considérant le champ de vitesses  $\vec{v} = (v_1, v_2) = \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$  et en sachant que  $\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v} = 0$ , nous avons :

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

ce qui peut être formulé comme suit :

$$\Delta\psi = 0 \tag{1.26}$$

Ainsi, les fonctions potentielles  $\Phi$  et la fonction de courant  $\Psi$  satisfont toutes deux l'équation de Laplace. .

Dans un écoulement bidimensionnel potentiel, les surfaces définies par ( $\Psi = cte$ ) sont tangentes au vecteur vitesse et perpendiculaires aux surfaces équipotentielles définies par ( $\Phi = cte$ ) .

### Superposition de deux champs de vitesse

Si  $\Phi_1, \Phi_2$  sont des solutions de l'équation de Laplace, alors toute combinaison de ces deux fonctions constitue également une solution de cette équation. En d'autres termes, la combinaison linéaire des solutions individuelles de l'équation de Laplace peut être utilisée pour décrire un écoulement potentiel d'un fluide.

## 1.5.2 Utilisation de la théorie de la variable complexe

Soit  $\phi$  et  $\psi$  les fonctions potentielle et de courant respectivement d'un écoulement potentiel bidimensionnel. On rapporte le plan d'écoulement au plan complexe en écrivant  $z = x + iy$ , puis on définit la fonction complexe  $f(z)$  par :

$$f(z) = \Phi + i\Psi \tag{1.27}$$

où  $i$  est l'unité imaginaire,  $f(z)$  est appelée le potentiel complexe de l'écoulement.

Puisque la partie réelle et la partie imaginaire de  $f(z)$  vérifient l'équation de Laplace, nous avons également :

$$v_1 = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_2 = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Ainsi, les relations de Cauchy-Riemann sont vérifiées :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (1.28)$$

Cela implique que  $f(z)$  est analytique par rapport à la variable complexe  $z = x + iy$ . La dérivée de  $f$  par rapport à  $z$ ,  $\frac{df}{dz}(z)$  peut être écrite comme :

$$\frac{df}{dz}(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial y} = u - iv = \vec{v} e^{-i\theta} \quad (1.29)$$

où  $\theta$  est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'axe des  $x$ . De là, on déduit que la fonction  $\xi(z) = u - iv$  est aussi une fonction analytique.

La dérivée  $\frac{df}{dz}(z)$  est appelée vitesse conjuguée analytique d'une variable complexe. La théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe offre une méthode puissante pour résoudre l'équation de Laplace, permettant d'obtenir des solutions générales pour des écoulements potentiels bidimensionnels. Grâce aux transformations conformes et aux superpositions d'écoulements simples, des solutions à des écoulements complexes peuvent être obtenues.

## 1.6 Analyse dimensionnelle

La mécanique des fluides est l'un des domaines d'application les plus importants de l'analyse dimensionnelle. L'analyse dimensionnelle consiste à déterminer les dimensions physiques des grandeurs impliquées dans les équations du mouvement et à les comparer à des quantités ayant les mêmes dimensions physiques. Cela permet d'établir des nombres sans dimension qui aident à évaluer l'importance relative des différents termes présents dans les équations.

### Principe de l'analyse dimensionnelle:

Choisis des grandeurs fondamentales : les grandeurs fondamentales du système international sont : la longueur  $L$ , le temps  $t$  et la masse  $m$ , qui en fonction desquelles on peut exprimer les autres grandeurs physiques. Dans certains cas, on considère des unités fondamentales  $(L, m, t, T)$  où  $T$  est la température absolue.

Si  $u$  et  $v$  sont données tel que  $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$ ;  $f(z)$  est une fonction supposée analytique de la variable complexe  $z = x + iy$  : les relations de Cauchy-Riemann sont vérifiées.

On définit le jacobien de la transformation  $f(z)$

-Equation aux dimensions

Si on passe d'un système d'unités 1 à un système d'unités 2, une même longueur est mesurée par un nombre  $L_1$  du système 1 et par un nombre  $L_2 = \alpha L_1$  du système 2. De même on a  $t_2 = \beta t_1$ ;  $m_2 = \gamma m_1$ .  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont dits multiplicateurs.

Soit  $K$  une grandeur ; le multiplicateur s'écrit  $\frac{K_2}{K_1} = g(\alpha, \beta, \gamma)$ ;  $g(\alpha, \beta, \gamma)$  est la dimension de la grandeur  $K$ .

Un multiplicateur est un produit de puissances des multiplicateurs correspondants aux grandeurs fondamentales. Les équations aux dimensions ou les grandeurs  $K$  sont donc des monômes.

### **Théorème $\pi$ de Vaschy-Buckingham**

Soit un phénomène physique comportant  $n$  variables, dont les dimensions desquelles interviennent  $P$  grandeurs fondamentales.

L'équation  $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$  régissant le phénomène peut se mettre sous la forme

$$H(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}) = 0 \tag{1.30}$$

$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}$  étant des produits sans dimension indépendants.

D'après ce théorème, les produits sans dimensions peuvent être considérés comme de nouvelles variables en nombre réduit. On les appelle aussi grandeurs réduites. En notant certains de ces produits sans dimension, on trouve des nombres connus : le nombre de

Reynolds  $R$ , le nombre de Froude  $F$ , le nombre de Mach  $M$ , le nombre d'Euler  $E$  etc. On trouve également des rapports de deux grandeurs de même espèce.

# Chapitre 2

## Écoulement à surface libre sans tension de surface autour d'un obstacle trapéze

### Résumé

Ce chapitre se concentre sur l'analyse d'un problème d'écoulement potentiel autour d'un obstacle trapéze, d'un fluide incompressible et non visqueux. En négligeant les effets de la gravité et de la tension superficielle, la résolution analytique de ce problème s'avère extrêmement complexe. Par conséquent, basée sur la méthode des lignes de courant libres et la transformation de Schwarz-Christoffel. Cette méthodologie est détaillée dans l'article intitulé "Approximate Analytic Solution of a Potential Flow Around an Obstacle", publié en 2024 par W. Delloum et Dr. B. Bouderah.

### 2.1 Transformation conforme

Dans un certain nombre de problèmes, on cherche à résoudre une équation, par exemple l'équation de Laplace  $\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy}$ , dans le plan  $(x, y)$  avec des conditions aux limites. L'idée est de se ramener à des domaines d'intégration plus simples en faisant un changement de variable. Ce changement de variable  $(x, y) \rightarrow (X, Y)$  est une transformation géométrique

; si cette transformation conserve les angles, il n'y a souvent que peu de changements dans la forme de l'équation. Par exemple pour l'équation de Laplace, on aura à résoudre  $\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$  dans le nouveau domaine.

Une transformation  $z = x + iy = Z(z) = X(x, y) + iY(x, y)$  est dite conforme si elle conserve est que la fonction  $Z(z)$  soit analytique. Les point ou la dérivée nulle/infinie peuvent etre des points singuliers de la transformation. Au voisinage de tels ponts, on peut exprimer  $Z$  de la façon suivante:

$$Z = Z_0 + (z - z_0)^p + O((z - z_0)^{1+p}),$$

avec  $p \in \mathbb{N}^+$  et  $f(z_0) \neq 0$ . Si  $p=1$ , la transformation est conforme en ce point ; si  $p > 1$ , les angles ne sont pas conservés : là ou les point  $Z'$  s'annule d'une ligne continue présent un point anguleux. L'idée de base de la transformation conforme est d'utiliser les singularités locales pour transformation des conditions aux limites compliquées en condition plus simples.

### 2.1.1 Théorie des lignes de courant libres

La théorie des lignes de courant libres vise à étudier les problèmes d'écoulement potentiel, limités par des parois rigides rectilignes et des lignes de courant libres dont les formes sont inconnues, sur lesquelles la pression est considérée comme constante. En l'absence de lignes libres et en négligeant les effets de la gravité, la région d'écoulement dans le plan physique devient polygonale. De plus, si l'on ignore les lignes de courant libres, les effets de gravité et les effets de tension de surface, cette région demeure polygonale. Elle constitue ainsi un domaine parfait du plan hodographique défini.

$$\Omega = \log \left( 1 / \frac{df}{dz} \right)$$

Dans le cas où l'écoulement est partiellement délimité par des surfaces libres, nous présentons la méthode de résolution introduite par Kirchhoff en 1869. L'idée consiste à introduire la fonction complexe  $\Omega$  définie par :

$$\Omega = \log \left( U \frac{df}{dz} \right) = \log \left( \frac{U}{u - iv} \right)$$

On peut également exprimer  $\Omega$  comme suit :

$$\Omega = \log(U/q) + i\theta$$

Où  $f = \phi + i\psi$ ,  $\frac{df}{dz} = u - iv$ ,  $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ , avec  $(u, v)$  représentant les composantes du vecteur vitesse le long des axes  $x$  et l'axe  $y$  respectivement,  $\theta$  étant l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale, et  $U$  désignant la vitesse de référence.

La partie réelle de  $\Omega$  est constante sur les lignes de courant libres, ce qui signifie que  $\log\left(\frac{U}{q}\right) = cte$ . De plus, la partie imaginaire de  $\Omega$ . À l'aide de la transformation de Schwarz-Christoffel, le domaine polygonal  $\Omega$  est transformé en un demi-plan supérieur de la variable auxiliaire  $\lambda$ . Ainsi, dans le plan  $\lambda$  l'écoulement est uniforme et peut être représenté par la fonction potentielle  $F(\lambda) = c\lambda$ . Par conséquent, en appliquant les transformations inverses des transformations conformes utilisées, il est possible de retrouver l'écoulement d'origine  $f(z)$ .

Pour illustrer ce qui précède, nous présentons quelques propriétés de la transformation de Schwarz-Christoffel.

### 2.1.2 Transformation de Schwarz-Christoffel

Considérons un polygone dans le plan  $\Omega$ . ayant pour sommets  $A_1, A_2, \dots, A_n$  et pour angles intérieurs respectifs  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Les points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  correspondent respectivement aux points  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sur l'axe réel du plan des  $\lambda$ . La transformation de Schwarz-Christoffel transforme l'intérieur d'un polygone en un demi-plan supérieur (ou inférieur) d'un autre plan. La transformation est donnée par :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \alpha (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}}$$

ou bien

$$\Omega = \alpha \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}} d\lambda + \beta$$

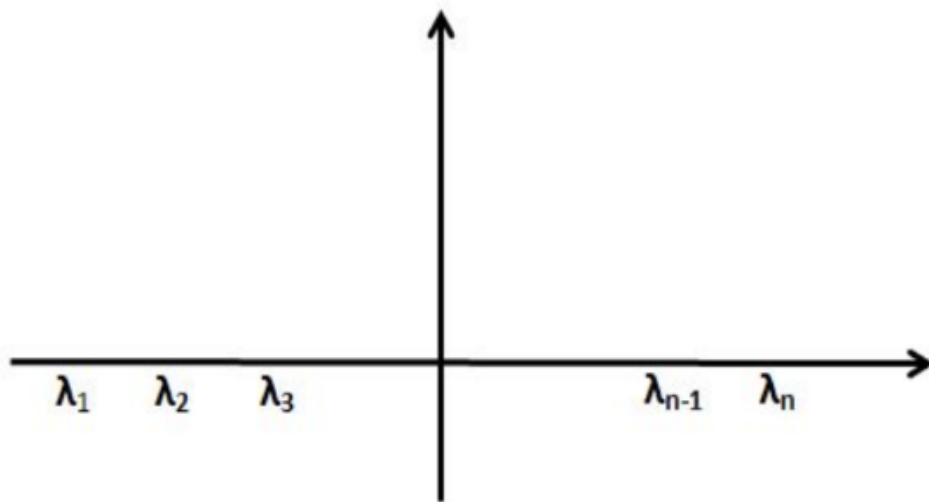
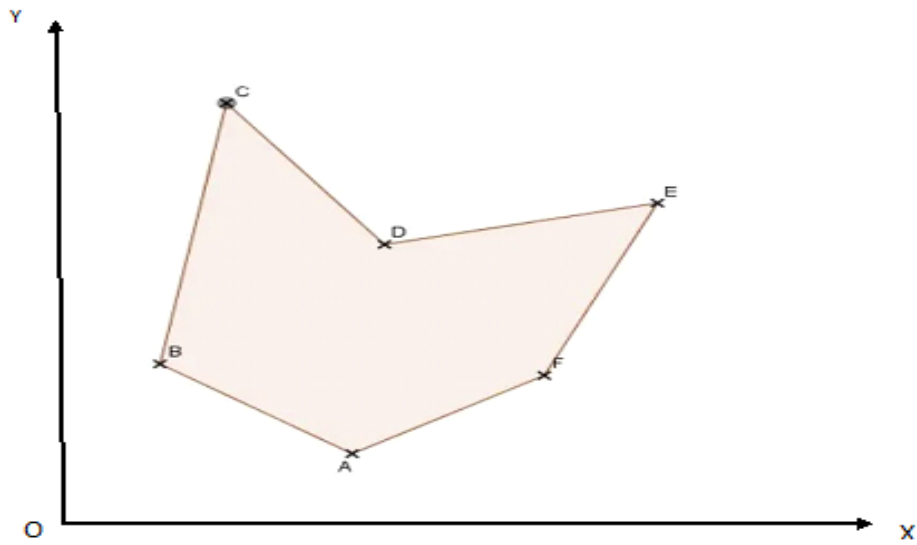
où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes complexes. On notera que :

1- Parmi les point  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  il est possible de choisir arbitrairement trois d'entre eux

2- Les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.

3- Il est pratique de choisir un point, comme  $\lambda_n$ , à l'infini, dans ce cas, le facteur n'existe pas.

4- Les polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limites de polygones.



Plan  $\lambda$

*Transformation de Schwarz – Christoffel*

## 2.2 Description du problème

On considère un écoulement bidimensionnel potentiel à surface libre d'un fluide incompressible et non visqueux autour d'un trapézoïdale obstacle (figure 2.1) de largeur  $H$  et de longueur infinies qui forme avec l'horizontal un angle d'inclinaison  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ . On peut facilement observer que la tension superficielle joue un rôle dans ce contexte. L'étude du problème est restreinte au demi-axe  $(X'OX)$ , car le champ d'écoulement examiné ici présente une symétrie par rapport à l'axe  $y$ . En outre, nous adoptons un système de coordonnées cartésiennes, où l'axe  $X$  est aligné avec la ligne de courant, comme illustré à la (figure 2.2).

Sur la surface libre, en négligeant la tension superficielle ainsi que les forces gravité, l'équation de Bernoulli est applicable et peut être formulée comme suit :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C^{ste} \quad (2.1)$$

où  $p$  est la pression sur la surface libre,  $\rho$  est la densité du fluide et  $v$  est la vitesse de l'écoulement. On rapporte le plan d'écoulement dans le repère  $OXY$  au plan complexe de la variable  $z = x + iy$ .

Dans ce plan, la fonction  $f = \Phi + i\Psi$ , où  $\Phi$  est la fonction potentielle et  $\Psi$  est la fonction de ligne de courant, est une fonction analytique (voir figure 2.2). Le problème d'écoulement décrit ci-dessus est formulé par un problème aux limites pour la fonction  $\Phi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\Phi = 0 \text{ dans le domaine de l'écoulement} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \text{ sur la paroi AB,EF} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)^2 = cte \text{ sur la surface libre} \end{array} \right.$$

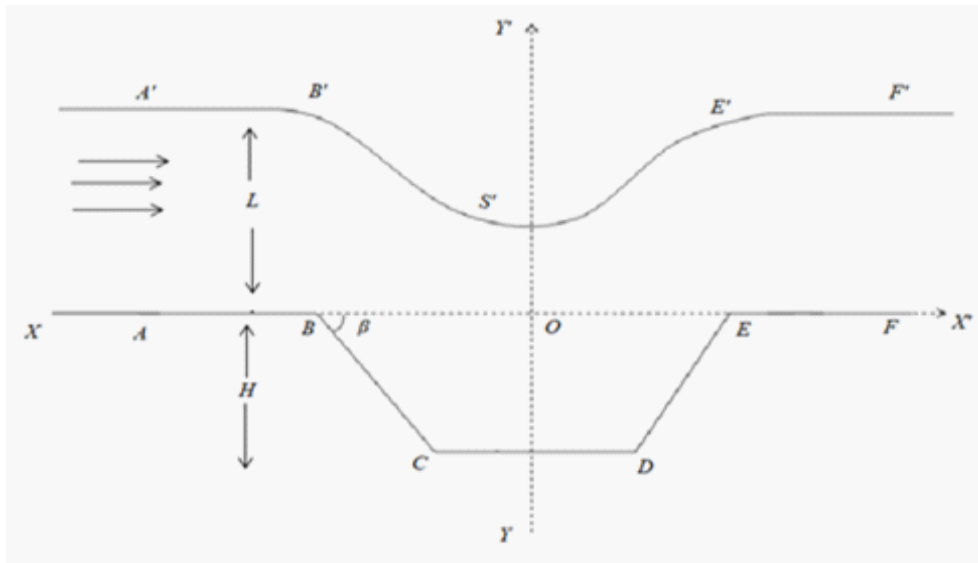


Fig 2.1: La description du problème

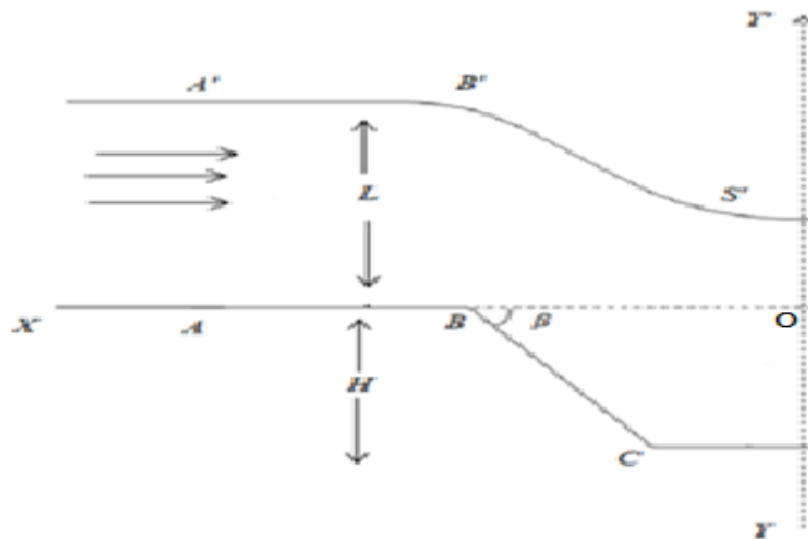


Fig 2.2: Demi-domaine variable  $Z$

### Résolution du problème

Dans cette section, l'écoulement est confiné entre un fond rigide  $ABCS$  et une surface libre  $A'B'S'$ . Étant donné que la tension superficielle et les effets de la gravité sont négligés, il est possible de calculer une solution exacte en utilisant la transformation d'hodographe ainsi que la transformation de Schwarz-Christoffel. Pour déterminer la solution, les étapes suivantes de la transformation sont suivies :

$$\Omega = \log \left( \frac{U dz}{df} \right) = \log \left( \frac{U}{u - iv} \right)$$

$$\Omega = \log \left( \frac{u}{q} \right) + i\theta \quad (2.4)$$

Grâce à cette transformation, le domaine occupé par le fluide dans le plan de la variable  $Z$  est converti en une semi-bande dans le plan  $\Omega$  (figure 3.3). Nous définissons  $\Phi = 0$  au point  $(x, y) = (0, 0)$ ,  $\Psi = 0$  sur la ligne  $ABS$  et  $\Psi = L$  sur la ligne de courant  $A'B'S'$ . Ensuite, une transformation conforme d'une bande semi-infinie dans le plan  $\Omega$  vers le demi-plan supérieur d'un autre plan complexe  $\lambda$  est effectuée.

Selon le théorème de Schwarz-Christoffel, cette transformation détermine le sens et l'orientation de l'écoulement. En choisissant  $A = 0, S = 1$ , nous obtenons :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = M \Pi (\lambda - \lambda_i)^{\frac{\alpha_i}{\pi} - 1}$$

où  $\lambda_i$  sont les coordonnées dans le plan  $\lambda$ ,  $\alpha_i$  sont les angles intérieurs au polygone, et  $M$  est une constante. La transformation précédente permet de caractériser la région du fluide dans le plan  $\Omega$  dans le demi-plan supérieur  $\lambda$  ainsi que la région fluide sur l'axe réel du plan  $\lambda$ .

En particulier, on a :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = M (\lambda)^{\frac{-1}{2}} (\lambda - 1)^{\frac{-1}{2}}$$

Par intégration, on trouve :

$$\Omega = M \int \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda-1}} d\lambda \quad (2.5)$$

En effectuant un changement de variable  $t = \sqrt{1-\lambda}$ , alors  $t^2 = 1-\lambda$  donc  $d\lambda = -2tdt$

Ainsi, on trouve :

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{-2M}{i} \int \frac{tdt}{t\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{-2M}{i} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{aligned}$$

Par intégration, on trouve :

$$\Omega = \frac{-2M}{i} \arcsin(\sqrt{t}) + N$$

Ainsi, en substituant  $t = \sqrt{1-\lambda}$ , nous avons :

$$\Omega = \frac{-2M}{i} \arcsin(\sqrt{1-\lambda}) + N \quad (2.6)$$

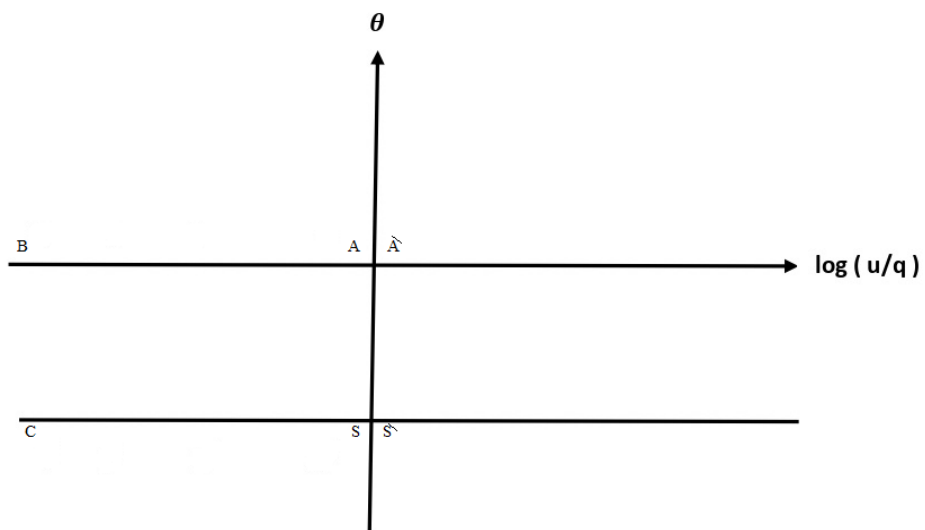


Fig 2.3: Plan  $\Omega$

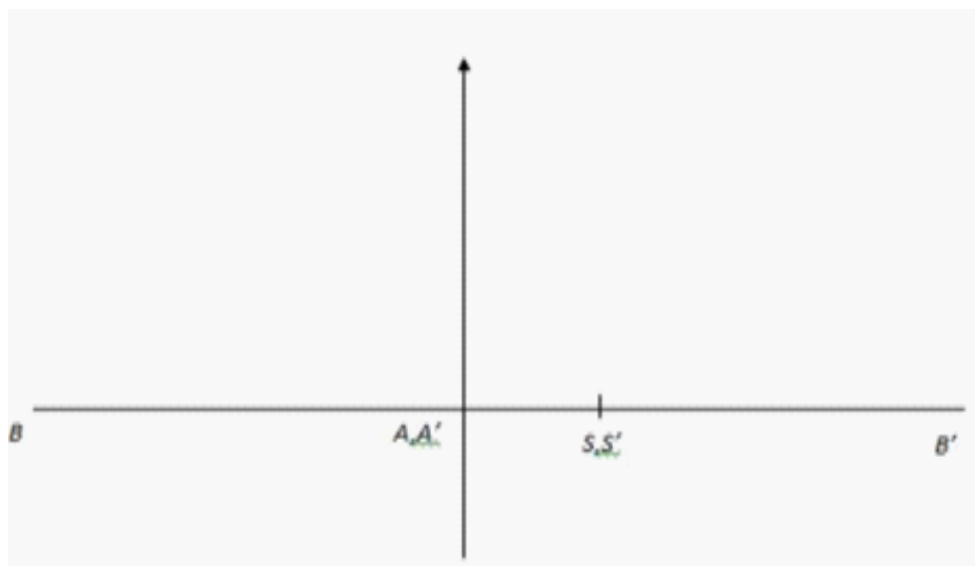
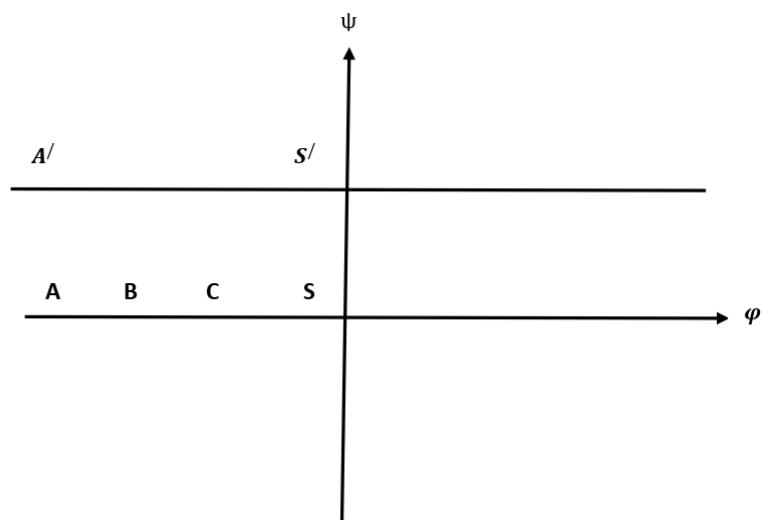


Fig 2.4: Plan  $\lambda$



**Fig 2.5:** Plan  $f$

Où  $M$  et  $N$  sont deux constantes que l'on peut déterminer :

1. si  $\lambda = 1$  alors  $\Omega = \frac{-2\pi}{3} \implies N = \frac{-i\pi}{3}$

2. si  $\lambda = 0$  alors  $\Omega \implies M = \frac{1}{3}$

Ainsi, l'équation (2.6) devient :

$$\Omega = \frac{2i}{3} \arcsin(\sqrt{1-\lambda}) - \frac{i\pi}{3} \quad (2.7)$$

Cela implique :

$$\lambda = 1 - \sin\left(\frac{-3}{2}\Omega - \pi\right)^2 \quad (2.8)$$

Nous cherchons désormais une relation entre  $f$  et  $\lambda$  qui transforme la demi-bande du plan  $f$  en demi-plan supérieur du plan  $\lambda$ .

En utilisant les points  $A = 0, S = 1$  et en appliquant à nouveau la transformation de Schwarz-Christoffel, nous trouvons :

$$\frac{df}{d\lambda} = \alpha \lambda^{-1} (\lambda - 1)^{-1}$$

Par le biais de l'intégration, nous obtenons :

$$f = \alpha \int \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda - 1)} + \beta \quad (2.9)$$

En intégrant, on obtient :

$$f = \alpha \log \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right) + \beta \quad (2.10)$$

Où  $\alpha, \beta$  sont deux constantes que l'on peut déterminer :

1-si  $\lambda \lim_{\rightarrow +\infty} f = 0 \Rightarrow \beta = 0$

2-si  $\lambda \lim_{\rightarrow 0} \lambda \left( \frac{\alpha df}{d\lambda} \right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{-LU}{\pi}$

Alors, on a :

$$f = \frac{-LU}{\pi} \ln \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right) \quad (2.11)$$

$$(3.11)$$

Cela implique que :

$$\lambda = \frac{1}{1 - \exp \left( \frac{-\pi f}{LU} \right)} \quad (2.12)$$

D'autre part, on a :

$$U \frac{dz}{d\lambda} = U \frac{dz}{df} \frac{df}{d\lambda} \quad (2.13)$$

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{-LU}{\pi \lambda (\lambda - 1)} \quad (2.14)$$

Nous avons aussi :

$$\Omega = \log \left( U \frac{dz}{df} \right) \quad (2.15)$$

Donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned} U \frac{dz}{df} &= \exp \left( \frac{2}{3} \ln \left( \sqrt{\lambda} + i\sqrt{1-\lambda} - i\frac{\pi}{3} \right) \right) \\ &= \exp \left( -i\frac{\pi}{3} \right) \times \left( \sqrt{\lambda} + i\sqrt{1-\lambda} \right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant les relations (2.13), (2.14) et (2.15), on obtient :

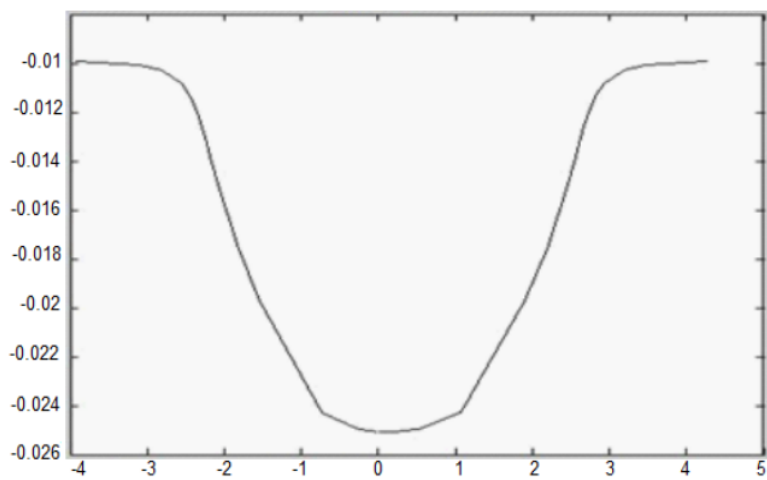
$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{LU \exp \left( -i\frac{\pi}{3} \right) \times \left( \sqrt{\lambda} + i\sqrt{1-\lambda} \right)^{\frac{2}{3}}}{\pi \lambda (\lambda - 1)} \quad (2.16)$$

On trouve alors :

$$Z = \frac{LU \exp \left( -i\frac{\pi}{3} \right)}{\pi} \int \frac{\left( \sqrt{\lambda} + i\sqrt{1-\lambda} \right)^{\frac{2}{3}}}{\lambda (\lambda - 1)} d\lambda \quad (2.17)$$

La surface libre donnée par cette relation est :

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} \frac{LU \exp \left( -i\frac{\pi}{3} \right)}{\pi} \int \frac{\left( \sqrt{\lambda} + i\sqrt{1-\lambda} \right)^{\frac{2}{3}}}{\lambda (\lambda - 1)} d\lambda \\ y = \operatorname{Im} \frac{LU \exp \left( -i\frac{\pi}{3} \right)}{\pi} \int \frac{\left( \sqrt{\lambda} + i\sqrt{1-\lambda} \right)^{\frac{2}{3}}}{\lambda (\lambda - 1)} d\lambda \end{cases}$$



**Fig 2.6:** Solution exacte

# Chapitre 3

## Étude de l'écoulement autour d'un obstacle trapéze avec tension de surface

### Résumé

Dans le présent chapitre, nous examinons un écoulement autour d'un obstacle, comme abordé dans le chapitre précédent, en tenant compte de l'influence de la tension superficielle. Ce problème se caractérise par une condition non linéaire, formulée par l'équation de Bernoulli sur la frontière libre, dont la forme reste indéterminée.

Dans ce contexte, nous adoptons une approche numérique inspirée des travaux de Vandenberg [26], H. Mekias [20] et B. Bouderah [38], connue sous le nom de méthode de troncature de la série. Cette méthode implique un paramètre physique appelé le nombre de Weber  $\alpha$ .

### 3.1 Position et formulation du problème

Comme expliqué dans le chapitre précédent, nous avons établi l'axe des  $x$  comme cadre de référence, s'alignant avec le fond rigide et horizontal  $AB, EF$ , et l'axe des  $y$  perpendiculaire à l'axe des  $x$  passant par le milieu du trapèze. Le quadrilatère  $BCDE$  formé par le trapèze,

a pour base  $BE$  et les angles aux sommets  $B$  et  $E$  sont égaux à  $\beta$ . Nous considérons que l'effet des forces de gravité est négligeable et que la tension de surface, notée  $\tilde{T}$  est non nulle. Ainsi, l'écoulement est caractérisé par le nombre de Weber qui est défini par :

$$\alpha = \frac{\tilde{\rho}\tilde{v}_0\tilde{L}}{\tilde{T}} \quad (3.1)$$

Où la pression au-dessus de la surface libre est supposée constante.

L'axe des  $x$  et l'axe des  $y$  forment un plan de la variable complexe  $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ . on note  $\vec{v} = (\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y}), \tilde{v}(\tilde{x},\tilde{y}))$  le champ du vecteur vitesse de l'écoulement. Les fonctions  $\tilde{\Phi}$  et  $\tilde{\Psi}$  définissent respectivement la fonction potentielle et la fonction de ligne de courant. Elles vérifient les conditions suivantes :

Les fonction  $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}$  qui définissent la fonction potentielle et la fonction ligne de courant, respectivement. Elles vérifient les conditions suivant

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}} \quad (3.2)$$

$$\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}}$$

La fonction potentielle complexe  $\tilde{f}$  est définie par :

$$\tilde{f}(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{\Phi}(\tilde{x},\tilde{y}) + i\tilde{\Psi}(\tilde{x},\tilde{y}) \quad (3.3)$$

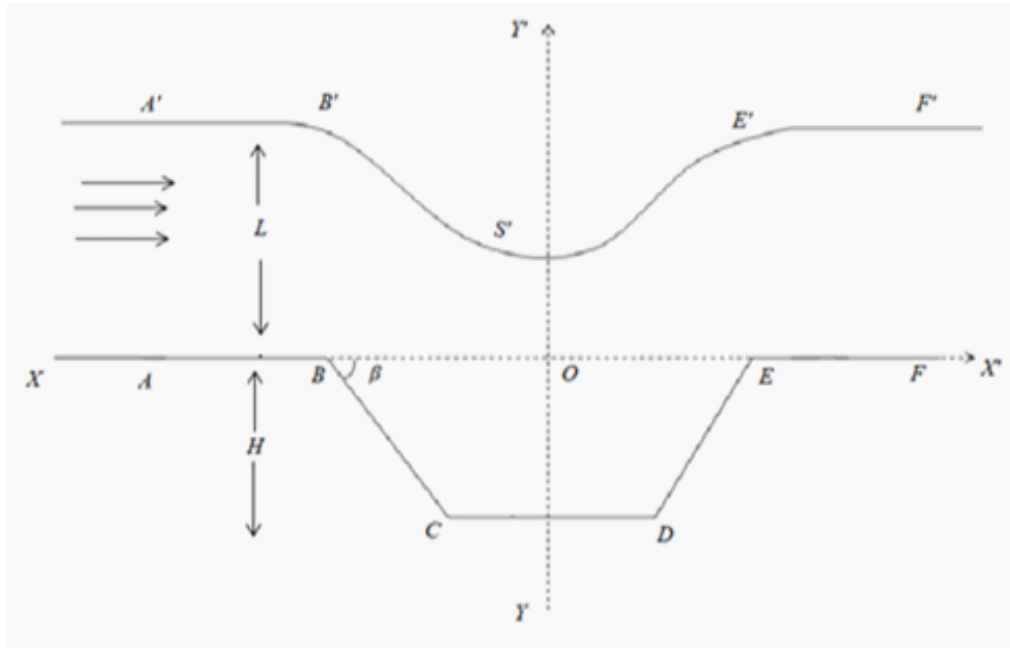


Fig 3.1: Plan  $Z$

On note par  $\tilde{\xi}$  la vitesse complexe :

$$\tilde{\xi} = \tilde{u} - i\tilde{v} = \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{z}}$$

Il en résulte de la formule(3.2) que les fonctions  $\tilde{f}$  et  $\tilde{\xi}$  de la variable complexe  $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$  sont des fonctions analytiques de  $\tilde{z}$ .

« Le problème de l'écoulement potentiel consiste à trouver la fonction de potentiel de vitesse  $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ , qui est régie par l'équation de Laplace suivant:

$$\cdot \Delta \tilde{\Phi} = 0$$

Dans le domaine d'écoulement, les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \cdot \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} &= 0 \quad \text{sur } AB, EF \\ \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\tilde{P}}{\rho} &= cte \quad \text{sur la surface libre} \end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème, nous introduisons des variables adimensionnelles en choisissant  $\tilde{v}_0$  comme unité de vitesse et  $\tilde{L}$  comme unité de longueur:

$$q = \frac{\tilde{q}}{\tilde{v}_0} \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\tilde{R}} \tilde{L} \tag{3.5}$$

Où  $\tilde{q} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}$  est le module du vecteur vitesse  $\vec{v} = (\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}))$  et  $\tilde{R}$  est le rayon de courbure de la surface libre.

En supposant que la pression juste au-dessus de la surface libre est constante, la condition de Bernoulli appliquée à cette surface s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{2}\tilde{v}_0^2 + \frac{\tilde{P}_0}{\tilde{\rho}} \quad \text{sur la surface libre} \quad (3.6)$$

Où  $\tilde{P}, \tilde{q}$  et  $\tilde{P}_0$  désignent respectivement la pression à la surface libre, le module de la vitesse, et la pression à l'infini juste au-dessus de la surface libre. Il convient de noter que le membre droit de (3.6) a été évalué en fonction des conditions d'écoulement à l'infini.

La relation entre  $\tilde{P}$  et  $\tilde{P}_0$  est donnée par la loi de Laplace :

$$\tilde{P} - \tilde{P}_0 = \frac{\tilde{T}}{\tilde{R}} = \tilde{T}\tilde{K} \quad (3.7)$$

Où  $\tilde{K} < 0$  si le centre de courbure est situé à l'extérieur du fluide, et  $\tilde{K} > 0$  si le centre de courbure est situé à l'intérieur du fluide.

Donc, nous avons :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 - \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}}\tilde{K} = \frac{1}{2}\tilde{v}_0^2 \quad \text{sur la surface libre} \quad (3.8)$$

D'après (3.4),(3.5)et la relation :  $\tilde{K} = \frac{1}{\tilde{R}}$ , l'équation(3.8) devient :

$$q^2 - \frac{2\tilde{T}}{\tilde{\rho}\tilde{L}\tilde{R}\tilde{v}_0^2} = 1 \quad \text{sur la surface libre} \quad (3.9)$$

Ainsi,(3.1) nous donne la relation finale :

$$q^2 - \frac{2}{\alpha R} = 1 \quad \text{sur la surface libre} \quad (3.10)$$

$\alpha$  est le nombre de Weber défini par (3.1).

Puisque  $\xi = u - iv$  et  $q^2 = |\xi|^2 = u^2 + v^2$ , l'équation (3.10) s'écrit alors :

$$|\xi|^2 - \frac{2}{\alpha R} = 1 \quad \text{sur la surface libre} \quad (3.11)$$

Pour mieux définir le rayon de courbure de la surface libre, nous exprimons la vitesse complexe  $\xi = u - iv$  sous la forme :

$$\xi = \exp(\tau - i\theta) \quad (3.12)$$

Où  $|\xi| = \exp \tau$  et  $\theta$  est l'angle entre l'axe horizontal des  $x$  et le vecteur vitesse  $\vec{v}(u, v)$ , mesuré positivement dans le sens trigonométrique. Soit  $\vec{e}_T, \vec{e}_N$  les vecteurs tangent et normal à la surface libre, respectivement, et  $ds$  désigne un élément de longueur d'arc sur cette surface. En coordonnées intrinsèques ( $e^\tau \cos \theta$ ), nous avons :

$$\frac{d\vec{e}_T}{ds} = K \vec{e}_N = \frac{1}{R} \vec{e}_N \implies \left| \frac{d\vec{e}_T}{ds} \right| = \frac{1}{R}$$

Soit  $\vec{v}$  le vecteur vitesse. D'après (3.4) :  $\vec{v}(u, v) = (e^\tau \cos \theta, e^\tau \sin \theta)$ ,  $q = |\vec{v}|$ . On sait que

$$\left| \frac{d\vec{e}_T}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \frac{1}{q} \right|$$

Donc,

$$\left| \frac{d\vec{e}_T}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{e}_T}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{q} \right| \quad (3.13)$$

où  $t$  désigne le temps. D'une part, nous avons :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} \implies \frac{d\theta}{dt} = \left[ \frac{d\theta}{d\Phi} \frac{d\Phi}{ds} + \frac{d\theta}{d\Psi} \frac{d\Psi}{ds} \right] \frac{ds}{dt}$$

Cependant, en notant que  $\frac{d\Psi}{ds} = 0$  et  $\frac{ds}{dt} = q$ , on obtient :

$$\frac{d\theta}{dt} = q \frac{d\theta}{d\Phi} \frac{d\Phi}{ds}$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\Phi}{dt} \frac{dt}{ds} = \left( \frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\Phi}{dy} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{ds}$$

D'où :

$$\frac{d\Phi}{ds} = \left( \frac{d\Phi}{dx}u + \frac{d\Phi}{dy}v \right) \frac{dt}{ds} = (u^2 + v^2) \frac{1}{q} = q$$

Ainsi, nous avons :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\Phi} q^2 \quad \text{sur la surface} \quad (3.14)$$

Cela nous donne la relation suivante :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\Phi} e^{2\tau} \quad (3.15)$$

Puisque

$$q^2 = (u^2 + v^2) = |\xi|^2 = |e^{\tau - i\theta}| = e^{2\tau}$$

Finalement, nous avons :

$$K = e^{2\tau} \left| \frac{d\vec{e}_T}{d\theta} \right| \left| \frac{d\theta}{d\Phi} \right| \left| \frac{1}{q} \right| \quad (3.16)$$

Mais, en considérant

$$\begin{aligned} \vec{v} = (u, v) = (e^\tau \cos \theta, e^\tau \sin \theta) &\implies q = |\vec{v}| = e^\tau \\ \vec{e}_T = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (\cos \theta, \sin \theta) &\implies \frac{d\vec{e}_T}{d\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta) \end{aligned}$$

Cela implique que  $\left| \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \right| = 1$ . Ainsi, l'équation (3.16) devient :

$$K = \frac{1}{R} = e^\tau \left| \frac{d\theta}{d\Phi} \right| \quad (3.17)$$

D'après  $|\xi|^2 = e^{2\tau}$  et l'équation (3.17), l'équation de Bernoulli (3.11) s'écrit :

$$\exp(2\tau) - \frac{2}{\alpha} \left| \frac{d\theta}{d\Phi} \right| \exp(\tau) = 1 \quad \text{sur la surface libre} \quad (3.18)$$

Ou, de manière équivalente :

$$(u^2 + v^2) - \frac{2}{\alpha} \left| \frac{d\theta}{d\Phi} \right| \sqrt{(u^2 + v^2)} = 1 \quad \text{sur la surface libre} \quad (3.19)$$

## 3.2 Méthode de la série

Nous résolvons le problème numérique en utilisant la méthode de troncation de la série, comme l'ont fait Vanden-Broeck et Keller [17]. Cette approche nous permet de calculer la fonction de vitesse complexe  $\zeta$ . Nous transformons successivement le domaine d'écoulement par une transformation conforme en un demi-disque unité dans un plan de variable complexe  $w$ ; où la surface libre sera transformée sur le demi-cercle unité  $w = e^{i\sigma}$ , et la paroi rigide  $ABCDEF$  sera située sur le diamètre du demi-disque unité. il s'ensuit que  $\zeta(z)$  est analytique dans le demi-disque unité de la variable complexe  $z = x + iy$ ,  $\zeta(w)$  est aussi analytique dans le demi-disque unité de la variable complexe  $w$ . La fonction  $f = \Phi + i\Psi$  transforme le plan d'écoulement en une bande infinie  $0 \leq \Psi \leq 1, -\infty \leq \Phi \leq +\infty$  dans le plan  $(\Phi, \Psi)$  (figure 3.2). Avec la transformation :

$$f = \frac{2}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right)$$

La bande est transformée en un demi-cercle unitaire dans le plan  $w$ . Les points  $A, B, C, D, E$  dans le plan  $f$ , sont respectivement transformés en  $w_A = -1, w_B = 1, w_C = -a, w_D = b$  et  $w_E = a$  dans le plan  $w$ . La surface libre est définie par la variable  $\sigma$  telle que :

$$w = \exp(i\sigma) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \sigma \leq \pi \quad (3.20)$$

Dans le plan, nous avons :

$$f = \Phi \quad \text{avec} \quad -\infty \leq \Phi \leq +\infty.$$

Nous trouvons alors :

$$f = \Phi + i = \frac{1}{\pi} \log \left( \frac{1 + \exp(i\sigma)}{1 - \exp(i\sigma)} \right) \quad \text{sur la surface libre}$$

D'où :

$$\frac{df}{d\sigma} = \frac{d\Phi}{d\sigma} = \frac{-2}{\pi \sin \sigma}$$

Ainsi, nous avons :

$$\frac{d\sigma}{d\Phi} = \frac{d\sigma}{d\Phi} = \frac{-2}{\pi \sin \sigma} \quad \text{sur la surface libre}$$

En utilisant la relation :

$$\frac{d\theta}{d\Phi} = \frac{d\theta}{d\Phi} \cdot \frac{d\sigma}{d\Phi} = \frac{-\pi \sin \sigma}{2} \cdot \frac{d\theta}{d\sigma}$$

l'équation de Bernoulli devient :

$$\exp(2\tau) - \frac{\pi}{\alpha} \times \sin \sigma \times \left| \frac{d\theta}{d\sigma} \right| \times \exp(\tau) = 1 \quad \text{sur la surface libre}$$

Après avoir écrit l'équation de Bernoulli dans le plan  $w$ , nous étudions le comportement asymptotique de  $\xi$  au voisinage des singularités  $B, C, D$  et  $E$ .

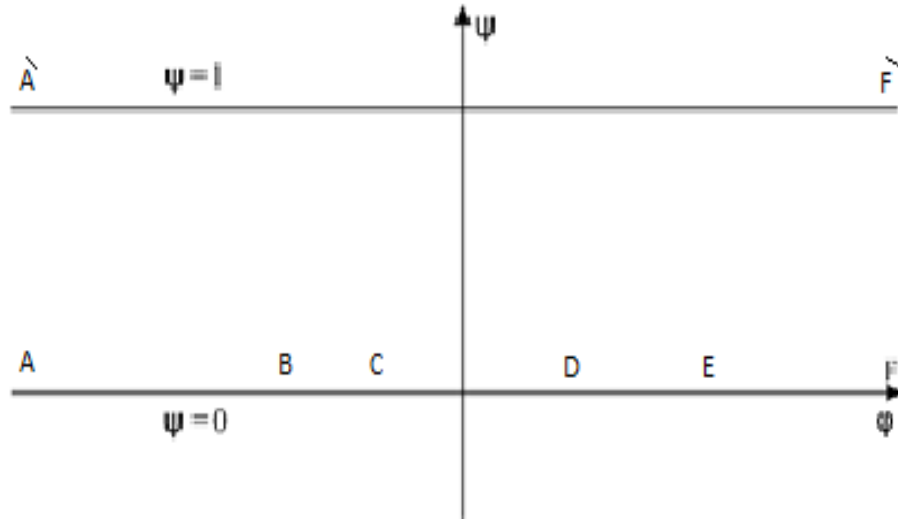


Fig 3.2: plan  $F$

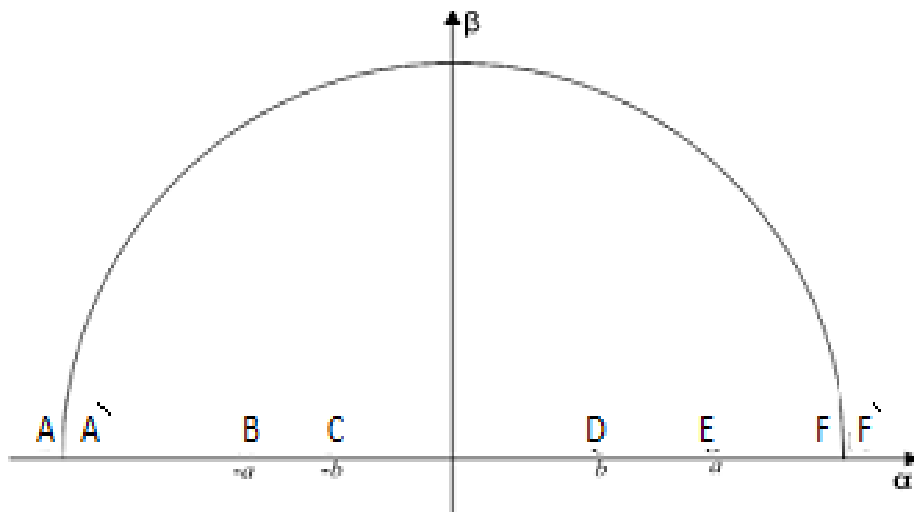


Fig 3.3: plan  $W$

### 3.2.1 Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités

Dans le domaine d'écoulement  $z$ , nous avons quatre points singuliers :  $z_B, z_E$  (qui est à l'infini), et deux points  $z_C, z_D$  où la vitesse est nulle. Ces quatre points correspondent, respectivement, aux points  $w_B, w_C, w_D$  et  $w_E$  dans le plan  $w$ .

#### 1. Comportement asymptotique au voisinage de $w = w_B$

L'écoulement au voisinage de  $w_B$  est caractérisé par un angle  $\alpha = \pi + \beta$ , dans le plan  $z$  au voisinage de  $z$ , au voisinage de  $z = z_B$ . La fonction complexe est donnée par :

$$f(z) \sim \frac{a}{n} (z - z_B)^n - f_B ; \quad n = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\pi + \beta} \quad \text{lorsque } z \rightarrow z_B$$

Nous trouvons alors

$$f(z) \sim a \frac{\pi + \beta}{\pi} (z - z_B)^{\frac{\pi}{\pi + \beta}} - f_B \quad \text{lorsque } z \rightarrow z_B$$

Cela implique que :

$$(z - z_B) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi + \beta)} (f + f_B) \right]^{\frac{\pi}{\pi + \beta}} \quad \text{lorsque } f \rightarrow f_B$$

En remplaçant la valeur de  $f$  par :

$$f = \Phi = \frac{2}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) \quad \text{sur la surface libre}$$

nous obtenons dans l'équation ci-dessus :

$$(z - z_B) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi + \beta)} \left( \frac{1}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^2 + f_B \right) \right]^{\frac{\pi+\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_B$$

Puisque  $\xi = \frac{df}{dz}$ , nous avons :

$$\xi \sim \frac{df}{dz} \sim a^{\frac{\pi+\beta}{\pi}} (\pi + \beta)^{\frac{\pi}{\beta}} \left[ 2 \left( \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) + \pi f_B \right) \right]^{\frac{-\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_B$$

De plus, on a :

$$\log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) \sim k_1 (w - w_B) \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_B$$

Alors, nous trouvons :

$$\xi \sim C_1 (w - w_B)^{\frac{-\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_B \quad (3.21)$$

où

$$C_1 \sim a^{\frac{\beta+\pi}{\pi}} (\pi + \beta)^{\frac{\beta}{\pi}} (k_1)^{\frac{-\beta}{\pi}}$$

## 2. Comportement asymptotique au voisinage de $w = w_E$

L'écoulement au voisinage de  $w_B$  est caractérisé par un angle  $\alpha = \pi + \beta$  dans le plan  $z$ , au voisinage de  $z$ , au voisinage de  $z = z_B$ . La fonction complexe est donnée par :

$$f(z) \sim \frac{a}{n} (z - z_D)^n + f_E ; \quad n = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\pi + \beta} \quad \text{lorsque } z \rightarrow z_E$$

Nous trouvons alors :

$$f(z) \sim a \frac{\pi + \beta}{\pi} (z - z_D)^{\frac{\pi}{\pi + \beta}} + f_E \quad \text{lorsque } z \rightarrow z_E$$

Cela implique que :

$$(z - z_E) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi + \beta)} (f - f_E) \right]^{\frac{\pi}{\pi + \beta}} \quad \text{lorsque } f \rightarrow f_E$$

En remplaçant la valeur de  $f$  par :

$$f = \Phi = \frac{2}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) \quad \text{sur la surface libre}$$

nous obtenons dans l'équation ci-dessus :

$$(z - z_E) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi + \beta)} \left( \frac{1}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^2 - f_E \right) \right]^{\frac{\pi + \beta}{\pi}} \quad \text{lorsque } w \rightarrow w_E$$

Nous trouvons alors :

$$f(z) \sim a \frac{\pi + \beta}{\pi} (z - z_E)^{\frac{\pi}{\pi + \beta}} - f_E \quad \text{lorsque } z \rightarrow z_E$$

Cela implique également :

$$(z - z_E) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi + \beta)} (f - f_E) \right]^{\frac{\pi}{\pi + \beta}} \quad \text{lorsque} \quad f \rightarrow f_E$$

En remplaçant à nouveau la valeur de  $f$  par

$$f = \Phi = \frac{2}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) \quad \text{sur la surface libre}$$

Dans l'équation ci-dessus, nous trouvons :

$$(z - z_E) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi + \beta)} \left( \frac{1}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^2 - f_E \right) \right]^{\frac{\pi + \beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_E$$

Puisque  $\xi = \frac{df}{dz}$ , nous avons :

$$\xi \sim \frac{df}{dz} \sim a^{\frac{\pi + \beta}{\pi}} (\pi + \beta)^{\frac{\pi}{\beta}} \left[ 2 \left( \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) - \pi f_D \right) \right]^{\frac{-\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_E$$

De plus, nous avons :

$$\log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) \sim k_2 (w - w_E) \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_E$$

Alors, nous trouvons :

$$\xi \sim C_2 (w - w_E)^{\frac{-\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_E \quad (3.22)$$

où

$$C_2 \sim a^{\frac{\beta+\pi}{\pi}} (\pi + \beta)^{\frac{\beta}{\pi}} (k_1)^{\frac{-\beta}{\pi}}$$

### 3. Comportement asymptotique au voisinage de $w = w_C$

L'écoulement au voisinage de  $w_C$  est caractérisé par un angle  $\alpha = \pi - \beta$  dans le plan,  $z$  au voisinage de  $z = z_C$ , La fonction complexe est donnée par :

$$f(z) \sim \frac{a}{n} (z - z_C)^n - f_C ; \quad n = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\pi - \beta} \quad \text{lorsque } z \rightarrow z_C$$

Nous trouvons alors :

$$f(z) \sim a^{\frac{\pi - \beta}{\pi}} (z - z_C)^{\frac{\pi}{\pi - \beta}} + f_C \quad \text{lorsque } z \rightarrow z_C$$

Cela implique que :

$$(z - z_C) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi - \beta)} (f + f_C) \right]^{\frac{\pi - \beta}{\pi}} \quad \text{lorsque } f \rightarrow f_C$$

En remplaçant la valeur de  $f$  par:

$$f = \Phi = \frac{2}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) \quad \text{sur la surface libre}$$

nous obtenons :

$$(z - z_C) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi - \beta)} \left( \frac{1}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^2 - f_C \right) \right]^{\frac{\pi - \beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_C$$

Nous avons donc :

$$f(z) \sim a \frac{\pi - \beta}{\pi} (z - z_C)^{\frac{\pi}{\pi - \beta}} - f_C \quad \text{lorsque} \quad z \rightarrow z_C$$

Cela implique également

$$(z - z_C) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi - \beta)} (f + f_C) \right]^{\frac{\pi}{\pi + \beta}} \quad \text{lorsque} \quad f \rightarrow f_C$$

En remplaçant la valeur de  $f$  par :

$$f = \Phi = \frac{2}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) \quad \text{sur la surface libre}$$

nous trouvons :

$$(z - z_C) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi - \beta)} \left( \frac{1}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^2 + f_D \right) \right]^{\frac{\pi - \beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_C$$

Puisque  $\xi = \frac{df}{dz}$ , nous avons :

$$\xi \sim \frac{df}{dz} \sim a \frac{\pi - 2\beta}{\pi} (\pi - \beta)^{\frac{-\beta}{\pi - \beta}} \left[ 2 \left( \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) - \pi f_C \right) \right]^{\frac{\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_C$$

De plus, nous avons :

$$\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right) \sim k_3(w-w_C) \quad \text{lorsque } w \rightarrow w_D$$

Alors, nous trouvons :

$$\xi \sim C_3(w-w_C)^{\frac{\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque } w \rightarrow w_D \quad (3.23)$$

où

$$C_3 \sim a^{\frac{\pi-2\beta}{\pi}} (\pi + \beta)^{\frac{-\beta}{\pi-\beta}} (k_3)^{\frac{\beta}{\pi}}$$

**d-Comportement asymptotique au voisinage de  $w = w_D$**

L'écoulement , au voisinage de  $w_C$  est un écoulement dans un angle  $\alpha = \pi - \beta$  dans le plan  $z$  , au voisinage de  $z = z_C$ .La fonction complexe est donnée par:

$$f(z) \sim \frac{a}{n} (z - z_D)^n + f_D ; \quad n = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\pi - \beta} \quad \text{lorsque } z \rightarrow z_D$$

Nous trouvons alors :

$$f(z) \sim a \frac{\pi - \beta}{\pi} (z - z_D)^{\frac{\pi}{\pi - \beta}} + f_D \quad \text{lorsque } z \rightarrow z_D$$

Cela implique que :

$$(z - z_D) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi - \beta)} (f - f_D) \right]^{\frac{\pi - \beta}{\pi}} \quad \text{lorsque } f \rightarrow f_D$$

En remplaçant la valeur de  $f$  par:

$$f = \Phi = \frac{2}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) \quad \text{sur la surface libre}$$

nous trouvons :

$$(z - z_D) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi - \beta)} \left( \frac{1}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^2 + f_D \right) \right]^{\frac{\pi - \beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_D$$

Nous avons alors :

$$f(z) \sim a \frac{\pi - \beta}{\pi} (z - z_D)^{\frac{\pi}{\pi - \beta}} - f_D \quad \text{lorsque} \quad z \rightarrow z_D$$

Cela implique :

$$(z - z_D) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi - \beta)} (f + f_D) \right]^{\frac{\pi}{\pi + \beta}} \quad \text{lorsque} \quad f \rightarrow f_D$$

En remplaçant la valeur  $f$  de par:

$$f = \Phi = \frac{2}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) \quad \text{sur la surface libre}$$

nous obtenons :

$$(z - z_D) \sim \left[ \frac{\pi}{a(\pi - \beta)} \left( \frac{1}{\pi} \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^2 + f_D \right) \right]^{\frac{\pi-\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_D$$

Puisque  $\xi = \frac{df}{dz}$ , nous trouvons :

$$\xi \sim \frac{df}{dz} \sim a^{\frac{\pi-2\beta}{\pi}} (\pi - \beta)^{\frac{-\beta}{\pi-\beta}} \left[ 2 \left( \log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) + \pi f_D \right) \right]^{\frac{\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_D$$

De plus, nous avons :

$$\log \left( \frac{1+w}{1-w} \right) \sim k_4 (w - w_D) \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_D$$

Ainsi, nous trouvons :

$$\xi \sim C_4 (w - w_D)^{\frac{\beta}{\pi}} \quad \text{lorsque} \quad w \rightarrow w_D \quad (3.24)$$

Où

$$C_4 \sim a^{\frac{\pi-2\beta}{\pi}} (\pi + \beta)^{\frac{-\beta}{\pi-\beta}} (k_4)^{\frac{\beta}{\pi}}$$

### 3.2.2 Formulation de la série

Étant donné que  $\xi(w)$  est analytique sauf aux points  $B, C, D$  et  $E$ ,  $\xi(w)$  peut s'écrire sous la forme:

$$\xi(w) = g(w) \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k\right)$$

Où  $g(w)$  contient les singularités et les zéros de  $\xi$  aux points  $B, C, D$  et  $E$  comme indiqué dans (3.21), (3.22), (3.23) et (3.24)

$$\xi = u - iv = \left(\frac{w-a}{1-aw}\right)^{-\frac{\beta}{\pi}} \left(\frac{w+a}{1+aw}\right)^{-\frac{\beta}{\pi}} \left(\frac{w-b}{1-bw}\right)^{\frac{\beta}{\pi}} \left(\frac{w+b}{1+bw}\right)^{\frac{\beta}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k\right) \quad (3.25)$$

En considérant la symétrie de l'écoulement, nous avons  $w_B = -w_E$  et  $w_C = -w_D$ . L'équation (3.25) devient

$$\xi = u - iv = \left(\frac{w^2 - a^2}{1 - a^2 w^2}\right)^{-\frac{\beta}{\pi}} \times \left(\frac{w^2 - b^2}{1 - b^2 w^2}\right)^{\frac{\beta}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k\right) \quad (3.26)$$

En utilisant les conditions aux limites suivantes:  $v = 0$  sur  $AB$  et  $EF$ , sur  $AB$ ,  $\xi = u$  pour  $w = -\zeta$  sur  $EF$ ,  $\xi = u$  pour  $w = +\zeta$  avec  $\zeta$  un nombre réel, nous avons l'égalité suivante :

$$\xi = u = \left(\frac{\zeta^2 - a^2}{1 - a^2 \zeta^2}\right)^{-\frac{\beta}{\pi}} \times \left(\frac{\zeta^2 - b^2}{1 - b^2 \zeta^2}\right)^{\frac{\beta}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (-\zeta)^k\right)$$

$$\xi = \left(\frac{\zeta^2 - a^2}{1 - a^2 \zeta^2}\right)^{-\frac{\beta}{\pi}} \times \left(\frac{\zeta^2 - b^2}{1 - b^2 \zeta^2}\right)^{\frac{\beta}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (+\zeta)^k\right)$$

Puisque  $\zeta$  est un nombre réel, et pour que l'égalité précédente soit vérifiée, les coefficients  $a_k$  doivent être réels pour  $k = 2n$ ,

Cela implique.

$$\xi = \left( \frac{w-a}{1-aw} \right)^{-\frac{\beta}{\pi}} \left( \frac{w+a}{1+aw} \right)^{\frac{-\beta}{\pi}} \left( \frac{w-b}{1-bw} \right)^{\frac{\beta}{\pi}} \left( \frac{w+b}{1+bw} \right)^{\frac{\beta}{\pi}} \exp \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^{2k} \right) \quad (3.27)$$

Les coefficients réels  $a_{2k}$  sont à déterminer. La série doit converger dans le disque unité du plan  $w$ . En substituant, on obtient les relations (3.12), (3.20) et (3.27):

$$\exp(\tau - i\theta) = \left( \frac{e^{2i\sigma} - a^2}{1 - a^2 e^{2i\sigma}} \right)^{\frac{-\beta}{\pi}} \left( \frac{e^{2i\sigma} - b^2}{1 - b^2 e^{2i\sigma}} \right)^{\frac{\beta}{\pi}} \exp \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{2ik\sigma} \right)$$

Cela implique que  $w = e^{i\sigma}$  avec  $\beta = \frac{\pi}{3}$

$$\exp(\tau - i\theta) = \left( \frac{e^{2i\sigma} - a^2}{1 - a^2 e^{2i\sigma}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{e^{2i\sigma} - b^2}{1 - b^2 e^{2i\sigma}} \right)^{\frac{1}{3}} \exp \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{2ik\sigma} \right)$$

$$\exp(\tau - i\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos(2(k-1)\sigma) - i \left[ \begin{array}{l} 2\alpha \arctan \left( \frac{1+a^2}{1-a^2} \tan \sigma \right) - 2\alpha \arctan \left( \frac{1+b^2}{1-b^2} \tan \sigma \right) - \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \sin(2(k-1)\sigma) \end{array} \right]$$

Alors, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos(2(k-1)\sigma) \\ \theta = 2\alpha \arctan \left( \frac{1+a^2}{1-a^2} \tan \sigma \right) - 2\alpha \arctan \left( \frac{1+b^2}{1-b^2} \tan \sigma \right) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \sin(2(k-1)\sigma) \end{array} \right.$$

On a l'équation de Bernoulli :

$$\exp(2\tau\sigma) - \frac{\pi}{\alpha} \sin(\sigma) \exp(\tau) \frac{d\theta}{d\sigma} = 1 \quad \text{sur la surface libre} \quad (3.28)$$

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = 2\alpha \ln(\cos \sigma) \arctan \frac{1}{a^2 - 1} (a^2 + 1) + 2\alpha \ln(\cos \sigma) \arctan \frac{1}{b^2 - 1} (b^2 + 1) - \sum_{k=1}^{\infty} \left( -2 \frac{\cos 2\sigma (k-1)}{4k-4} a_k \right)$$

Alors, on trouve :

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos(2(k-1)\sigma) - \frac{\pi}{\alpha} \sin(\sigma) \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos(2(k-1)\sigma) 2\alpha \ln(\cos \sigma) \arctan \frac{1}{a^2 - 1} (a^2 + 1) +$$

$$2\alpha \ln(\cos \sigma) \arctan \frac{1}{b^2 - 1} (b^2 + 1) - \sum_{k=1}^{\infty} \left( -2 \frac{\cos 2\sigma (k-1)}{4k-4} a_k \right) = 1$$

Pour déterminer les coefficients  $a_k$ ,  $k = 2k$ , de la série, on tronque la série après  $N$  termes puis on discrétise l'intervalle  $[0, \pi]$  en  $N$  points, en introduisant

$$\sigma_I = \frac{\pi}{N} (I - 1), I = 1, \dots, N \quad (3.29)$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos(2(k-1)\sigma_I) - \frac{\pi}{\alpha} \sin(\sigma_I) \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos(2(k-1)\sigma_I) 2\alpha \ln(\cos \sigma_I) \arctan \frac{1}{a^2 - 1} (a^2 + 1) +$$

$$2\alpha \ln(\cos \sigma_I) \arctan \frac{1}{b^2 - 1} (b^2 + 1) - \sum_{k=1}^{\infty} \left( -2 \frac{\cos 2\sigma_I (k-1)}{4k-4} a_k \right) = 1 \quad (3.30)$$

Le nombre de Weber  $\alpha$  est un paramètre. On utilise la méthode de Newton et la méthode de factorisation LU pour calculer les coefficients  $(a_n, n = 1, \dots, N)$  pour différentes valeurs du nombre de Weber  $\alpha$ . On donne  $w_B = -w_E = 0.6$ ,  $w_C = -w_D = 0.3$  et  $\beta = \frac{\pi}{3}$ .

### Forme de la surface libre

Après avoir trouvé les coefficients  $a_n$ , la forme de la surface libre est déterminée comme suit:

À partir de la relation

$$\exp(\tau - i\theta) = u - iv$$

$$\exp(-\tau + i\theta) = \frac{1}{u - iv} = \frac{dx}{d\Phi} + i \frac{dy}{d\Phi} \quad (3.31)$$

$$e^{-\tau} e^{\theta} = \frac{dx}{d\Phi} + i \frac{dy}{d\Phi} = e^{-\tau} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\Phi} = e^{-\tau} \cos \theta \\ \frac{dy}{d\Phi} = e^{-\tau} \sin \theta \end{cases} \quad (3.32)$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta\Phi}{\delta\sigma} = \frac{2}{\pi \sin \sigma} \\ e^{\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos(2(k-1)\sigma) \\ \theta = 2\alpha \arctan\left(\frac{1+a^2}{1-a^2} \tan \sigma\right) - 2\alpha \arctan\left(\frac{1+b^2}{1-b^2} \tan \sigma\right) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \sin(2(k-1)\sigma) \end{array} \right.$$

Pour déterminer la forme de la surface libre

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta x}{\delta \sigma} = \frac{2}{\pi \sin(\sigma)} e^{-\tau(\sigma)} \times \cos \theta(\sigma) \\ \frac{\delta y}{\delta \sigma} = \frac{2}{\pi \sin(\sigma)} e^{-\tau(\sigma)} \times \sin \theta(\sigma) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta x}{\delta \sigma}(\sigma_I) = \frac{2}{\pi \sin(\sigma_I)} \left( - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos 2\sigma_I(k-1) \right) \times \cos \left( \begin{array}{l} 2\alpha \arctan \left( \frac{1+a^2}{1-a^2} \tan \sigma_I \right) - 2\alpha \arctan \left( \frac{1+b^2}{1-b^2} \tan \sigma_I \right) \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \sin(2(k-1)\sigma_I) \end{array} \right) \\ \frac{\delta y}{\delta \sigma}(\sigma_I) = \frac{2}{\pi \sin(\sigma_I)} \left( - \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \cos 2\sigma_I(k) - 1 \right) \times \sin \left( \begin{array}{l} 2\alpha \arctan \left( \frac{1+a^2}{1-a^2} \tan \sigma_I \right) - 2\alpha \arctan \left( \frac{1+b^2}{1-b^2} \tan \sigma_I \right) \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \sin(2(k-1)\sigma_I) \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Pour trouver la forme de la surface libre, nous intégrons la formule (3.33) dans l'intervalle  $0 < \sigma < \pi$ . Nous utilisons la méthode d'Euler avec  $N = 50$  points.

### 3.3 Résultats et discussion

#### 1. Solution sans tension de surface

Dans cette section, le nombre de Webre  $\alpha$  tend vers l'infini, alors la tension de surface tend vers zéro ce cas on trouve la solution exacte.

Le tableau(3.1) donné ci-dessous montre quelque valeurs de coefficients  $a_n$  de la série (3.33) pour  $\alpha \rightarrow \infty$ .

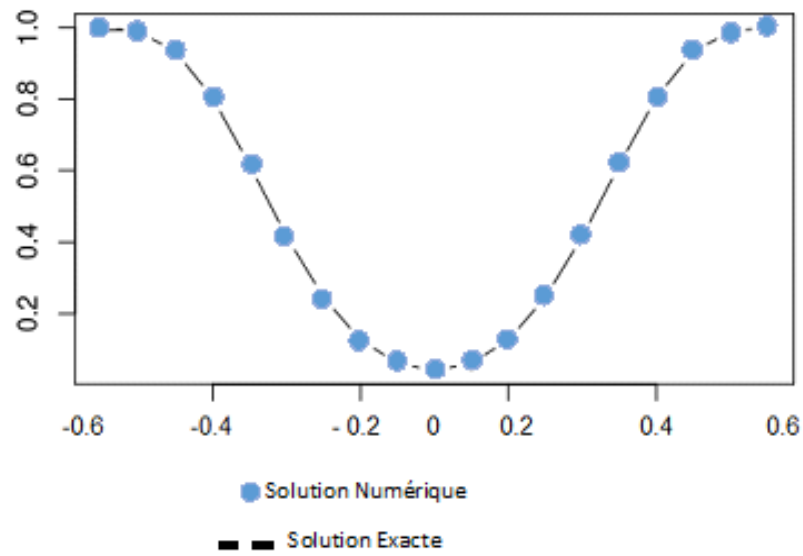
Tableau 4.1. Valeurs des coefficients  $a_n$  pour  $\alpha \rightarrow \infty$

$\beta$	$a_1$	$a_{10}$	$a_{20}$	$a_{30}$	$a_{40}$	$a_{50}$
$\frac{\pi}{3}$	$-3.7542 \times 10^{-3}$	$-1.9339 \times 10^{-5}$	$-1.3421 \times 10^{-7}$	$-3.4571 \times 10^{-9}$	$-2.9651 \times 10^{-11}$	$-1.0635 \times 10^{-12}$

La conclusion obtenue c'est  $a_n$  sont négligeables ( $a_n \rightarrow 0$ ). L'algorithme converge très rapidement. En substituant ces valeurs dans (3.26), on obtient la solution

$$\xi = u - iv = \left( \frac{w^2 - a^2}{1 - a^2 w^2} \right)^{-\beta} \times \left( \frac{w^2 - b^2}{1 - b^2 w^2} \right)^{\beta}$$

On vérifie aisément que la solution donnée est une solution exacte. La forme de la surface libre pour  $\alpha \rightarrow \infty$  donnée la (figure (3.4)).



**Figure 3.4:** Comparaison entre la solution réelle et la solution approximative

## 2. Solution avec tension de surface

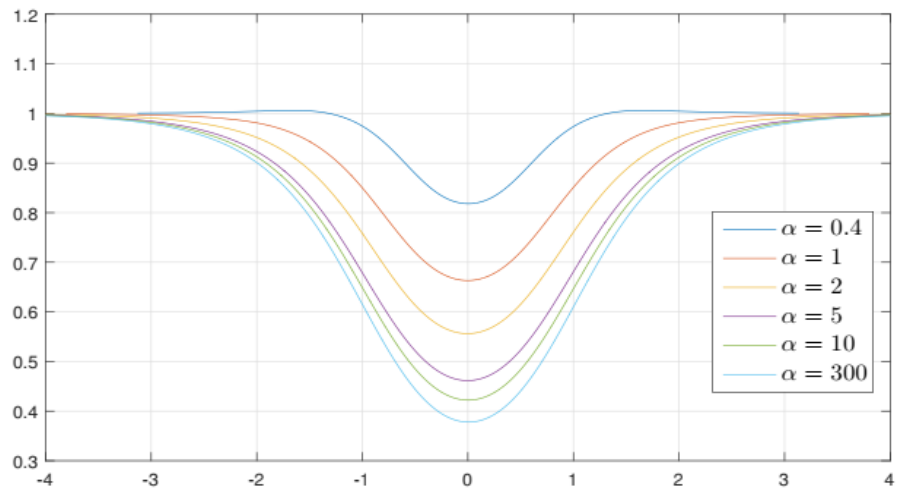
La méthode numérique décrite dans le chapitre 3 est utilisée pour calculer des solutions relatives aux écoulements à surface libre sur un obstacle de forme trapézoïdale. Nous nous concentrons sur les solutions sans onde pour différentes valeurs du nombre de Weber  $\alpha$ , ainsi que pour diverses hauteurs de l'obstacle (paramètres  $a$  et  $b$ ) et angles  $\beta$ , où  $0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ . Lorsque  $\alpha$  atteint des valeurs très élevées ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), un comportement particulier se manifeste. Pour des valeurs fixes de  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \infty$ ), on observe que les coefficients  $a_k$  diminuent rapidement par exemple, pour un angle  $\beta = \frac{\pi}{6}$  (voir tableau 3.2).

**Tableau3.2:** Les coefficients  $a_k$  pour certaines valeurs du nombre de Weber  $\alpha$  et certaines valeurs de l'angle  $\beta$

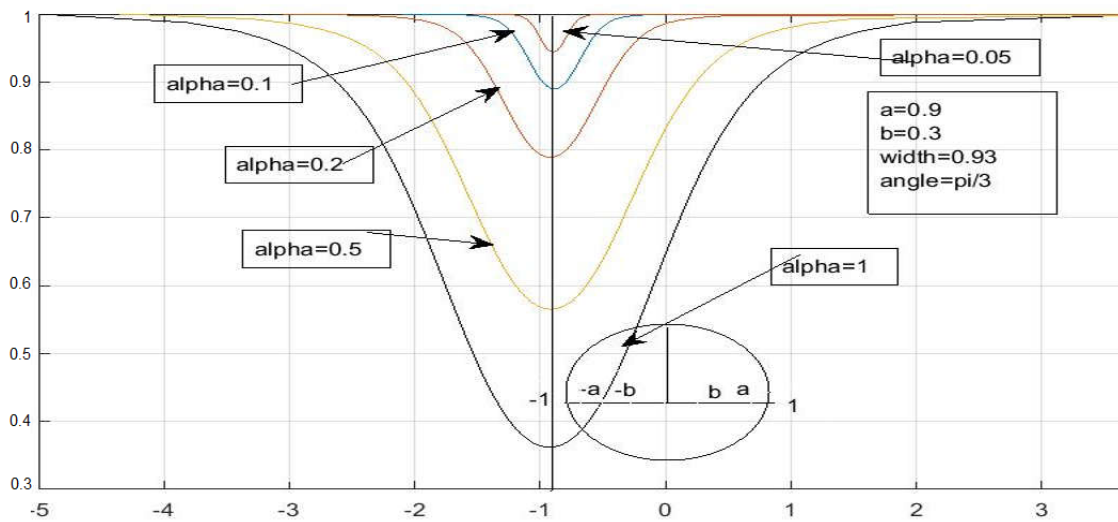
$\beta$	$\alpha$	$a_1$	$a_{10}$	$a_{30}$	$a_{50}$
$\frac{\pi}{2}$	1000	$1.9882 \times 10^{-4}$	$1.0327 \times 10^{-7}$	$-4.0031 \times 10^{-8}$	$-7.9161 \times 10^{-9}$
	50	$3.9410 \times 10^{-3}$	$2.1639 \times 10^{-6}$	$-8.3277 \times 10^{-7}$	$-1.5954 \times 10^{-7}$
	1	$1.4981 \times 10^{-1}$	$-1.7857 \times 10^{-4}$	$-6.6945 \times 10^{-5}$	$-1.1781 \times 10^{-5}$
$\frac{\pi}{3}$	1000	$1.3119 \times 10^{-4}$	$-6.8125 \times 10^{-8}$	$-2.647 \times 10^{-8}$	$-5.2220 \times 10^{-6}$
	50	$2.599 \times 10^{-3}$	$-1.4273 \times 10^{-6}$	$-5.4932 \times 10^{-7}$	$-1.0524 \times 10^{-7}$
	1	$9.9009 \times 10^{-2}$	$-1.1796 \times 10^{-4}$	$-4.4221 \times 10^{-5}$	$-7.7831 \times 10^{-6}$
$\frac{\pi}{6}$	1000	$6.3627 \times 10^{-5}$	$-3.3500 \times 10^{-8}$	$-1.2916 \times 10^{-8}$	$-3.3792 \times 10^{-9}$
	50	$1.2609 \times 10^{-3}$	$-7.0257 \times 10^{-7}$	$-2.6993 \times 10^{-7}$	$-5.1813 \times 10^{-8}$
	35	$1.4426 \times 10^{-2}$	$-1.14.98 \times 10^{-4}$	$8.6653 \times 10^{-5}$	$4.8616 \times 10^{-5}$

Ces figures montrent comment la tension superficielle affecte la surface libre des liquides à des angles spécifiques. La tension superficielle est la force résultant de l'attraction entre les molécules d'un liquide, et elle joue un rôle essentiel dans la formation de la surface du liquide. Il est noté que l'élévation de la surface libre diminue lorsque le nombre de Weber diminue. Le nombre de Weber représente le rapport entre la force dynamique et la force superficielle, indiquant ainsi l'impact de la gravité par rapport à la tension superficielle. Plus la valeur de  $\alpha$  est élevée, plus l'effet de la gravité se fait sentir. Nous observons également que l'élévation de la surface libre augmente avec la hauteur de l'obstacle, ce qui signifie que des obstacles plus hauts exercent une influence plus importante sur le liquide, entraînant

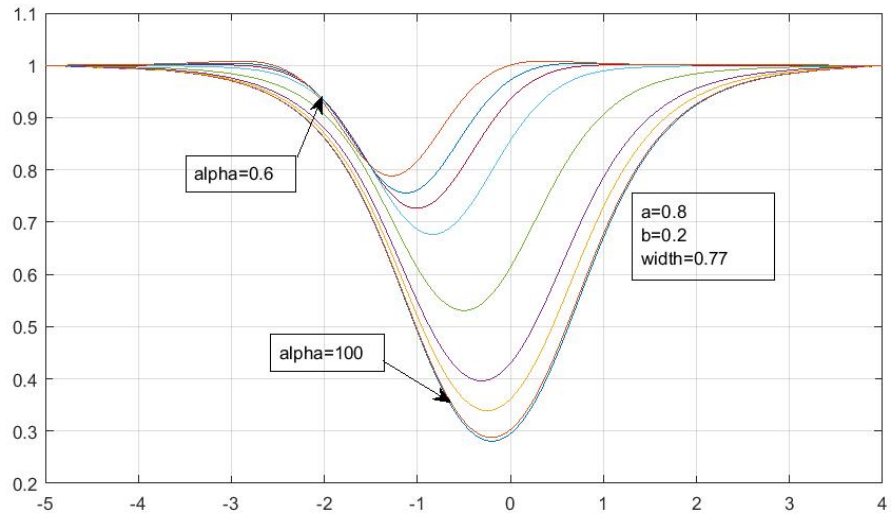
ainsi un surcroît d'élévation de la surface. L'effet de l'angle  $\beta$  sur les profils de surface libre est également examiné pour des valeurs du nombre de Weber  $\alpha$  et d'autres paramètres ( $a$  et  $b$ ). L'angle  $\beta$  influence la façon dont le liquide interagit avec la surface solide de l'obstacle. D'après les résultats numériques présentés, nous concluons qu'il existe une solution unique pour ce phénomène de surface libre, ce qui signifie qu'il n'y a qu'un seul état possible avec une surface lisse pour les liquides lorsque le nombre de Weber est compris dans l'intervalle  $0 < \alpha \leq 1$ . Enfin, la plupart des calculs ont été réalisés et présentés avec  $N = 50$ .



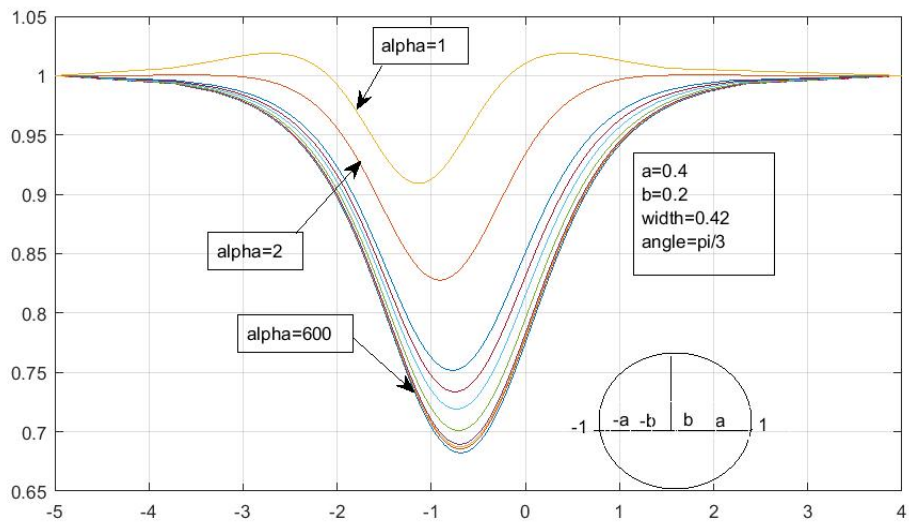
**Fig 3.5:** Courbe de la surface pour  $a = 0.6, b = 0.3, \beta = \frac{\pi}{3}$  différentes valeurs  $\alpha$



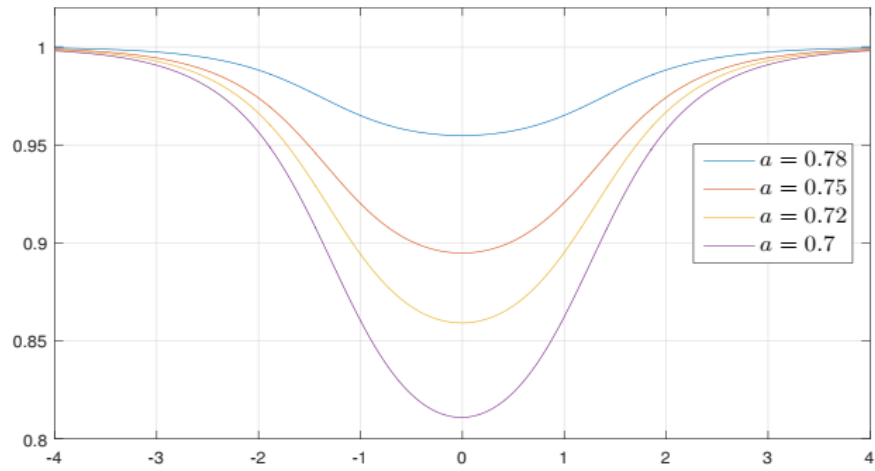
**Fig 3.6:** Courbe de la surface pour  $a = 0.9, b = 0.3$  et  $\beta = \frac{\pi}{3}$ , différentes valeurs  $\alpha$



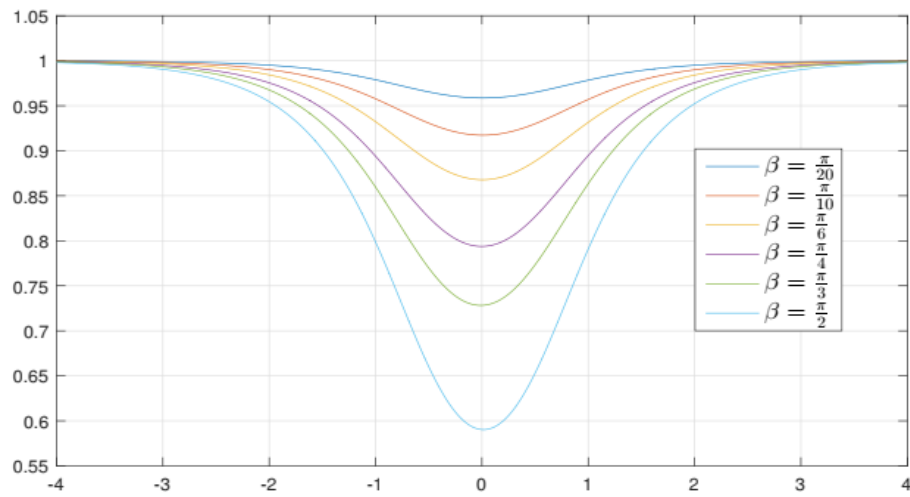
**Fig 3.7:** Courbe de la surface pour  $a = 0.8$ ,  $b = 0.2$  et  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , avec  $\alpha = 100$



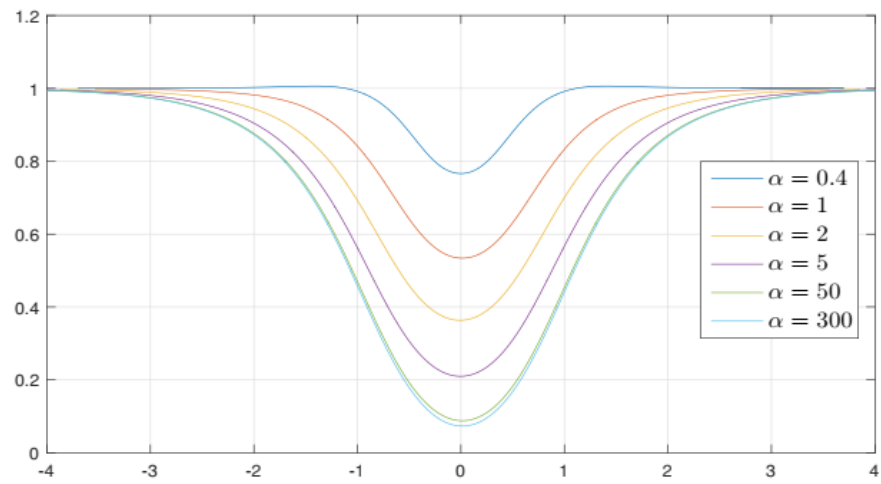
**Fig 3.8 :** Courbe de la surface pour  $a = 0.4$ ,  $b = 0.2$  et  $\beta = \frac{\pi}{3}$ , différentes valeurs  $\alpha$



**Fig 3.9 :** Courbe de la surface pour différentes valeurs de  $a$  lorsque  $b = 0.8, \beta = \frac{\pi}{4}, \alpha = 100$



**Fig 3.10:** Courbe de la surface libre pour différentes valeurs de  $\beta$  lorsque  $\alpha = 100; a = 0.6$   
et  $b = 0.3$



**Fig 3.11:** Courbe de la surface pour différentes valeurs de  $\alpha$  lorsque  $a = 0.8, b = 0.4, \beta = \frac{\pi}{3}$

## Conclusion Générale

Les problèmes des écoulements de type jet apparaissent dans de nombreuses situations d'intérêt pratique : Les problèmes liés à l'industrie tel que les chambres des combustions des moteurs, les pompes à jet, ou bien ceux en relation avec l'urbanisme comme l'architecture des barrages. Ces problèmes deviennent très difficiles à résoudre explicitement, surtout si on prend en considération les effets de la tension de surface, de gravité ou de viscosité, car ces derniers ont une grande influence sur la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la surface libre.

Dans ce travail, nous avons effectué une étude analytique et numérique d'un problème d'un écoulement potentiel bidimensionnel d'un jet d'un fluide incompressible et non visqueux devant obstacle à la forme trapèze, pour trouver la solution analytique on néglige l'effet de la tension de surface et en négligeant l'effet de la gravité, pour trouver la solution numérique on retient la tension de surface et en négligeant l'effet de la gravité fait intervenir le paramètre de Weber.

Pour traiter ce problème, on a utilisé des méthodes analytiques et numériques basées sur la théorie des variables complexes. Dans cette étude, on satisfait quelques résultats :

Dans le chapitre 2 on utilise la méthode des lignes de courant a été appliquée dans le présent travail en vue d'identifier la solution exacte au problème de recherche de la forme de l'écoulement à surface libre. La méthode adoptée est basée sur la méthode de l'hodographe et la technique de transformation de Schwartz-Christoffel. Les transformations utilisées ici sont considérées comme des approches fondamentales en mécanique des fluides, car elles simplifient et facilitent la résolution des problèmes difficiles dans le domaine de la mécanique des fluides. Elles peuvent être utilisées pour transformer avec succès des domaines d'écoulement complexes en domaines plus simples. Elles peuvent également aider à simplifier tous les calculs afin d'obtenir la solution exacte au problème de recherche de la forme d'un écoulement à surface libre. Il convient de souligner que la gravité et la tension superficielle sont négligées dans ce travail. Ces deux conditions ont d'abord simplifié les calculs car

tous les termes non linéaires ont disparu des équations utilisées, et deuxièmement, elles ont contribué à trouver facilement la solution exacte.

Cette étude a adopté la théorie des lignes de courant libres, qui est basée sur les transformations de Kirchhoff et d'Hodographe, dans le but de trouver une solution analytique approximative pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison  $\beta$  lorsqu'un obstacle trapézoïdal symétrique est utilisé.

Les résultats nous ont montré, obtenus dans ce travail, on peut conclure que l'approche de calcul utilisée est très efficace car elle fournit des solutions adéquates à ce type de problèmes d'écoulement à surface libre. De plus, cette méthode peut également être utilisée pour comparer les solutions exactes aux solutions approximatives trouvées dans le cas où la gravité est prise en compte, lorsque le nombre de Froude tend vers  $\infty$ , et dans le cas où la tension superficielle est prise en considération, lorsque le nombre de Weber  $\alpha$  tend vers  $\infty$ .

Le troisième chapitre traite, une technique de troncature en série a été utilisée pour un écoulement de fluide à surface libre bidimensionnel, non visqueux, stationnaire et irrationnel sous l'influence de la tension superficielle au-dessus d'un obstacle trapézoïdal. Les équations intégrales non linéaires ont été résolues en utilisant une méthode de troncature en série. Les résultats obtenus montrent que pour une diminution du nombre de Weber, l'élévation de la surface libre diminue.

Enfin, on a discuté les résultats obtenus avec des schémas et des tableaux qui expliquent bien notre travail.

# Annexe

1. Méthode de Newton .
2. Algorithme de Newton pour la résolution de systèmes non linéaire  $f(x) = 0$
3. Algorithme de Jordon avec pivotation totale implicite .

### 1. Méthode de Newton.

Dans la présente section, on considère le problème de recherche d'une solution au système d'équation:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

qu'on peut écrire  $f(x) = 0$ , ou  $f$  et  $x$  sont deux vecteurs à  $n$  composant. On suppose que  $f$  est de classe  $C^1$  sur un certain ouvert convexe  $D$ .

La matrice  $E(x) = \left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1\dots n}$  est appelée Jacobien de  $f$  au point  $x$ . Le développement de Taylor au voisinage d'une approximation  $x^*$  de  $x$  s'écrit :

$$f(x) = f(x^*) + E(x^*)(x - x^*) + R(x^*, x - x^*)$$

ou

$$R(x^*, x - x^*) = (x - x^*) \cdot \int (E(x^* + t(x - x^*)) - E(x^*)) dt$$

Ainsi, au voisinage de  $x^*$  l'expression linéaire

$$f_*(x) = f(x^*) + E(x^*)(x - x^*)$$

est une bonne approximation de  $f(x)$ . Il est clair qu'une meilleure approximation de la solution  $x$  peut être obtenue en résolvant l'équation

$$f_*(x) = 0$$

i.e

$$f(x^*) + E(x^*)(x - x^*) = 0$$

En suivant la procédure précédant, la méthode générale de Newton consiste à prendre une approximation initiale  $x_0$  a la solution  $x$ , puis tenter à l'améliorer itérativement comme suit:

$$x_{k+1} = x_k - S_k^{-1} \cdot f_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

en prenant  $f_k = f(x_k)$  et avec la définition de la matrice Jacobienne

$$S_k = E(x_k)$$

On continue jusqu'à ce que  $|f_k(x_k)| < \epsilon$

## 2. Algorithme de Newton pour la résolution de système non linéaire $f_*(x) = 0$

Etant données:

Calculer :

$$E_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \quad \text{tel que } x = x_k, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{et } i = 1, 2, \dots, n$$

$$f_i^{(k)} = -f_i(x_k)$$

Résoudre le système linéaire :

$$\sum_{i=1}^n E_{ij}^{(k)} \Delta X_j^{(k)} = f_i^{(k)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Calculer

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta X_j^{(k)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Si

$$|f_i(x_{k+1})| < \epsilon \quad i = 1, 2, \dots, n$$

est vérifiée, arrêter

3. Algorithme de Jordan avec pivotation implicite.

• Choix du pivot

$$P_k = a_{l_k c_k} \text{ où } a_{l_k c_k} = \max_{\substack{i=1,2,\dots,n, \quad i \neq l_1, l_2, \dots, l_{k-1} \\ j=1,2,\dots,n, \\ j \neq c_1, c_2, \dots, c_{k-1}}} |a_{ij}|$$

Normalisation

$$a_{l_k j} = \frac{a_{l_k j}}{P_k} \quad j = 1, 2, \dots, n+1$$

Réduction

$$\left. \begin{array}{l} w = a_{i c_k} \\ a_{ij} = a_{ij} - w \cdot a_{l_k j} \quad j = 1, n+1 \end{array} \right\} i = 1, n \quad \text{et } i \neq l_k$$

Remise en ordre

$$x_{c_k} = a_{l_k, n+1}.$$

# Bibliographie

- [1] Michel Rieutord. Une introduction à la dynamique des fluides. 1re édition (2014) 504 pages | 9782804185541.
- [2] Batchelor, C. K., & Batchelor, G. K. (2000). An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press.
- [3] C. Jacob, P. Richardson. (1963) Introduction Mathématique à la Mécanique des Fluides. Published, Physics, Journal of Applied Mechanics. DOI:10.1115/1.3636650. Corpus ID : 119371610.
- [4] R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot. Transport phenomena. John Wiley and sons, 1960. S. Candel. Mécanique des fluides.
- [5] Dunod, 1995. P. Chassaing. Mécanique des fluides. Eléments d'un premier parcours. Cepadu'es, 2000.
- [6] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. Hydrodynamique physique. EDP Sciences/CNRS Editions, 2001.
- [7] I. E. Idelcik. Memento des pertes de charge : Coefficients de pertes de charge singulieres et de pertes de charge par frottement. Eyrolles, 1969.
- [8] F. M. White. Fluid Mechanics. Mc Graw-Hill, 1994.
- [9] Cazalbou, Mécanique des fluides PC-PSI, Éditions Bréal, 2005, 191 p.
- [10] A. Doeak and JM. Vanden-Broeck, New exotic capillary free-surface flows, J. Fluid Mech, (2020), Rapids 899 : R4.

- [11] B. S. Massey, and J. Ward-Smith. (2006). *Mechanics of Fluids*, volume 1. Crc Press, 8th edition edition.
- [12] Hervouet, J.-M. (2007). *Hydrodynamics of free surface flows*. Wyley, Chichester.
- [13] L. K. Forbes, L. W. SCHWARTZ. (1982). Free-surface flow over a semi-circulaire obstruction[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 114 : 299–314.
- [14] L. K. FORBES. (1988). Critical free-surface flow over a semi-circulaire obstruction[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 22 : 3–13.
- [15] M. Reiner, "The teapot effect... à problem," *J. Phys. Today*, 9, 16 (1956).
- [16] J.B. Keller, "Teapot Effect", *J. Appl. Phys.* 28, 859 (1957).
- [17] J. M. Vanden Broeck and J.B. Keller, "Pouring Flow", *Phys. Fluids* 29, 3958 (1986).
- [18] A.C. King et M.I.G. Bloor. Free-surface flow over a step. *J.Fluid Mech.*182, 193, 1987.
- [19] B.J. Parker, D.L. Youngs. 1992. Two and three dimensional Eulerian simulation and fluid flow with material interfaces. Tech. Rep. UK Atomic Weapons Establ.
- [20] J. M. Vanden-Broeck, "Flow under a gate", *Phys. Fluids* 29, 3148 (1986).
- [21] J. M. Vanden-Broeck, "Free streamline model for a rising bubble", *Phys. Fluids* 29, 2798 (1986).
- [22] J. M. Vanden-Broeck, "Numerical calculations of the free-surface flow under sluice gate", *J. Fluid Mech.* 330, 339–47 (1997).
- [23] J. M. Vanden-Broeck and A. Doak, Nonlinear two-dimensional free surface solutions of flow exiting a pipe and impacting a wedge, *J. Eng. Math.*, Vol. 126, (2021), pp. 1431–1434.
- [24] Sarwat N. H. 1994, Influence of surface tension on free surface flow over a polygonal and curved obstruction, *J. Com. Appl. Math. Modelling*, Vol. 51(3), 357 – 374.

- [25] Sarwat N. H., Abd-el-Malek M. B. & Abd-el-Malek M. N. 1996, Super-critical free surface flow over a trapezoidal obstacle, *J. Com. Appl. Math. Modelling*. Vol. 66, 279 - 291.
- [26] H. Mekias, “Two-dimensional free-surface due to a point singularity”, Ph.D. thesis, University of Wisconsin-Madison (1991).
- [27] A. Gasmi, Numerical study of two-dimensional jet flow issuing from a funnel, *Adv. Appl. Math.*, Vol 87, (2014), pp. 161–169.
- [28] Guechi and H. Mekias, Effect of surface on two-dimensionnel free surface flow, *E. J. Diff. Equ.*, Vol. 190, (2008),pp. 1–8.
- [29] Dias and J.M. Vanden-Broeck, Potential-flow studies of steady two-dimentional jets, waterfalls, weirs and sprays, *J. Eng. Math.*, Vol. 70, (2011), pp. 165–174.
- [30] W. Peng and D. F. Parker, An ideal fluid jet impinging on an uneven wall, *J. Fluid. Mech.*, Vol. 333, (1997), pp. 231–255.
- [31] A. J. Koerber and L. K. Forbes, “Two-dimensional steady free-surface flow into a semi-infinite mat sink”, *Phys. Fluids*, 10, 2781 (1998).
- [32] B. Bouderah, H. Serguine and A. Gasmi, The free-surface flow due to a jet against an infinite vertical plate in presence of surface tension, *Appl. Math. Sci.*, Vol. 1, No. 43, (2007), pp. 2119–2128.
- [33] F. Guechi, H. Mekias and A. Merzougui, “Two dimensional free surface flow computation”, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 1, no. 44, 2153-2161 (2007).
- [34] E. Ozugurlu and J. M. Vanden Broeck, “A note on solitary waves with variables surface tension in water of infinite depth”, *ANZIAM J.* 48, 225-235 (2006).
- [35] B. Bouderah, W Delloume, A Gasmi. A Free Surface Flow over a Polygonal Obstacle. *International Mathematical Forum* 2 (66), 3279-3284 (2007).

- [36] F. Guechi and H. Mekias, “A two dimensional free surface flow analysis considering the surface tension”. *International journal of pure and applied mathematics*, in press, (2007).
- [37] B. Bouderah, A. Gasmi and H. Serguine, Zero gravity of free-surface jet flow, *Inter. Math. For.*, Vol. 2, No. 66, (2007), pp. 3273–3277.
- [38] B Bouderah, H Mekias. The effects of surface-tension on the free-surface flow due to a submerged source. *Far East J. Appl. Math* 4 (2), 159-69.
- [39] A Djerad, B Bouderah, I Mabrouk. Numerical Study of Turbulent Flow in Two Dimensions by the Finite Volume Method. *Transylvanian Review* 1 (1).
- [40] W Delloum, B Bouderah, N Bounab. Approximate Analytic Solution of a Potential Flow Around an Obstacle. *Mathematical Modelling of Engineering Problems* 11 (8).
- [41] H. Serguine, F. Guechi and A. Gasmi, Numerical study of mathematical model of free-surface potential flow, *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 20, No. 1, (2023).
- [42] A. Gasmi and H. Mekias, The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet, *J. Phys. A Math. Gen.*, Vol. 36, (2004), pp. 851–862.
- [43] B.J. Binder, M.G Blyth. Electrified free-surface flow of an inviscid liquid past topography. *Phys. Fluids* 24(10), 102112 (2012) 64.
- [44] B.J Binder, J.-M. Vanden-Broeck, Hybrid free-surface flows in a two-dimensional channel. *Phys. Rev. E* 84(1), 016302 (2011).
- [45] J.-M. Vanden-Broeck et F. Dias. Steady two-layer flows over an obstacle *Phil. Trans. R. Soc. A* 360, 2137-2154, 2002.
- [46] N. Bounab et B. Bouderah. (2013). Computing Solution of the Flow due to a Nozzle. *International Journal of Computer Applications* (0975 – 8887), Volume 67– No.13, 2013

## ملخص

في هذه الأطروحة، نحن مهتمون بدراسة مشكلة التدفق المحتمل على السطح الحر لسائل غير قابل للانضغاط وغير لزج، بالنسبة إلى عائق شبه منحرف. لقد قمنا بتكييف طريقة الحل، طريقة التحويل المطابق، من خلال إهمال تأثير التوتر السطحي. وبسبب وجود تأثير التوتر السطحي، لدينا معادلة برنولي على السطح الحر، ولحل مشكلتنا استخدمنا تقنية قطع السلسلة بناءً على التحويلات المطابقة. تعتمد نتائجنا على معلمة فيزيائية، وهي رقم ويبر.

**الكلمات المفتاحية:** سطح حر، تدفق كموني، توتر سطحي، عدد ويبر، تقنية السلاسل.

## Résumé

Dans cette mémoire, nous nous intéressons à l'étude du problème de l'écoulement potentiel à surface libre d'un fluide incompressible et non visqueux, par rapport à un obstacle de forme trapézoïdale. Nous avons adapté la méthode de résolution, la méthode de transformation conforme, en négligeant l'effet de la tension superficielle. Et à cause d'existence de l'effet de tension de surface, on a l'équation de Bernoulli sur la surface libre et pour résoudre notre problème, on a utilisé la technique de troncation de la série basée sur les transformations conformes. Nos résultats sont dépendants d'un paramètre physique c'est le nombre de Weber.

**Mots clefs :** surface libre, écoulement potentiel, tension de surface, nombre de Weber, technique de la série

## Abstract:

In this memory, we are interested in the study of the problem of the potential flow at free surface of an incompressible and inviscid fluid, with respect to an obstacle of trapezoidal shape. We have adapted the resolution method, the conformal transformation method, by neglecting the effect of surface tension. And because of the existence of the surface tension effect, we have the Bernoulli equation on the free surface and to solve our problem, we used the technique of truncation of the series based on conformal transformations. Our results are dependent on a physical parameter; it is the Weber number.

**Key words:** free surface, potential flow, surface tension, Weber number, series technique