UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse fonctionnelle

Par

LOGRAB Nour elhouda

Sujet

SUR LES ESPACES BMO

Devant le jury :

Mr. Drihem Douadi	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. Moussai Madani	Prof. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. Lakhal Aissa	M.A.A. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2018 / 2019

Dédicace

À ma mère lumière de ma vie.

À mes frères et mes sœurs .

À toute la famille LOGRAB.

À tous mes proches et toutes mes amies.

Je dédie ce travail.

Nour elhouda

Remerciements

Nous remercions tout d'abord et avant tout le tout puissant **ALLAH** qui nous a réussi à achever ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur**Moussai Madani** pour tous ses conseils et ses encouragements, pour sa disponibilité et pour sa compréhension.

Mes remerciements sont aussi adressés à l'ensemble des enseignants de mon cursus universitaire.

Je remercie enfin les membres du jury pour avoir consenti à lire ce modeste travail, ainsi que tous ce qui ont participé de près comme de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Notations

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.
- ∂^α l'opérateur de dérivation.
- La dérivée partielle $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$ est notée $\partial^\alpha f$.
- Pour $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, alors $x \cdot \xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \xi_i$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.
- $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \mathrm{d}y$ est le produit du convolution des fonctions f et g.
- Pour $A \subset \mathbb{R}^n$, $|A|$ est la mesure de Lebesgue de A. $B(x,r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r. S^{n-1} est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
- $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact.
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual topologique de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$ (espace de Schwartz).
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées (le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).
- Pour $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur strictement à m telle que $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^n) = \{c\}$, $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ et $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n) = \{\text{tous les polynômes}\}$.
- On désigne par $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}^n)$ l'orthogonal de $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées modulo $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ (le dual topologique de $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$).
- Si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}, \operatorname{supp} f$ est le support de f.
- Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sa transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x) \mathrm{d}x,$$

et sa transformée de Fourier inverse est

$$\mathcal{F}^{-1} f(x) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$.
- $L^p(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables f telles que

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

• $\ell^q(\mathbb{R}^n)$: est l'espace des suites $(a_k)_k$ telle que

$$\|(a_k)\|_{\ell^q} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

• Soient $0 < p, q \leq \infty$, $\ell^q(L^p)$ désigne l'espace des suites $\{f_k\}_k \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient

$$\|\{f_k\}_k\|_{\ell^q(L^p)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

• Soient A_1 et A_2 deux espaces de quasi-Banach, on dit que $A_1 \hookrightarrow A_2$ s'il existe $c > 0$, telle que:

$$\|f\|_{A_2} \leq c \|f\|_{A_1}, \ (\forall f \in A_1).$$

• Si f est une fonction (ou une distribution) sur $\mathbb{R}^n$, on définit les translatées et les dilatées de f par les formules

$$h_\lambda f(x) := f(x/\lambda), \quad \tau_a f(x) := f(x-a), \quad (\forall a \in \mathbb{R}^n, \ \lambda \neq 0).$$

• $\dot{C}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hölder homogène.

• Soit $1 \leq p \leq \infty$,$W_p^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev telle que

$$W_p^m(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad |\alpha| \leq m\}, \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall m \in \mathbb{N}).$$

• Mf désigne la fonction maximale de Littlewood-Hardy

$$Mf(x) := \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, dy, \quad (\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathbb{R}^n).$$

• $|B|$ le volume de la boule $B(x,r)$.

Introduction

Ce mémoire est basé sur une étude dans la théorie des Sobolev, concerne principalement les espaces de type de Besov qui généralisent les espaces de Besov, ces derniers permettent une approche unifiée de différents types d'espaces fonctionnels qui ont été connu avant comme les espaces de Hölder-Zygmund, les espaces de Sobolev, les espaces de Slobodeckij et les espaces potentiels de Bessel. Au cours des 70 dernières années, ces échelles ont prouvé leur utilité, il y a des centaines de papiers et de nombreux livres utilisant ces échelles dans des divers liaisons. Dans un certain sens, tous ces espaces sont liés à l'espace de Lebesgue usuelle.
De façon générale, ce travail divisé en trois chapitres.

Dans le premir chapitre, nous rappelons les espaces de Besov et les espace de Besov homogènes et non homogènes. Nous obtenons des résultats concernont certaines des théorèmes, des propriétés et des exemples de l'espace de Besov et les espaces de Besov homogènes et non homogènes.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons la définition et quelques propriétés de l'espace BMO, et nous parlons du théorème de Fefferman et Stein et les opérateurs de Caldéron-Zygmund .

Dans le dernier chapitre, on introduit les cubes dyadiques pour définir les espaces de type de Besov $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, en donnant leurs propriétés.

Chapitre 1

Définitions et propriétés de l'espace de Besov

L'objectif de ce chapitre est de donner la définition et quelques propriétés des espaces de Besov homogène et non homogène et de rappeler des inégalités classiques.

1.1 Décomposition de Littlewood-Paley

Définition 1.1.1 (Fonction Cut-off) *Soit ρ est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, positive, radiale, et $0 \leq \rho \leq 1$ telle que :*

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1 \ si & |\xi| \leq 1 \\ 0 \ si & |\xi| \geq \frac{3}{2} \end{cases} .$$

Posons

$$\gamma(\xi) = \rho(\xi) - \rho(2\xi), \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Alors γ est une fonction positive, radiale et à support dans la couronne $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}$.

Nous allons fixer ξ et γ le long de tout ce mémoire.

Soit $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que

1. supp $\gamma \subset \left\{\xi : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}\right\}$.
2. $\gamma(\xi) \geq 0$ pour $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}$.

3. $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \forall\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Nous avons $\rho(\xi) = 1 - \sum_{j\geq 1} \gamma(2^{-j}\xi)$, nous obtenons deux partitions de l'unité :

- La partition non homogène est:

$$\rho(\xi) + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1.1}$$

- La partition homogène est:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Voir par exemple les livres [1, sect. 4.2], [7], [9] et [10]. A cette partition, on associe une suite d'opérateurs de convolutions notés:

$$\begin{aligned} Q_j &: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n), \\ S_k &: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

définie par

$$\begin{aligned} Q_j f(x) &= \mathcal{F}^{-1}(\gamma(2^{-j}\xi)) * f(x), \quad j \in \mathbb{Z}, \\ S_k f(x) &= \mathcal{F}^{-1}(\rho(2^{-k}\xi)) * f(x), \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Q_j f)(\xi) &= \gamma(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi), \quad j \in \mathbb{Z}, \\ \mathcal{F}(\ S_k f)(\xi) &= \rho(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi), \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

avec la notation : $Q_0 = S_0$.

Si dans la relation (1.1.1) on change ξ par $2^{-k}\xi$ et on multiplie par $\hat{f}(\xi)$ on obtient

$$\hat{f}(\xi)\rho(2^{-k}\xi) + \hat{f}(\xi) \sum_{j\geq k+1} \gamma(2^{-j}\xi) = \hat{f}(\xi). \tag{1.1.2}$$

En appliquant l'application $\mathcal{F}^{-1}$ sur (1.1.2) on obtient

$$S_k f + \sum_{j\geq k+1} Q_j f = f, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pour $k = 0$ on trouve

$$S_0 f + \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f = f, \tag{1.1.3}$$

pour toute $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$), la décomposition de Littlewood-Paley de f est définit par:

$$f = \quad S_0 f + \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f.$$

Pour toute $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ (où $f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$), la décomposition de Littlewood-Paley de f est définit par:

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f. \tag{1.1.4}$$

Pour la preuve de (1.1.3) et (1.1.4), on peut consulter [9], [6].

1.2 Des inégalités principales

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Hölder) *Soient* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *telle que* $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r})$, *alors pour tout* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *on a*

$$fg \in L^r(\mathbb{R}^n) \ \textit{et} \ \|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Théorème 1.2.2 (Inégalité de Young) *Soient* $p, q, r \in [1, +\infty]$ *telle que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, *avec* $r \geq p$ *et* $r \geq q$. *Alors pour tout* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *on a*

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n) \ \textit{et} \ \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Théorème 1.2.3 (Inégalité de Bernstein) *Soient* $1 \leq p \leq r \leq \infty$ *et* $R > 0$. *Alors il existe une constante* $c > 0$, *telle que*

$$\|f\|_r \leq cR^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_p ,$$

et

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_r \leq cR^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})+|\alpha|} \|f\|_p , \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *avec* $\operatorname{supp} \mathcal{F}f \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$ *,où* c *ne dépend pas de* f.

Preuve. Voir [2] ou [9, Remaraque 1.4.1/4, p. 23]. ■

1.3 Les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Dans cette section, nous donnons la définition et quelques propriétés de l'espace de Besov, voir par exemple [1], [8], [9] et [10].

Définition 1.3.1 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p, q \leq \infty$. L'espace de Besov noté par $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est défini par les fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que :*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \begin{cases} \left(\sum_{j\geq 0} 2^{jsq} \|Q_j f\|_p^q \right)^{1/q} < +\infty, & pour \quad q \neq \infty, \\ \sup_{j\geq 0} \left(2^{js} \|Q_j f\|_p \right) < +\infty, & pour \quad q = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.3.1 *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- $(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{B^s_{p,q}})$ *est un espace de Banach.*
- $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = C^s(\mathbb{R}^n)$ *si* $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$ *(l'espace de Hölder).*
- $B^s_{2,2}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \mathbb{R}$ *(l'espace de Sobolev).*
- $\forall s \in \mathbb{R}$, $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = H^s_p(\mathbb{R}^n)$ *(l'espace de potentiel de Bessel, où* $1 < p < \infty$*).*

Preuve. Pour la preuve voir le livre de Triebel [9]. ■

Proposition 1.3.2 *Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$, alors*

(i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ *si* $s > 0$.

Proposition 1.3.3 *L'opération de dérivation ∂^α, envoie l'espace $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^{s-|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. De plus, pour tout $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$\|\partial^\alpha f\|_{B^{s-|\alpha|}_{p,q}} \leq c \|f\|_{B^s_{p,q}}. \tag{1.3.1}$$

Preuve. *Par l'inégalité de Bernstein on a*

$$\|Q_j(\partial^\alpha f)\|_p \leq c_0 2^{j|\alpha|} \|Q_j f\|_p.$$

En passant à la norme dans $B^{s-|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$\left(\sum_{j\geq 0} 2^{j(s-|\alpha|)q} \|Q_j(\partial^\alpha f)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\sum_{j\geq 0} (2^{sj} \|Q_j f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où l'inégalité (1.3.1). ■

Théorème 1.3.1 *Soient* $1 \leq p, q, r \leq \infty$, *et* $s \in \mathbb{R}$. *Si* $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ *ou* $(\frac{n}{p} - \frac{n}{r}) = s$ *et* $q = 1$, *alors*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Soit $L_r \subset S'$, $f \in L_r$, alors $f = \sum\limits_{j\geq 0} Q_j f$ on a

$$\|f\|_r \leq \sum_{j\geq 0} \|Q_j f\|_r \quad \text{car } r \geq 1.$$

D'après l'inégalité de Bernstein, on obtient

$$\sum_{j\geq 0} \|Q_j f\|_r \leq c \sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r})} \|Q_j f\|_p .$$

On peut écrire aussi

$$\sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r})} \|Q_j f\|_p = \sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)} (2^{js} \|Q_j f\|_p),$$

par l'inégalité de Hölder et pour $\frac{n}{p} - \frac{n}{r} - s < 0$, on a

$$\begin{aligned} c\sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)}(2^{js}\|Q_j f\|_p) &\leq c_1 \left(\sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{j\geq 0} 2^{js}\|Q_j f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c_2 \left(\sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \|f\|_{B^s_{p,q}} \\ &\leq c\,\|f\|_{B^s_{p,q}} , \end{aligned}$$

car $\sum\limits_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-\frac{n}{r}-s)q'}$ converge si $\frac{n}{p} - \frac{n}{r} - s < 0$ implique $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$, ou $\frac{n}{p} - \frac{n}{r} - s = 0$ et $q = 1$. Donc on obtient

$$\|f\|_r \leq c' \|f\|_{B^s_{p,q}} .$$

Ce qui termine la preuve. ■

Proposition 1.3.4 *On a*

1. *Si* $s, t \in \mathbb{R}$, $s > t$ *et* $1 \leq p, q \leq \infty$, *alors* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^t_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.
2. *Si* $s, t \in \mathbb{R}$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq p_1, p_1 \leq \infty$ *et* $s - \frac{n}{p_1} = t - \frac{n}{p_2}$, *alors* $B^s_{p_1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^t_{p_2,q}(\mathbb{R}^n)$.
3. *Si* $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{n}{p} - s < 0$, *alors* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_\infty$.

Preuve. 1. Soit $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\left(\sum\limits_{j\geq 0} 2^{sjq} \|Q_j f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}$ converge. Si $s > t$, alors $2^{tj} < 2^{sj}$, donc

$$\left(\sum_{j\geq 0} 2^{tjq} \|Q_j f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq} \|Q_j f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

et on a $\|f\|_{B^s_{p,q}} < \infty$, ce qui donne $f \in B^t_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ donc on trouve

$$\|f\|_{B^t_{p,q}} \leq c \|f\|_{B^s_{p,q}}.$$

2. D'après l'inégalité de Bernstein on a

$$\|Q_j f\|_r \leq c 2^{jn(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|Q_j f\|_p \quad , r \geq p.$$

On pose $r = p_2$, $p = p_1$, donc

$$\|Q_j f\|_{p_2} \leq c 2^{jn(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})} \|Q_j f\|_{p_1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} 2^{js_2} \|Q_j f\|_{p_2} &\leq c 2^{j(s_2 - s_1 + n(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}))} 2^{js_1} \|Q_j f\|_{p_1} \\ &\leq c 2^{jn(s_2 + n(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}) - s_1)} 2^{js_1} \|Q_j f\|_{p_1} \\ &\leq c 2^{j(s_2 + n(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}) - s_1)} \left(\sum_{j\geq 0} 2^{js_1 q_1} \|Q_j f\|_{p_1}^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\sum_{j\geq 0} 2^{js_2 q_2} \|Q_j f\|_{p_2}^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \left(\sum_{j\geq 0} 2^{j(s_2 + n(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}) - s_1) q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \|f\|_{B^{s_1}_{p_1,q_1}},$$

3. $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $f = \sum\limits_{j\geq 0} Q_j f$, donc

$$\|f\|_\infty \leq \sum_{j\geq 0} \|Q_j f\|_\infty,$$

d'aprés l'inégalité de Bernstein, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j\geq 0} \|Q_j f\|_\infty &\leq c \sum_{j\geq 0} 2^{j\frac{n}{p}} \|Q_j f\|_p \\ &\leq c \sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-s)} (2^{js} \|Q_j f\|_p), \end{aligned}$$

d'aprés l'inégalité de Hölder, on a

$$\sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-s)}(2^{js}\left\|Q_jf\right\|_p) \leq \left(\sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-s)q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{j\geq 0} 2^{jsq}\left\|Q_jf\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

par conséquent on a

$$\left\|f\right\|_\infty \leq c\left(\sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-s)q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left\|f\right\|_{B^s_{p,q}},$$

et puisque $\sum_{j\geq 0} 2^{j(\frac{n}{p}-s)q'}$ converge si $\frac{n}{p}-s<0$, c'est-à-dire $\frac{n}{p}<s$. Donc

$$\left\|f\right\|_\infty \leq c\left\|f\right\|_{B^s_{p,q}}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Théorème 1.3.2 (Inégalité de Gagliardo-Niremberg) *Soient* $1\leq p,q\leq\infty$ *et* $\alpha\in\mathbb{R}$, $0<\theta<1$. *On a*

$$B^{\frac{\alpha}{\theta}}_{p\theta,\theta q}\cap L_\infty \hookrightarrow B^s_{p,q},$$

avec

$$\left\|f\right\|_{B^s_{p,q}} \leq c\left\|f\right\|_\infty^{1-\theta}\left\|f\right\|^\theta_{B^{\frac{\alpha}{\theta}}_{p\theta,\theta q}}.$$

Preuve. On a

$$\left\|f\right\|_p \leq \left\|f\right\|_\infty^{1-\theta}\left\|f\right\|_{\theta p}^\theta. \tag{1.3.2}$$

D'aprés l'négalité (1.3.2) on a

$$\left\|Q_jf\right\|_p \leq \left\|Q_jf\right\|_\infty^{1-\theta}\left\|Q_jf\right\|_{\theta p}^\theta,$$

par l'hypothèse $\left\|Q_jf\right\|_\infty \leq c\left\|f\right\|_\infty$, on a

$$\left\|Q_jf\right\|_p \leq \left\|f\right\|_\infty^{1-\theta}\left\|Q_jf\right\|_{\theta p}^\theta,$$

en remplaçant $\left\|Q_jf\right\|_p^q$ par $\left\|f\right\|_\infty^{1-\theta}\left\|Q_jf\right\|_{\theta p}^\theta$ dans la définition de l'espace de Besov, on obtient

$$\left\|f\right\|_{B^s_{p,q}} \leq (\sum_{j\geq 0} 2^{sjq}(\left\|f\right\|_\infty^{1-\theta}\left\|Q_jf\right\|_{\theta p}^\theta)^q)^{\frac{1}{q}}$$

par conséquent on a

$$\left\|f\right\|_{B^s_{p,q}} \leq \left\|f\right\|_\infty^{1-\theta}\left\|f\right\|^\theta_{B^{\frac{s}{\theta}}_{p\theta,q\theta}}.$$

■

1.4 Les espaces de Besov homogènes $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.4.1 *Soient* $0 < p, q \leq \infty$ *et* $s \in \mathbb{R}$. *L'espace de Besov homogène* $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des fonctions* $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ *telles que*

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \begin{cases} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sjq} \|Q_j f\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty, & \textit{pour} \quad q \neq \infty, \\ \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{sj} \|Q_j f\|_p\right) < +\infty, & \textit{pour} \quad q = \infty. \end{cases}$$

1.5 Quelques propriétés

Proposition 1.5.1 *1.* $(\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{\dot{B}^s_{\infty,\infty}})$ *est un espace de Banach .*

2. $\dot{B}^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = \dot{C}^s(\mathbb{R}^n)$ *si* $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$.

3. $\dot{B}^s_{2,2}(\mathbb{R}^n) = \dot{H}^s(\mathbb{R}^n), \forall s \in \mathbb{R}$.

4. Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, *alors*

$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n).$$

5. Soit $s \in \mathbb{R}, 1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$ *alors*

$$\dot{B}^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^s_{p,q_2}(\mathbb{R}^n).$$

6. Soient $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, *tels que* $s_1 < s_2$ *et* $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$, *alors*

$$\dot{B}^s_{p_1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}^s_{p_2,q}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [5]. ■

Proposition 1.5.2 *Soient* $1 \leq p, q \leq \infty$ *et* $s \in \mathbb{R}$. *Il existe deux constantes* $c_2, c_1 > 0$, *telle que*

$$c_1 \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq \lambda^{\frac{n}{p}-s} \|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq c_2 \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}},$$

pour tout $f \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *et tout* $\lambda > 0$.

Preuve. Voir [3]. ■

Théorème 1.5.1 *Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ et $s > 0$. Alors $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si et seulemnt si, on a $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ et $f \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$; de plus il existe $c_1, c_2 > 0$ telle que*

$$c_1 \|f\|_{B^s_{p,q}} \leq \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq c_2 \|f\|_{B^s_{p,q}}, \qquad \forall f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [1, Thm. 6.3.2] ou [10, Thm. 2.3.3, p.98]. ■

1.6 Exemples

Exemple 1.6.1 *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\|Q_j f\|_p \leq c2^{-jN}$, $\forall N \in \mathbb{N}$ et pour $j \geq 0$. Soit $f(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$\|Q_j f\|_p \leq c2^{-jN}, \quad \forall N \in \mathbb{N},\ j \geq 0,$$

et

$$2^{js} \left\| Q_j e^{-|x|^2} \right\|_p \leq c2^{-j(N-s)},$$

ce qui donne

$$\left(\sum_{j \geq 0} (2^{js} \left\| Q_j e^{-|x|^2} \right\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{-j(N-s)q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Alors on trouve

$$\left\| e^{-|x|^2} \right\|_{B^s_{p,q}} \leq c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{-j(N-s)q} \right)^{\frac{1}{q}},$$

la série $\sum_{j \geq 0} 2^{-j(N-s)q}$ converge si $N - s > 0$, donc $e^{-|x|^2} \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 1.6.2 *$f := \delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (où δ est la masse de Dirac). En effet, pour $n = 1$ nous avons*

$$Q_j f = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^j(x-y)) f(y)) \mathrm{d}y = \left\langle f, \mathcal{F}^{-1}\gamma(2^j(x - \cdot)) \right\rangle,$$

et

$$Q_j \delta = \left\langle \delta, \mathcal{F}^{-1}\gamma(2^j(x - \cdot)) \right\rangle = \mathcal{F}^{-1}\gamma(2^j(x - 0))$$

donc

$$\begin{aligned} \|Q_j \delta\|_p &= 2^j \left(\int \left| \mathcal{F}^{-1}\gamma(2^j x) \right|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{j(1-\frac{1}{p})} \left(\int \left| \mathcal{F}^{-1}\gamma(y) \right|^p \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{j(1-\frac{1}{p})} \left\| \mathcal{F}^{-1}\gamma \right\|_p, \end{aligned}$$

alors

$$\|Q_j\delta\|_p = c2^{j(1-\frac{1}{p})}, \quad 0 < p \leq \infty,$$

on a

$$\|Q_j\delta\|_p \leq c2^{j(1-\frac{1}{p})},$$

et

$$2^{sj}\|Q_j\delta\|_p \leq c2^{j(s+1-\frac{1}{p})},$$

ce qui donne

$$\left(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq}\|Q_j\delta\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\sum_{j\geq 0} 2^{(s+1-\frac{1}{p})jq}\right)^{\frac{1}{q}},$$

la série $\sum_{j\geq 0} 2^{(s+1-\frac{1}{p})jq}$ *converge si :*

1. $s + n(1-\frac{1}{p}) < 0$ *implique* $s < \frac{1}{p} - 1$, *alors* $\delta \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

2. $s + (1-\frac{1}{p}) = 0$ *et* $q = \infty$ *alors* $s = \frac{1}{p} - 1$,*on a*

$$\begin{aligned} 2^{sj}\|Q_j\delta\|_p &\leq \sup_{j\geq 0} 2^{sj}\|Q_j\delta\|_p, \ \forall j \geq 0 \\ &= \|\delta\|_{B^s_{p,\infty}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \delta \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \ \textit{si} \ s < \frac{1}{p} - 1, \quad 1 \leq p, q \leq \infty, \\ \delta \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \ \textit{si} \ s = (\frac{1}{p} - 1), \quad 1 \leq p \leq \infty \ \textit{et} \ q = \infty. \end{cases}$$

Si $n \geq 2$, *on a :*

$$\begin{cases} \delta \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \ \textit{si} \ s < n(\frac{1}{p} - 1), \\ \delta \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \ \textit{si} \ s = n(\frac{1}{p} - 1), q = \infty. \end{cases}$$

Chapitre 2

L'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$

Dans ce chapitre; nous allons donner la définition et quelques propriétés de $BMO(\mathbb{R}^n)$ (oscillation moyenne bornée), voir [2] et [4].

2.1 Définition et quelques propriétés de l'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.1.1 *On dit qu'une fonction $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est à oscillation moyenne bornée ($f \in BMO(\mathbb{R}^n)$), s'il existe $C > 0$, telle que pour toute boule B de $\mathbb{R}^n$, on ait*

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f - m_B f|^2 \, \mathrm{d}x \leq C,$$

où $m_B f = \frac{1}{|B|}\int\limits_B f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque 2.1.1 *On pose*

$$\|f\|_{BMO} = \left(\sup_B \frac{1}{|B|}\int\limits_B |f - m_B f|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $\|f\|_{BMO} = 0 \Leftrightarrow f =$ *constante.*
- $\|f + g\|_{BMO} \leq \|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}$ *puisque* $m_B(f + g) = m_B f + m_B g$.

Exemple 2.1.1 *La fonction* $\log|x|$ *appartient à* $BMO(\mathbb{R}^n)$. *En effet, puisque* $\log|rx| = \log|x| + \log r$, *prenons* $|B| = 1$.

- $B \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 2\}$, *puis* $\int_B |\log|y|| \, \mathrm{d}y \leq C$.
- $B \subset \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x| < r + 1\}$, $r \geq 1 : \int_B |\log|y| - \log r| \, \mathrm{d}y \leq 1$.

Exemple 2.1.2 *(1) La fonction* $f(x) = \begin{cases} \ln(x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ *n'est pas dans* $BMO(\mathbb{R}^n)$*, puisque*

$$\frac{1}{2r}\int |f(y) - c|\, dy \geq \frac{1}{2}\ln r, \qquad \forall c.$$

Contrairement à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$*; les seuils de* $BMO(\mathbb{R}^n)$ *ne sont pas* $BMO(\mathbb{R}^n)$*.*

(2) La fonction $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\log|x|$ n'appartient pas à $BMO(\mathbb{R}^n)$, pour le voir, on remarque que la moyenne de f sur $[-h,+h]$ est nulle, alors que

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} |f(x)|\, \mathrm{d}x = 1 - \log h, \qquad (h \in]0,1[).$$

On a $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ et $\|f\|_{BMO} \leq 2\|f\|_\infty$.

Lemme 2.1.1 *Il existe* $C = C(n) > 0$ *tel que, pour toute boule* B *et toute* $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$*, on ait*

$$m_{2^jB}|f| \leq |m_Bf| + C(j+1)\|f\|_{BMO};$$

(en désignant par 2^jB *la boule de même centre que* B*, et de rayon égal à* 2^j *fois celui de* B*).*

Preuve. L'inégalité triangulaire nous donne

$$m_B|f| \leq \|f\|_{BMO} + |m_Bf|,$$

d'où

$$m_{2^jB}|f| - \|f\|_{BMO} \leq \sum_{k=1}^{j} |m_{2^kB}f - m_{2^{k-1}B}f| + |m_Bf|,$$

mais

$$\begin{aligned} |m_{2^kB}f - m_{2^{k-1}B}f| &\leq \frac{1}{|2^{k-1}B|}\int_{2^{k-1}B} |f(x) - m_{2^kB}f|\, \mathrm{d}x \\ &\leq 2^n\frac{1}{|2^kB|}\int_{2^kB} |f(x) - m_{2^kB}f|\, \mathrm{d}x \\ &\leq 2^n\|f\|_{BMO} \end{aligned}$$

d'où

$$m_{2^jB}|f| \leq (1 + 2^nj)\|f\|_{BMO} + |m_Bf|.$$

Ce qui termine la preuve. ■

2.2 Théorème de Fefferman et Stein

Théorème 2.2.1 (Fefferman et Stein) *Une fonction $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ appartient à $BMO(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:*

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1} |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$.

(ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et toute boule B de rayon 2^{-j} , on ait

$$\int_B \sum_{k \geq j} |Q_k f(x)|^2 \, dx \leq C \, |B| \, . \tag{2.2.1}$$

La démonstration ci-dessous est dûe à extrait de G. Bourdaud [2, pp. 145-147].

Preuve. Supposons que $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

La condition (i) sera une conséquence directe du Lemme 2.1.1.

Maintenant, on prouve (2.2.1) pour $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$. On fixe la boule B, de rayon 2^{-j}, on écrit

$$f = m_{2B} f + (f - m_{2B} f)\chi_{2B} + (f - m_{2B} f)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus 2B}.$$

Soit $f = f_1 + f_2 + f_3$.

f_1 étant une constante, on a $Q_k f_1 = 0, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

$f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\|f_2\|_2 \leq |B|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{BMO}$; la théorie de Littlewood-Paley de $L^2(\mathbb{R}^n)$ s'applique alors et donne

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq j} \int_B |Q_k f_2|^2 \, \mathrm{d}x &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |Q_k f_2|^2 \, \mathrm{d}x \\ &\leq C \, |B| \, \|f\|^2_{BMO} \, . \end{aligned}$$

En ce qui concerne le terme en f_3, on montera :

$$|Q_k f_3(x)| \leq C \, \|f\|_{BMO} \, 2^{j-k}, \qquad (\forall x \in B, \forall k \geq j); \tag{2.2.2}$$

On aura alors

$$\sum_{k \geq j} \int_B |Q_k f_3(x)|^2 \, dx \leq C^2 \, \|f\|^2_{BMO} \, |B| \, \left(\sum_{k \geq j} 4^{j-k} \right).$$

Alors on terminera la preuve de (2.2.1).

Maintenant pour prouver (2.2.2), on a les remarques suivantes:

D'une part $\check{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d'où l'existance de $C > 0$ tel que

$$\left|\check{\phi}(x)\right| \leq C \, |x|^{-n-1} \quad \text{pour} \quad |x| \geq 1.$$

D'autre part, pour $x \in B$, $y \notin 2B$ et $k \geq j$, on a $\left|2^k(x-y)\right| \geq 1$ et $|x-y| > \frac{1}{2}|x_0 - y|$. Alors

$$\begin{aligned}
|Q_k f_3(x)| &= \left|2^{nk}\int f_3(y)\check{\phi}(2^k(x-y))\mathrm{d}y\right| \\
&\leq C2^{-k}\int_{\mathbb{R}^n\setminus 2B} |f - m_{2B}f|(y)\,|x_0 - y|^{-n-1}\,\mathrm{d}y \\
&\leq C'2^{-k}\sum_{l=1}^{\infty}\int_{2^{l+1}B\setminus 2^l B} |f - m_{2B}f|(y)\,|x_0 - y|^{-n-1}\,\mathrm{d}y \\
&\leq C"2^{-k}\sum_{l=1}^{\infty} 2^{(j-l)} m_{2^{l+1}B}(|f - m_{2B}f|),
\end{aligned}$$

on applique le Lemme 2.1.1, on observe que

$$m_{2B}(f - m_{2B}f) = 0 \quad \text{et} \quad \|f - m_{2B}f\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}.$$

On trouve

$$|Q_k f_3(x)| \leq C" \|f\|_{BMO}\, 2^{j-k}\sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l}(l+1).$$

■

Remarque 2.2.1 *Pour toute* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*, on a*

$$(Q_j f = 0;\ \forall j \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (f \text{ est un polynôme}).$$

Preuve. Supposons que $f = x^\alpha$ $(\forall \alpha \in \mathbb{N}^n)$, on a

$$\mathcal{F}(Q_j f)(\xi) = c\gamma(2^{-j}\xi)\delta^{(\alpha)},$$

comme $\gamma(0) = 0 \Longrightarrow \mathcal{F}(Q_j f)(0) = 0$. ■

Proposition 2.2.1 *Soit* $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *telle que :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-n-1}\,|f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

alors

i) Si $(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j f|^2)^{\frac{1}{2}} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *on a* $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

ii) Si $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, *on a* $\sup_j \|Q_j f\|_\infty < +\infty$.

Proposition 2.2.2 (Stein et Zygmund) *Pour* $p \in]1, +\infty[$, *il existe* $C = C(n,p)$ *tel que, quelque soit* $f \in H_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, *on ait*

$$\|f\|_{BMO} \leq C \|f\|_{H_p^{\frac{n}{p}}} .$$

Preuve. Le cas $p \in [2, +\infty[$.
Soit $f \in H_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, on a en particulier $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, donc f satisfait la condition (i) du Théorème de C.Fefferman et E.Stein 2.2.1.
Maintenant, on considère la boule B de rayon 2^{-j}. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B \sum_{k\geq j} |Q_k f(x)|^2 \,\mathrm{d}x &\leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B \left(\sum_{k\geq j} |Q_k f(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}} \\
&\leq C(n)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 4^{\frac{kn}{p}} |Q_k f(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}} \\
&\leq C(n)\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 4^{\frac{kn}{p}} |Q_k f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^2 \\
&\leq C(n,p)\|f\|^2_{H_p^{\frac{n}{p}}} .
\end{aligned}$$

■

2.3 Les séries de Littlewood-Paley dans l'espace BMO

Nous utiliserons une partition C^∞ de l'unité

$$\Phi_0(\xi) + \sum_{j\geq 1} \Phi(2^{-j}\xi) = 1 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

où Φ est portée par la couronne $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$ et Φ_0 par la boule $|\xi| \leq 2$, en posant

$$\begin{aligned}
(\widehat{Q_j f})(\xi) &= \Phi(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi), \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \\
(\widehat{S_j f})(\xi) &= \Phi_0(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi), \quad \forall j \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

alors on a

$$f = S_k f + \sum_{j\geq k+1} Q_j f, \quad \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.4 Les opérateurs de Calderón-Zygmund

En dehors de la diagonale $x = y$, $K(x, y)$ est une fonction localement bornée telle qu'il existe $C > 0$ vérifiant

$$|K(x,y)| \leq C\,|x-y|^{-n}. \tag{2.4.1}$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int\limits_{|x-x'|\leq\frac{1}{2}|x-y|} |K(x,y) - K(x',y)|\,\mathrm{d}y \leq C, \tag{2.4.2}$$

pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.4.1 *Tout opérateur borné sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *vérifiant* (2.4.1) *et* (2.4.2) *envoie* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *dans* $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Prouver une estimation $\|T\phi\|_{BMO} \leq C\,\|\phi\|_\infty$ (quel que soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) ne suffira pas, puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Il faut définir directement Tf, pour $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
On commence par définir Tf sur chaque boule, puis on recollera les différents morceaux.
On pose

$$F_B(x) = T(f\chi_{\tilde{B}})(x) \;+ \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\tilde{B}} (K(x,y) - K(x_0,y))f(y)\mathrm{d}y,$$

où x_0 désigne le centre de la boule B et $\tilde{B}$ la boule double.
Je dis que $F_B \in L^2(B)$ et

$$\int\limits_B |F_B(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq C\,\|f\|_\infty^2\,|B|. \tag{2.4.3}$$

En effet, si A désigne la norme $L^2(\mathbb{R}^n) - L^2(\mathbb{R}^n)$ de T, on a

$$\|T(f\chi_{\tilde{B}})\|_2 \leq A\,\|f\chi_{\tilde{B}}\|_2 \leq A\,\|f\|_\infty\,|B|^{\frac{1}{2}},$$

le second terme de F_B se traite grâce à (2.4.2); pour $x \in B$, on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n\setminus\tilde{B}}(K(x,y) - K(x_0,y))f(y)\mathrm{d}y\right| \leq C\,\|f\|_\infty.$$

Cela on termine la preuve de (2.4.3). ■

Exemple 2.4.1 *L'opérateur de Hilbert*

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x-y| \geq \epsilon} \frac{f(x)}{x-y} \mathrm{d}y.$$

1) $H : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. *Voir [2, p.106.].*

2) H *vérifie les conditions* (2.4.1) *et* (2.4.2) *alors* $H : L^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow BMO(\mathbb{R}^n)$. *Donc*

- $g(x) = 1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- $Hg(x) = \log |x|$.

Si $f = \chi_{[a,b]} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *on peut calculer* Hf, *on trouve*

$$H(\chi_{[a,b]})(x) = \log \left| \frac{x-a}{x-b} \right|.$$

Si $f = \chi_{[0,+\infty]}$, *on utilise la formule de la preuve ci-dessus; pour* $x \in [-a, a]$, *on a*

$$\begin{aligned} Hf(x) &= T(\chi_{[0,2a]})(x) + \int\limits_{2a}^{\infty} \left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y} \right) \mathrm{d}y \\ &= \log |x| - \log 2a. \end{aligned}$$

Donc: $\log |x| \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

2.5 Corollaires

Corollaire 2.5.1 *Pour tout* $p \in \left]0, \infty\right[$, *on a*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \int |u_j(x)|^p \, \mathrm{d}\mu_j(x) \leq C(n) A \, \|u\|_p^p \, .$$

Corollaire 2.5.2 *Soit* $\theta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *une fonction telle que* $|\theta(x)| \leq (1 + |x|)^{-n-\alpha}$ $(\alpha > 0)$, *et* S_j *la suite d'opérateurs définie par* $(\widehat{S_j f})(\xi) = \hat{\theta}(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)$; *alors*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \int |S_j f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu_j(x) \leq C(n, \alpha) A \, \|f\|_2^2 \, .$$

Preuve. Celle du Corollaire 2.5.1 est immédiate; pour y ramener celle du Corollaire 2.5.2, il suffit de disposer de

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x-y)|}{(1+|y|)^b} \mathrm{d}y \leq c M f(x) \; ; \;\; b > 0.$$

On écrit
$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x-y)|}{(1+|y|)^b}\mathrm{d}y = \int_{|y|\leq\sigma} \frac{|f(x-y)|}{(1+|y|)^b}\mathrm{d}y + \int_{|y|\geq\sigma} \frac{|f(x-y)|}{(1+|y|)^b}\mathrm{d}y$$
et
$$\phi(\sigma) = \int_{|y|\leq\sigma} |f(x-y)|\,\mathrm{d}y = \int_0^\sigma t^{n-1}\int_{S^{n-1}} |f(x-ty)|\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t,$$
ce qui implique
$$\phi'(\sigma) = \sigma^{n-1}\int_{S^{n-1}} |f(x-\sigma y)|\,\mathrm{d}\sigma'.$$
Alors
$$\begin{aligned}
\int_{|y|\geq\sigma} \frac{|f(x-y)|}{(1+|y|)^b}\mathrm{d}y &= \int_\sigma^\infty t^{n-1}\int_{S^{n-1}} \frac{1}{(1+t)^b}\,|f(x-ty')|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y' \\
&\leq \int_\sigma^\infty \frac{1}{t^b}\phi'(t)\mathrm{d}t \\
&\leq \left[t^{-b}\phi(t)\right]_\sigma^{+\infty} + b\int_\sigma^{+\infty} t^{-b-1}\phi(t)\mathrm{d}t \\
&\leq cMf(x)\int_\sigma^\infty t^{-b+n-1}\mathrm{d}t \\
&\leq c\sigma^{-b+n}Mf(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{|y|\leq\sigma} |f(x-y)|\,dy &= \sigma^n\frac{1}{\sigma^n}\int_{|y|\leq\sigma} |f(x-y)|\,dy \\
&\leq \sigma^{-n}Mf(x).
\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Les espaces de type de Besov $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$

Pour définir les espaces de type de Besov on a besoin de définir:

3.1 Les cubes dyadiques

Soient $\nu := (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $k \in \mathbb{Z}$, le cube dyadique de longueur de coté 2^{-k} est la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par:

$$P_{k,\nu} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \nu_j \leq 2^k x_j \leq \nu_j + 1, \quad j = 1, 2, ..., n \right\}.$$

Proposition 3.1.1 *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{R}^n = \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^n} P_{k,\nu}$.*

Preuve. Pour tout $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$2^k [x_j] \leq 2^k x_j < 2^k ([x_j] + 1), \quad (j = 1, \cdots, n), \tag{3.1.1}$$

(où $[x_j]$ la partie entière de x_j). Pour k fixé, $[x_j]$ est le seul entier vérifiant (3.1.1), autrement dit chaque point $x \in \mathbb{R}^n$ est contenu dans un est un seul cube dyadique de longueur de coté 2^{-k}. ■

Lemme 3.1.1 *On a les propriétés suivantes :*

- *Les coins d'un cube dyadique de longueur de coté 2^{-v} sont dans $2^{-\nu}\mathbb{Z}^n$.*
- *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $\{P_{k,\nu}, \nu \in \mathbb{Z}^n\}$ forme une partition de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 3.1.1 *Soient $p, q \in]0, \infty]$ et $s, \tau \in \mathbb{R}$. L'espace de type de Besov noté $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que : $\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}} < +\infty$, où*

$$\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}} := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j\geq k_+} 2^{sjq} \left\{ \int_{P_{k,\nu}} |Q_j f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.1.2}$$

avec la modification usuelle pour $p = \infty$ ou $q = \infty$.

Autrement dit, l'expression (3.1.2) peut s'écrire comme :

$$\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{P\in D} \frac{1}{|P|^\tau} \left\{ \sum_{j=\max(J_p,0)}^{\infty} \left[\int_{P_{k,\nu}} (2^{sj} |Q_j f(x)|)^p dx \right]^{\frac{q}{p}} \right\}^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Remarque 3.1.1 *1. L'espace $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est de quasi-Banach pour $0 < p < 1$ ou $0 < q < 1$ et de Banach pour $p, q \geq 1$.*
2. L'espace $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est indépendant du choix de la fonction ρ, si on choisit une autre fonction avec les mêmes propriétés que ρ on obtient des quasi-normes équivalentes à celles qui sont définies par ρ.

Exemple 3.1.1 *Soient $r > 0$ et ρ_r une fonction telle que*

$$\rho_r(\xi) = 0 \;\; si \;\; |\xi| \geq \frac{3r}{2} \;\; et \;\; \rho_r(\xi) = 1 \;\; si \;\; |\xi| \leq r,$$

on pose $\gamma_r(\xi) = \rho_r(\xi) - \rho_r(2\xi)$ qui est porté par l'ensemble $\frac{r}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3r}{2}$.
Soient $S_{r,k} = \rho_r(2^{-k}D)$ $(k = 0, 1, ...)$; $Q_{r,j} = \gamma_r(2^{-j}D)$ et $Q_{r,0} = S_{r,0}$. Alors pour toute $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (resp.$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$), nous avons

$$g = \sum_{j\geq 0} Q_{r,j} g \quad dans \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \;\; (resp. \;\; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)).$$

De plus, si nous remplaçons Q_j par $Q_{r,j}$ $(j = 0, 1, ...)$ dans la définition de $\|\cdot\|_{B^s_{p,q}}$, nous obtenons une quasi-norme équivalente dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 3.1.1 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, et $0 < p, q < \infty$. Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $a > 0$, et $x \in B_J$, on définit les fonctions maximales de Peetre*

$$Q^{*,a}_j f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|Q_j f(y)|}{(1 + 2^j |x - y|)^a}, \quad Q^{*,a}_{j,J} f(x) = \sup_{y\in B_J} \frac{|Q_j f(y)|}{(1 + 2^j |x - y|)^a}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

1) Soit $a > \max(\frac{n}{p}, n\tau)$. *Alors,* $f \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si*

$$\|f\|^{Q_1}_{B^{s,\tau}_{p,q}} = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left(\sum_{j \geq J^+} 2^{sjq} \left\| Q^{*,a}_j f \right\|^q_{L^p(B_J)} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

où $\|\cdot\|^{Q_1}_{B^{s,\tau}_{p,q}}$ *est une quasi-norme équivalente dans* $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

2) Soit $a > \frac{n}{p}$. *Alors,* $f \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si*

$$\|f\|^{Q_2}_{B^{s,\tau}_{p,q}} = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left(\sum_{j \geq J^+} 2^{sjq} \left\| Q^{*,a}_{j,J} f \right\|^a_{L^P(B_J)} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

où $\|\cdot\|^{Q_2}_{B^{s,\tau}_{p,q}}$ *est une quasi-norme équivalente dans* $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

3) Pour tout $j \geq 1$ *et tout* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *on pose* $\mu_j(\xi) = \mu(2^{-j}\xi)$. *Alors,* $f \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si*

$$\|f\|^{\mu}_{B^{s,\tau}_{p,q}} = \sup_{B_J} \frac{1}{|B_J|^\tau} \left(\sum_{j \geq J^+} 2^{sjq} \left\| \mathcal{F}^{-1}\mu_j * f \right\|^q_{L^p(B_J)} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$$

où $\|\cdot\|^{\mu}_{B^{s,\tau}_{p,q}}$ *est une quasi-norme équivalente dans* $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

3.2 Les espaces de type de Besov homogènes $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Rappolons que $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de tous les polynômes de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\langle f, u \rangle = 0$, pour tout $f \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions modulo tous les polynômes (le dual de $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$).

Définition 3.2.1 *Soient* $1 \leq p, q \leq \infty$ *et* $s, \tau \in \mathbb{R}$. *L'espace de type de Besov homogène noté* $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des fonctions* $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty$, *où*

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\nu \in \mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \left\{ \int_{P_{k,v}} (2^{sj} |Q_j f(x)|)^p \mathrm{d}x \right\}^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.2.1}$$

avec la modification usuelle pour $p = \infty$ *ou* $q = \infty$.

Remarque 3.2.1 *(1)* $\|f\|_{\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = 0 \Leftrightarrow f \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$. *L'espace quotient* $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ *est un espace de Banach, il sera noté* $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *et ses éléments* $[f]_\infty = f + \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ *où*

$f \in \dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ seront notés f.

(2) $\dot{B}^{s,0}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, où $\dot{B}^{s}_{p,q}$ est l'espace de Besov homogène.

(3) Si $\tau < 0$, alors $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3.2.1 (Cas particuliers) *Soient $0 \leq p, q \leq \infty$ et $s, \tau \in \mathbb{R}$.*

1. $B^{s,0}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, où $B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Besov non homogène.

2. Pour $\tau < 0$, on a $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.

3. Pour $p \in]0, \infty]$, $q \in]0, \infty[$ et $\tau > \frac{1}{p}$ ou $q = \infty$ et $\tau \geq \frac{1}{p}$, on a

$$B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = B^{s+n(\tau - \frac{1}{p})}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir par exemple [11]. ■

3.3 Inclusions

Proposition 3.3.1 *Soient $s, \tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et $0 < p \leq \infty$ et $0 < q_1, q_2 \leq \infty$. Alors*

$$\begin{aligned} B^{s,\tau}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) &\hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n) \text{ si } q_1 \leq q_2, \\ B^{s+\varepsilon,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) &\hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n), \quad \forall q \in]0, +\infty]. \end{aligned}$$

Preuve. On montre que $B^{s,\tau}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n)$ si $q_1 \leq q_2$. On a

$$\ell_{q_1} \hookrightarrow \ell_{q_2} \quad \text{si } q_1 \leq q_2.$$

Alors

$$\left(\sum_{j=J_+}^{\infty} \left(2^{sj} \|Q_j f\|_{L^p(P)}\right)^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \left(\sum_{j=J_+}^{\infty} \left(2^{sj} \|Q_j f\|_{L^p(P)}\right)^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

On multiplie par $\frac{1}{|p|^\tau}$ et en passant à la borne supérieure par rapport à $P \in D$, on trouve

$$B^{s,\tau}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n).$$

On montre maintenant que

$$B^{s+\varepsilon,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n), \quad \forall q \in]0, +\infty].$$

On a

$$\|f\|_{B^{s+\varepsilon,\tau}_{p,q}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}^n} 2^{n\tau k} \left(\sum_{j=J_+}^{\infty} 2^{(s+\varepsilon)j} \|Q_j f\|_{L^p}^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

alors $\forall\varepsilon > 0$, on a

$$\left(\sum_{j=J_+}^{\infty} 2^{sj} \|Q_j f\|_{L^p}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=J_+}^{\infty} 2^{(s+\varepsilon)j} \|Q_j f\|_{L^p}^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc

$$B^{s+\varepsilon,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

■

Proposition 3.3.2 *Soient $s \in \mathbb{R}, 0 \leq p, q \leq \infty$ et $\tau \geq 0$. Alors*

$$S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [11]. ■

Proposition 3.3.3 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p, q < \infty$ et $\tau \geq 0$. Alors*

$$B^{s,\tau+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_1}}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n) \quad si\ 0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty, \tag{3.3.1}$$

et

$$B^{s}_{\frac{p}{1-\tau p},q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \quad si\ 0 \leq \tau \leq \frac{1}{p}. \tag{3.3.2}$$

Preuve. On montre (3.4.1), on a

$$\|f\|_{B^{s,\tau}_{p_1,q}} = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|P|^\tau} \left(\sum_{j=J_+}^{\infty} 2^{sj} \|Q_j f\|_{L_{p_1}}^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\|Q_j f\|_{L_{p_1}} \leq |P|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \|Q_j f\|_{L_{p_2}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^{s,\tau}_{p_1,q}} &\leq \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|P|^{\tau}} |P|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{j=J_+}^{\infty} 2^{sj} \|Q_j f\|^q_{L_{p_2}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|P|^{\tau+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}} \left(\sum_{j=J_+}^{\infty} 2^{sj} \|Q_j f\|^q_{L_{p_2}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_{B^{s,\tau+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}_{p_2,q}}.
\end{aligned}$$

donc

$$B^{s,\tau+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_1}}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n).$$

Maintenant on preuve (3.4.2). On a

$$B^{s,0}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

On pose dans (3.4.1)

$$\tau + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = 0.$$

Alors

$$\frac{1}{p_2} = \frac{-\tau p_1 + 1}{p_1},$$

implique que

$$p_2 = \frac{p_1}{1-\tau p_1},$$

en remplaçant dans (3.4.1) on trouve le résultat. ■

Proposition 3.3.4 *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $q \in \,]0,+\infty[\,$, alors*

$$\begin{aligned}
B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n) &\hookrightarrow B^{s,\frac{1}{p}}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n) \quad si \;\; \forall p \in \,]0,\infty[\,, \\
B^{s,\frac{1}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n) &\hookrightarrow B^{s,\frac{1}{q}}_{q,q}(\mathbb{R}^n) \quad si\ p \geq q, \\
B^{s,\frac{1}{q}}_{q,q}(\mathbb{R}^n) &\hookrightarrow B^{s,\frac{1}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \quad si\ p \leq q
\end{aligned}$$

Preuve. Voir [12]. ■

Proposition 3.3.5 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$ et $\tau \geq 0$. Alors*

$$B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s+n\tau-\frac{n}{p}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [11]. ■

Proposition 3.3.6 *Soient* $0 < q \leq \infty$, $\tau \geq 0$, *et* $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$. *Alors*

$$B^{s_0,\tau}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s_1,\tau}_{p1,q}(\mathbb{R}^n) \text{ si } 0 < p_0 < p_1 \leq \infty \text{ et } s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}.$$

Preuve. Voir [11]. ■

Proposition 3.3.7 *Soient* $p, q \in]0, \infty[$ *et* $s \in \mathbb{R}$.
(i) On a

$$B^{s,\tau_1}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau_0}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \quad \text{si } \frac{1}{p} \leq \tau_0 \leq \tau_1 < \infty.$$

(ii) Pour $s > \sigma_p$, $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \frac{1}{p}$, *et* $q_0, q_1 > 0$ *on a*

$$B^{s,\tau_0}_{p,q_0}(\mathbb{R}^n) \backslash B^{s,\tau_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B^{s,\tau_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \backslash B^{s,\tau_0}_{p,q_0}(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset.$$

Preuve. Voir [11]. ■

3.4 Extension aux espaces $\dot{B}^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

On peut étendre le Théorème 2.2.1 de la manière suivante:

Théorème 3.4.1 *Une fonction* $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *appartient à BMO si et seulement si les deux conditions sont vérifiées:*

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-n-1} |f(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty$.

(ii) $f \in \dot{B}^{0,1}_{2,2}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. De la Définition 3.2.1 (formule (3.2.1)), il vient que si f vérifie (2.2.1), elle vérifie aussi (3.2.1). Ceci montre que $\dot{B}^{0,1}_{2,2}(\mathbb{R}^n)$ contient la classe des fonctions satisfaisantes la condition (2.2.1). ■

Remarque 3.4.1 *Dans le Théorème 3.4.1, on peut se demander si l'extension suivante est posiible : On change*
1- (ii) par une condition plus large, i.e.

$$f \in \dot{B}^{s,\tau}_{2,2}(\mathbb{R}^n). \tag{3.4.1}$$

2- (i) par une condition compatible avec (3.4.1).

Bibliographie

[1] G. Bergh, J. Löfström. Interpolation Theory, An Introduction. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 223. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[2] G. Bourdaud. Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien, 2ième édition, Pub. Math. Univ. Paris 7, 23, 1995.

[3] G. Bourdaud. Ce qu'il faut savoir sur les espaces de Besov. Preprint, Paris 2009.

[4] C. Fefferman, E.M. Stein. H^p spaces of several variables. Acta Math. 129 (1972), 137–193.

[5] B. Jawerth. Some observations on Besov and Lizorkin-Triebel spaces. Math. Scand. 40 no. 1 (1977), 94–104.

[6] M. Moussai. Realizations of homogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces and an application to pointwise multipliers. Anal. Appl. 13 No. 2 (2015), 149–183.

[7] J. Peetre. New Thoughts on Besov Spaces. Duke Univ. Math. Series I, Durham, N.C., 1976.

[8] T. Runst, W. Sickel. Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations, de Gruyter, Berlin, 1996.

[9] H. Triebel. Theory of Function Spaces. Monographs in Mathematics 78. Birkhäuser, Basel, 1983.

[10] H. Triebel. Theory of Function Spaces II. Monographs in Mathematics 84. Birkhäuser, Basel, 1992.

[11] W. Yuan, W. Sickel, D. Yang. Morrey and Campanato meet Besov, Lizorkin and Triebel. Lecture Notes in Mathematics vol. 2005, Springer-Verlag, Berlin 2010.

[12] D. Yang and W. Yuan, Relations among Besov-type spaces, Triebel-Lizorkin-type spaces

and generalized Carleson measure spaces, Appl. Anal. 92 (2013), 549–561.

ملخص: تحتوي هذه المذكرة على دراسة فضاء **BMO**. درسنا فضاءات **Besov** المتجانسة والغير متجانسة، حيث قدمنا بعض خصائص هذه الفضاءات ودرسنا فضاءات من نوع **Besov**.

الكلمات الرئيسية: **BMO**، فضاء **Besov**، فضاء **Besov** متجانس، الفضاء من نوع **Besov**.

Résumé : Ce mémoire de master comporte une étude de l'espace BMO. Nous avons étudié les espaces de Besov homogènes et non homogènes, ou nous avons donné certaines propriétés de ces espaces et nous avons étudié les espaces de type de Besov.

Mots clés :BMO , Espace de Besov, Espace de Besov homogène Espace de type de Besov….

Abstract: This master thesis includes a study of BMO space. We have studied the homogeneous and inhomogeneous Besov spaces, where we have given some properties of these spaces and we have studied the Besov type spaces.

Key words: BMO, Besov space, Homogeneous Besov Space, Besov type space .....