UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Par

Menasri Nedjwa

Sujet

Etude de la fermeture de l'opérateur de Nadir non borné

Devant le jury :

Mr Nadir Mostefa	Prof.	Univ de M'sila	Président
Mr Smati Abdellatif	MAB.	E.N.S Bousaada	Encadreur
Mr Gagui Bachir	MCA.	Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2018 / 2019

Dédicace

Je dédie ce travail à mes chers parents, qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude pour leur amour, leur encourage et leur soutien tout au long de mes études, que ALLAH les bénisse.

A mes chers sœurs

et mes chers frères

A tous mes sympathiques amies.

A tous ceux qui m'aiment.

Je dédie le fruit de mes efforts.

Remerciement

Avant toute considération, je remercie le GRAND DIEU le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je remercie monsieur Mostefa NADIR, ancien professeur de mathématiques pour ses travaux, ses conseils, ses encouragements, et ses instructions pondant les deux années de master.

Je remercie monsieur SMATI Abdellatif pour son aide et ses efforts dans ce mémoire.

Je remercie monsieur GAGUI Bachir pour ses efforts et ses instructions pour les étudiants.

A la fin je remercie tous mes anciens et nouveaux professeurs.

Table des matières

Notation

$\mathcal{L}(E,F)$	L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.
$L(E,F)$	L'ensemble des opérateurs linéaires bornés de E dans F.
$K(E,F)$	L'espace des opérateurs compacts de E dans F.
$C([a,b])$	L'espace des fonctions continues sur $[a,b]$.
$C^1([a,b])$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[a,b]$.
$\operatorname{Im}(A)$	L'image de l'opérateur A.
$Ker(A)$	Le noyau de l'opérateur A.
$\mathcal{D}(A)$	Le domaine de l'opérateur A.
$G(A)$	Le graphe de l'opérateur A.
$\Vert . \Vert'_{D(A)}$	La norme de graphe de l'opérateur A.
A^{-1}	L'inverse de l'opérateur A.
A^*	L'adjoint de l'opérateur A.
$\overline{A}$	La fermeture de l'opérateur A.
$\ell^2(\mathbb{R})$	L'espace des suites réelles$(x_n)_n$ de carrés sommables,i.e vérifiant $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert x_n \rvert^2 < \infty$.
$\mathcal{C}(H)$	L'espace des opérateurs fermés sur H.
$\mathcal{C}_1(H)$	L'espace des opérateurs fermés à domaines denses.

Introduction générale

En mathématiques, l'opérateur de Nadir est un concept d'analyse fonctionnelle qui porte le nom du mathématicien algérien Mostefa Nadir. Il s'agit d'un opérateur N entre deux espaces de Hilbert E et F. Alors, on peut définir l'indice de l'opérateur comme:

$$N = AB^* - BA^*.$$

L'opérateur de Nadir bornés et toujours normal, et compact si l'un des opérateurs A et B compact et puis que beaucoup d'opérateurs linéaires importants qui ne sont pas bornés sont fermés, comme l'opérateur de dérivation et bon nombre d'opérateurs différentiels. il est nécessaire d'étendre la fermeture de l'opérateur de Nadir non borné.

Ce mémoire décompose en trois chapitres de la manière suivante:

Dans le premier chapitre, nous commençons par une introduction à l'analyse fonctionnelle. Puis on présente les opérateurs bornés avec ses propriétés et on donne quelques exemples.

Dans le deuxiéme chapitre, nous étudions les opérateurs non bornés, les opérateurs fermés et bornés et on définit l'adjoint d'un opérateur non borné.

Le troisième chapitre sera consacré à une nouvelle classe des opérateurs, c'est l'opérateur de Nadir. On cherche des conditions sur les opérateurs A et B pour lesquelles l'opérateur de Nadir est compact, fermé, anti-hermitien et normal (plus précisément anti-autoadjoint).

Chapitre 1

Opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert

Dans le premier chapitre de ce mémoire nous exposerons un rappel sur quelques définition et propriétés genérales sur les opérateurs bornés(adjoint, auto adjoint, résolvante

d'un opérateur borné)

1.1 Rappels et définitions

Définition 1.1.1 *:(Espaces Vectoriels Normés)*

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, s' il existe un nombre réel $a = \|x\|$, qui verifie les conditions suivantes:

1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \;\; \forall x, y \in E.$

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| * \|x\| \;\; \forall x \in E \; , \lambda \in \mathbb{C}.$

on dit que $\|.\|$ est une norme.

Un tel espace E muni d' une norme $\|.\|$ est dit espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2 *:(Suite de Cauchy)*

Une suite x_n d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est dit une suite de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_\varepsilon : \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Définition 1.1.3 *:(Espace complet)*

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet si toutes ses suites de Cauchy sont convergentes dans E pour sa norme.

Tout espace normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie est complet.

Définition 1.1.4 *:(Espace de Banach)*

On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme $d(x, y) = \|x - y\|$.

Définition 1.1.5 *:(Produit scalaire)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, un produit scalaire sur E est une application de $E * E$ dans $\mathbb{R}$, notée $\langle ., . \rangle$ possédant les propriétés suivantes:

pour tout x, y, z dans E et α, β dans $\mathbb{R}$.

1) $\langle \alpha x + y, \beta z \rangle = \alpha\overline{\beta} \langle x, z \rangle + \overline{\beta} \langle y, z \rangle$ *si* $x \in E, y \in E$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

3) $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in E$.

4) $\langle x, x \rangle = 0$ implique $x = 0$.

Exemple 1.1.1

1) Soit $H = \mathbb{C}^n$ l'application

$$\langle ., . \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

$$(x, y) \to \sum_{k=1}^{n} = x_k \overline{y_k}$$

ou $\overline{y_k}$ est le conjugué complexe de y_k

est un produit scalaire.

2) Soit $H = C([0,1], \mathbb{C})$. l'application

$$\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$$

$$(x, y) \to \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}$$

est un produit scalaire.

3) Soit $H = \ell^2 = \{x = (x_n)_{n \geq 0} : \sum\limits_{n \geq 0} |x_n|^2 < \infty\}$. l'application:

$$\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$$

$$(x, y) \to \sum_{n \geq 0}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

est un produit scalaire.

4) Soit $H = L^2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable et $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx < \infty\}$. l'application:

$$\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$$

$$(x, y) \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$$

est un produit scalaire.

Définition 1.1.6 *:(Espace Préhilbertien)*

On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Remarque 1.1.1

Un produit scalaire sur E définit une norme sur E par la formule suivante:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Définition 1.1.7 *:(Espace de Hilbert)*

Un espace de Hilbert est espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Exemple 1.1.2 *L'espace*

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_j)_j;\ x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$$

est un espace de Hilbert.

Proposition 1.1.1 *:(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Dans un espace $(H, \langle ., . \rangle)$ prehilbertien, On a:

$$\forall x, y \in H; |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Définition 1.1.8 *:(orthogonaux)*

Si $f, g \in H$, on dit que f et g sont orthogonaux, et on écrit $f \perp g$ si $\langle f, g \rangle = 0$. Si M est une partie de H, l'orthogonal de M est défini par:

$$M^{\perp} = \{\ f \in H \text{ t.q. } \forall g \in M,\ f \perp g\ \} = \{\ f \in H \ \text{ t.q. } \forall g \in M,\ \langle f, g \rangle = 0\}.$$

Définition 1.1.9 *:(Base orthonormale)*

Une famille $\{e_i\}_{i \in I}$ est une base orthonormale d'un espace de Hilbert H si

1. $\|e_i\| = 1$.
2. L'espace engendré $Vect\{e_i\}$ est dense dans H.
3. $e_i \perp e_j$ pour $i \neq j$.

Définition 1.1.10 *:(Opérateur)*

Soient E et F deux espaces vectoriel normés. On dit qu'une application A défini sur un sous ensemble $\mathcal{D} \subset E$ dans F est un opérateur si $\mathcal{D}$ est un sous–espace vectoriel de E.

1.1.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.1.11 *:(Opérateurs linéaires)*

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes:
1) Condition additive

$$\forall\ \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

2) Condition homogène

$$\forall \varphi \in E,\ \lambda \in \mathbb{k},\ A(\lambda\varphi) = \lambda\ A(\varphi).$$

Exemple 1.1.3

1) Sur l'espace ℓ^2 des suites réelles de carré sommable on considère l'application:

$$A(x) = (x, x_2/2, x_3/3, ..., x_n/n, ...)$$

Il est clair que A est un opérateur sur ℓ^2 de norme 1.
2) Soit $H = L^2([0,1])$

$$\begin{aligned} A &: H \to H \\ f &\to A(f(x)) = \int_0^1 (x-t)f(t)dt \end{aligned}$$

3) L'opérateur de multiplication:

$$\begin{aligned} M &: H \to H \\ f &\to M(f(x)) = x.f(t)\ \forall x \in [0,1] \end{aligned}$$

4) L'opérateur de Volterra:

$$\begin{aligned} V &: \mathbb{C}([0,1]) \to \mathbb{C}([0,1]) \\ f &\to V(f(x)) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt. \end{aligned}$$

où $k(x,t)$ est une fonction en x et t (noyau).

5) Soit H est un vecteur dans $\mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} A \quad &: \quad H \to H \\ U \quad &\to \quad V = AU = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U. \end{aligned}$$

soit $U = \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}, AU = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i \\ -3 \end{pmatrix}.$

Définition 1.1.12 *:(Opérateurs linéaires continues)*

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continues de E dans F. Lorsque $E = F$ l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ devient par notation $\mathcal{L}(E)$.

Définition 1.1.13 *:(Continuité des opérateurs en un point)*

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble $\Omega \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de Ω si on a, la propriété suivante:
Pour tout suite x_n de Ω converge vers x_0, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$, c'est–à– dire

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = A(x_0).$$

Remarque 1.1.2 *L'opérateur linéaire A est dit continu sur G, s'il est continu en chaque point de l'ensemble G.*

Théorème 1.1.1

Soient E et F deux espaces normés un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu par tout sur G s'il est continu en point x_0 de G.

Corollaire 1.1.1

En dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues. De façon précise, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie et si F est un espace vectoriel normé, alors toute application linéaire $A : E \to F$ est continue.

Définition 1.1.14 *:(Noyau,Image)*

1) On appelle noyau de A le sous-espace $ker(A)$ tel que:

$$ker(A) = N(A) = \{x \in E,\ Ax = 0\}.$$

2) On appelle Image de A le sous-espace $Im(A)$ de F tel que:

$$Im(A) = R(A) = \{y \in F,\ \exists\ x \in E \ \text{ tel que } y = Ax\}.$$

1.1.2 Convergence

On considère une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace normé E. On dit que:

1) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fortement convergente vers $x \in E$ si $\|x_n - x\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

2) De Cauchy si $\|x_m - x_n\| \to 0$ lorsque $n, m \to \infty$.

Définition 1.1.15

Un espace normé X est dit complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.

Définition 1.1.16

Dans un espace préhilbertien x, une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dit faiblement convergente vers x si

$$\forall y \in X, \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle \to 0, lorsque\ n \to \infty.$$

1.2 Opérateurs bornés

Définition 1.2.1 *[1]:(Opérateurs bornés)*

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que:

$$\|A(x)\|_F \leq C\,\|x\|_E \ ,\forall x \in E. \tag{1.2.1}$$

On peut bien sûr définir un opérateur borné de E dans F (espace normé différent de E) comme étant une application linéaire continue $E \to F$. Mais on se limitera au cas $E = F$.

Définition 1.2.2 *:(Norme d'un opérateur)*

La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1.2.1) est appelée norme de A notée $\| A \|$ et donnée par:

$$\| A \| = \sup_{\|x\|=1} \| A(x) \|_F = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \| A(x) \|_F = \sup_{\|x\|\neq 1} \frac{\| A(x) \|_F}{\| x \|_E}.$$

Corollaire 1.2.1

Si $B \in \mathcal{L}(H)$ et $A \in \mathcal{L}(H)$ avec, H un $\mathbb{C}-$ Hilbert et si

$$\langle Bx; x \rangle = \langle Ax; x \rangle$$

pour tout $x \in H$, alors:

$$B = A$$

Proposition 1.2.1

Soit A un opérateur linéaire définit sur un espace de Hilbert H, Les assertions suivantes sont équivalentes:

1) L'opérateur A est borné.

2) L'opérateur A est continu sur H.

3) L'opérateur A est continu au point $x_0 \in H$.

Preuve. 1) (1) $\Rightarrow$ (2) Soit A borné x_0 vecteur quelcuonque dans H, x_n une suite converge vers x_0 comme:

$$\|Ax_n - Ax_0\| = \| A(x_n - x_0) \| \leq \| A \| . \| x_n - x_0 \|$$

$$(x_n \to x_0) \Rightarrow (\{Ax_n\} \to Ax_0)$$

D' ou la continuité de A.

2) (3) $\Rightarrow$ (1) Soit A continu en $x_0 \in H$.

supposons que A est non borné (i.e : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \neq 0$ vecteur dans H: $\|Ax_n\| > n \|x_n\|$).

On pose

$$y_n = \frac{x_n}{n\,\|x_n\|}, \| \; y_n \; \|= \frac{1}{n} \text{ Or } y_n \to 0$$

alors

$$y_n + x_0 \to x_0$$

mais

$$\begin{aligned} \|A(y_n + x_0) - A(x_0)\| &= \|Ay_n\| \\ &= \left\| A\frac{x_n}{n\,\|x_n\|} \right\| \\ &= \frac{1}{n\,\|x_n\|}\,\|Ax_n\| \\ &> \frac{n\,\|x_n\|}{n\,\|x_n\|} = 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\|A(y_n + x_0) - A(x_0)\| > 1, \forall y_n.$$

D'où A n' est pas continu en x_0, d' où la contraduction donc A est borné. ■

Exemple 1.2.1

1) $I : \mathbb{C}([0,1]) \to \mathbb{C}([0,1])$

est bien borné car:

$$\|Ix\| = \|x\| \leq c\,\|x\|\,; \forall c \geq 1$$

2)Soit

$$E = L^2(]0,1[) \text{ et } A(\varphi(x)) = x\varphi(x)$$

alors

$$\begin{aligned} \| \quad A(\varphi) \; \|_2^2 &= \int_0^1 |A(\varphi(x))|^2\,dx \\ = \quad & \int_0^1 x^2\,|\varphi(x)|^2\,dx \leq \| \; \varphi \; \|_2^2 \end{aligned}$$

Donc A est borne sur E

3) Soit $H = L^2([0,1])$. On définit A sur H par

$$\begin{array}{rcl} A & : & H \to H \\ \varphi & \to & A\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt. \end{array}$$

A est borné car:

$$\begin{aligned} \|A\varphi\|_H^2 &= \int_0^1 |\ A\varphi(x)\ |^2\,dx, \\ &= \int_0^1 |\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt\ |^2\,dx, \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |\ x-t\ |^2\,dt \int_0^x |\ \varphi(t)\ |^2\,dt\right)dx, \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}\int_0^x |\ \varphi(t)\ |^2\,dt\right)dx, \\ &\leq \frac{1}{3}\|\varphi\|_H^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\|A\varphi\|_H^2 \leq \frac{1}{3}\|\varphi\|_H^2,\ \forall\varphi \in H,$$
$$\Longrightarrow \|A\varphi\|_H \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\|\varphi\|_H,\ \left(c = \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

4) L'opérateur de multiplication A défini sur l'espace $C([1,2])$, alors

$$\begin{aligned} \|A\varphi\| &= \sup_{x\in[1,2]} |\ (A\varphi)(x)\ |, \\ &= \sup_{x\,\in\,[1,2]} |\ x\varphi(x)\ |, \\ &\leq 2\parallel \varphi \parallel, (c=2)\,, \forall\varphi \in C([1,2]). \end{aligned}$$

Donc A est borné.

1.2.1 Convergence des opérateurs

Définition 1.2.3 *:(Convergence des opérateurs)*

Soient H un espace de Hilbert et $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés de $\mathcal{L}(H)$. On dit que A_n est convergente vers A dans $\mathcal{L}(H)$ si et seulement si $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H)}$ est convergente vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit

$$A_n \to A \text{ dans } \mathcal{L}(H) \Leftrightarrow \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0 \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Définition 1.2.4 *[10]:(Densité)*

Soient E et F deux espaces normé. Un opérateur $A : E \to F$ est dit densément défini si son domaine $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E c'est-à-dire $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$

1.3 Adjoint d'une application linéaire continue entre espaces de Hilbert

On commence avec la notion d'adjoint, plusieurs des classes particuliéres d'opérateurs bornés seront définies à l'aide de cette notion.

1.3.1 Rappels sur les formes ses qui linéaires

Théorème 1.3.1 *:(Théoréme de Riesz)*

Soit H un espace de Hilbert. Alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(H), \exists! v \in H \quad \text{tel que} \quad \varphi(u) = \langle u, v \rangle, \forall u \in H.$$

Preuve. Voir[14] ■

Proposition 1.3.1

Soient E et F deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(F, E)$. Alors il existe un unique $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on ait:

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(x) \rangle$$

On a de plus $\|A^*\| = \|A\|$

Preuve. Voir [19]. ■

Définition 1.3.1 *:(Opérateurs Adjoint)*

Soient E et F deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(F, E)$. l'unique application linéaire $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que pour tous $x \in E$, $y \in F$ on ait

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle$$

est appelée l'adjoint de A.

Exemple 1.3.1

1)L'adjoint de l'opérateur identité I_H est $I_H^* = I_H$ car:

$$\langle I_H x, y\rangle = \langle x, I_H^* y\rangle, \forall x, y \in H$$

2) Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné, K un fonction continu sur $[a, b] \times [a, b]$ et A l'opérateur intégral de Fredhom de noyau K défini par

$$Af(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy, \ \forall f \in L^2([a, b]).$$

C'est un opérateur lineaire borné sur E, pour f et g dans E, on a

$$\begin{aligned}
\langle Af, g\rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b K(x, y) f(y) dy\right) \overline{g(x)} dx, \\
&= \int_a^b f(y) \left(\int_a^b K(x, y) \overline{g(x)} dx\right) dy, \\
&= \int_a^b f(y) \left(\int_a^b \overline{\overline{K(x, y)} g(x) dx}\right) dy, \\
&= \langle f, A^* g\rangle.
\end{aligned}$$

On en déduit que A^* est l'opérateur intégral de Fredhom, de noyau K^* avec

$$K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}.$$

Autrememt dit

$$A^* f(x) = \int_a^b \overline{K(y, x)} f(y) dy.$$

soit

$$Af(x) = \int_a^b (x - y) f(y) dy$$

alors

$$A^* f(x) = \int_a^b (y - x) f(y) dy$$

3) Soit

$$M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 3i \end{pmatrix},$$

alors
$$M^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}.$$
Dans le cas général soit la matrice:
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$
alors son adjoint est:
$$\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}.$$

car

Soit $\mathbb{C}^2$est $\{e_1, e_2\}$ base authonormé, et $A = (a_{ij})$ est matrice

soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$a_{11}x_1\overline{y_1} + a_{12}x_2\overline{y_1} + a_{21}x_1\overline{y_2} + a_{22}x_2\overline{y_2} = \overline{b_{11}}x_1\overline{y_1} + \overline{b_{12}}x_1\overline{y}_2 + \overline{b_{21}}x_2\overline{y_1} + \overline{b_{22}}x_2\overline{y_2}$$

$$a_{11} = \overline{b_{11}}, a_{12} = \overline{b_{12}} \text{ et } a_{21} = \overline{b_{21}}, a_{22} = \overline{b_{22}}$$

donc $[b_{ij}] = [\overline{a_{ij}}]$

4) Soit $S : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$ le shift défini par $S(x_1, x_2, ...) = (0, y_1, y_2, ...)$,

Soit (x_n) et (y_n) dans $\mathcal{L}^2$. Alors

$$\begin{aligned} \langle s^*(x_n), (y_n)\rangle &= \langle (x_n), s(y_n)\rangle \\ &= \langle (x_1, x_2, ...), (0, y_1, y_2, ...)\rangle \\ &= x_2\overline{y_1} + x_3\overline{y_2} + ... \\ &= \langle (x_2, x_3, x_4...), (y_1, y_2, y_3...)\rangle \end{aligned}$$

alors S^* est défini par $S^*(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$.

5) Soit $H = C([0;1];\mathbb{C})$: l'opérateur A_φ défini par:

$$A_\varphi : H \to H$$

$$x \to A_\varphi f(x) = \varphi(x) f(x).$$

Alors:

$$A_\varphi^* = A_{\overline{\varphi}}$$

Proposition 1.3.2

Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$, A^*, B^* leurs adjoints (respectivement), alors on a les propriétés suivantes:

1) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.
2) $(AB)^* = B^* A^*$.
3) $(A^*)^* = A$.

Corollaire 1.3.1

Pour $A \in \mathcal{L}(H)$ on a:
1) $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$.
2) $A^*A = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
Preuve. Voir [16]. ■

Corollaire 1.3.2

Si A est un opérateur linéaire borné défini sur H dans H, alors:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (A^n)^* = (A^*)^n$$

Proposition 1.3.3

Soit $A \in B(H)$, alors on a

$$\begin{aligned} 1)\ kerA &= (Im(A^*))^\perp. \\ 2)\ \overline{Im(A)} &= (ker(A^*))^\perp. \end{aligned}$$

Preuve. Voir [7]. ■

1.3.2 Opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, autoadjoints, symétriques

Soient E et F deux espaces de Hilbert.

1) Un élément $U \in \mathcal{L}(E,F)$ est appelé unitaire si

$$U^*U = Id_E \ et \ UU^* = Id_F.$$

2) Un élément $U \in \mathcal{L}(E,F)$ est appelé isométrique si

$$\|U(x)\| = \|x\| \ \ pour \ tout \ x \in E.$$

3) Un élément $N \in \mathcal{L}(E)$ est appelé normal si

$$NN^* = N^*N.$$

4) Un élément $S \in \mathcal{L}(E)$ est appelé hermitien ou auto-adjoint si

$$S = S^*.$$

5) Un élément $P \in \mathcal{L}(E)$ est appelé positif (notation : $P \geq 0$) si P est auto-adjoint et si

$$pour \ tout \ x \in E \quad \langle P(x), x\rangle \geq 0.$$

Si A est normal, alors $Ker(A) = Ker(A^*)$

Définition 1.3.2 *:(Opérateur auto-adjoint)*

Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E)$. On dit que A est un opérateur auto-adjoint (ou hérmitien) s'il égale a' son adjoint i.e : $A = A^*$ Autrement dit :

$$\langle Ax, y\rangle_H = \langle x, Ay\rangle_H, \forall x, y \in A$$

Les opérateurs symétriques sont des opérateurs bornés qui ont un comportement particulier par rapport au produit scalaire.

Remarque 1.3.1

1) A Positif sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire A est auto-adjoint et $\langle Ax, x\rangle \geq 0$.

2) A auto-adjoint $\Rightarrow$ A normal.

3) A unitaire$\Rightarrow$ A isométrie, normal et inversible.

Exemple 1.3.2

1) l'identité $I : H \to H$ est auto-adjoint positif car:

$$\langle Ix; x\rangle = \|x\|^2 \geq 0; \forall x \in H$$

2) Soit l'opérateur $S : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$ "shift à droite" défini par:

$$S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$$

On sait que:

$$S^*(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$$

S n'est pas auto-adjoint car:

$$Se_1 \neq S^*e_1, \text{où } e_1 = (1, 0, 0, ...)$$

S n'est pas positif car:

$$\langle Sx; x\rangle = -1, \text{ où } x = (-1, 1, 0, ...)$$

D'autre part on a:

$$S^*Sx = S^*(0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

$$= (x_1, x_2, ..., x_n, ...) = I_{\mathcal{L}^2}$$

$$SS^*x = S(x_2, x_3, ..., x_n, ...)$$

$$= (0, x_2, ..., x_n, ...)$$

Donc S n'est pas normal, n'est pas unitaire, mais c'est une isométrie.

3)Soit $H = \mathcal{L}^2([0, 1])$, et $A_\varphi \in B(H)$ défini par: $A_\varphi : H \to H$

$$x \to A_\varphi f(x) = \varphi(x) f(x)$$

avec φ continue sur $[0,1]$ à valeurs complexes.

On sait que $A_\varphi^* f(x) = \overline{\varphi(x)} f(x)$ qui nous donne:

a) A_φ est auto-adjoint $\iff \varphi = \overline{\varphi}$

b) $A_\varphi$est toujours normal

c) $A_\varphi$est unitaire $\iff |\varphi| = 1$

d) A_φ est positif $\iff \varphi$ est positif.

1.4 L'inverse d'un opérateur borné

Définition 1.4.1

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ on dit que A est inversible s'il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(H)$, qui vérifie

$$AB = BA = I_H.$$

B est dit l'inverse de A et on note $B = A^{-1}$.

Exemple 1.4.1

1)L'opérateur I_H est inversible, et $I_H^{-1} = I_H$.

2)Soit $h \in \mathbb{C}[0,1]$ soit $A_h \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ definit par:

$$(A_h)(t) = h(t)g(t)$$

si $f \in \mathbb{C}[0,1]$ definit par $f(t) = 1 + t$ alors Af est inversible.

soit $k(t) = 1/1 + t$ alors $K \in \mathbb{C}[0,1]$ et

$$(A_k A_{fg})(t) = (A_k fg)(t) = k(t)f(t)g(t) = g(t),$$

pour tout $t \in [0,1]$ alors

$$(A_k A_f)g = g, \ \forall g \in L^2[0,1], \, A_k A_f = I \text{ et } A_f A_k = I$$

alors A_f est inversible $A_f^{-1} = B_k$.

Lemme 1.4.1 *Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(H)$ si A_1 et A_2 sont inversibles alors*

$$(A_1 A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1}$$

Théorème 1.4.1

Si A, B et C sont des opérateurs tels que $AB = CA = I$, alors $B = C$ et A est inversible.

Preuve. $B = IB = (CA)\,B = C\,(AB) = CI = C$.

Il découle que si A est inversible, alors son inverse B est unique et on a $AB = BA = I$. On écrire A^{-1} et A^{-1} est appelé inverse de A.

Si les opérateurs A^{-1}, AB et A^n sont inversibles alors

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A,\ \ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ et } \ (A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n, \text{ pour tout entier positif } n.$$

■

Théorème 1.4.2

Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est inversible si et seulement si A^* est inversible, et alors on a

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Preuve. Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est inversible alors, on a A inversible $\iff \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I_H$, on passe à l'adjoint

$$(A^{-1})^*A^* = (AA^{-1})^* = I_H^* = I_H,$$

et

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1})^*A^* = I_H.$$

d'où $A^* \in \mathcal{L}(H)$ est inversible et

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Réciproquement, si $A^* \in \mathcal{L}(H)$ est inversible alors l'étape précédente montreque $(A^*)^* = A \in \mathcal{L}(H)$ est inversible. ■

Proposition 1.4.1

soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on a:

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha > 0, \|Ax\| \geq \alpha \|x\|, \forall x \in H \\ \ker A^* = \{0\} \end{cases}$$

Exemple 1.4.2

L'opérateur S "le shift" n'est pas inversible car:

$$e_1 = (1, 0, 0, ...) \neq 0_{\ell^2} \text{ et } S^*(e_1) = 0$$

c'est -à-dire

$$\ker S^* \neq \{0\}$$

1.5 Opérateurs compacts

Dans ce section, on donne la définition et les propriétés élémentaires des opérateurs compacts. Ensuite on étudie les propriétés spectrales des opérateurs compacts. Le cadre

est celui des espaces de Banach. Ainsi, on désigne par $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ des espaces de Banach sur K :=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

De plus, pour tout K-espace vectoriel normé $(X, \|.\|_X)$, on désigne par B_X la boule unité fermée de X, i.e.

$$B_X := \{x \in X, \quad \|x\|_X \leq 1\}$$

1.5.1 Définitions et propriétés

Définition 1.5.1 *:(Ensembles relativement compacts)*

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G, il existe une sous suite $\{u_n(k)\}$ qui converge dans F.

Définition 1.5.2 *:(Opérateurs compacts)*

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F. Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte. On note $K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F. On pose $K(E) = K(E, E)$

Théorème 1.5.1 *:(Critère de compacité)*

Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est compact si et seulement si pour toute suite borné φ_n de E, la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente de F.

Définition 1.5.3 *:(Opérateur complètement continu)*

L'opérateur A est dit complètement continu, si elle est continue et compacte.

Théorème 1.5.2

Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

Preuve. Voir[10]. ■

Théorème 1.5.3

Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

Le produit $A_1 A_2$ de deux opérateurs bornés A_1 et A_2 est compact si l'un des opérateurs A_1 ou A_2 est compact.

Soit E un espace normé, F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite des opérateurs compacts de E dans F.

$$Si \lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$$

Alors, A est compact.

Exemple 1.5.1

Il est clair que si $A_1 \in \mathcal{L}(E)$ est compact, λA_1 est compact pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$.

D'autre part si A_1 et A_2 sont compacts, $A_1 + A_2$ est compact. En effet soient B la boule unité (fermée) de E et

$$(z_n),\ \ z_n = A_1(x_n) + A_2(x_n)$$

une suite dans $A_1(B) + A_2(B)$.

alors de $(A_1(x_n))$ on peut extraire une suite convergente $(A_1(x_n'))$ et de (x_n') on peut extraire une suite $(x_{nk})_k$ telle que la suite $(A_2(x_{nk}))_k$ converge. Il est alors évident que

$(A_1(x_{nk}) + A_2(x_{nk})_k$ est une sous-suite convergente de (z_n); l'opérateur $A_1 + A_2$ est donc compact.

Théorème 1.5.4

Soit A un opérateur borné de E dans F, à image $A(E)$ de dimension finie. Alors A est compact.

Définition 1.5.4

On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini si la dimension de l'image $\mathrm{Im}(A)$ est finie.

On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si $A(B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte.

Proposition 1.5.1

Soient E et F deux espaces de Banach. L'ensemble $K(E, F)$ des opérateurs compacts de E dans F est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.

Il contient l'adhérence des opérateurs continus de rangs finis.

Preuve. Voir [24]. ■

Dans un espace E de dimension infinie l'inverse d'un opérateur compact ne peut pas être borné.

En effet, dans le cas contraire, l'opérateur identique $I = A^{-1}A$ serait compact dans E, ce qui est impossible.

Théorème 1.5.5 *:(Théoréme de Schauder)*

Soient E et F deux espaces de Banach. Si l'opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact, alors $A^* \in \mathcal{L}(F', E^{'})$ est compact.

Preuve. Voir[10]. ■

Théorème 1.5.6 *:(Arzela-Ascoli)*

A ensemble, $A \subset C(G)$ est un relativement compact si et seulement si:

1) bornée i.e s'il existe une constante M telle que:

$$|\varphi(x)| \leq M, \ \forall x \in G, \ \forall \varphi \in A$$

2) équicontinu i.e : $\forall \varepsilon \geq 0; \exists \delta > 0$ telle que $\forall \varphi \in A$; nous avans

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon,\ \forall x; y \in G \text{ et } |x - y| < \delta$$

Exemple 1.5.2

Soient E l'espace des fonctions complexes continues sur $[0,1]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $\Bbbk : [0,1]x[0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour toute fonction f dans E on pose

$$A(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

On dira que A est un opérateur intégral de noyau K. La fonction K joue le rôle d'une matrice dont les indices sont x et y variant dans $[0,1]$. Montrons que A est compact. Soit B la boule unité fermée de E. L'ensemble $A(B)$ est équicontinu. En effet soit $\varepsilon > 0$; comme K est définie continue sur un ensemble compact, elle est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tous $x, x', y \in [0,1]$ on ait

$$|x - x'| \leq \eta \to |K(x,y) - K(x',y)| \leq \varepsilon$$

et par suite pour toute fonction f

$$|A(f)(x) - A(f)(x')| = \left| \int_0^1 (K(x,y) - K(x',y))f(y)dy \right| \leq \varepsilon \|f\|_\infty$$

L'ensemble $A(B)$ est donc équicontinu car η L'ensemble $A(B)$ est donc équicontinu car η ne dépend pas de $f \in B$, comme il est borné car l'opérateur A est borné il est relativement compact d'après le théorème d'Ascoli. Donc A est compact.

Chapitre 2

Opérateurs non bornés sur les espaces de Hilbert

Ce chapitre constitue la partie introductive du travail, il est consacré aux opérateurs linéaires non bornés sur un espace de Hilbert. Ce concept est ici largement introduit à travers les notions de la fermeture et de l'adjoint, des opérateurs symétriques.

2.1 Notions générales des opérateurs linéaires non bornés

Définition 2.1.1 *:(Domaine d'un opérateur)*

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A un opérateur linéaire défini de sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset E$ dans F. $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur A.

Définition 2.1.2 *:(Opérateur densément défini)*

Soient E un espace vectoriel normé et A un opérateur linéaire défini de sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset E$ dans E. On dit que A est densément défini si son domaine est un sous ensemble dense de E, i.e

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = E$$

Exemple 2.1.1

Soit l'opérateur différentiel défini par:

$$D\varphi(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \varphi^{'}(x)$$

de $\mathcal{D}(D) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ où $\mathcal{D}(D) = \{\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) : \varphi \text{ est dérivable}\}$.

L'opérateur D est un opérateur densément défini dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ car l'espace $\mathcal{D}(D)$est dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Définition 2.1.3 *: (Noyau,Image)*

1) On appelle noyau de A le sous-espace $ker(A)$ de X tel que:

$$ker(A) = N(A) = \{x \in \mathcal{D}(A) : A(x) = 0_X\}$$

2. On appelle Image de A le sous-espace $Im(A)$ de Y tel que:

$$Im(A) = R(A) = A(\mathcal{D}(A)) = \{Ax : x \in \mathcal{D}(A)\}$$

2.2 Opérateur non borné

Définition 2.2.1 *:(Opérateur non borné)*

Un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H est un couple $(\mathcal{D}(A), A)$ où $\mathcal{D}(A)$ est un sous espace vectoriel de H et A est un opérateur linéaire défini de $\mathcal{D}(A)$ dans H. On dit que A est un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A)$.

Remarque 2.2.1

Dans la pratique pour montrer que un opérateur A est non borné il suffit de trouver une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(A)$ telle que $\|\varphi_n\| \leq M$ (pour une constante M et tout $n \in \mathbb{N}$) et $A\varphi_n \to \infty$ Par conséquent.

on peut montrer qu'un opérateur A est non borné par trouver une suite $\{\varphi_n\} \in \mathcal{D}(A)$ convergente vers 0 telle que la suite $\{A\varphi_n\}$ ne converge pas vers 0.

Exemple 2.2.1

1)Soit $H = \mathcal{L}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}(A) = \{u \in H : xu \in H\}$. On définit A par

$$(Au)(x) = xu(x) \text{ pour } u \in \mathcal{D}(A).$$

Alors A est un opérateur linéaire non borné avec un domaine de définition dense.

On suppose $E = F = L^2(\mathbb{R})$. Alors, l'opérateur A défini par

$$Au(x) = xu(x),$$

de domaine

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tel que } xu \in L^2(\mathbb{R})\},$$

est non borné. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la suite u_n de $\mathcal{D}(A)$ donnée par :

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n \text{ ou } x > n+1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet:

$$\begin{cases} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1, \\ \text{et} \\ \|Au_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\frac{3n^2+3n+1}{3}}. \end{cases}$$

2) Soit $\mathcal{D}(D_1)$ un sous espace vectoriel de $C[0,1]$ composé de toutes les fonctions polynomiales, l'opérateur différentiel D_1 défini de $\mathcal{D}(D_1)$ dans $C[0,1]$ par:

$$D_1\varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x)$$

est un opérateur non borné.

En effet, on considère par exemple la suite des fonctions $\varphi_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3,...$ est clair que pour tout $n = 1, 2, 3,...$ $\varphi_n(x) \in \mathcal{D}(D_1)$.

En outre

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_\infty &= \max_{x\in[0,1]} |\varphi_n(x)| \\ &= \max_{x\in[0,1]} |x^n| \\ &= 1 \end{aligned}$$

pour tout $n = 1, 2, 3, ...$

et

$$\begin{aligned} \|D_1\varphi_n\|_\infty &= \|\varphi_n\|_\infty \\ &= \left\|(x^n)'\right\|_\infty \\ &= \left\|nx^{n-1}\right\|_\infty \\ &= \max_{x\in[0,1]} \left|nx^{n-1}\right| \\ &= \infty \end{aligned}$$

D'où l'opérateur D_1 est un opérateur non borné dans $C[0,1]$.

3) Soit $\mathcal{D}(D_2)$ un sous espace vectoriel de $L^2[0,1]$ composé de toutes les fonctions continûment dérivables sur $[0,1] \in \mathbb{R}$(i.e $\mathcal{D}(D_2) = C_1[0,1]$), l'opérateur différentiel D_2 défini de $\mathcal{D}$ dans $L^2[0,1]$ par:

$$D_2\varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi^{'}(x)$$

est un opérateur non borné.

En effet, on considère par exemple la suite des fonctions $\varphi_n(x) = x^n, n = 1, 2, 3, ...$

est clair que pour tout $n = 1, 2, 3, ..., \varphi_n(x) \in \mathcal{D}(D_2)$. En autre,

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_2^2 &= \int_0^1 |\varphi_n(x)|^2\, dx \\ &= \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|D_2\varphi_n\|_2^2 &= \int_0^1 |D_2\varphi_n(x)|^2\, dx \\ &= \int_0^1 \left|nt^{n-1}\right|^2 dx \\ &= \int_0^1 n^2 t^{2n-21} dx \\ &= \frac{n^2}{2n-1} \end{aligned}$$

Encore On a:

$$\frac{\|D_2\varphi_n\|_2}{\|\varphi_n\|_2} = n\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \to \infty$$

D'où l'opérateur D_2 est un opérateur non borné dans $L^2[0,1]$.

Remarque 2.2.2

Les opérateurs non bornés peuvent être seulement dans les espaces de dimension infinie parce que dans les espaces de dimension finie tous les opérateurs linéaires sont bornés.

Définition 2.2.2 *:(Somme de deux opérateurs)*

Soient B et A deux opérateurs de E dans F. On définit l'opérateur somme $A+B$ par:

$$(A+B)(x) = A(x) + B(x)$$

de domaine $D(A+B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. pour tout $x \in \mathcal{D}(A+B)$

Définition 2.2.3 *:(Opérateur produit)*

Soient E, F , H et G des espaces vectorièls, et soient $A : E \to F$ et $B : F \to H$ deux opérateurs linéaires de domaine $\mathcal{D}(A) \subseteq E$ et $\mathcal{D}(B) \subseteq F$ respectivement. On définit l'opérateur composition BA (dit opérateur produit) de A et B par:

$$(BA)(x) = B(A(x))$$

de domaine

$$\mathcal{D}(BA) = \{x \in \mathcal{D}(A), A(x) \in \mathcal{D}(B)\}$$

- Si C est un opérateur de H dans G, alors $(CB)A = C(BA)$
- Si C est un opérateur de F dans H, alors: $(C+B)A = CA + BA$

2.3 L'inverse d'un opérateur non borné

Définition 2.3.1 *:(Opérateur inverse)*

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire bijectif. On dit que A est inversible s'il existe un opérateur B borné défini de H_2 dans H_1 tel que: $\begin{cases} AB = I \\ BA \subset I \end{cases}$.

On désigne l'inverse de A par A^{-1}.

Remarque 2.3.1

L'inverse A^{-1} s'il existe, il est unique.

Exemple 2.3.1

Soit l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

$$f \to Af(x) = (x^2+1)f(x)$$

défini sur son domaine maximal

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : (x^2+1)f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Soit l'opérateur B tel que:

$$Bf(x) = \frac{1}{(x^2+1)}f(x)$$

B est bien borné et $\mathcal{D}(B) = L^2(\mathbb{R})$ et

$$ABf(x) = A\left[\frac{1}{(x^2+1)}f(x)\right] = (x^2+1)\frac{1}{(x^2+1)}f(x) = f(x)$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(AB) &= \{f \in \mathcal{D}(B) : Bf \in \mathcal{D}(A)\} \\
\mathcal{D}(AB) &= \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \frac{1}{(x^2+1)}f \in \mathcal{D}(A)\} \\
\mathcal{D}(AB) &= \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \frac{1}{(x^2+1)}f \in \mathcal{D}(A) \text{ et } (x^2+1)\frac{1}{(x^2+1)}f \in L^2(\mathbb{R})\} \\
\mathcal{D}(AB) &= \{f \in L^2(\mathbb{R})\} = L^2(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

il est clair que $BAf = f$ et

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(BA) &= \{f \in \mathcal{D}(A) : Af \in \mathcal{D}(B)\} \\
\mathcal{D}(BA) &= \{f \in L^2(\mathbb{R}) : (x^2+1)f \in L^2(\mathbb{R})\} \\
\mathcal{D}(BA) &= \mathcal{D}(A) \underset{\neq}{\subset} L^2(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

D'où A est inversible avec $A^{-1} = B$.

Proposition 2.3.1

Si A et B sont deux opérateurs non bornés et inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.4 Opérateurs fermés sur un espaces de Hilbert

Ce Section introduit les notions fondamentales des opérateurs linéaires non bornés sur un espace de Hilbert H. Ces notions qui sont fondamentales, telles que la fermeture, les propriétés de l'adjoint, opérateurs symétriques, essentiellement auto-adjoints, la densité .

Définition 2.4.1 *:(Graphe d'un opérateur)*

Soient E et F deux espaces vectoriels et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to Im(A) \subset F$ un opérateur. Le graphe de A est le sous ensemble $G(A) \subset E \times F$ défni par:

$$G(A) = \{(\varphi, A\varphi) : \varphi \in \mathcal{D}(A)\}$$

Définition 2.4.2 *:(le produit scalaire et la norme du graphe d'un opérateur)*

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \to H_2$. Il est clair que:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_A = \langle \varphi, \psi \rangle_{H_1} + \langle A\varphi, A\psi \rangle_{H_2}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(A)$$

définie un produit scalaire dans le domaine $\mathcal{D}(A)$. La norme correspondant

$$\|\varphi\| = \sqrt{\|\varphi\|_{H_1}^2 + \|A\varphi\|_{H_2}^2}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(A).$$

est appelée la norme du graphe de l'opérateur A. Elle est équivalu à la norme

$$\|\varphi\|_A' := \|\varphi\|_{H_1} + \|A\varphi\|_{H_2}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(A).$$

dans $\mathcal{D}(A)$.

Théorème 2.4.1 *:(graphe fermé)*

Soient E et F deux espaces de Banach et Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire. On suppose que le garphe de A est fermé dans $E \times F$. Alors A est continu.

Remarque 2.4.1

On note par $\mathcal{C}(H)$ l'espace des opérateurs fermés sur H. et $\mathcal{C}_1(H)$ l'espace des opérateurs fermés à domaines denses, $\mathcal{C}_1(H) \subset \mathcal{C}(H)$.

En vertu du théorème du graphe fermé on sait que tout opérateur borné complètement défini sur H est à graphe fermé, d'où l'inclusion $\mathcal{L}(H) \subset \mathcal{C}(H)$. On verra par la suite que cette inclusion est en général stricte.

Proposition 2.4.1

Un sous-espace G de $H \oplus H$ est le graphe d'un opérateur si et seulement si:

$$((0, y) \in G) \Rightarrow y = 0)$$

Preuve. Voir[25]. ■

Définition 2.4.3 *:(Opérateurs fermés)*

L'opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé sur H si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $\mathcal{D}(A)$ convergente vers x dans H telle que $(Ax_n)_n$ converge vers y dans H alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$.

Proposition 2.4.2

Soient E et F deux espaces de Banach et $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire alors, les assertions suivantes sont équivalentes:

1) A est fermé.

2) $\forall (x_n) \subset \mathcal{D}(A)$ et $\{x_n \rightarrow x_0$ dans E, $Ax_n \rightarrow y_0$ dans $F\}$ alors: $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, $y_0 = Ax_0$.

3) $(\mathcal{D}(A), \|x\|'_{\mathcal{D}(A)})$ est complet.

Proposition 2.4.3

Soient E et F deux espaces de Banach et un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset E \rightarrow F$. Alors A est fermé si et seulement si son graphe $G(A)$ est un sous–espace fermé de $E \times F$.

Exemple 2.4.1

Soit A un opérateur non borné défini sur $H^1(]0,1[)$ avec $A = -i\frac{d}{dx}$, où $H^1(]0,1[)$ est l'espace de Sobolev d'indice 1.

$$H^1(]0,1[) := \{f \in L^2(]0,1[),\ f^{'} \in L^2(]0,1[)\}.$$

Alors A est un opérateur fermé.

Proposition 2.4.4

Si E et F deux espace de banach et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur fermé non borné, alors $\mathcal{D}(A)$ ne peut pas être fermé car: si $\mathcal{D}(A)$ est fermé, donc $\mathcal{D}(A)$ est un espace de banach, alors le théorème du graphe fermé implique que A est borné, d'où $\mathcal{D}(A)$ n'est pas fermé, en particulier $\mathcal{D}(A) \neq E$ car E est fermé .

2.4.1 Comparaison entre les opérateurs bornés et les opérateurs fermés

Notons soigneusement la différence entre les opérateurs continus et les opérateurs fermés.

Pour un opérateur continu A, la convergence de la suite (φ_n) implique la convergence de la suite $(A\varphi_n)$, et

$$\underset{n\to\infty}{lim} A\varphi_n = A(\lim_{n\to\infty}\varphi_n) = A(\varphi) \tag{2.4.1}$$

Pour un opérateur fermé A, la convergence de la suite (φ_n) n'implique pas la convergence de la suite $(A\varphi_n)$, mais si tous les deux (φ_n) et $(A\varphi_n)$ sont convergentes, alors (2.4.1) est vérifiée. Autrement dit:

L'opérateur A est fermé si:

$$\begin{cases} \varphi_n \in \mathcal{D}(A) \\ \varphi_n \to \varphi \\ A\varphi_n \to \psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi \in \mathcal{D}(A) \\ A\varphi = \psi \end{cases}$$

L'opérateur A est continus si:

$$\begin{cases} \varphi_n \in \mathcal{D}(A) \\ \varphi_n \to \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi \in \mathcal{D}(A) \\ A\varphi_n \to \psi \\ A\varphi = \psi \end{cases}$$

Proposition 2.4.5

L'opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermé sur H si et seulement si $(\mathcal{D}(A), \langle ., . \rangle_A)$ est un espace de Hilbert.

Preuve. Si A est fermé, soit $(x_n)_n$ une suite de cauchy dans $(\mathcal{D}(A), \langle ., . \rangle_A)$ alors $(x_n)_n$ et $(Ax_n)_n$ sont de Cauchy dans H, elle convergent donc respectivement vers x et y dans H, de plus $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$.

$$\|x_n - x\|^2_{\mathcal{D}(A)} = \|x_n - x\|^2_H + \|Ax_n - Ax\|^2_{H, n \to +\infty} \to 0$$

D'où $\mathcal{D}(A)$ est complet pour $\langle ., . \rangle_A$. Réciporoquement, si $(\mathcal{D}(A), \langle ., . \rangle_A)$ est complet, $(x_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}(A)$ convergente

vers x et $(Ax_n)_n$ convergente vers $_y$ dans H, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $(\mathcal{D}(A), \langle ., . \rangle_A)$ ainsi il existe z dans $\mathcal{D}(A)$ tel que

$$\underset{n \to +\infty}{lim} \|x_n - z\|_A = 0$$

Or,

$$\|x_n - z\|^2_A = \|x_n - z\|^2 + \|Ax_n - Az\|^2$$

D'où, $(x_n)_n$ converge vers z et $(Ax_n)_n$ converge vers Az dans H, comme H est separé alors $x = z$ et $Ax = Az = y$. ∎

Proposition 2.4.6

Soient E et F deux espaces de Banach et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur fermé. Alors A est borné si et seulement si $\mathcal{D}(A) = E$.

Preuve. En appliquant le théorème du graphe fermé. ∎

Lemme 2.4.1 *Tout opérateur borné $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ est fermé.*

Preuve. Supposons que $(u_n) \in \mathcal{D}(A)$ telle que $u_n \to u$ dans E, avec $Au_n \to v$ dans F. Comme A est borné, donc $\mathcal{D}(A) = E$. Alors d'aprés la continuité de A il est clair que $u \in \mathcal{D}(A)$ et $Au = v$. ∎

Remarque 2.4.2

Tout opérateur borné (linéaire ou non linéaire) a un graphe fermé.

Proposition 2.4.7

Soit A un opérateur non borné à domaine dense dans H alors:

1) Si $A \in \mathcal{C}(H)$, alors $ker(A)$ est fermé dans H.

2) Si $Im(A)$ est fermé dans H et il existe $C > 0$ tel que

$$\|Ax\| \geq C\|x\|, \forall x \in \mathcal{D}(A) \tag{2.4.2}$$

Alors A est fermé dans H.

Preuve. 1) est une conséquence immediate de la défintion (2.4.3).

En effet, si $\lim_{n\to+\infty}(x_n) = x$ .Où $x_n \in kerA$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $(Ax_n)_n$ converge vers 0 dans H. Comme A est fermé,

$$x \in \mathcal{D}(A) \; et \; Ax = 0 \text{ c'est à dire } x \in kerA$$

2) l'inégalité (2.4.2), montre que A est injectif donc inversible de $\mathcal{D}(A)$ dans ImA .

$\mathcal{D}(A^{-1}) = ImA$ est par hypothése fermé dans H de plus A^{-1} est borné de ImA dans $\mathcal{D}(A)$ car:

$$\left\|A^{-1}y\right\| \leq 1/c\|y\|, \forall y \in ImA.$$

D'ou, A^{-1} et aussi A sont fermés. ■

Théorème 2.4.2 *Tout opérateur A non borné inversible est fermé.*

Preuve. Soit A un opérateur non-borné inversible de domaine $\mathcal{D}(A)$:

On a:

$$A^{-1} : \mathrm{Im}\, A \to \mathcal{D}(A)$$

Soit $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{D}(A)$ tel que:

$$x_n \to x \; et \; Ax_n \to y$$

donc

$$A^{-1}y \leftarrow x_n = A^{-1}Ax_n \rightarrow x \ (car \ A^{-1} \ est \ born\acute{e}).$$

Alors

$$x = A^{-1}y \in \mathcal{D}(A) \ et \ Ax = AA^{-1}y = y.$$

■

2.4.2 Produits et sommes d'opérateurs fermés

En général le produit de deux opérateurs fermés n'est pas nécessairement fermé et ainsi pour la somme.

Exemple 2.4.2

Soit A un opérateur non-borné et fermé défini sur son domaine $\mathcal{D}(A)$, alors $0A$ n'est pas fermé car:

$$\mathcal{D}(0A) = \mathcal{D}(A) \ et \ (0A)x = 0, \ \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Pour $B = -A$ qui reste fermé, alors

$$A - A = 0_{\mathcal{D}(A)}$$

0 n'est pas fermé sur $\mathcal{D}(A)$.

Théorème 2.4.3

Soient A et B deux opérateurs fermés à domaine dense, alors:

1) BA est fermé si $\begin{cases} B \ est \ inversible \\ \quad ou \\ A \ est \ born\acute{e} \end{cases}$.

2)$B + A$ est fermé si B est borné(i.e $B \in B(H)$) .

Preuve. 1) On suppose que B est inversible (i.e $B^{-1} \in B(H)$) . Soit $(x_n)_n \subset \mathcal{D}(BA)$ tel que:

$$x_n \rightarrow x \ et \ BAx_n \rightarrow y$$

donc

$$\begin{aligned} BAx &\to y \Rightarrow B^{-1}BAx_n \to B^{-1}y; (car\ B^{-1}\ est\ born\acute{e}) \\ &\Rightarrow Ax_n \to B^{-1}y; (B^{-1}B \subset I) \end{aligned}$$

et puisque A est fermé alors:

$$x \in \mathcal{D}(A)\ et\ B^{-1}y = Ax \in \mathcal{D}(B)(carB^{-1} : \mathcal{D}(B) \to ImB)$$

d'où

$$\begin{cases} Ax \in \mathcal{D}(B) \\ x \in \mathcal{D}(A) \\ B^{-1}By = y = BAx \end{cases}$$

ce qui montre que BA est fermé.

Maintenant ou suppose que A est borné

Soit $(x_n)_n \subset \mathcal{D}(BA)$ telque:

$$x_n \to x\ et\ BAx_n \to y$$

Puisque A est fermé alors

$$Ax_n \to Ax\ et\ x \in \mathcal{D}(A)$$

Si on pose $z_n = Ax_n$ et $z = Ax$ et en utilisant la fermeture de l'opérateur B on trouve que

$$Bz_n \to Bz$$

C'est-à-dire

$$Ax \in \mathcal{D}(B)\ et\ y = BAx$$

donc BA est fermé.

2) Comme B est borné, alors

$$\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A)$$

Soit $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{D}(B+A)$ tel que:

$$x_n \to x\ et\ (B+A)x_n \to y$$

Puisque B est borné, alors

$$Bx_n \to Bx$$

d'où

$$y \leftarrow Bx_n + Ax_n \to Bx + Ax$$

$$Ax_n + Bx \to y$$

$$Ax_n \to y - Bx$$

or A est fermé, donc

$$y - Bx = Ax_n \ et \ x \in \mathcal{D}(x)$$

donc

$$(B + A)x = y \ et \ x \in \mathcal{D}(x)$$

C'est-à-dire $B + A$ est fermé. ■

2.4.3 Opérateurs fermables

Déifinitions et propriétés

Définition 2.4.4 *:(Opérateurs extension)*

On dit que $(B, \mathcal{D}(B))$ est une extension de $(A, \mathcal{D}(A))$ si $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $Bx = Ax$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, (Autrement dit,$G(A) \subset G(B)$).

Exemple 2.4.3

Soient $A_k\varphi = \varphi''$ avec $k = 1, 2, 3, 4$ des opérateurs différentiels dans $\mathcal{L}^2[0, 1]$ avec leurs domaines:

$$\mathcal{D}(A_1) = \{\varphi \in C^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\}$$

$$\mathcal{D}(A_2) = C^2([0, 1])$$

$$\mathcal{D}(A_3) = \{\varphi \in H^2([0, 1]) : f(0) = f(1) = 0\}$$

$$\mathcal{D}(A_4) = \{\varphi \in H^2([0, 1])\}$$

comme $H^2([0,1]) \subset C^2([0,1])$, alors on a

$$A_1 \subset A_2 \subset A_4.$$

A_4 est une extension de A_2 et A_2 est une extension de A_1 et

$$A_1 \subset A_3 \subset A_4.$$

A_4 est une extension de A_3 et A_3 est une extension de A_1

Définition 2.4.5 *:(Opérateurs fermables)*

Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \in E \to F$ est dit fermable s'il admet une extension fermée, i.e il existe un opérateur fermé $B : \mathcal{D}(B) \in E \to F$ tel que $A \subset B$.

Proposition 2.4.8

Soient E et F deux espaces normés et $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

1) A est fermable.

2) Pour toute suite (φ_n) de $\mathcal{D}(A)$ telle que $\varphi_n \to 0$ dans E et $A\varphi_n \to g$ dans F, on a alors: $g = 0$.

3) $G(A)$ est un graphe d'un opérateur linéaire (nécessairement fermé).

Définition 2.4.6 *:(Fermeture d'un opérateur)*

Soient E et F deux espaces normés. Si l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \in E \to F$ est fermable, alors sa fermeture est un opérateur noté par $\overline{A}$. L'opérateur $\overline{A}$ est la plus petite extension fermée de A.

L'opérateur A est défini par:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\overline{A}) = \{\varphi \in E : \exists(\varphi_n) \in \mathcal{D}(A), \varphi_n \to \varphi, A\varphi_n(cu)\}, \\ A\varphi = \underset{n\to\infty}{lim} A\varphi_n, \forall \varphi \in \mathcal{D}(A). \end{cases}$$

Proposition 2.4.9

1) Si $\overline{A} = A$, alors A est fermé.

2) Toute extension fermée de A est aussi une extension de $\overline{A}$.

Proposition 2.4.10

Soit $A : \mathcal{D}(A) \in E \to F$ un opérateur fermable. Alors $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$.

Soit A un opérateur non-borné, et B borné on dit que B commute avec A si: $BA \subset AB$.

Proposition 2.4.11

Si A est fermable, B fermé et $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset B$.

Preuve. $\overline{A}$ est une extension fermée de A. Soit B extension fermée de A.

$$A \subset B,\ G(A) \subset G(B) \Rightarrow \overline{G(A)} \subset \overline{G(B)} = G(B)$$

d'où:

$$\overline{A} \subset B$$

■

Exemple 2.4.4

$A : C([0,1]) \to \mathbb{R}$.

$Af = f'(0), \mathcal{D}(A) = C^1([0,1])$ alors A n'est pas fermable car: si

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{1}{n} sin(nt) \\ \|f_n\|_\infty &= \frac{1}{n} \to 0, \\ \|Af_n\|_\infty &= 1. \end{aligned}$$

Remarque 2.4.3 *Tout opérateur fermé est fermable mais l'inverse est faux.*

Exemple 2.4.5

$$A = \frac{d}{dt} : L^2[-1,1] \to L^2[-1,1].$$

$\mathcal{D}(A) = C^1([-1,1])$ n'est pas fermé mais fermable.

2.4.4 Exemples des opérateurs fermés et des opérateurs fermables

Exemple 2.4.6

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ défini par:

$$A\varphi = -\triangle f; \forall f \in \mathcal{D}(A)$$

où :

$$\mathcal{D}(A) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Clairement, A est fermable et sa fermeture donnée par:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\overline{A}) = H^2(\mathbb{R}^n) \\ \overline{A}\varphi = \underset{n\to\infty}{lim} Af_n = -\triangle f, \forall x \in \mathcal{D}(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Exemple 2.4.7

Soient $A_k\varphi(x) = if'(x)$ avec $k = 1, 2$ deux opérateurs différentiels dans $L^2[0,1]$ avec leurs domaines:

$D(A_1) = \{\varphi \in H^1([0,1]) : \varphi(0) = \varphi(1)\}$

$D(A_2) = \{\varphi \in H^1([0,1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$

Les deux opérateurs A_1 et A_2 sont fermés.

Exemple 2.4.8

Soient $A_k f(x) = f''(x)$ avec $k = 1, 2, 3, 4$ des opérateurs différentiels dans $L^2([0,1])$ avec leurs domaines:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_1) &= \{f \in C^2([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}. \\ \mathcal{D}(A_2) &= C^2([0,1]). \\ \mathcal{D}(A_3) &= \{f \in H^2([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}. \\ \mathcal{D}(A_4) &= H^2([0,1]). \end{aligned}$$

• Les deux opérateurs $A1$ et $A2$ ne sont pas fermés car on peut choisir une suite des fonctions $f_n \in C^2([0,1])$ telle que $f_n \to f$ et $f_n^{"} \to g$ dans $L^2([0,1])$, où g n'est pas continue. D'où f n'est pas de classe C^2, alors f n'appartient pas à ledomaine de A_1 ou A_2.

• Les deux opérateurs A_3 et A_4 sont fermés.

• Les deux opérateurs A_1 et A_2 sont fermables, avec $A_1 = A_3$, et $A_2 = A_4$.

2.5 Adjoint d'un opérateur non borné sur un espace de Hilbert

Définition 2.5.1 *:(Opérateur adjoint)*

Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire non borné sur H de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans H . Si l'application

$$x \to \langle Ax, y\rangle \, avec \; x \in \mathcal{D}(A)$$

est continue sur $\mathcal{D}(A)$ muni de la topologie induite par celle de H, elle possède par le théorème de Hahn-Banch une extension continue à H. il existe alors en vertu du théorème de représentation de Riesz un vecteur unique φ dans H tel que:

$$\forall x \in \mathcal{D}(x), \langle Ax, y\rangle = \langle x, \varphi\rangle \, , \text{ avec } \varphi = A^* y$$

L'opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H)$ est appelé adjoint de A dans H, qui vérifie la relationsuivante: pour tous $x, y \in H$.

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \, .$$

Lemme 2.5.1

Soit H un Hilbert, et l'application V définie par:

$$V : H \times H \to H \times H$$

$$(x, y) \to V(x, y) = (-x, y)$$

tel que $H \times H$ est muni de son produit scalaire usuel. Alors V est un opérateur linéaire unitaire et vérifie $V^2 = -I$. Il en resulte que pour toute partie $M \subset H \times H$

$$V(M^{\perp}) = (V(M))^{\perp}$$

Proposition 2.5.1

Soient A, B et AB des opérateurs non-bornés à domaines dense, Alors:

1) $A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$.

2) A^* est toujours fermé.

3) $A^* + B^* \subset (A+B)^*$.

4) $(A+B)^* = A^* + B^*$ si B est borné par exemple.

5) $B^*A^* \subset (AB)^*$.

6)$(AB)^* = B^*A^*$ si A est borné. (ou B est inversible)

Preuve. Voir[26]. ■

Proposition 2.5.2

Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur à domaine dense. Alors

1) A^* est fermé.

2) A est fermable si et seulement si $\mathcal{D}(A^*)$ est dense.

3) Si A est fermable alors $\overline{A} = A^{**}$ et $(\overline{A})^* = A^*$.

Preuve. Voir[1]. ■

2.5.1 Opérateurs symétriques et auto-adjoints

Définition 2.5.2 *(Opérateur symétrique)*

Un opérateur A dans un espace de Hilbert est dit symétrique si $A \subset A^*$ c'est-a-dire:

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*).Au = A^*u \ \ pour \ \ u \in \mathcal{D}(A).$$

Autrement dit:

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \forall y \in \mathcal{D}(A) : \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \, .$$

Définition 2.5.3 *(opérateur auto-adjoint)*

On dit qu'un opérateur A à domaine dense est auto-adjoint si $A^* = A$, i.e:

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) \ et \ Ax = A^*x, \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Exemple 2.5.1

1) Soit D l'opérateur différentiel défini de $C_0(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ par:

$$D\varphi(x) = i\frac{d\varphi(x)}{dx} = i\varphi^{'}(x)$$

(où $C_0(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continue sur $\mathbb{R}$ s'annulent à l'infini). Alors l'opérateur D est un opérateur auto-adjoint En effet

$$\begin{aligned}
\langle D\varphi, \psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} i\frac{d\varphi(x)}{dx}\overline{\psi(x)}dx \\
&= -i\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\frac{d\overline{\psi(x)}}{dx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\left[\overline{i\frac{d\psi(x)}{dx}}\right]dx \\
&= \langle \varphi, D\psi\rangle
\end{aligned}$$

2) Soient $A_kf(x) = f^{''}(x)$ avec $k = 1, 2, 3, 4, 5$ des opérateurs différentiels dans $L^2([0,1])$ avec leurs domaines:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(A_1) &= \{f \in C^2([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}, \\
\mathcal{D}(A_2) &= \{C^2([0,1])\}, \\
\mathcal{D}(A_3) &= \{f \in H^2([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}, \\
\mathcal{D}(A_4) &= \{H^2([0,1])\}, \\
\mathcal{D}(A_5) &= \{f \in H^2([0,1]) : f(0) = f(1) = f^{'}(0) = f^{'}(1) = 0\},
\end{aligned}$$

Pour l'opérateur A_1, si $f \in \mathcal{D}(A_1)$ on obtient:

$$\begin{aligned}
\langle A_1f, g\rangle &= \int_0^1 f^{''}(x)\overline{g(x)}dx \\
&= f^{'}(1)\overline{g(1)} - f^{'}(0)\overline{g(0)} - \int_0^1 f^{'}(x)\overline{g^{'}(x)}dx \ (I.P.P) \\
&= f^{'}(1)\overline{g(1)} - f^{'}(0)\overline{g(0)} - f(1)\overline{g^{'}(1)} + f(0)\overline{g^{'}(0)} + \int_0^1 f(x)\overline{g^{''}(x)}dx \ (I.P.P) \\
&= f^{'}(1)\overline{g(1)} - f^{'}(0)\overline{g(0)} + \langle f, A_1g\rangle .
\end{aligned}$$

Pour obtenir

$$\langle A_1f, g\rangle = \langle f, A_1g\rangle , \ \forall f \in \mathcal{D}(A_1),$$

le terme $f'(1)\overline{g(1)} - f'(0)\overline{g(0)}$ doit ètre nul, i.e $g(0) = g(1) = 0$, et il suffut que $g \in H^2([0,1])$, donc

$$\mathcal{D}(A_1^*) = \{g \in H^2([0,1]) : g(0) = g(1) = 0\} = \mathcal{D}(A_3).$$

alors

$$A_1^* = A_3.$$

comme $\mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(A_3)$ et $A_1 f = A_3 f, \ \ \forall f \in \mathcal{D}(A_1)$, donc $A_1 \subset A_3$. Alors A_1 est symétrique mais n'est pas auto-adjoint.

En faisant les mémes étapes avec les opérateurs $A_2; A_3, A_4$ et A_5, on obtient

- $A_3^* = A_3$, alors A_3 est auto-adjoint.
- $A_2^* = A_5$, comme A_5 n'est pas une extension de A_2, alors A_2 n'est ni symétrique ni auto-adjoint.
- $A_4^* = A_5$, comme A_5 n'est pas une extension de A_4, alors A_4 n'est ni symétrique ni auto-adjoint.
- $A_5^* = A_4$, comme $A_5 \subset A_4$, alors A_5 est symétrique mais n'est pas auto-adjoint

Proposition 2.5.3

1) Un opérateur symétrique A est toujours fermable puisque $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$ est dense.

2) Si A est un opérateur symétrique alors A^* et A^{**} sont deux extensions fermées de A et $A \subset A^* \subset A^{**}$.

3) Si A est un opérateur symétrique fermée alors $A = A^* \subset A^{**}$.

4)Si A est un opérateur auto-adjoint alors : $A = A^* = A^{**}$.

Remarque 2.5.1 *Tout opérateur auto-adjoint est normal.*

Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints et $A \subset B$ alors $A = B$.

Théorème 2.5.1

Soit A un opérateur symétrique. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1) A est auto-adjoint.

2) A est fermé et $ker(A^* \pm i) = 0$

3)$Im(A \pm i) = H$

Preuve. [13] ■

Chapitre 3

Etude de l'opérateur de Nadir

Ce chapitre introduit les notions fondamentales de l'opérateur de Nadir sur un espace de Hilbert H. Ces notions qui sont fondamentales, telles que la fermeture,l'anti-autoadjoint,

la compacité et la densité.

Remarque 3.0.2 *Toute combinaison linéaire d'opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Proposition 3.0.4

A compact, B et C linéaires continus, alors AB et CA sont compacts (espaces compatibles avec l'existence du produit).

3.1 Operateur de Nadir borné

Théorème 3.1.1 *[27].*

Soient A et B deux opérateurs bornés dans un espace de Hilbert H.

Si l'un des deux est compact, alors l'opérateur $N = AB^* - BA^*$ l'est aussi.

Preuve. Supposons que A est compact, B borné

$$A \text{ est compact} \Rightarrow A^*\text{compact(d´après le Théoréme de Schauder)}$$
$$\Rightarrow AB^* \text{ et } BA^* \text{ sont compacts} \Rightarrow N \text{ est compact.}$$

Les même étapes pour le deuxième cas (B est compact, A borné). ■

Remarque 3.1.1

Soit A un opérateur borné défini sur un espace de Hilbert H . A est appelé autoadjoint si $A = A^*$, et anti-autoadjoint si $A = -A^*$.

Théorème 3.1.2 *[27].*

Soient A et B deux opérateurs bornés dans un espace de Hilbert H.
L'opérateur $N = AB^* - BA^*$ est anti-autoadjoint.
Preuve. En effet,

$$\begin{aligned} N^* &= (AB^* - BA^*)^* \\ &= (AB^*)^* - (BA^*)^* \\ &= BA^* - AB^* \\ &= -(AB^* - BA^*) \\ &= -N \end{aligned}$$

D'où, l'opérateur de Nadir N est un opérateur anti-autoadjoint. ■

Corollaire 3.1.1 *[27].*

Pour tous les opérateurs bornés A et B, on a:
1) L'opérateur $N = AB^* - BA^*$ est normal.
2) L'opérateur de Nadir n'est jamais égal à l'identité I.
3) L'opérateur $-N^2$ est positif pour tous les vecteurs non nulles x en H.
Preuve. 1) En effet, cela résulte du théorème précédent

$$\begin{aligned} NN^* &= (AB^* - BA^*)(AB^* - BA^*)^* \\ &= N(-N) \\ &= (-N)N \\ &= N^*N \end{aligned}$$

2) Supposons que

$$N = AB^* - BA^* = I$$

alors

$$N^* = (AB^* - BA^*)^* = I^* = I$$

Par conséquent, de la relation $N^* = -N$, on a

$$I = -I.$$

Contradiction.

3) En effet:

$$-N^2 = -NN = N^*N$$

et N^*N est un opérateur positif car

$$\begin{aligned} \langle N^*Nx; x\rangle &= \langle Nx; Nx\rangle \\ &= \|Nx\|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

■

Exemple 3.1.1

Soient A et B deux opérateurs bornés dans un espace de Hilbert H tel que:

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \ et\ B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \ et\ B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 3 \end{pmatrix}.$$

alors:

$$\begin{aligned} N &= AB^* - BA^*. \\ N &= \left[\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 3 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} 4i & -1-4i \\ 1-4i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et $N^* = BA^* - AB^*$.

$$\begin{aligned}
N^* &= \left[\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 3 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} -4i & 1+4i \\ -1+4i & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4i & -1-4i \\ 1-4i & 0 \end{pmatrix} = -N
\end{aligned}$$

alors l'opérateur $AB^* - BA^*$ est un opérateur anti-autoadjoint.

Exemple 3.1.2

Soient A et B deux opérateurs bornés dans un espace de Hilbert $H = L^2([0,1])$ tel que:

$$\begin{aligned}
A &: H \to H \\
\varphi &\to A\varphi(x) = \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt. \\
B &: H \to H \\
\varphi &\to B\varphi(x) = \int_0^x x\varphi(t)\,dt
\end{aligned}$$

Les adjoints des opérateurs A et B :

$$\begin{aligned}
A^*\varphi(x) &= \int_0^x (t-x)\,\varphi(t)\,dt. \\
B^*\varphi(x) &= \int_0^x t\varphi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

alors:

$$\begin{aligned}
N &= AB^* - BA^*. \\
&= \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt \int_0^x t\varphi(t)\,dt - \int_0^x x\varphi(t)\,dt \int_0^x (t-x)\,\varphi(t)\,dt \\
&= \int_0^x ((x-t)\,t)\varphi(t)^2\,dt - \int_0^x (x\,(t-x))\varphi(t)^2\,dt \\
&= \int_0^x ((x-t)\,t - x\,(t-x))\varphi(t)^2\,dt \\
&= \int_0^x (x^2-t^2)\varphi(t)^2\,dt
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
N^* &= BA^* - AB^*. \\
&= \int_0^x x\varphi(t)\,dt \int_0^x (t-x)\,\varphi(t)\,dt - \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt \int_0^x t\varphi(t)\,dt \\
&= \int_0^x (x\,(t-x))\varphi(t)^2\,dt - \int_0^x ((x-t)t)\varphi(t)^2\,dt \\
&= \int_0^x (x\,(t-x) - (x-t)t)\varphi(t)^2\,dt \\
&= \int_0^x (-x^2+t^2)\varphi(t)^2\,dt \\
&= -\int_0^x (x^2-t^2)\varphi(t)^2\,dt \\
&= -N
\end{aligned}$$

alors l'opérateur $AB^* - BA^*$ est un opérateur anti-autoadjoint.

Corollaire 3.1.2 *Si H est un espace de Hilbert de dimension finie, alors l'opérateur $N - I$ est inversible.*

3.2 Opérateur de Nadir non borné

L'étude de l'opérateur de Nadir dans le cas non borné est diffcile par apport au cas borné car si on parle d'adjoints, les résultats ne sont pas meilleurs. Par exemple, si A et B sont deux opérateurs non bornés densément définis, on a généralement $(AB)^* \neq B^*A^*$, $(A+B)^* \neq A^* + B^*$ et $A^{**} \neq A$, De plus, le produit AB et la somme $A+B$ de deux opérateurs fermés n'est pas généralement fermés.

Théorème 3.2.1

Si A est un opérateur fermé alors A^* est densément défini et $A^{**} = A$.

Corollaire 3.2.1 *[27].*

Soit A un opérateur non borné. Si

1) B est non borné, BA^* est densément défini et A est inversible, ou

2) B est borné et A est fermé.

Alors

$$(BA^*)^* = AB^*$$

Preuve. 1) Puisque A est inversible, A^* l'est aussi, alors

$$(BA^*)^* = A^{**}B^*$$

De plus, l'opérateur A est fermé car, il est densément défini et inversible, alors

$$(BA^*)^* = AB^*$$

2) En effet,

$$\begin{aligned}(BA^*)^* &= A^{**}B^* \text{ car } B \text{ est borné}\\ &= AB^* \text{ car } A \text{ est fermé}\end{aligned}$$

■

Proposition 3.2.1 *[27].*

Soient A et B deux opérateurs non bornés. Si B est fermé et $\operatorname{Im}(B^*) \subset \mathcal{D}(A)$, alors AB^* est un opérateur densément défini.

Preuve. Nous avons $\operatorname{Im}(B^*) \subset \mathcal{D}(A)$ alors $\mathcal{D}(AB^*) = \mathcal{D}(B^*)$

$$(\mathcal{D}(AB^*) = \{x \in \mathcal{D}(B^*) : B^*x \in \mathcal{D}(A)\})$$

mais B^* est densément défini (puisqe B est fermé), alors AB^* l'est aussi. ■

Proposition 3.2.2 *[27].*

Soient A et B deux opérateurs non bornés et inversibles. Si BA^* est densément défini, alors AB^* l'est aussi.

Preuve. En effet, A est inversible et BA^* est densément défini alors,

$$(BA^*) = AB^*$$

D'autre part, on à BA^* est fermé car B est un opérateur fermé et inversible. Par conséquent AB^* est aussi densément défini. ■

Théorème 3.2.2 *[27].*

Soient A et B deux opérateurs non bornés.

Si
$$\begin{cases} \text{1) } A \text{ et } B \text{ sont deux opérateurs inversibles,et } \mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{D}(A) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{ou} \\ \text{2)} A \text{ est fermé}, B \text{ est bornéet inversible} \end{cases}$$

Alors AB^* et BA^* sont densément définis. De plus $(AB^*)^* = BA^*$ et $(BA^*)^* = AB^*$ simultanément.

Preuve. 1)Puisque B est fermé et $\operatorname{Im}(B) \subset \mathcal{D}(A)$ alors AB^* est densément défini par la proposition (3.2.1), et puisque A et B sont inversibles alors BA^* est aussi densément défini par la proposition (3.2.2). De plus puisque A et B sont inversible alors $(AB^*)^* = BA^*$ et $(BA^*)^* = AB^*$ simultanément.

2) Nous avons B est un opérateur borné et A fermé alors $(BA^*)^* = AB^*$ d'après le corollaire (3.2.1), mais BA^* est fermé, d'où AB^* est densément défini.

D'autre part, B est inversible alors $(AB^*)^* = BA^*$. ■

Remarque 3.2.1 *[27].*

Rappelons qu'un opérateur non borné A défini sur un espace de Hilbert H est appelé hermitien si $A \subset A^*$, et anti-hermitien si $A \subset -A^*$.

Théorème 3.2.3

Soient A et B deux opérateurs non bornés et inversibles. Si

1) AB^* est densément défini, ou

2) $\operatorname{Im}(B^*) \subset \mathcal{D}(A)$

Alors l'opérateur $N = AB^* - BA^*$ est anti-hermitien.

Preuve. 1) Puisque A et B sont des opérateurs non bornés et inversibles et AB^* est densément défini, alors BA^* est aussi densément défini par Proposition (3.2.2).

Nous avons toujours $(BA^*)^* - (AB^*)^* \subset (BA^* - AB^*)^*$. Mais $(AB^*)^* = BA^*$ et $(BA^*)^* = AB^*$ d'après le théorème (3.2.2). On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} N &= AB^* - BA^* \\ &= (AB^*)^* - (BA^*)^* \\ &\subset (BA^* - AB^*)^* \\ &= -(AB^* - BA^*)^* \\ &= -N^*. \end{aligned}$$

Donc N est un opérateur anti-hermitien.

2) Puisque A et B sont deux opérateurs non bornés et inversibles et $\mathrm{Im}(B^*) \subset \mathcal{D}(A)$ alors AB^* et BA^* sont densément définis, $(AB^*)^* = BA^*$ et $(BA^*)^* = AB^*$ par le Théorème(3.2.2).

Avec les mêmes étapes de la première partie, on trouve: $N \subset -N^*$. ■

Théorème 3.2.4 *:(Théorème de Fuglede-Putnum-Mortad).*

Soient A et B deux opérateurs non bornés normaux et inversibles, alors

$$AB = BA \Rightarrow AB^* = B^*A \text{ et } BA^* = A^*B$$

Preuve. Voir[18]. ■

Corollaire 3.2.2 *[27].*

Soient A et B deux opérateurs non bornés normaux et inversibles. Si $AB = BA$, alors AB^* (et BA^*) est normal.

Preuve. Il est clair que AB^*(et BA^*) est un opérateur fermé, reste à prouver que

$$(AB^*)(AB^*)^* = (AB^*)^*(AB^*)$$

En effet,

$$\begin{aligned} (AB^*)(AB^*)^* &= AB^*BA^* (\text{car } B \text{ est inversible}) \\ &= ABB^*A^* (\text{puisque } B \text{ est normal}) \\ &= BAA^*B^* (\text{car } A \text{ et } B \text{ sont inversibles et } AB = BA) \\ &= BA^*AB^* (\text{comme } A \text{ est normal}) \\ &= (AB^*)^*(AB)^* \end{aligned}$$

D'où AB^* est normal.

Pour la normalité de BA^* en effet,

puisque AB^* est normal, alors $(AB^*)^*$ est aussi normal. Cela signifie que BA^* est normal.

■

3.2.1 Etude de la fermeture de l'opérateur de Nadir

Dans cette section, on présente des conditions suffisantes pour assurer la fermeture, de l'opérateur non borné $N = AB^* - BA^*$ dans un espace de Hilbert H.

Théorème 3.2.5

Soient A et B deux opérateurs non bornés tel que $AB = BA$. Si A est inversible, B est fermé et $\mathcal{D}(BA^{-1}) \subset \mathcal{D}(A)$, alors $A + B$ est fermé dans $\mathcal{D}(B)$.

Preuve. Voir[18]. ■

Théorème 3.2.6

Soient A et B deux opérateurs non bornés et inversibles tel que $AB = BA$. Si $\mathcal{D}(A^*(B^*)^{-1}) \subset \mathcal{D}(B^*)$, alors $(A + B)^* = A^* + B^*$.

Preuve. Voir[18]. ■

Maintenant, nous étudions l'opérateur $S - S^*$; avec S est un opérateur non borné, densément défini et inversible, puis nous écrivons l'opérateur de Nadir sous la forme $S - S^*$.

Si on remplace AB^* par S et BA^* par S^*, on constate que les deux conditions $\mathcal{D}(BA^{-1}) \subset \mathcal{D}(A)$ et $\mathcal{D}(A^*(B^*)^{-1}) \subset \mathcal{D}(B^*)$ des théorèmes (3.2.5) et (3.2.6) sont équivalentes c'est à dire:

$$\mathcal{D}(BA^*(AB^*)^{-1}) \subset \mathcal{D}(AB^*) \Rightarrow \mathcal{D}(S^*S^{-1}) \subset \mathcal{D}(S)$$

et

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{D}(BA^*((BA^*)^*)^{-1}) \subset \mathcal{D}(BA^*)^*\right] \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{D}(S^*(S^{**})^{-1}) \subset \mathcal{D}(S^{**}) \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{D}(S^*S^{-1}) \subset \mathcal{D}(S) \text{ car } S \text{ est fermé.} \end{aligned}$$

Donc on peut écrire cette proposition.

Proposition 3.2.3 *[27].*

Soit S un opérateur non borné, normal et inversible. Si $\mathcal{D}(S^*S^{-1}) \subset \mathcal{D}(S)$ alors

1) $S - S^*$ est fermé dans $\mathcal{D}(S^*)$.

2) Si $S - S^*$ est densément défini, alors il est anti-autoadjoint.

Preuve. 1) Evident.

2) En effet

$$\begin{aligned}(S - S^*)^* &= S^* - S^{**} \\ &= S^* - S \text{ car } S \text{ est fermé.} \\ &= -(S - S^*)\end{aligned}$$

D'où $S - S^*$ est un opérateur anti-autoadjoint. ■

L'hypothèse $\mathcal{D}(S^*S^{-1}) \subset \mathcal{D}(S)$ ne peut pas simplement être abandonné. En tant que contre exemple, soit S un opérateur densément défini, auto-adjoint et inversible avec le domaine $\mathcal{D}(S) \underset{\neq}{\subset} H$ où H est un espace de Hilbert complexe. Alors $S - S^* = 0$ dans $\mathcal{D}(S)$ n'est pas fermé. De plus, S est un opérateur normal (parce qu'il est auto-adjoint). Mais

$$\mathcal{D}(S^*S^{-1}) = \mathcal{D}(SS^{-1}) = \mathcal{D}(I) = H \nsubseteq \mathcal{D}(S)$$

Théorème 3.2.7 *[27].*

Soient A et B deux opérateurs non bornés tel que:

$$\mathcal{D}(BA^*(AB^*)^{-1}) \subset \mathcal{D}(AB^*).$$

alors l'opérateur de Nadir est fermé dans $\mathcal{D}(AB^*)$ si,

1) B est inversible, AB^* est normal et inversible, ou

2) A et B sont deux opérateurs normaux et inversibles tel que AB^* est densément défini et $AB = BA$.

Si de plus N est un opérateur densément défini, alors il est anti-autoadjoint.

Preuve. 1) Puisque B est inversible et AB^* densément défini (car AB^* est normal), alors $(AB^*)^* = BA^*$ par le corollaire (3.2.1), cela signifie que

$$N = AB^* - BA^* = AB^* - (AB^*)^*,$$

alors par la proposition (3.2.3), N est un opérateur fermé dans $\mathcal{D}(BA^*)$.

2) A et B sont deux opérateurs inversibles d'après la Proposition (3.2.2). Et puisque $AB = BA$, l'opérateur AB^* et aussi normal et inversible par le Corollaire (3.2.2). D'où N est un opérateur fermé dans $\mathcal{D}(BA^*)$ d'après 1.

Puisque $N = AB^* - (AB^*)^*$ alors il est anti-autoadjoint par la Proposition (3.2.3). ■

Dans le Théorème (3.2.7), si B est borné alors

$$\mathcal{D}(BA^*(AB^*)^{-1}) = \mathcal{D}(A^*(AB^*)^{-1}).$$

et

$$\mathcal{D}(BA^*) = \mathcal{D}(A^*)$$

et par corollaire (3.2.1), on peut écrire le prochaine corollaire.

Corollaire 3.2.3 *[27].*

Soit A un opérateur non borné et B un opérateur borné tel que AB^* est normal et inversible, si $\mathcal{D}(A^*(AB^*)^{-1}) \subset \mathcal{D}(AB^*)$ alors l'opérateur $N = AB^* - BA^*$ est fermé dans $\mathcal{D}(A^*)$ si

1) B est inversible, ou

2) A est fermé

Preuve.

1) Clair, d'après le théorème précédent.

2) Puisque B est borné et A fermé $(BA^*)^* = AB^*$, alors

$$N = AB^* - BA^* = (BA^*)^* - BA^*$$

Donc N est un opérateur fermé dans $\mathcal{D}(A^*)$ d'après la Proposition (3.2.1). ■

Conclusion

Le présent travail a permit de traiter la normalité de l'opérateur de Nadir non borné, car la fermeture est une condition nécessaire pour la normalité d'un opérateur non borné. Si A et B sont deux opérateurs non bornés tel que $\mathcal{D}(BA^*(AB^*)^{-1}) \subset \mathcal{D}(AB^*)$, alors l'opérateur de Nadir est fermé dans $\mathcal{D}(AB^*)$ si,

· B est inversible, AB^* est normal et inversible, ou

· A et B sont deux opérateurs normaux et inversibles à gauche (ou à droite) tel que AB^* est densément défini et $AB = BA$.

Les perspectives de recherche dans le domaine traité ici dans cette mémoire sont nombreuses, on peut citer quelques unes.

· Quelle est la caractérisation du spectre de l'opérateur $N = AB^* - BA^*$?

· Généralisation de l'opérateur de Nadir.

Bibliographie

[1] Z. Ammari, Analyse microlocale et théorie spectrale (Master 2) perso.univ-rennes1.

[2] G.Aubrun, Théorie des Opérateurs, M1 Mathématiques, Université de la Réunion.

[3] B.Bendhia et P.Joly, Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints et application à l'étude des ondes guidées, Cours MAE 21.

[4] H.Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et application, Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[5] H.Chebli, Analyse Hilbertienne, Centre publication universitaire, Tunis, 2001.

[6] J. Charles, M. Mbekhta and H. Queelec, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs, Dunod, Paris, 2010

[7] C. Cherifa, Sur le théorème de Fuglede-Putnam (Mémoire magister, Université D'Oran Es-Senia), 2011.

[8] John B. Conway, A Course in Functional Analysis, Springer Verlag, New YorkBerlin Heidelberg Tokyo, 1985.

[9] L. Debnath et P. Mikusinski , Hilbert spaces with applications, Orlando, 1998.

[10] Aziz El Kacimi Alaoui Eléments d'intégration et d'analyse fonctionnelle.

[11] E. Fricain, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs (cours et exercices) Master (mathématiques pures), 2009/2010.

[12] J. K. Hunter et B. Nachtergaele, Applied Analysis, Californie, 2000.

[13] S. Goldberg, Unbounded linear operators. Mc Graw Hill, New York, 1966.

[14] A.Khelfaoui, les opérateurs de fredholm, memoire de master, université de saida,2013.

[15] M. Loss, About closed operators, Géorgie.

[16] P.Lévy-Bruhl, Introduction a la theorie spectrale, Paris, 2003.

[17] M.Mbekhta, Résolvant généralisé et théorie spectrale, J. Operator theory 21(1989),69-105.

[18] M.H. Mortad, The sum of two unbounded linear operators, closedness, self adjointness and normality, arXiv :1203.2545v5[math:FA], 2012.

[19] M.Nadir, Cours d'analyse fonctionnelle, Université de M'sila 2004.

[20] M.Nadir, opérateurs continus, cours d'analyse fonctionnelle sur le site web(www.mostefanadir.com), 2017

[21] O. Noura, Spectre étendu d'un opérateur et quelques applications (Mémoire magister, Université Hamma Lakhdar D'Eloued), 2014-2015.

[22] W. Rudin, Function theory in the unit ball of Cn, Springer-Verlag, 1980.

[23] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1991 (2nd edition).

[24] L. Saint-Raymond Université Paris VI and DMA Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.

[25] K. Schmudgen, Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Spaces, USA, 2001.

[26] K. Schmudgen, Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space, Science+Business Media Dordrecht, 2012.

[27] A.Smati. Etude des conditions entre les opérateurs compacts, normaux et positifs.Université de M'sila 2018.

ملخص:

في ميكانيكا الكم يوجد مؤثرمهم يكتب على الشكل $N=AB^*-BA^*$ (حيث B و A مؤثرين محدودين أوغير محدودين نطاقهما كثيف و A^* هو قرين A) هذا المؤثر يسمى مؤثر نذير. وفي هذه المذكرة قمنا بدراسة خصائصه كالتراص عندما يكون محدودا, ولأن الكثير من المؤثرات في ميكانيكا الكم غير محدودة قمنا بتوسيع البحث و قدمنا شروطا كافية تجعل مؤثر نذير غير المحدود مغلقا, هذه الدراسة مهمة جدا لأن الانغلاق شرط ضروري لدراسة ناظمية.

الكلمات المفتاحية *: المؤثرات الناظمية، المؤثرات المتراصة، مؤثر القرين الذاتي، المؤثرات غير المحدودة و المؤثرات المغلقة، مؤثر نذير.*

Résumé

Dans la mécanique quantique ,il existe un opérateur important écrit sous forme $N=AB^*-BA^*$(tel que A et B sons des opérateurs bornés ou non bornés densément définis et A^* est l'adjoint de A), cet opérateur est appelé Opérateur de Nadir. Dans ce mémoire nous avons étudié ses caractéristiques comme la compacité dans le cas borné. Et comme plusieurs opérateurs dans la mécanique quantique ne sons pas bornés, nous avons enrichi notre recherche dans le cas non borné en présentant quelques conditions suffisantes qui assurent la fermeture de l'opérateur de Nadir non borné. Cette étude est plus importante car la fermeture est une condition nécessaire pour étudier la normalité d'un opérateur.

***Mots clés**: Opérateurs normaux , Opérateur auto adjoint, Opérateurs non bornés, Opérateurs fermés, Opérateur de Nadir.*

Abstract

In Quantum mechanics, there exist an important operator written in the form $N=AB^*-BA^*$(such that A and B are bounded or unbounded densely defined operators and $A^*$is the adjoint of A). This operator is called Nadir's Operator. In this thesis, we have studied its characteristics as compactness and normality in the bounded case. And as several operators in quantum mechanics are not bounded, we have enriched our research in the unbounded case by presenting some sufficient conditions that ensure the closure of unbounded Nadir's operator. This study is more important because the closing is a condition necessary to study the normality of an operator.

***Keywords:** Normal operater, Selfadjoint operator, unbounded operator, Closed operator, Nadir's operator.*