



N° d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Université de M'sila
Faculté des Sciences
Département de Physique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

Achour Mohamed

THEME

_____◇_____

Etude le phénomène de la brisure spontanée de
La symétrie (Le cas du modèle standard) dans l'espace non
commutatif

_____◇_____

Soutenue le : 24/06/2013

Devant le jury composé de :

M. DEBABI	MAA Univ. de M'sila	Président
A. MAIRECHE	MCA Univ. de M'sila	Rapporteur
S. ZAIM	MCA Univ. de Batna	Examineur

Promotion Juin 2013

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Avant-propos

Mes remerciements vont tout premièrement, à **DIEU** le tout puissant de m'avoir donné courage et patience durant toutes ces années d'études.

Je suis heureux d'exprimer à Monsieur le Docteur **Abdelmajid MAIRECHE**, Doyen de la Faculté des sciences, ma gratitude pour la confiance qu'il m'a accordé. Je le remercie d'avoir accepté la direction de ce travail ainsi que pour sa disponibilité et pour ses conseils très éclairés.

Mes remerciements et mon grand respect s'adressent également à Monsieur **Mourad DEBABI**, Maître de Conférences et vice directeur de département de Physique à l'Université de M'sila, qui a eu l'amabilité d'accepter de faire partie de mon jury et d'avoir examiné mon travail.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à Monsieur **Slimane ZAIM**, Maître de Conférences à l'Université de Batna, qui a accepté de se déplacer pour participer à mon jury et de présider le Jury de soutenance.

Je tiens à remercier, Monsieur **Mounir BOUSSAHEL**, Pour m'avoir guider, ses nombreux encouragements et ses conseils qu'il m'a prodigué le long moment d'étude, et pour ses orientations scientifiques.

Je tiens également à remercier vivement Mme **Ouahiba MEBARKI**, Mme. **Sihem KALLI** et Mme. **Essma REDOUANE**, pour leurs conseils judicieux et pour les passionnantes discussions que nous avons eues ensemble.

Je souhaite également remercier tous les enseignants de département de Physique ayant assurés mes années d'études.

Aussi, je remercie tous mes collègues du Département de Physique pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté.

Enfin, je ne saurais jamais suffisant remercier **mon père et ma mère, mes frères et mes sœurs**, que je porte toujours avec moi dans ma pensée. Sans leurs confiances immenses en moi, sans leurs aides et leurs amours, je n'aurais pas pu aller au bout de mes projets.

Mohamed ACHOUR

Dédicaces

À ma chère mère,

*la personne qui a beaucoup sacrifié pour moi sans elle je n'aurais eu la volonté
d'atteindre ce niveau ;*

*À qui j'ai appris le sens la persistance et l'ambition. À qui reste toujours
la source du don infini. À qui m'a éduqué l'amour du travail et la patience pour
obtenir le vœux, à mon cher père que Dieu le tout puissant prolonge son age.*

À tous mes frères : Khaled, Lazhar, Ali, Adnane. À tous mes sœurs.

À mes collègues de département de physique promotion 2012-2013

À tous mes amis.

...je dédie ce modeste travail

Mohamed ACHOUR

TABLE DE MATIERE

Introduction générale -----	2
Objectifs -----	3
Présentation du mémoire -----	3

CHAPITRE I

THEORIE DE JAUGE DES INTERACTIONS ELECTROFAIBLE DANS L'ESPACE ORDINAIRE

I-1-Introduction -----	5
I-2-La théorie de jauge dans l'espace ordinaire -----	5
I-2-1-Rappelle sur les groupes -----	6
I-2-1-1- Groupe de Lie (unitaire uni modulaire) -----	7
I-2-1-2-L'algèbre de Lie -----	8
I-2-1-3- L'algèbre du groupe unitaire uni modulaire (spéciale SU(2)) -----	8
I-2-2-Symétrie de jauge non abélienne (cas de SU(2)) -----	10
I-2-2-1-Etude la symétrie globale dans ce cas (α est constante) -----	11
I-2-2-2-Etude la symétrie locale -----	12
I-3-La théorie électrofaible SU(2) $\times$ U(1) dans l'espace ordinaire -----	15
I-3-1-Introduction sur les Interactions électromagnétiques -----	15

I-3-2- Introduction sur les Interactions faibles -----	16
I-3-3-La théorie électrofaible $SU(2) \times U(1)$ -----	18
I-3-4-La brisure spontanée de la Symétrie $SU(2) \times U(1)$ -----	21
I-4-Conclusion -----	24

CHAPITRE II

FORMALISMES MATHÉMATIQUES DE L'ESPACE NON COMMUTATIF

II-1-Introduction -----	26
II-2-L'espace non commutatif -----	26
II-3- Le produit star -----	27
II-3-1-La formule de Moyal-Weyl -----	27
II-3-2-Propriétés du produit star -----	28
II-4-Les transformations de jauge non commutatif -----	29
II-4-1-Rappelle sur les transformations dans l'espace ordinaire -----	29
II-4-2-Les transformations non commutatif -----	31
II-5-Les transformations des champs dans l'espace non commutatif -----	32
II-5-1-Les champs -----	34
II-5-2-Le potentiel de jauge -----	35

II-6-Conclusion	36
-----------------	----

CHAPITRE III

APPLICATIONS DE L'ESPACE NON COMMUTATIF SUR MODELE

ELECTROFAIBLE

III-1-Introduction	38
--------------------	----

III-2-Rappelle sur les transformations de jauge ordinaire	38
---	----

III-3-Rappelle sur la théorie électrofaible	39
---	----

III-4-Les transformations des jauges dans l'espace non commutatif	40
---	----

III-5- La théorie électrofaible $SU(2) \times U(1)$ dans l'espace non commutatif	42
--	----

III-5-1-Lagrangien de modèle électrofaible $SU(2) \times U(1)$	42
--	----

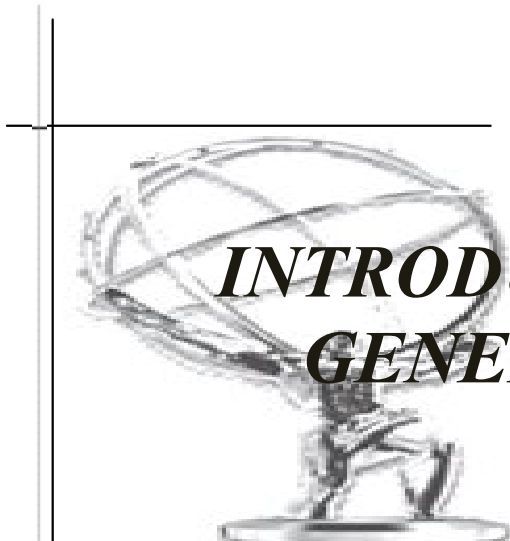
III-5-2-La brisure spontanée de la Symétrie $SU(2) \times U(1)$	46
---	----

III-6-Conclusion	48
------------------	----

Conclusion générale	50
---------------------	----

Annexe	51
--------	----

Références bibliographiques	57
-----------------------------	----



INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale :

Le début de ce siècle a vu l'apparition de deux nouvelles théories qui ont complètement perturbé le monde physique, sont : La relativité d'Einstein (générale -1916- et restreinte-1905-) et la mécanique quantique (qui inclus le plus importants principe, c'est Le principe d'incertitude d'Heisenberg) qui a inventée et développée par Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Pauli, Dirac, et autres, donc ce sont les deux piliers de la physique moderne (à l'échelle de Planck de très courte distance ou haute énergie).

La superposition entre la mécanique quantique et la relativité restreinte ont contribué à la construction de la théorie quantique des champs, et les théories de jauge modernes qui ont permettent d'unifier les trois forces connues (forte, faible, électromagnétique) dans l'espace ordinaire.

Une théorie de jauge par définition est une théorie des champs qui est invariante sous certain groupe de symétrie globale et locale appelée le groupe de jauge, comme, le modèle des interactions électrofaible du groupe $SU(2) \times U(1)$, et un autre exemple très connu est la Chromodynamique Quantique (QCD), c'est une théorie de jauge basée sur le groupe de jauge $SU(3)$ qui a été introduit pour décrire les interactions fortes, et le modèle standard prolongée (Grand unification) , c'est un théorie de jauge basée sur le groupe de jauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ qui a été introduit pour décrire les trois forces connues (forte, faible et électromagnétique).

Malgré ce succès appariant, il reste beaucoup des choses inexplicables, le plus important :

- ✦ Le problème d'existence du boson de Higgs, l'origine des masses des particules, les trois générations des particules, la violation de CP, le problème de la gravitation, les grandes différences de masse entre les particules.

Les physiciens ont supposé plusieurs solutions, Pour comprendre ces problèmes, le plus important :

- ✦ Le modèle technicouleur, extra dimensions, théorie des cordes et supercordes, M-theory, la supersymétrie et supergravité, espace et géométrie non-commutative.

La géométrie non commutatif, est un outil mathématique appliquée à la physique théorique qui est élaborée dans des plusieurs méthodes, une de ces méthodes est les approches de Seiberg-Witten, qui consiste à remplacer l'espace-temps ordinaire par un espace non commutatif, cette approche peut être formulée la théorie de jauge dans cas non commutatif.

Objectif :

L'objectif visé à travers ce mémoire de Master, est étude le phénomène du briseur spontané de la symétrie dans le cas du modèle standard des interactions électrofaible dans l'espace non commutatif.

Présentation du mémoire :

Notre travail est divisée en trois chapitres :

- ✦ Le première chapitre on étudiée la théorie de jauge du modèle électrofaible et la Brisure spontanée de la Symétrie $SU(2) \times U(1)$ dans l'espace ordinaire.
- ✦ La deuxième chapitre réservé pour mieux comprendre les formalismes mathématiques de l'espace non commutatif on général.
- ✦ Dans le dernier chapitre on applique ces formalismes sur la modèle électrofaible.

En terminant notre travail par une conclusion générale exposera le travail accompli.

CHAP I

***THEORIE DE JAUGE
DES INTERACTIONS
ELECTROFAIBLE DANS
L'ESPACE ORDINAIRE***

I-1-Introduction :

Dans ce chapitre on étudie les différents phénomènes physiques qui s'intéressent par les interactions électrofaibles, et comme cas particulier on étudie le groupe de Lie unitaire unimodulaire (spéciale), et les transformations de jauge associées au groupe de symétrie $SU(2)$ dans l'espace ordinaire.

I-2-La théorie de jauge dans l'espace ordinaire : [01,02, 03, 04]

En 1919, le terme 'jauge' est introduit pour la première fois par Hermann Weyl dans une tentative d'unifier l'électromagnétisme et la gravitation. Malheureusement, pour diverses raisons, cette tentative d'unification échoua. Mais par la suite, Weyl donna en 1929 le premier exemple d'une théorie de jauge locale basée sur le groupe $U(1)$. L'idée a été généralisée par Dirac, puis Yang et Mills en utilisant des groupes plus grands que $U(1)$, ce sont les groupes $SU(2)$ et $SU(3)$.

La théorie de jauge est une théorie des champs qui décrit les interactions fondamentales (fortes, faibles, électromagnétique). Elle est basée sur le principe d'invariance de la densité lagrangienne lorsque cette dernière est soumise à une transformation de jauge, ces transformations sont :

1-Transformations appliquées sur les coordonnées d'espace-temps :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = f(x^\mu, \alpha) \quad (\text{I.1})$$

2-Transformations des champs : Les transformations des champs sont divisées en trois parties, la première connue par les champs physiques scalaires, la seconde est les champs physiques fermioniques et les champs vectoriels.

2-1-Champs physiques scalaires : Les champs physiques scalaires classés en deux types réels ou complexes.

-Champs physiques scalaires non chargés et noté par : $\varphi(x^\mu, \alpha)$ ou α est un paramètre constante et x^μ Le quadrivecteur position dans l'espace de Minkowski.

-Champs physiques scalaires de spin $S = 0$ et se transforme comme suivant :

$$\varphi(x^\mu, \alpha) \rightarrow \varphi'(x'^\mu, \alpha) = F(\varphi(x^\mu, \alpha), x^\mu) \quad (I.2)$$

2-2-Champs physiques fermionique : Le champ fermionique noté par $\psi(x^\mu, \alpha)$ de charge négative ou positive (électron ou positron), de spin $S = \frac{1}{2}$ et satisfait le statistique Fermi-Dirac et obéissant le principe de Pauli. Et se transforme comme suivant :

$$\psi(x^\mu, \alpha) \rightarrow \psi'(x'^\mu, \alpha) = e^{i\alpha} \psi(x^\mu, \alpha) \quad (I.3)$$

2-3-Champs vectoriels : Les champs vectoriels de spin $S = 1$ comme le photon. Et se transforme comme suivant :

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = G^\mu(A^\mu(x), \alpha) \quad (I.4)$$

De tel sort le principe de moindre action est satisfait dans les trois champs :

$$\delta S = 0 \quad (I.5)$$

I-2-1-Rappelle sur les groupes : [03 ,05 ,06]

La théorie des groupes joue un rôle fondamental en théorie quantique des champs, parce que toutes les transformations considérées forment des groupes. Le plus souvent même des groupes de Lie.

Soit G un ensemble, et $*$ une application de $G \times G$:

$$\begin{cases} *: G \times G \rightarrow G, \\ (g_1, g_2) \rightarrow g_1 * g_2 \end{cases} \quad (I.6)$$

Le couple $(G, *)$ est construit un groupe si les axiomes suivants sont satisfaits :

1- La relation de L'associativité :

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$$

2- La relation de L'élément neutre :

$$\exists e \in G, e * g = g * e = g; \forall g \in G$$

3- La relation de L'élément inverse :

$$\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G, g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$$

Si g_1 et g_2 sont des éléments de G , le groupe sera qualifiée abélienne si la relation suivant est satisfait :

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \quad (I.7)$$

I-2-1-1- Groupe de Lie (unitaire uni modulaire) :

On s'intéresse dans notre mémoire par le groupe de Lie unitaire uni modulaire (spéciale), cette groupe dans un espace complexe à une dimension est notée par $SU(n)$. Le Sous-groupe spéciale unitaire $SU(n)$ du groupe unitaire $U(1)$ définit comme l'ensemble des matrices complexes $(n \times n)$ unitaire de déterminant égal 1:

$$U \in SU(n) \Leftrightarrow U \in M_n(c), U^\dagger U = 1_n \text{ et } \det(U) = 1 \quad (I.8)$$

I-2-1-2-L'algèbre de Lie :

On dit que g est munie d'une structure d'algèbre de Lie si il existe une loi de composition interne :

$$\begin{cases} g * g \rightarrow g \\ (X, Y) \rightarrow [X, Y] \end{cases} \quad (I.9)$$

Avec les crochets de X et Y satisfait les propriétés suivants :

1- La relation de distributivité :

$$\forall (X, Y, Z) \in g^3, \quad \forall (\lambda, \mu) \in R^2, [\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Z] + \mu[Y, Z],$$

2- La relation de L'antisymétrie :

$$\forall (X, Y) \in g \times g, [X, Y] = -[Y, X],$$

3- Et en fin l'identité de Jacobi est satisfaite:

$$\forall (X, Y, Z) \in g \times g \times g, [[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0,$$

Et
$$[X^\mu, X^\nu] = i \sum_{a=0}^n f_a^{\mu\nu} X^a \quad (I.10)$$

Où $f_a^{\mu\nu}$ sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie g . Avec $\{\mu = \overline{1, n}\}$

I-2-1-3- L'algèbre du groupe unitaire uni modulaire (spéciale SU(2)) :

L'algèbre de Lie $SU(n)$ du groupe spécial unitaire $SU(n)$ ne coïncide pas avec celle du groupe unitaire.

$$T \in SU(n), T^\dagger + T = 0, \text{tr}(T) = 0 \quad (I.11)$$

La dimension réelle de cette algèbre est :

$$\dim SU(n) = n^2 - 1 \quad (\text{I.12})$$

L'algèbre $SU(n)$ est donc l'ensemble des matrices hermitiennes $n \times n$ de trace nulle.

❖ L'algèbre $SU(2)$:

Les générateurs T^a qui forment l'algèbre $SU(2)$ sont auto-adjoints et de trace nulle :

$$\begin{cases} T^a - T^{a\dagger} = 0 \\ \text{tr}[T^a] = 0 \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

Le groupe $SU(2)$ est un groupe à $2^2 - 1 = 3$ paramètres réelles, on trouve ensemble suivant :

$$\left\{ \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{I.14})$$

Sont Appelle les matrice de Pauli. De telle sorte que les générateurs T^a sont définis par :

$$T^a = \frac{1}{2} \sigma^a \quad (\text{I.15})$$

Avec σ^a satisfait l'algèbre suivant :

$$\left[\frac{\sigma^a}{2}, \frac{\sigma^b}{2} \right] = \sum_{c=1}^3 i f^{abc} \frac{\sigma^c}{2} \quad (\text{I.16})$$

Les constantes de structure de $SU(2)$ sont les composantes du tenseur antisymétrique de

$$\text{Levi-Civita : } f^{abc} = \varepsilon^{abc} = \begin{cases} +1 \dots \text{Si } \{(abc) = (123), (231), (312)\} \\ -1 \dots \text{Si } \{(abc) = (132), (321), (213)\} \\ 0 \dots \dots \dots \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

I-2-2-Symétrie de jauge non abélienne (cas de SU(2)) : [03, 07, 09,10]

Les deux groupes $SU(2)$ et $SU(3)$ sont les groupes plus utilisés en théorie de jauge non abélienne, le premier décrit l'interaction faible et le second décrit l'interaction forte respectivement.

Puisque la dimension du groupe de jauge $SU(2)$ est $2^2 - 1 = 3$, le nombre de bosons de jauge est 3. Quant aux spineurs de la théorie, dont chacun forme un double par rapport au groupe de symétrie:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.18})$$

Qui se transforme sous la transformation de groupe $SU(2)$:

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(\alpha)\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)U(\alpha)^{-1} \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Avec $U(\alpha)$ prend la forme suivante:

$$U(\alpha) = \exp\left(-i \sum_{a=1}^3 \alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right) \quad (\text{I.20})$$

Donc

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp\left(-i \sum_{a=1}^3 \alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right) \psi(x) \quad (\text{I.21})$$

Où σ sont les matrices de Pauli, et $(\alpha = \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ sont les paramètres de transformation du groupe $SU(2)$.

L'expression de la densité lagrangien libre qui décrit le champ fermionique est donnée par :

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \quad (\text{I.22})$$

I-2-2-1-Etude la symétrie globale dans ce cas (α est constante) :

La symétrie globale est caractérisé par α est constante.

❖ Le comportement du terme de masse :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)m\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x)m\psi'(x) \\ &= \bar{\psi}(x)U^{-1}(\alpha)mU(\alpha)\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)m\psi(x) \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

❖ Le comportement du terme cinétique :

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) &\rightarrow i\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi'(x) \\ &= i\bar{\psi}(x)U(\alpha)^{-1}\gamma^\mu \partial_\mu U(\alpha)\psi(x) \\ &= i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

Et

$$[\gamma^\mu, U(\alpha)] = [\gamma^\mu, U(\alpha)^{-1}] = 0 \quad (\text{I.25})$$

$$U(\alpha)U(\alpha)^{-1} = U(\alpha)^{-1}U(\alpha) = 1 \quad (\text{I.26})$$

Donc la densité de lagrangien (libre) est invariante par les transformations globales.

I-2-2-Etude la symétrie locale :

L'idée de théorie de jauge est de rendre la symétrie globale en une symétrie locale. Dans ce cas α est en fonction de x :

$$U(\alpha) = \exp(-i \sum_{a=1}^3 \alpha^a(x) \frac{\sigma^a}{2}) \quad (\text{I.27})$$

On va voir maintenant les transformations des différents termes.

❖ Le comportement du terme de masse :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) m \psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) m \psi'(x) \\ &= \bar{\psi}(x) m \psi(x) \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

Donc ce terme est invariant.

❖ Le comportement du terme cinétique :

$$\begin{aligned} i \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) &\rightarrow i \bar{\psi}'(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi'(x) \\ &= i \bar{\psi}(x) U(\alpha(x))^{-1} \gamma^\mu \partial_\mu [U(\alpha(x)) \psi(x)] \\ &= i \bar{\psi}(x) U(\alpha(x))^{-1} \gamma^\mu [(\partial_\mu U(\alpha(x))) \psi(x) \\ &\quad + U(\alpha(x)) (\partial_\mu \psi(x))] \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

Mais ce terme n'est pas invariant sous les transformations de symétrie locale, pour restaurer l'invariance on introduit le champ vecteur $A_\mu^a, a=1,2,3$ et la dérivée covariante D_μ suivant :

$$D_\mu \psi(x) = (\partial_\mu - i A_\mu) \psi(x) = (\partial_\mu - i g A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}) \psi(x) \quad (\text{I.30})$$

Où g est le constant de couplage et A_μ^a sont les champs des vecteurs de jauge satisfont:

$$A_\mu = g A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}, a = 1, 2, 3 \quad (\text{I.31})$$

La dérivée covariante se transforme comme suivant :

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &\rightarrow (D_\mu \psi(x))' \\ &= U(\alpha(x)) (D_\mu \psi(x)) \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

Avec

$$D_\mu' = U(\alpha(x)) D_\mu U(\alpha(x))^{-1} \quad (\text{I.33})$$

A partir la relation (I.32), on trouve les transformations de champ A_μ :

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - i A_\mu') U(\alpha(x)) \psi(x) &= U(\alpha(x)) (\partial_\mu - i A_\mu) \psi(x) \\ \Rightarrow (\partial_\mu U(\alpha(x))) \psi(x) + U(\alpha(x)) (\partial_\mu \psi(x)) - i A_\mu' U(\alpha(x)) \psi(x) \\ &= U(\alpha(x)) \partial_\mu \psi(x) - i U(\alpha(x)) A_\mu \psi(x) \\ \Rightarrow i A_\mu' U(\alpha(x)) U(\alpha(x))^{-1} &= i U(\alpha(x)) A_\mu U(\alpha(x))^{-1} \\ &\quad + (\partial_\mu U(\alpha(x))) U(\alpha(x))^{-1} \\ \Rightarrow A_\mu' &= U(\alpha(x)) A_\mu U(\alpha(x))^{-1} - i (\partial_\mu U(\alpha(x))) U(\alpha(x))^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.34})$$

Dans le cas des transformations infinitésimales ou $(\alpha(x) \ll 1)$:

$$\begin{aligned} U(\alpha(x)) &\approx 1 - i \sum_{a=1}^3 \alpha^a(x) \frac{\sigma^a}{2} + O(\alpha^2) \\ U(\alpha(x))^{-1} &\approx 1 + i \sum_{a=1}^3 \alpha^a(x) \frac{\sigma^a}{2} + O(\alpha^2) \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

Si on remplaçant la relation (I.35) dans (I.34) et avec l'utilise de l'équation (I.16) on trouve :

$$A'_\mu{}^a = A_\mu{}^a + \sum_{c=1}^3 \varepsilon^{abc} \alpha^b A_\mu{}^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a \quad (\text{I.36})$$

$$\Rightarrow \delta A_\mu{}^a = \sum_{c=1}^3 \varepsilon^{abc} \alpha^b A_\mu{}^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a \quad (\text{I.37})$$

Pour trouver l'expression du tenseur $F_{\mu\nu}$, nous utilisons la combinaison suivante:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = -i F_{\mu\nu} \psi$$

En peut faire les calcules :

$$\begin{aligned} (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \psi &= ((\partial_\mu - i A_\mu)(\partial_\nu - i A_\nu) - (\partial_\nu - i A_\nu)(\partial_\mu - i A_\mu)) \psi \\ &= (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\mu i A_\nu - i A_\mu \partial_\nu - A_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu + \partial_\nu i A_\mu + i A_\nu \partial_\mu + A_\nu A_\mu) \psi \\ &= -i ((\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - i [A_\mu, A_\nu]) \psi \\ &= -i F_{\mu\nu} \psi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - i [A_\mu, A_\nu] \quad (\text{I.38})$$

Avec

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= g F_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2} \quad \text{et} \quad A_\mu = g A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}, a=1,2,3 \\ \Rightarrow F_{\mu\nu} &= g \frac{\sigma^a}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) - i g^2 \left[\frac{\sigma^b}{2}, \frac{\sigma^c}{2} \right] A_\mu^b A_\nu^c \\ \Rightarrow F_{\mu\nu} &= g \frac{\sigma^a}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + g^2 \sum_{d=1}^3 \varepsilon^{bcd} \frac{\sigma^d}{2} A_\mu^b A_\nu^c \\ \Rightarrow F_{\mu\nu} &= g \frac{\sigma^a}{2} \left((\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + g \sum_{c=1}^3 \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right) \\ \Rightarrow F_{\mu\nu}^a &= \underbrace{(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)}_{\text{terme analogue QED}} + \underbrace{g \sum_{c=1}^3 \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c}_{\text{terme non abelien}} \quad (\text{I.39}) \end{aligned}$$

A partir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \left([D_\mu, D_\nu] \psi(x) \right)' &= U(\alpha) [D_\mu, D_\nu] \psi(x) \\ D_\mu \psi(x) &\rightarrow (D_\mu \psi(x))' = U(\alpha(x)) (D_\mu \psi(x)) \end{aligned}$$

On trouve l'expression :

$$F'_{\mu\nu} \psi'(x) = U(\alpha) F_{\mu\nu} \psi(x) \quad (\text{I.40})$$

Sous les transformations infinitésimales (I.33) on trouve :

$$\delta F_{\mu\nu}^a = \varepsilon_{abc} \alpha^b F_{\mu\nu}^c \quad (\text{I.41})$$

Finalement on peut écrire la densité lagrangienne complet qui est invariant par les transformations de jauge (ou $\delta\mathcal{L}=0$):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{photonique}} \quad (\text{I.42})$$

Avec

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \\ \mathcal{L}_{\text{photonique}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{cases}$$

I-3-La théorie électrofaible $SU(2) \times U(1)$ dans l'espace ordinaire : [03,06,08]

I-3-1-introduction sur les Interactions électromagnétiques :

L'interaction d'une particule de masse m et de la charge électrique e en l'électromagnétique em est Caractérisées par les propriétés suivantes :

- mettent en jeu des particules chargées électriquement ;
- couplage électromagnétique: $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$;

- temps d'interaction ou vie moyenne typique de $\approx 10^{-20} s$;
- section efficace typique de $\approx 10^{-33} m^2$;
- échange de photons γ ;
- portée $R = \infty$.

Exemples d'interactions électromagnétiques :

- Effet photoélectrique : $\gamma + e \rightarrow e$
- Diffusion de Rutherford : $e + e \rightarrow e + e$
- Rayonnement de freinage : $e + N \rightarrow e + N^* + \gamma$

Les interactions électromagnétique décrite par la densité lagrangien :

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (I.43)$$

Avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Et A^μ le quadrivecteur potentiel.

I-3-2- Introduction sur les Interactions faibles :

L'interaction nucléaire faible, responsable en particulier du phénomène de la radioactivité. On classe les interactions faibles par la nature des particules :

Leptoniques : Comme un exemple la désintégration leptonique du muon :

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

Semi-Leptoniques : Comme un exemple la désintégration β du neutron :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Non-Leptoniques (Hadroniques) : Comme un exemple la désintégration hadronique du Λ^0 :

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$

Les interactions faibles sont caractérisées par les propriétés suivantes:

- Mettent en jeu des neutrinos ou des quarks qui changent de saveur, c'est-à-dire des Particules ayant une charge faible;
- Couplage faible (entre protons):

$$\alpha_{Fermi} = \frac{G_F m_p^2}{4\pi} \approx 10^{-6}, G_F = 1.16 \cdot 10^{-5} \text{ Gev}^{-2};$$

- Temps d'interaction ou vie moyenne typique de $\approx 10^{-8} \text{ s}$;
- Section efficace de $\approx 10^{-44} \text{ m}^2$;
- Echange de bosons $w^\pm$ (courants chargés) et Z^0 (courant neutre) ;
- portée $R = 10^{-18} \text{ m}$;

Les interactions faibles décrivent par la densité lagrangien :

$$\mathcal{L}_F = \frac{G_F}{2} j_\mu^\dagger j^\mu \quad (\text{I.44})$$

Avec le courant leptonique : $j^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu$ (I.45)

Dans le cas général on peut écrire chaque spineur:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi + \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \\ \psi &= \psi_R + \psi_L \end{aligned} \quad (\text{I.46})$$

Les parties gauches ψ_e et ψ_ν sont groupé comme suivant :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\nu \\ \psi_e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_\nu \\ \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_e \end{pmatrix} \quad (\text{I.47})$$

I-3-3-La théorie électrofaible $SU(2) \times U(1)$:

En 1961 Glashow proposa pour la première fois une unification des interactions faible et électromagnétique. En 1967, Weinberg et Abdussalam, proposèrent un modèle connue par électrofaible, cette théorie est basée sur le groupe $SU(2)_l \times U(1)_y$. Il y a 4 champs de jauge:

On associe les A_μ^a ($a=1,2,3$) à $SU(2)_l$ et B_μ est le champ de jauge de $U(1)_y$, les A_μ^a et B_μ couplent aux charges I_3 et $Y/2$ respectivement.

La charge électrique est définie comme:

$$Q_{em} = I_3 + Y/2. \quad (I.48)$$

Avec l'hypercharge Y est définie :

$Y = -1$ Pour les fermions (Left) sont des doublets gauches de $SU(2)_l$:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L. \quad (I.49)$$

$Y = -2$ Pour les fermions (Right) sont des singlets droits sous $SU(2)_l$:

$$\psi_R = e_R, \mu_R, \tau_R. \quad (I.50)$$

La transformation du champ de jauge par rapport à $U(1)$:

$$\psi \rightarrow e^{iY\alpha(x)}\psi \quad (I.51)$$

Par rapport à $SU(2)$:

$$\psi \rightarrow U(x)\psi \quad (I.52)$$

Où

$$U(x) \in SU(2)$$

Donc les lois de transformation des champs par rapport au groupe de jauge:

$$\varphi \rightarrow e^{i\alpha(x)}U(x)\varphi \quad (I.53)$$

$$\psi_L \rightarrow e^{-i\alpha(x)}U(x)\psi_L \quad (I.54)$$

$$\psi_R \rightarrow e^{-2i\alpha(x)}\psi_R \quad (I.55)$$

La densité Lagrangien pour cette théorie s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (D_\mu \varphi)^\dagger (D^\mu \varphi) - V(\varphi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i} \\ & + i\bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu D_\mu \psi_R + \mathcal{L}_Y(\psi, \varphi) \end{aligned} \quad (I.56)$$

La dérivée covariante pour cette théorie est:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \quad (I.57)$$

Avec

$$D_\mu \psi_L = (\partial_\mu + ig \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a - i \frac{g'}{2} B_\mu) \psi_L \quad (I.58)$$

$$D_\mu \psi_R = (\partial_\mu - i g' B_\mu) \psi_R \quad (I.59)$$

$$D_\mu \varphi = (\partial_\mu + ig \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a + i \frac{g'}{2} B_\mu) \varphi \quad (I.60)$$

Les lagrangiens respectifs s'écrivent alors:

1. **Pour les fermions:** les fermions interagissent avec les bosons de jauge via

$$\mathcal{L}_\psi = \underbrace{\bar{\psi}_L (i\gamma^\mu \partial_\mu + g \frac{\sigma^a}{2} \gamma^\mu A_\mu^a - \frac{g'}{2} \gamma^\mu B_\mu) \psi_L}_{Y=-1} + \underbrace{\bar{\psi}_R (i\gamma^\mu \partial_\mu - g' \gamma^\mu B_\mu) \psi_R}_{Y=-2} \quad (I.61)$$

Où g et g' sont des constantes de couplage associées à A_μ^a et B_μ respectivement.

2. **Pour les champs de jauge:** la dynamique des bosons de jauge est décrite par :

$$\mathcal{L}_{jauge} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i} \quad (I.62)$$

Où

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (I.63)$$

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\varepsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \quad (I.64)$$

$\Rightarrow$ Le premier terme $(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$: est très similaire au lagrangien décrivant les champs de

Photons en QED, Il est basé sur le groupe de symétrie $U(1)$ tout comme QED.

$\Rightarrow$ Le second terme du lagrangien $(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^iF^{\mu\nu i})$: est une généralisation du lagrangien de

QED pour le groupe $SU(2)$, Il est à noter que le groupe $SU(2)$ est non abélien (non-commutatif) si bien que la contribution $(g\varepsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k)$ implique des interactions entre les bosons de jauge de $SU(2)$.

3. **Pour terme de Yukawa:** les masses des fermions, à cause de la symétrie

$SU(2)_I \times U(1)_Y$, il faut écrire

$$\mathcal{L}_Y(\psi, \varphi) = -g_Y \bar{\psi}_L \varphi \psi_R + hc \quad (I.65)$$

Ce terme est invariant par le groupe de jauge:

$$g_Y \bar{\psi}_L \varphi \psi_R \rightarrow g_Y \bar{\psi}_L U^\dagger e^{i\alpha} e^{i\alpha} U \varphi e^{-2i\alpha} \psi_R = g_Y \bar{\psi}_L \varphi \psi_R \quad (I.66)$$

4. **Pour les champs scalaires:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varphi = & (\partial_\mu \varphi + ig \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a \varphi + i \frac{g'}{2} B_\mu \varphi)^\dagger (\partial^\mu \varphi + ig \frac{\sigma^a}{2} A^{\mu a} \varphi + i \frac{g'}{2} B_\mu \varphi) \\ & - m^2 (\varphi^\dagger \varphi) - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2 \end{aligned} \quad (I.67)$$

Avec

$$V(\varphi) = m^2 (\varphi^\dagger \varphi) + \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2 \quad (I.68)$$

Où $V(\varphi)$ est le potentiel qui décrit les interactions des scalaires.

I-3-4-La brisure spontanée de la Symétrie $SU(2) \times U(1)$:

Dans le modèle standard, la brisure spontanée de symétrie est un mécanisme de Higgs pour générer les masses des bosons, la brisure de symétrie introduit des champs scalaires couplés à l'interaction de jauge. Les scalaires apparaissent sous forme d'un doublet électrofaible φ dont le lagrangien s'écrit:

$$\mathcal{L}_\varphi = (D_\mu \varphi)^\dagger (D^\mu \varphi) - V(\varphi) \quad (I.69)$$

Avec

$$V(\varphi) = m^2 (\varphi^\dagger \varphi) + \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2$$

L'état de vide c'est un l'état plus stable $\Leftrightarrow$ le potentiel minimal, on suppose que :

$$\chi = \varphi^\dagger \varphi \rightarrow V = m^2 \chi + \lambda \chi^2 \quad (I.70)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \chi} = m^2 + 2\lambda \chi \rightarrow \chi = \frac{-m^2}{2\lambda} \quad (I.71)$$

$$\chi = \varphi^\dagger \varphi = \frac{-m^2}{2\lambda} \dots\dots\dots (*) \quad (I.72)$$

Pour $m^2 < 0$ explicitement, étant donné φ un doublet $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ l'état plus simple de l'équation

$$(*) : \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{2 \times 1} \quad \text{Si} \quad \rho = \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} \quad (I.73)$$

Donc

$$\varphi^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{1 \times 2} \quad (I.74)$$

$$\varphi^\dagger \varphi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{1 \times 2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \frac{\rho^2}{2} \quad (I.75)$$

Lorsque n'autre système physique on interaction, le système doit être en l'état dynamique c'est-à-dire l'état minimal a vibré.

$$\rho \rightarrow \rho'(x) = \rho + h(x) \quad (I.76)$$

On choisit donc

$$\varphi' = U(x)\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (I.77)$$

Où $\rho \neq 0$ est une constante, alors φ n'est pas invariant de jauge et brise la symétrie.

Dans cette limite:

$$\begin{aligned} (D_\mu \varphi)' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\partial_\mu + ig \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a + i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \rho \end{pmatrix} + \frac{i\rho}{2\sqrt{2}} \left(g' B_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + g A_\mu^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + g A_\mu^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + g A_\mu^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (D_\mu \varphi)' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \rho \end{pmatrix} + \frac{i\rho}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g' B_\mu + g A_\mu^3 & g A_\mu^1 - i g A_\mu^2 \\ g A_\mu^1 + i g A_\mu^2 & g' B_\mu - g A_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \rho \end{pmatrix} + \frac{i\rho}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g A_\mu^1 - i g A_\mu^2 \\ g' B_\mu - g A_\mu^3 \end{pmatrix} \\ (D_\mu \varphi)' &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\rho g(A_\mu^1 - i A_\mu^2) \\ 2\partial_\mu \rho + i\rho(g' B_\mu - g A_\mu^3) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (I.78)$$

Donc

$$(D_\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi)' = \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{\rho^2}{8} \left(g^2 |A_\mu^1 - i A_\mu^2|^2 + (g' B_\mu - g A_\mu^3)^2 \right) \quad (I.79)$$

Alor

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varphi \xrightarrow{\varphi \rightarrow \rho} \mathcal{L}_{masse} &= \frac{\rho^2}{8} \left(g^2 |A_\mu^1 - i A_\mu^2|^2 + (g' B_\mu - g A_\mu^3)^2 \right) \\ &= \frac{\rho^2}{8} \left(g^2 A_\mu^1 A^{\mu 1} + g^2 A_\mu^2 A^{\mu 2} + (g' B_\mu - g A_\mu^3)^2 \right) \end{aligned} \quad (I.80)$$

Et en définissant :

$$w_{\mu}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{\mu}^1 \pm iA_{\mu}^2) \quad , \quad A_{\mu} = \frac{g' B_{\mu} + g A_{\mu}^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{Et} \quad Z_{\mu} = \frac{g' B_{\mu} - g A_{\mu}^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (\text{I.81})$$

On peut récrire :

$$\mathcal{L}_{\text{masse}} = \left\{ \left(\frac{\rho g}{2} \right)^2 w_{\mu}^{+} w^{+\mu} + \left(\frac{\rho g}{2} \right)^2 w_{\mu}^{-} w^{-\mu} + \left(\frac{\rho \sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \right)^2 Z_{\mu}^0 Z^{0\mu} + 2(M_h)^2 h^2 \right\} \quad (\text{I.82})$$

$$\mathcal{L}_{\text{masse}} = \left\{ (M_w)^2 w_{\mu}^{+} w^{+\mu} + (M_w)^2 w_{\mu}^{-} w^{-\mu} + (M_Z)^2 Z_{\mu}^0 Z^{0\mu} + 2(M_h)^2 h^2 \right\} \quad (\text{I.83})$$

Où nous avons introduit l'angle θ_w de Weinberg par la charge e :

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w \quad (\text{I.84})$$

Avec

$$\begin{cases} A_{\mu} = \sin \theta_w A_{\mu}^3 + \cos \theta_w B_{\mu} \\ Z_{\mu} = \cos \theta_w A_{\mu}^3 - \sin \theta_w B_{\mu} \end{cases} \quad (\text{I.85})$$

Détermine l'angle de mélange appelé l'angle de Weinberg :

$$\tan \theta_w = \frac{g'}{g} \quad \text{Et} \quad \frac{M_w}{M_Z} = \cos \theta_w < 1. \quad (\text{I.86})$$

Donc $M_Z > M_w$, (découverte expérimentalement au **CERN** en 1978-1983) :

$$\sin^2 \theta_w \approx 0.23$$

$$M_Z = 1.14 M_w \approx 91.2 \text{ GeV} \quad (\text{I.87})$$

Remarque :

Les termes de masse étant quadratiques en $w_\mu^\pm$, Z_μ^0 et H , il est alors facile d'identifier les masses de (I.83) soient :

Masse de $A_\mu = 0 \Rightarrow \gamma$ photon sans masse.

Masse de $Z_\mu^0 = \frac{\rho \sqrt{g^2 + g'^2}}{2} = M_Z \Rightarrow Z_\mu^0$ champ vectoriel massif.

Masse de $w_\mu^\pm = \frac{\rho g}{2} = M_w \Rightarrow w_\mu^\pm$ champ vectoriel massif.

Masse de $H = \sqrt{-2m^2} = M_h \Rightarrow H$ champ scalaire massif.

I-4-Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons passé en revue les différents phénomènes physiques qui s'intéressent par les interactions électrofaibles, et on a étudié le phénomène de la brisure spontanée dans la symétrie $SU(2) \times U(1)$ dans l'espace ordinaire, elle a conclu que le photon (A_μ) reste sans masse. Et est donc partiellement symétrie brisée selon:

$$SU(2)_l \times U(1)_y \rightarrow U(1)_{em}$$

Dans le chapitre prochain nous étudierons plus en détails les formalismes mathématiques de l'espace non commutatif.

CHAP II

***FORMALISMES
MATHEMATIQUES DE
L'ESPACE NON
COMMUTATIF***

II-1-Introduction :

Dans ce chapitre on a traité les différentes formules mathématiques, qui donnent l'algèbre de l'espace non commutatif (le produit star, propriétés du produit star, les transformations de jauge non commutatif...etc.).

II-2-L'espace non commutatif : [11,12]

L'idée de l'étude dans l'espace non commutatif en physique des particules est très ancienne. Le but était de pouvoir d'éliminer les divergences ultraviolettes de la théorie quantique de champ et la possibilité de trouver une théorie quantique pour la gravitation .

Il très important de noter que, cette algèbre est écrite dans le système naturel ($C = \hbar = 1$). Dans l'espace non commutatif les coordonnées d'espace temps ordinaires sont remplacées en mécanique quantique l'espace de phase est définie en remplaçant les variables et les moments canoniques $\hat{x}_i, \hat{p}_j$ par des opérateurs hermitiques qui obéissent aux règles de commutations canoniques suivantes :

$$\begin{cases} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Par des coordonnées non commutatif obéissant aux règles des commutations suivantes:

$$\begin{cases} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Ici $\theta_{ij} = -\theta_{ji}$ est une constante (réel) antisymétrique qui représente la non-commutativité de l'espace-temps.

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \theta_k \quad (\text{II.3})$$

Dans l'espace non commutatif la construction des théories de jauge se fait de la même manière qu'en théorie de jauge sur un espace ordinaire, il suffit de remplacer les champs classiques par les champs non commutatifs, le produit ordinaire commutatif par le produit de Moyal-Weyl (produit star $(*)$) .

Donc, la théorie de jauge dans un espace non commutatif est formulée on basé sur l'algèbre de Sieberg-Witten.

II-3- Le produit star : [11,12]

II-3-1-La formule de Moyal-Weyl :

Dans le cadre de la quantification canonique de la mécanique quantique, Hermann Weyl a donné une prescription qui permet d'associer des opérateurs à des fonctions classiques des variables canoniques.

La transformé de Fourier de chaque fonction $f(x)$ ou $g(x)$, est noté par $\tilde{f}(k)$ et $\tilde{g}(k)$ respectivement suivant l'expression:

$$\begin{cases} f(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int d^N k e^{ik_m x^m} \tilde{f}(k) \Leftrightarrow \tilde{f}(k) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int d^N x e^{ik_m x^m} f(x) \\ g(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int d^N k e^{ik_m x^m} \tilde{g}(k) \Leftrightarrow \tilde{g}(k) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int d^N x e^{ik_m x^m} g(x) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Peut être défini comme suit, nous associons à f et g les opérateurs de Weyl $W(f)$ et $W(g)$:

$$\begin{cases} W(f) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int d^N k e^{ik_m \hat{x}^m} \tilde{f}(k) \\ W(g) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int d^N l e^{il_m \hat{x}^m} \tilde{g}(l) \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Ensuite le produit $W(f)W(g)$ est définie par :

$$W(f)W(g) = (2\pi)^{-N} \int d^N k d^N l e^{ik_m \hat{x}^m} e^{il_m \hat{x}^m} \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) \quad (\text{II.6})$$

Utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}h[A,B]+\frac{1}{12}h^2[[A,B],B]-\frac{1}{12}h^3[[A,B],A]+\dots} \quad (\text{II.7})$$

Alors le produit de Weyl $W(f)W(g)$ prend la forme (Voire l'annexe (01)) :

$$\begin{aligned} W(f)W(g) &= (2\pi)^{-N} \int d^N k d^N l e^{i(k_m+l_m)x^m - \frac{i}{2}k_m l_n \theta^{mn}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) \\ &= W(f * g) \end{aligned}$$

Où $(f * g)$ Est une nouvelle fonction (fonction de Moyal-Weyl) définie par :

$$(f * g)(x) = e^{\frac{i}{2}h\theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n}} f(x)g(y) \Big|_{y \rightarrow x} \quad (\text{II.8})$$

Cette relation est développée comme suite :

$$(f * g)(x) = f(x)g(x) + \frac{i}{2}h\theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} f(x) \frac{\partial}{\partial x^n} g(x) + O(\theta^2) \quad (\text{II.9})$$

II-3-2-Propriétés du produit star :

Le produit star satisfait les différentes propriétés :

1-Le produit star est non commutatif :

$$f(x) * g(x) \neq g(x) * f(x)$$

2-Le produit star est associatif :

$$(f(x) * g(x)) * h(x) = f(x) * (g(x) * h(x))$$

3-La relation de complexe conjugué :

$$(f(x) * g(x))^* = f(x)^* * g(x)^*$$

4- La relation d'intégrale :

$$\int d^4x (f * g)(x) = \int d^4x (g * f)(x) = \int d^4x f(x)g(x)$$

5-Permutation cyclique :

$$\int d^D x (f * g * h)(x) = \int d^D x (h * f * g)(x) = \int d^D x (g * h * f)(x)$$

6- la règle de Leibniz :

$$\partial_\mu (f * g) = \partial_\mu f * g + f * \partial_\mu g$$

Remarque :

Pour distinguer entre le cas de l'espace ordinaire et l'espace non commutatif, les quantités physiques dans l'espace ordinaire sont noté par $(\alpha, \delta, \psi, A_\mu, F_{\mu\nu}$ et $D_\mu)$, mais dans l'espace non commutatif noté par $(\hat{\Lambda}, \hat{\delta}, \hat{\psi}, \hat{A}_\mu, \hat{F}_{\mu\nu}$ et $\hat{D}_\mu)$.

II-4-Les transformations de jauge non commutatif : [09, 10, 12, 13,15]

Dans l'espace non commutatif, la théorie de jauge définie par le remplaçant toutes les multiplications par le produit star.

II-4-1-Rappelle sur les transformations dans l'espace ordinaire :

La théorie de jauge non abélienne est basée sur l'algèbre suivant:

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c, c = 1, \dots, N \quad (\text{II.10})$$

Où f^{abc} est la constante de structure. Dans l'espace ordinaire les transformations locales du champ fermionique.

La dérivée covariante, le champ de jauge et le tenseur $F_{\mu\nu}$ respectivement est donnée par :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha_a(x)T^a} \psi(x)$$

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow D'_\mu \psi(x) = U(\alpha(x)) D_\mu \psi(x)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U(\alpha(x))A_\mu U(\alpha(x))^{-1} - i(\partial_\mu U(\alpha(x)))U(\alpha(x))^{-1}$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = U(\alpha(x))F_{\mu\nu}U(\alpha(x))^{-1} \quad (\text{II.11})$$

Avec

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - i[A_\mu, A_\nu]$$

Qui sont deviens dans le cas infinitésimal :

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= (1 + i\alpha_a(x)T^a)\psi(x) \\ \Rightarrow \delta_\alpha \psi(x) &= i\alpha_a(x)T^a \psi(x) \\ \Rightarrow \delta_\alpha \psi(x) &= i\alpha(x)\psi(x) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Et

$$\delta_\alpha D_\mu \psi(x) = i\alpha(x)D_\mu \psi(x) \quad (\text{II.13})$$

$$\delta_\alpha A_\mu = \partial_\mu \alpha(x) + i[\alpha(x), A_\mu] \quad (\text{II.14})$$

$$\delta_\alpha F_{\mu\nu} = i[(\alpha(x), F_{\mu\nu})] \quad (\text{II.15})$$

On peut vérifier que la combinaison de deux transformations est donnée par:

$$\begin{aligned} &(\delta_\alpha \psi(x)\delta_\beta \psi(x) - \delta_\beta \psi(x)\delta_\alpha \psi(x)) \\ &= i\alpha_a(x)T^a(i\beta_b(x)T^b) - (i\beta_b(x)T^b)(i\alpha_a(x)T^a)\psi(x) \\ &= \alpha_a(x)\beta_b(x)[T^a, T^b]\psi(x) \\ &= i\alpha_a(x)\beta_b(x)f^{abc}T^c\psi(x) \\ &= [\alpha(x), \beta(x)]\psi(x) \\ &= \delta_{-i[\alpha(x), \beta(x)]}\psi(x) \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

II-4-2-Les transformations non commutatifs :

Dans ce cas la relation (II.12) est remplacée par:

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{\psi}(x) = i\hat{\Lambda}(x) * \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.17})$$

Avec

$$\hat{\Lambda}(x) = \Lambda(x)_a T^a \quad (\text{II.18})$$

Et les transformations précédentes deviennent sous la forme :

-Pour la dérivée covariante :

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{D}_\mu \hat{\psi}(x) = i\hat{\Lambda}(x) * \hat{D}_\mu \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.19})$$

-Pour le champ de jauge :

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{A}_\mu = -i[x_{\mu,*} \hat{\Lambda}(x)] + i[\hat{\Lambda}(x),^* \hat{A}_\mu] \quad (\text{II.20})$$

En utilisant le produit de Moyal-Weyl, le commutateur $[x_{\mu,*} f(x)]$ s'écrit, pour $\theta_{\mu\nu}$ constante, sous la forme :

$$[x_{\mu,*} f(x)] = i\theta_{\mu\nu} \partial^\nu f(x) \quad (\text{II.21})$$

Donc

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\Lambda}(x) + i[\hat{\Lambda}(x),^* \hat{A}_\mu] \quad (\text{II.22})$$

-Pour le tenseur $F_{\mu\nu}$:

$$\hat{F}_{\mu\nu} = (\partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu) - i[\hat{A}_\mu,^* \hat{A}_\nu] \quad (\text{II.23})$$

Ce tenseur transforme dans l'espace non commutatif comme suivant :

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{F}_{\mu\nu} = i[(\hat{\Lambda}(x),^* \hat{F}_{\mu\nu})] \quad (\text{II.24})$$

Avec la combinaison de deux transformations est devient:

$$\begin{aligned} & \hat{\delta}_\Lambda \hat{\psi}(x) \hat{\delta}_\Sigma \hat{\psi}(x) - \hat{\delta}_\Sigma \hat{\psi}(x) \hat{\delta}_\Lambda \hat{\psi}(x) \\ &= (\hat{\Lambda}(x) * \hat{\Sigma}(x) - \hat{\Sigma}(x) * \hat{\Lambda}(x)) * \hat{\psi}(x) \end{aligned}$$

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{\psi}(x) \hat{\delta}_\Sigma \hat{\psi}(x) - \hat{\delta}_\Sigma \hat{\psi}(x) \hat{\delta}_\Lambda \hat{\psi}(x) = [\hat{\Lambda}(x), \hat{\Sigma}(x)] * \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.25})$$

L'expression de paramètre $\hat{\Lambda}(x)$ dans l'espace non commutatif en fonction des générateurs du groupe SU (N) est développée comme suite:

$$\hat{\Lambda}(x) = \Lambda(x)_a : T^a : + \Lambda^1(x)_{ab} : T^a T^b : + \dots + \Lambda^{n-1}(x)_{a_1 \dots a_n} : T^{a_1} \dots T^{a_n} : \quad (\text{II.26})$$

Où

$$\begin{aligned} : T^a &:= T^a \\ : T^a T^b &:= \frac{1}{2} \{T^a, T^b\} \\ : T^{a_1} \dots T^{a_n} &:= \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n T^{a_1} \dots T^{a_n} \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

II-5-Les transformations des champs dans l'espace non commutatif :

[11, 12, 13,16]

Pour résoudre le problème de la charge en géométrie non-commutatif en utilisant les groupes unitaires U(N), les groupes SU(N) ou SO(N), et pour conserver la forme des transformations de jauge des différents champs dynamiques, on est obligé de travailler avec les Seiberg-Witten maps de ces champs ($\hat{\psi}[\psi, A], \hat{A}_\mu[A], \dots$ etc.).

Donc Pour chaque paramètre il est possible de construire une théorie de jauge.

Le champ spinoriel représenté dans l'équation (II.17) devient sous la forme:

$$\hat{\delta}_\alpha \hat{\psi} = i \hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi} \quad (\text{II.28})$$

D'une manière plus compacte on a :

$$\hat{\delta}_{\Lambda_\alpha} \hat{\psi} = \hat{\delta}_\alpha \hat{\psi} \quad (\text{II.29})$$

Donc les transformations non commutatifs des relations précédentes deviennent sous les formes :

$$\hat{\delta}_\alpha (\hat{D}_\mu \hat{\psi}(x)) = i \hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{D}_\mu \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.30})$$

$$\hat{\delta}_\alpha \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\Lambda}_\alpha[A] + i [\hat{\Lambda}_\alpha[A], \hat{A}_\mu] \quad (\text{II.31})$$

$$\hat{\delta}_\alpha \hat{F}_{\mu\nu} = i [(\hat{\Lambda}_\alpha[A])^*, \hat{F}_{\mu\nu}] \quad (\text{II.32})$$

Pour déterminer $\hat{\Lambda}_\alpha[A]$ en fonction de $\alpha(x)$ et $A_\mu(x)$ on utilise la relation suivante:

$$[\hat{\delta}_\alpha, \hat{\delta}_\beta] \hat{\psi}(x) = \hat{\delta}_{-i[\alpha, \beta]} \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.33})$$

Avec

$$-i[\alpha, \beta] = \alpha \times \beta$$

A partir de l'équation (II.27) on peut écrire :

$$[\hat{\delta}_\alpha, \hat{\delta}_\beta] \hat{\psi}(x) = \hat{\delta}_\alpha (i \hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\psi}(x)) - \hat{\delta}_\beta (i \hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi}(x)) \quad (\text{II.34})$$

On utilisant la règle de Leibniz (sixième propriétés de produit star) :

La relation (II.33) devient (Voire l'annexe (02)) :

Donc

$$i(\hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A]) + [\hat{\Lambda}_\alpha[A], \hat{\Lambda}_\beta[A]] = \hat{\Lambda}_{[\alpha, \beta]}[A] = i \hat{\Lambda}_{\alpha \times \beta}[A] \quad (\text{II.35})$$

Ensuite on développe $\hat{\Lambda}_\alpha[A_\mu]$:

$$\hat{\Lambda}_\alpha[A] = \alpha(x) + h^1 \Lambda_\alpha^1[A] + h^2 \Lambda_\alpha^2[A] + \dots \quad (\text{II.36})$$

On remplace (II.35) dans (II.34), ou premier ordre de h on trouve l'équation

(Voire l'annexe (03)) :

$$\begin{aligned} i(\hat{\delta}_\alpha \Lambda_\beta^1[A] - \hat{\delta}_\beta \Lambda_\alpha^1[A]) + [\alpha, \Lambda_\beta^1[A]] - [\beta, \Lambda_\alpha^1[A]] - i \Lambda_{\alpha \times \beta}^1[A] \\ = -\frac{i}{2} \theta^{ij} \{ \partial_i \alpha(x), \partial_j \beta \} \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

La solution générale de cette contrainte est donnée par :

$$\Lambda_\alpha^1[A] = \frac{1}{4} \theta^{ij} \{ \partial_i \alpha(x), A_j \} = \frac{1}{2} \theta^{ij} \{ \partial_i \alpha_a(x), A_{j,b} \} : T^a T^b : \quad (\text{II.38})$$

Et on deuxième ordre de $\hbar$ on trouve l'équation :

$$\begin{aligned} & i(\hat{\delta}_\alpha \Lambda^2_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \Lambda^2_\alpha[A]) + [\alpha, \Lambda^2_\beta[A]] - [\beta, \Lambda^2_\alpha[A]] - \Lambda^2_{\alpha \times \beta}[A] \\ & = -\frac{i}{2} \theta^{ij} (\{\partial_i \Lambda^1_\alpha, \partial_j \beta\} - \{\partial_i \Lambda^1_\beta, \partial_j \alpha\}) + \frac{1}{8} \theta^{ij} \theta^{kl} [\partial_i \partial_k \alpha, \partial_j \partial_l \beta] - [\Lambda^1_\alpha, \Lambda^1_\beta] \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

La solution générale de cette contrainte est donnée par :

$$\begin{aligned} \Lambda^2_\alpha[A] = & \frac{1}{32} \theta^{ij} \theta^{kl} (-4 \{\partial_i \alpha(x), \{A_k, \partial_l A_j\}\} - i \{\partial_i \alpha(x), \{A_k, [A_j, A_l]\}\}) \\ & - i \{A_j, \{A_l, [\partial_i \alpha(x), A_k]\}\} + 2i [\partial_i \partial_k \alpha(x), \partial_j A_l] \\ & - 2[\partial_j A_l, [\partial_i \alpha(x), A_k]] + 2i [[A_j, A_l], [\partial_i \alpha(x), A_k]] \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

II-5-1-Les champs :

En théorie de jauge non commutatif le champ $\hat{\psi}(x)$ transforme selon la relation (II.27).

On développe $\hat{\psi}(x)$ comme suit:

$$\hat{\psi}[A] = \psi + \hbar^1 \psi^1[A] + \hbar^2 \psi^2[A] + \dots \quad (\text{II.41})$$

Les transformations du champ spénoriel dans l'espace non commutatif prend la forme :

$$\hat{\delta}_\alpha \hat{\psi}[A] = \delta_\alpha \psi + \hbar^1 \delta_\alpha \psi^1[A] + \hbar^2 \delta_\alpha \psi^2[A] + \dots \quad (\text{II.42})$$

$$\text{Où} \quad \hat{\delta}_\alpha \hat{\psi} = i \hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi} \quad (\text{II.43})$$

Sont les transformations dans le cas ordinaire (zéro ordre de $\hbar$).

Si on remplace (II.40 et II.35) dans (II.42) on trouve au premier ordre de $\hbar$ la transformation

(Voire l'annexe (04)) :

$$\delta_\alpha \psi^1[A] = i \alpha(x) \psi^1[A] + i \Lambda^1_\alpha[A] \psi - \frac{1}{2} \theta^{ij} \partial_i \alpha(x) \partial_j \psi \quad (\text{II.44})$$

Et si on prend la solution (II.37) de $\Lambda^1_\alpha[A]$, nous trouvons :

$$\psi^1[A] = -\frac{1}{2} \theta^{ij} A_i \partial_j \psi + \frac{i}{4} \theta^{ij} A_i A_j \psi \quad (\text{II.45})$$

De même pour les ordres plus supérieurs :

$$\begin{aligned}\delta_\alpha \psi^2[A] &= i\alpha(x)\psi^2[A] + i\Lambda_\alpha^1[A]\psi^1[A] + i\Lambda_\alpha^2[A]\psi \\ &\quad - \frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i\Lambda_\alpha^1[A]\partial_j\psi - \frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i\alpha(x)\partial_j\psi^1[A] \\ &\quad - \frac{i}{8}\theta^{ij}\theta^{kl}\partial_i\partial_k\alpha(x)\partial_j\partial_l\psi\end{aligned}\quad (\text{II.46})$$

La solution générale de cette contrainte est donnée par :

$$\begin{aligned}\psi^2[A] &= \frac{1}{32}\theta^{ij}\theta^{kl}(-4i\partial_i A_k \partial_j \partial_l \psi + 4A_i A_k \partial_j \partial_l \psi + 8A_i \partial_j A_k \partial_l \psi \\ &\quad - 4A_i \partial_k A_j \partial_l \psi - 4iA_i A_j A_k \partial_l \psi + 4iA_k A_j A_i \partial_l \psi - 4iA_j A_k A_i \partial_l \psi \\ &\quad + 4i\partial_j A_k A_i \partial_l \psi - 2\partial_i A_k \partial_j A_l \psi + 4iA_i \{A_l, \partial_k A_j\} \psi - 4iA_i \partial_j A_k A_l \psi \\ &\quad + 3A_i A_j A_l A_k \psi + 4A_i A_k A_j A_l \psi + 2A_i A_l A_k A_j \psi)\end{aligned}\quad (\text{II.47})$$

II-5-2-Le potentiel de jauge :

De même façon pour le comportement du potentiel $\hat{A}_\mu$ dans l'espace non commutatif.

Les transformations non commutatif du potentiel de jauge sont donnée par :

$$\hat{\delta}_\alpha \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\Lambda}_\alpha[A] + i[\hat{\Lambda}_\alpha[A]^*, \hat{A}_\mu] \quad (\text{II.48})$$

Qui développe comme suit :

$$\hat{A}_\mu[A] = A_\mu + h^1 A_\mu^1[A] + h^2 A_\mu^2[A] + \dots \quad (\text{II.49})$$

Donc

$$\hat{\delta}_\alpha \hat{A}_\mu[A] = \delta_\alpha A_\mu + h^1 \delta_\alpha A_\mu^1[A] + h^2 \delta_\alpha A_\mu^2[A] + \dots \quad (\text{II.50})$$

Ou zéro ordre de h on trouve (II.14), et à premier ordre de h on trouve

(Voire l'annexe (05)) :

$$\delta_\alpha A_\mu^1[A] = \partial_\mu \Lambda_\alpha^1[A] + i[\Lambda_\alpha^1[A], A_\mu] + i[\alpha(x), A_\mu^1[A]] - \frac{1}{2}\theta^{kl}\{\partial_k \alpha(x), \partial_l A_\mu\} \quad (\text{II.51})$$

Avec

$$A_\mu^1[a] = -\frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_k, \partial_l A_\mu + F_{l\mu}\} \quad (\text{II.52})$$

De même pour le tenseur $\hat{F}_{\mu\nu}$, on trouve au premier ordre de $\hbar$:

$$F_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{2}\theta^{kl}\{F_{\mu k}, F_{\nu l}\} - \frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_k, (\partial_l + D_l)F_{\mu\nu}\} \quad (\text{II.53})$$

Finalement on écrit dans un espace non commutatif les formules des champs précédentes :

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_\alpha[A] &= \alpha(x) + \frac{1}{4}\theta^{ij}\{\partial_i \alpha(x), A_j\} + O(\theta^2) \\ \hat{\psi}(x) &= \psi - \frac{1}{2}\theta^{ij}A_i \partial_j \psi + \frac{i}{4}\theta^{ij}A_i A_j \psi + O(\theta^2) \\ \hat{A}_\mu[A] &= A_\mu - \frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_k, \partial_l A_\mu + F_{l\mu}\} + O(\theta^2) \\ \hat{F}_{\mu\nu}[A] &= F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\theta^{kl}\{F_{\mu k}, F_{\nu l}\} - \frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_k, (\partial_l + D_l)F_{\mu\nu}\} + O(\theta^2) \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

II-6-Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons déterminé et démontré les formalismes mathématiques de l'espace non commutatif, et par conséquent nous déduisons la relation suivante :

$$\text{terme}_{\text{NON.COMMUTATIF}} = \text{terme}_{\text{ORDINAIRE}} + \text{terme}_{\text{CORRECTION}}$$

Dans le chapitre prochain nous avons vu les applications de l'espace non commutatif sur modèle électrofaible.

CHAP III



LE MODELE ELECTROFAIBLE DANS L'ESPACE NON COMMUTATIF

III-1-Introduction :

Dans ce chapitre on applique les formalismes mathématiques de l'espace non commutatif sur la théorie de jauge de l'interaction électrofaible, et on a étudié le phénomène de la brisure spontanée de la symétrie électrofaible dans l'espace non commutatif.

III-2-Rappelle sur les transformations de jauge ordinaire :

On a vu que les expressions des dérivés covariants correspondent les groupes des jagues $U(1)$ et $SU(2)$ dans l'espace ordinaire respectivement sont donnée par :

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (\text{III.1})$$

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu = \partial_\mu - ig \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\sigma^\alpha}{2} A_\mu^\alpha \quad (\text{III.2})$$

Les effets des dérivées covariantes sur les différents champs spinoriels sont données par :

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi$$

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - ig \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\sigma^\alpha}{2} A_\mu^\alpha) \psi$$

Les champs de jauge transformés correspondent les groupes $U(1)$ et $SU(2)$ respectivement :

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (\text{III.3})$$

$$A'^a_\mu = A^a_\mu + \sum_{c=1}^3 \varepsilon^{abc} \alpha^b A^c_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a \quad (\text{III.4})$$

On peut donner la représentation explicite des tenseurs en termes des champs correspond les groupes $U(1)$ et $SU(2)$ respectivement :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{III.5})$$

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - i[A_\mu, A_\nu] \quad (\text{III.6})$$

Avec
$$F_{\mu\nu} = g F_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2} \quad \text{et} \quad A_\mu = g A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}, a = 1, 2, 3$$

Donc

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (\text{III.7})$$

Les tenseur antisymétries des champs des jauges correspond les deux groupes $U(1)$ et $SU(2)$ respectivement donnée par :

$$[D_\mu, D_\nu] = -ie F_{\mu\nu} \quad (\text{III.8})$$

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig F_{\mu\nu} \quad (\text{III.9})$$

III-3-Rappelle sur la théorie électrofaible :

La dérivée covariante généralisée pour cette théorie devient de la forme suivant :

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \quad (\text{III.10})$$

Avec g' et g sont les deux constantes de couplage correspondant les groupes de jauge $U(1)$ et $SU(2)$ respectivement.

Aussi On a vu dans le premier chapitre que l'expression de la densité lagrangienne de modèle standard (modèle électrofaible) dans l'espace ordinaire est donnée par : [3,11]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \underbrace{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{U(1)} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i}}_{(SU(2), i=1..3)} && \text{Terme de jauge} \\ & + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 (\phi^\dagger \phi) - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 && \text{Partie scalaire} \\ & + \sum_{i=1}^3 \left(\bar{\psi}_L^{(i)} i \gamma^\mu D_\mu \psi_L^{(i)} + \bar{\psi}_R^{(i)} i \gamma^\mu D_\mu \psi_R^{(i)} \right) && \text{Partie fermionique} \\ & - \sum_{ij=1}^3 \left(g_y^{ij} (\bar{\psi}_L^{(i)} \phi) \psi_R^{(j)} + g_y^{\dagger ij} \bar{\psi}_R^{(i)} (\phi^\dagger \psi_L^{(j)}) \right) && \text{Terme de Yukawa} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

III-4-Les transformations des jauges dans l'espace non commutatif :

Maintenant on applique les formalismes mathématiques de l'espace non commutatif sur les transformations de jauge ordinaire, on vu que les transformations de jauge des champs spinoriels ψ , le champ de jauge A_μ et la tenseur $F_{\mu\nu}$ dans l'espace ordinaire sont donnée respectivement :

$$\delta_\alpha \psi(x) = i\alpha(x)\psi(x) \quad (\text{III.12})$$

$$\delta_\alpha A_\mu = \partial_\mu \alpha(x) + i[\alpha(x), A_\mu] \quad (\text{III.13})$$

$$\delta_\alpha F_{\mu\nu} = i[\alpha(x), F_{\mu\nu}] \quad (\text{III.14})$$

Dans ce cas, les transformations qui correspondent les éléments précédent dans l'espace non commutatif sont trouvé en utilisant le produit star (*) : [12, 13, 14]

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{\psi}(x) = i\hat{\Lambda}(x) * \hat{\psi}(x) \quad (\text{III.15})$$

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{A}_\mu = -i[x_\mu, \hat{\Lambda}(x)] + i[\hat{\Lambda}(x), \hat{A}_\mu] \quad (\text{III.16})$$

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{F}_{\mu\nu} = i[(\hat{\Lambda}(x), \hat{F}_{\mu\nu})] \quad (\text{III.17})$$

Avec $\Lambda(x)$ le paramètre des transformations infinitésimales tel que :

$$\hat{\Lambda}(x) = \Lambda(x)_a T^a$$

Le commutateur $[x_\mu, \hat{\Lambda}(x)]$ s'écrit :

$$[x_\mu, \hat{\Lambda}(x)] = i\theta_{\mu\nu} \partial^\nu \Lambda(x) \quad (\text{III.18})$$

Ce que permet de trouver l'expression de transformation $\hat{\delta}_\Lambda \hat{A}_\mu$ et $\hat{F}_{\mu\nu}(x)$ dans l'espace non commutatif :

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\Lambda}(x) + i[\hat{\Lambda}(x), \hat{A}_\mu] \quad (\text{III.19})$$

$$\hat{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \hat{A}_\nu(x) - \partial_\nu \hat{A}_\mu(x) - i[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(x)] \quad (\text{III.20})$$

Avec

$$\hat{A}(x) = i\theta_{\mu\nu}\hat{A}^\nu(x) \quad , \quad \hat{F}_{\mu\nu}(x) = i\theta_{\mu k}\theta_{\nu l}\hat{F}^{kl}(x) \quad (\text{III.21})$$

Concernant l'expression $\hat{D}_\mu\hat{\psi}$ dans l'espace non commutatif, on applique les transformations que on vu dans le deuxième chapitre, on peut trouver facilement :

$$\begin{aligned} \hat{D}_\mu\hat{\psi} &= (\partial_\mu - i\hat{A}_\mu) * \hat{\psi} \\ \hat{D}_\mu\hat{\psi} &= \partial_\mu\hat{\psi} - i\hat{A}_\mu * \hat{\psi} \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Donc

$$\hat{\delta}_\alpha(\hat{D}_\mu\hat{\psi}(x)) = i\hat{\Lambda}_\alpha(x) * \hat{D}_\mu\hat{\psi}(x) \quad (\text{III.23})$$

Et le tenseur de courbure non commutatif $F_{\mu\nu}(x)$ est défini par la relation suivant :

$$\hat{F}_{\mu\nu}(x) = i[\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu] \quad (\text{III.24})$$

Donc finalement les transformations de Seiberg-Witten :

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_\alpha[A] &= \alpha(x) + \frac{1}{4}\theta^{ij}\{\partial_i\alpha(x), A_j\} + O(\theta^2) \\ \hat{\psi}(x) &= \psi - \frac{1}{2}\theta^{ij}A_i\partial_j\psi + \frac{i}{4}\theta^{ij}A_iA_j\psi + O(\theta^2) \\ \hat{A}_\mu[A] &= A_\mu - \frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_k, \partial_l A_\mu + F_{l\mu}\} + O(\theta^2) \\ \hat{F}_{\mu\nu}[A] &= F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\theta^{kl}\{F_{\mu k}, F_{\nu l}\} - \frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_k, (\partial_l + D_l)F_{\mu\nu}\} + O(\theta^2) \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

III-5- La théorie électrofaible $SU(2) \times U(1)$ dans l'espace non commutatif :

III-5-1-Lagrangien de modèle électrofaible $SU(2) \times U(1)$: [11, 12, 17, 18, 19]

Le lagrangien du modèle électrofaible dans l'espace non commutatif est construit à partir du lagrangien de modèle électrofaible dans l'espace ordinaire comme suit :

-Le produit normal des différents champs dans le lagrangien est remplacé par le produit de Moyal avec l'ordering de Weyl.

-Les champs de matière et de jauge sont remplacés par leurs Seiberg-Witten maps.

Donc l'expression du lagrangien du modèle électrofaible dans l'espace non commutatif donnée par :

$$\mathcal{L}_{MSNC} = \mathcal{L}_{jaugeNC} + \mathcal{L}_{higgsNC} + \mathcal{L}_{fermionNC} + \mathcal{L}_{yukawaNC} \quad (III.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MSNC} = & \underbrace{-\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu}}_{U(1)} - \underbrace{\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu}^i * \hat{F}^{i\mu\nu}}_{(SU(2), i=1..3)} && \text{Terme de jauge} \\ & + \rho_0 (\hat{D}_\mu \hat{\phi})^\dagger * \rho_0 (\hat{D}^\mu \hat{\phi}) - m^2 (\rho_0 (\hat{\phi})^\dagger * \rho_0 (\hat{\phi})) \\ & - \lambda (\rho_0 (\hat{\phi})^\dagger * \rho_0 (\hat{\phi}) * \rho_0 (\hat{\phi})^\dagger * \rho_0 (\hat{\phi})) && \text{Partie scalaire} \\ & + \sum_{i=1}^3 \left(\overline{\hat{\psi}}_L^{(i)} * i\gamma^\mu \hat{D}_\mu \hat{\psi}_L^{(i)} + \overline{\hat{\psi}}_R^{(i)} * i\gamma^\mu \hat{D}_\mu \hat{\psi}_R^{(i)} \right) && \text{Partie fermionique} \\ & - \sum_{ij=1}^3 \left(g_y^{ij} \overline{\hat{\psi}}_L^{(i)} * \rho_L(\hat{\phi}) * \hat{\psi}_R^{(j)} + g_y^{\dagger ij} \overline{\hat{\psi}}_R^{(i)} * (\rho_L(\hat{\phi})^\dagger * \hat{\psi}_L^{(j)}) \right) && \text{Terme de Yukawa} \end{aligned} \quad (III.27)$$

En utilisant les propriétés du produit star et les transformations de Seiberg-Witten :

1) Le terme de jauge non commutatif :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{jaugeNC} &= \underbrace{-\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu}}_{U(1)} - \underbrace{\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu}^i * \hat{F}^{i\mu\nu}}_{(SU(2), i=1..3)} \\ &= -\frac{1}{2g} tr_1 \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2g} tr_2 \hat{F}_{\mu\nu}^i * \hat{F}^{i\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{jaugeNC} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} tr_2 F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{2g} tr_1 F_{\mu\nu}^{(1)} F^{\mu\nu} - g\theta^{\rho\sigma} tr_2 F_{\rho\mu}^i F_{\sigma\nu}^i F^{i\mu\nu} + O(\theta^2) \\
\mathcal{L}_{jaugeNC} &= \mathcal{L}_{or} - \frac{1}{2g} tr_1 F_{\mu\nu}^{(1)} F^{\mu\nu} - g\theta^{\rho\sigma} tr_2 F_{\rho\mu}^i F_{\sigma\nu}^i F^{i\mu\nu} + O(\theta^2) \quad (III.28)
\end{aligned}$$

Avec

$$\mathcal{L}_{contribution} = -\frac{1}{2g} tr_1 F_{\mu\nu}^{(1)} F^{\mu\nu} - g\theta^{\rho\sigma} tr_2 F_{\rho\mu}^i F_{\sigma\nu}^i F^{i\mu\nu}$$

2) Le terme de Higgs (Partie scalaire) non commutatif est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{higgsNC} &= \rho_0(\hat{D}_\mu \hat{\phi})^\dagger * \rho_0(\hat{D}^\mu \hat{\phi}) - m^2 (\rho_0(\hat{\phi})^\dagger * \rho_0(\hat{\phi})) \\
&\quad - \lambda (\rho_0(\hat{\phi})^\dagger * \rho_0(\hat{\phi}) * \rho_0(\hat{\phi})^\dagger * \rho_0(\hat{\phi})) \\
\mathcal{L}_{higgsNC} &= (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 (\phi^\dagger \phi) - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \\
&\quad + (D_\mu \phi)^\dagger \left(D^\mu \rho_0(\phi^1) + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha V^\mu \partial_\beta \phi + \Gamma^\mu \phi \right) \\
&\quad + \left(D_\mu \rho_0(\phi^1) + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha V_\mu \partial_\beta \phi + \Gamma_\mu \phi \right)^\dagger (D^\mu \phi) \\
&\quad + \frac{1}{4} m^2 \theta^{\mu\nu} \phi^\dagger (g' F_{\mu\nu} + g F_{\mu\nu}^i) \phi - \lambda i \theta^{\alpha\beta} \phi^\dagger \phi (D_\alpha \phi)^\dagger (D_\beta \phi) + O(\theta^2) \\
\mathcal{L}_{higgsNC} &= \mathcal{L}_{higgsor} + (D_\mu \phi)^\dagger \left(D^\mu \rho_0(\phi^1) + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha V^\mu \partial_\beta \phi + \Gamma^\mu \phi \right) \\
&\quad + \left(D_\mu \rho_0(\phi^1) + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha V_\mu \partial_\beta \phi + \Gamma_\mu \phi \right)^\dagger (D^\mu \phi) \quad (III.29) \\
&\quad + \frac{1}{4} m^2 \theta^{\mu\nu} \phi^\dagger (g' F_{\mu\nu} + g F_{\mu\nu}^i) \phi - \lambda i \theta^{\alpha\beta} \phi^\dagger \phi (D_\alpha \phi)^\dagger (D_\beta \phi) + O(\theta^2)
\end{aligned}$$

Avec

$$V_\mu = \underbrace{g' B_\mu}_{U(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^3 g \frac{\sigma^i}{2} A_\mu^i}_{SU(2)} \quad (III.30)$$

Et

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu &= -iV_\mu^1 = i\frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}\left\{g'B_\alpha + g\sum_{i=1}^3\frac{\sigma^i}{2}A_\alpha^i g'\partial_\beta B_\mu + g\partial_\beta\sum_{i=1}^3\frac{\sigma^i}{2}A_\mu^i + g'F_{\beta\mu} + gF_{\beta\mu}^i\right\} \\ &= i\frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}\left\{V_\alpha, \partial_\beta V_\mu + g'F_{\beta\mu} + gF_{\beta\mu}^i\right\}\end{aligned}\quad (\text{III.31})$$

Nous avons également employé la représentation ρ_0 :

$$\rho_0(\hat{\varphi}) = \varphi + \rho_0(\varphi^1) + O(\theta^2) \quad (\text{III.32})$$

Avec

$$\rho_0(\varphi^1) = -\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}(g'B_\alpha + g\sum_{a=1}^3\frac{\sigma^a}{2}A_\mu^a)\partial_\beta\varphi + \frac{i}{8}\theta^{\alpha\beta}\left[V_\alpha, g'B_\beta + g\sum_{i=1}^3\frac{\sigma^i}{2}A_\beta^i\right]\varphi \quad (\text{III.33})$$

Le champ de Higgs non-commutatif $\hat{\varphi}$ est donné par son Seiberg-Witten map suivant :

$$\hat{\varphi} = \varphi + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}V_\nu(\partial_\mu\varphi - \frac{i}{2}V_\mu\varphi) + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi - \frac{i}{2}V_\mu\varphi) + O(\theta^2) \quad (\text{III.34})$$

3) Partie fermionique non commutatif est :

$$\mathcal{L}_{\text{fermion NC}} = \sum_{i=1}^3\left(\overline{\hat{\psi}}_L^{(i)} * i\gamma^\mu \hat{D}_\mu \hat{\psi}_L^{(i)} + \overline{\hat{\psi}}_R^{(i)} * i\gamma^\mu \hat{D}_\mu \hat{\psi}_R^{(i)}\right) \quad (\text{III.35})$$

Avec la dérivée covariante du champ fermionique on écrit :

$$\begin{cases} \hat{D}_\mu \hat{\psi}_L^{(i)} = \partial_\mu \hat{\psi}_L^{(i)} - i\hat{A}_\mu * \hat{\psi}_L^{(i)} \\ \hat{D}_\mu \hat{\psi}_R^{(i)} = \partial_\mu \hat{\psi}_R^{(i)} - i\hat{A}_\mu * \hat{\psi}_R^{(i)} \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

Et les développements des champs fermionique on écrit :

$$\begin{cases} \hat{\psi}_L^{(i)} = \psi_L^{(i)} + \psi_L^{1(i)} + \psi_L^{2(i)} + O(\theta^2) \\ \hat{\psi}_R^{(i)} = \psi_R^{(i)} + \psi_R^{1(i)} + \psi_R^{2(i)} + O(\theta^2) \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

Tel que :

$$\begin{cases} \psi_L^{1(i)} = -\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}A_\mu\partial_\nu\psi_L^{(i)} + \frac{i}{4}\theta^{\mu\nu}A_\mu A_\nu\psi_L^{(i)} \\ \psi_R^{1(i)} = -\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}A_\mu\partial_\nu\psi_R^{(i)} + \frac{i}{4}\theta^{\mu\nu}A_\mu A_\nu\psi_R^{(i)} \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

Donc le terme des champs fermionique devient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fermionNC} &= \sum_{i=1}^3 (\bar{\psi}_L^{(i)} i\gamma^\mu \hat{D}_\mu \hat{\psi}_L^{(i)} + \bar{\psi}_R^{(i)} i\gamma^\mu \hat{D}_\mu \hat{\psi}_R^{(i)} \\
&\quad - \frac{1}{4} \theta^{\mu\nu} \bar{\psi}_L^{(i)} F_{\mu\nu}^a i\gamma^\rho D_\rho \psi_L^{(i)} - \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \bar{\psi}_L^{(i)} i\gamma^\rho F_{\rho\nu}^a D_\nu \psi_L^{(i)} \\
&\quad - \frac{1}{4} \theta^{\mu\nu} \bar{\psi}_R^{(i)} F_{\mu\nu} i\gamma^\rho D_\rho \psi_R^{(i)} - \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \bar{\psi}_R^{(i)} i\gamma^\rho F_{\rho\nu} D_\nu \psi_R^{(i)}) + O(\theta^2) \\
&= \mathcal{L}_{fermion} + \mathcal{L}_{contribution}
\end{aligned} \tag{III.39}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{contribution} &= \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{1}{4} \theta^{\mu\nu} \bar{\psi}_L^{(i)} F_{\mu\nu}^a i\gamma^\rho D_\rho \psi_L^{(i)} - \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \bar{\psi}_L^{(i)} i\gamma^\rho F_{\rho\nu}^a D_\nu \psi_L^{(i)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \theta^{\mu\nu} \bar{\psi}_R^{(i)} F_{\mu\nu} i\gamma^\rho D_\rho \psi_R^{(i)} - \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \bar{\psi}_R^{(i)} i\gamma^\rho F_{\rho\nu} D_\nu \psi_R^{(i)} \right)
\end{aligned}$$

4) Le terme de Yukawa :

$$\mathcal{L}_{yukawaNC} = -\sum_{ij=1}^3 \left(g_y^{ij} (\bar{\psi}_L^{(i)} * \rho_L(\hat{\phi})) * \hat{\psi}_R^{(j)} + g_y^{\dagger ij} \bar{\psi}_R^{(i)} * (\rho_L(\hat{\phi})^\dagger * \hat{\psi}_L^{(j)}) \right) \tag{III.40}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{yukawaNC} &= -\sum_{ij=1}^3 \left(g_y^{ij} (\bar{\psi}_L^{(i)} \phi) \psi_R^{(j)} + g_y^{\dagger ij} \bar{\psi}_R^{(i)} (\phi^\dagger \psi_L^{(j)}) \right) \\
&\quad - \sum_{ij=1}^3 g_y^{ij} ((\bar{\psi}_L^{(i)} \phi) \psi_R^{1(j)} + \bar{\psi}_L^{(i)} \rho_L(\phi^1) \psi_R^{(j)} + (\bar{\psi}_L^{(i)} \phi) \psi_R^{(j)} \\
&\quad + \bar{\psi}_R^{(i)} (\phi^\dagger \psi_L^{1(j)}) + \bar{\psi}_R^{(i)} (\rho_L(\phi^1)^\dagger \psi_L^{(j)}) + \bar{\psi}_R^{(i)} (\phi^\dagger \psi_L^{(j)}) \\
&\quad + i \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_L^{(i)} \partial_\nu \phi \psi_R^{(j)} + i \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_R^{(i)} \partial_\nu \phi^\dagger \psi_L^{(j)}) + O(\theta^2) \\
\mathcal{L}_{yukawaNC} &= \mathcal{L}_{yukawa} + \mathcal{L}_{contribution}
\end{aligned} \tag{III.41}$$

Avec

$$\mathcal{L}_{yukawa} = -\sum_{ij=1}^3 \left(g_y^{ij} (\bar{\psi}_L^{(i)} \phi) \psi_R^{(j)} + g_y^{\dagger ij} \bar{\psi}_R^{(i)} (\phi^\dagger \psi_L^{(j)}) \right)$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{contribution} &= -\sum_{ij=1}^3 g_y^{ij} ((\bar{\psi}_L^{(i)} \phi) \psi_R^{1(j)} + \bar{\psi}_L^{(i)} \rho_L(\phi^1) \psi_R^{(j)} + (\bar{\psi}_L^{(i)} \phi) \psi_R^{(j)} \\
&\quad + \bar{\psi}_R^{(i)} (\phi^\dagger \psi_L^{1(j)}) + \bar{\psi}_R^{(i)} (\rho_L(\phi^1)^\dagger \psi_L^{(j)}) + \bar{\psi}_R^{(i)} (\phi^\dagger \psi_L^{(j)}) \\
&\quad + i \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_L^{(i)} \partial_\nu \phi \psi_R^{(j)} + i \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_R^{(i)} \partial_\nu \phi^\dagger \psi_L^{(j)})
\end{aligned}$$

Finalement l'expression de lagrangien de modèle électrofaible non commutatif est :

$$\mathcal{L}_{NC} = \mathcal{L}_{ordinaire} + \mathcal{L}_{contribution}$$

- Les indices ψ_L et ψ_R dénotent les composantes gauches et droites standard;
- g_y^{ij} les matrices de couplage de Yukawa;
- les indices $i, j = \overline{1, 3}$ le numéro de génération;
- où $F_{\mu\nu}$; $F_{\mu\nu}^a$ représentent les tenseurs de courbures des champs des groupes $U(1)$ et $SU(2)$;
- tr_1 et tr_2 sont des traces des groupes $U(1)$ et $SU(2)$.

III-5-2-La brisure spontanée de la Symétrie $SU(2) \times U(1)$: [17]

Dans le modèle standard, la brisure de symétrie est due au mécanisme de Higgs (brisure spontanée) pour générer la masse des bosons par ce que le terme de Higgs non commutatif est constitué de terme ordinaire avec le terme de contribution suivant la forme ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{higgsNC} = & \mathcal{L}_{higgsor} + (D_\mu \varphi)^\dagger \left(D^\mu \rho_0(\varphi^1) + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha V^\mu \partial_\beta \varphi + \Gamma^\mu \varphi \right) \\ & + \left(D_\mu \rho_0(\varphi^1) + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha V_\mu \partial_\beta \varphi + \Gamma_\mu \varphi \right)^\dagger (D^\mu \varphi) \\ & + \frac{1}{4} m^2 \theta^{\mu\nu} \varphi^\dagger (g' F_{\mu\nu} + g F_{\mu\nu}^i) \varphi - \lambda i \theta^{\alpha\beta} \varphi^\dagger \varphi (D_\alpha \varphi)^\dagger (D_\beta \varphi) + O(\theta^2) \end{aligned} \quad (III.42)$$

Avec

$$\begin{aligned} V(\varphi) = & m^2 (\varphi^\dagger \varphi) + \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2 \\ & + \frac{1}{4} m^2 \theta^{\mu\nu} \varphi^\dagger (g' F_{\mu\nu} + g F_{\mu\nu}^i) \varphi + O(\theta^2) \end{aligned} \quad (III.43)$$

L'état de vide c'est un l'état plus stable $\Leftrightarrow$ le potentiel minimal, on suppose que :

$$\chi = \varphi^\dagger \varphi \rightarrow V = m^2 \chi + \lambda \chi^2 \quad (III.44)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \chi} = m^2 + 2\lambda \chi \rightarrow \chi = \frac{-m^2}{2\lambda} \quad (III.45)$$

$$\chi = \varphi^\dagger \varphi = \frac{-m^2}{2\lambda} \dots\dots\dots (**) \quad (\text{III.46})$$

Pour $m^2 < 0$ explicitement, étant donné φ un doublet $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ l'état plus simple de l'équation

$$(**) : \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{2 \times 1} \quad \text{Si } \rho = \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} \quad (\text{III.47})$$

Donc

$$\varphi^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{1 \times 2} \quad (\text{III.48})$$

$$\varphi^\dagger \varphi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{1 \times 2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \frac{\rho^2}{2} \quad (\text{III.49})$$

Lorsque n'outre système physique on interaction, le système doit être en l'état dynamique c'est-à-dire l'état minimal a vibré.

$$\rho \rightarrow \rho'(x) = \rho + h(x) \quad (\text{III.50})$$

On choisit donc

$$\varphi' = U(x)\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

De même procédure suivi dans le chapitre I, on remplacé l'expiration (III.50) dans l'équation (III.42) et on fait un changement :

$$w_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \pm iA_\mu^2) \quad , \quad A_\mu = \frac{g'B_\mu + gA_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{Et} \quad Z_\mu = \frac{g'B_\mu - gA_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (\text{III.51})$$

Donc l'équation (III.42) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC(ABrisure)} &= \mathcal{L}_{COM(AB)}(p.\text{scalaire}) + \text{terme.d'intraction} \\ &= (M_w)^2 w_\mu^+ w^{+\mu} + (M_w)^2 w_\mu^- w^{-\mu} + (M_Z)^2 Z_\mu^0 Z^{0\mu} \\ &\quad + 0(A_\mu A^\mu) + 2(M_h)^2 h^2(x) + \text{autre.terme} \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

Les masses des bosons $w_\mu^\pm, Z_\mu, A_\mu$ et Higgs H définie par :

$$M_{w^+} = M_{w^-} = \frac{\rho g}{2}, \quad M_Z = \frac{\rho \sqrt{g^2 + g'^2}}{2}, \quad M_{A_\mu} = 0 \quad \text{Et} \quad M_h^2 = -2m^2 \quad (\text{III.53})$$

Après les briseurs spontanés de la symétrie on trouve seule de groupe $U(1)$.

Les termes supplémentaires dans l'expression (III.52) représenté l'interaction :

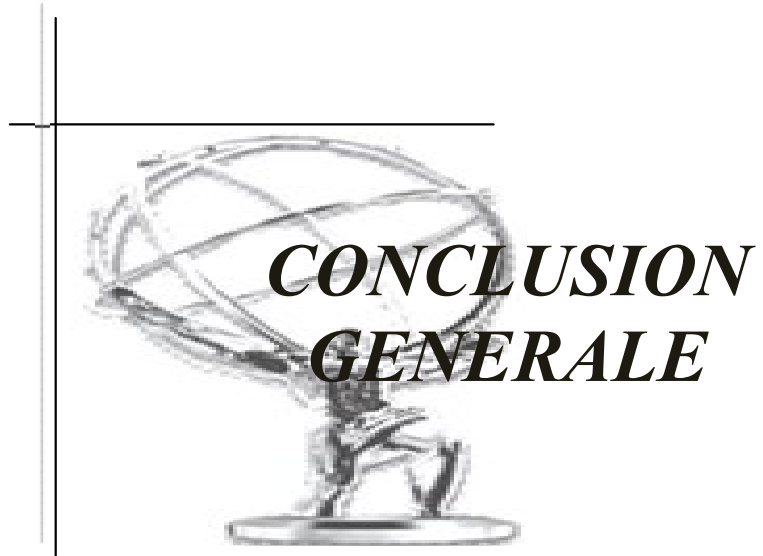
1. Propre ou self interaction
2. Mutuelle entre les bosons de jauge
3. Higgs et les bosons de jauge $w_\mu^\pm$ et Z_μ

III-6-Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons passé en revue les différents phénomènes physiques qui s'intéressent par les interactions électrofaibles, et on a étudié le phénomène de la brisure spontanée dans la symétrie $SU(2) \times U(1)$ dans l'espace non commutatif.

Il a conclu que la symétrie physique a été élargie plus dans l'espace non commutatif.

Nous terminerons ce mémoire par une conclusion générale exposera le travail accompli.



Conclusion générale:

À travers ce mémoire en physique théorique spécialité physique de particule à haute énergie promotion 2012-2013, Nous avons présenté le modèle standard des interactions électrofaible de groupe $SU(2) \times U(1)$ dans les deux espaces ordinaire et non commutatif, après de cette présentation de la théorie et symétrie de jauge avec la construction du lagrangien analysé que la répartition et représentation des différents champs dynamiques dans ce modèle, et comme une solution pour résoudre certains problèmes, nous avons proposé une nouvelle espace, c'est l'espace non-commutative, Nous avons discuté l'idée du non-commutativité de l'espace temps et de son importance; donc d'un nouveau formalisme mathématique et physique, on a présenté les formalismes mathématiques nécessaires :Weyl ordering, le produit de Moyal, le mapping de Seiberg-Witten....etc. Comme application, expliquer les différents Termes du lagrangien ont été obtenus explicitement ainsi que les différentes transformations de jauge non commutative, les dérivées covariantes ... etc. Nous avons calculé les termes de lagrangien. Et en particulier on étudié le phénomène de brisure spontanée de la symétrie dans l'espace non commutatif, on vu que les masse des bosons ne change pas mais on a détecté des interactions entre les bosons de jauge et du self interaction.

Nous avons observé que la symétrie physique est plus large. Ce qui permet de proposer les conditions physiques correspondantes pour obtenir probablement une théorie physique converge à haute énergie.

Annexe :

01) Trouver le produit star :

$$W(f)W(g) = W(f * g) = (2\pi)^{-N} \int d^N k d^N l e^{i(k_m + l_m)\hat{x}^m - \frac{i}{2}k_m l_n \theta^{mn}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(l)$$

En utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff [C-B-H] :

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}h^2[[A,B],B] - \frac{1}{12}h^2[[A,B],A] + \dots}$$

Donc l'opérateur produit $W(f)W(g)$ prend la forme

$$\begin{aligned} W(f)W(g) &= W \left((2\pi)^{-N} \int d^N k d^N l e^{\frac{i}{2}\theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n}} e^{ik_m x^m + il_n y^n} \right) \bigg|_{y \rightarrow x} \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) \\ &= W \left(e^{\frac{i}{2}\theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n}} f(x)g(y) \right) \bigg|_{y \rightarrow x} \end{aligned}$$

Donc $W(f)W(g) = W(f * g)$ avec $(f * g)(x)$ est une fonction des variables classiques :

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= e^{\frac{i}{2}\theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n}} f(x)g(y) \bigg|_{y \rightarrow x} \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2} h \theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} f(x) \frac{\partial}{\partial x^n} g(x) + O(\theta^2) \end{aligned}$$

02) Trouver l'équation générale de $\hat{\Lambda}_\alpha[A]$:

$$\begin{aligned} [\hat{\delta}_\alpha, \hat{\delta}_\beta] \hat{\psi}(x) &= \hat{\delta}_\alpha (i \hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\psi}(x)) - \hat{\delta}_\beta (i \hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi}(x)) \\ &= i \hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\psi}(x) + i \hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\delta}_\alpha \hat{\psi}(x) - i \hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi}(x) - i \hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\delta}_\beta \hat{\psi}(x) \\ &= i \hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\psi}(x) + i \hat{\Lambda}_\beta[A] * (i \hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi}(x)) \\ &\quad - i \hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi}(x) - i \hat{\Lambda}_\alpha[A] * (i \hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\psi}(x)) \\ &= i(\hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A]) * \hat{\psi}(x) + (\hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\Lambda}_\beta[A] - \hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\Lambda}_\alpha[A]) * \hat{\psi}(x) \\ &= i(\hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A]) * \hat{\psi}(x) + [\hat{\Lambda}_\alpha[A], \hat{\Lambda}_\beta[A]] * \hat{\psi}(x) = \hat{\Lambda}_{[\alpha, \beta]}[A] * \hat{\psi}(x) \end{aligned}$$

Donc

$$i(\hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A]) + [\hat{\Lambda}_\alpha[A], \hat{\Lambda}_\beta[A]] = \hat{\Lambda}_{[\alpha, \beta]}[A] = i \hat{\Lambda}_{\alpha \times \beta}[A]$$

03) Trouver l'équation de première ordre de $\hat{\Lambda}_\alpha[A]$:

$$\begin{aligned}
 i(\hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A]) + [\hat{\Lambda}_\alpha[A], \hat{\Lambda}_\beta[A]] &= i\hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] - i\hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A] \\
 &+ \hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\Lambda}_\beta[A] - \hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\Lambda}_\alpha[A] \\
 i\hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] - i\hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A] &= i\hat{\delta}_\alpha (\beta(x) + h\Lambda^1_\beta[A] + h^2\Lambda^2_\beta[A] + \dots) - i\hat{\delta}_\beta (\alpha(x) + h\Lambda^1_\alpha[A] + \dots) \\
 \hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\Lambda}_\beta[A] &= (\alpha(x) + h\Lambda^1_\alpha[A] + h^2\Lambda^2_\alpha[A] + \dots) * (\beta(x) + h\Lambda^1_\beta[A] + h^2\Lambda^2_\beta[A] + \dots) \\
 \hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\Lambda}_\alpha[A] &= (\beta(x) + h\Lambda^1_\beta[A] + h^2\Lambda^2_\beta[A] + \dots) * (\alpha(x) + h\Lambda^1_\alpha[A] + h^2\Lambda^2_\alpha[A] + \dots) \\
 i(\hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A]) + [\hat{\Lambda}_\alpha[A], \hat{\Lambda}_\beta[A]] &= i(\hat{\delta}_\alpha \beta(x) + h\hat{\delta}_\alpha \Lambda^1_\beta[A] + h^2\hat{\delta}_\alpha \Lambda^2_\beta[A] + \dots) \\
 &- i(\hat{\delta}_\beta \alpha(x) + h\hat{\delta}_\beta \Lambda^1_\alpha[A] + h^2\hat{\delta}_\beta \Lambda^2_\alpha[A] + \dots) \\
 &+ [\alpha(x)\beta(x) + \frac{i}{2}h\theta^{ij}\partial_i\alpha(x)\partial_j\beta(x) + \dots + h\alpha(x)\Lambda^1_\beta[A] + \dots + h\Lambda^1_\alpha[A]\beta(x) + \dots + \dots] \\
 &- [\beta(x)\alpha(x) + \frac{i}{2}h\theta^{ij}\partial_i\beta(x)\partial_j\alpha(x) + \dots + h\beta(x)\Lambda^1_\alpha[A] + \dots + h\Lambda^1_\beta[A]\alpha(x) + \dots + \dots] \\
 &= i(\Lambda_{\alpha\times\beta}[A] + h\Lambda^1_{\alpha\times\beta}[A] + h^2\Lambda^2_{\alpha\times\beta}[A] + \dots)
 \end{aligned}$$

Donc l'équation premier ordre de (h) on trouve :

$$i(\hat{\delta}_\alpha \Lambda^1_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \Lambda^1_\alpha[A]) + [\alpha, \Lambda^1_\beta[A]] - [\beta, \Lambda^1_\alpha[A]] - i\Lambda^1_{\alpha\times\beta}[A] = -\frac{i}{2}\theta^{ij}\{\partial_i\alpha(x), \partial_j\beta\}$$

Avec

$$\hat{\delta}_\alpha \beta(x) = \hat{\delta}_\beta \alpha(x) = 0$$

04) Trouver l'équation du champ spénoriel $\hat{\psi}(x)$ dans l'espace non commutatif :

$$\begin{aligned}
 \hat{\delta}_\alpha \hat{\psi}[A] &= \delta_\alpha \psi + h^1\delta_\alpha \psi^1[A] + h^2\delta_\alpha \psi^2[A] + \dots \\
 &= i\hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi}
 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 i\hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi} &= i(\alpha(x) + h^1\Lambda^1_\alpha[A] + h^2\Lambda^2_\alpha[A] + \dots) * (\psi + h^1\psi^1[A] + h^2\psi^2[A] + \dots) \\
 &= i(\alpha(x)\psi + \frac{i}{2}h\theta^{ij}\partial_i\alpha(x)\partial_j\psi + \dots + h^1\alpha(x)\psi^1[A] + \frac{i}{2}h^2\theta^{ij}\partial_i\alpha(x)\partial_j\psi^1[A] + \dots \\
 &+ h^2\alpha(x)\psi^2[A] + \frac{i}{2}h^3\theta^{ij}\partial_i\alpha(x)\partial_j\psi^2[A] + \dots + h\Lambda^1_\alpha[A]\psi + \frac{i}{2}h^2\theta^{ij}\partial_i\Lambda^1_\alpha[A]\partial_j\psi + \dots \\
 &+ h^2\Lambda^1_\alpha[A]\psi^1[A] + \frac{i}{2}h^3\theta^{ij}\partial_i\Lambda^1_\alpha[A]\partial_j\psi^1[A] + \dots + h^3\Lambda^1_\alpha[A]\psi^2[A] + \dots)
 \end{aligned}$$

Donc l'équation premier ordre de (h) on trouve :

$$\delta_\alpha \psi^1[A] = i\alpha(x)\psi^1[A] + i\Lambda^1_\alpha[A]\psi - \frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i\alpha(x)\partial_j\psi$$

05) Trouver le potentiel de jauge $\hat{A}_\mu$ dans l'espace non commutatif :

$$\hat{A}_\mu[A] = A_\mu + h^1 A_\mu^1[A] + h^2 A_\mu^2[A] + \dots$$

Donc

$$\begin{aligned} \delta_\alpha \hat{A}_\mu[A] &= \delta_\alpha A_\mu + h^1 \delta_\alpha A_\mu^1[A] + h^2 \delta_\alpha A_\mu^2[A] + \dots \\ &= \partial_\mu \hat{\Lambda}_\alpha[A] + i[\hat{\Lambda}_\alpha[A], \hat{A}_\mu] \\ \partial_\mu \hat{\Lambda}_\alpha[A] + i[\hat{\Lambda}_\alpha[A], \hat{A}_\mu] &= \partial_\mu (\alpha(x) + h^1 \Lambda_\alpha^1[A] + h^2 \Lambda_\alpha^2[A] + \dots) + i\hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{A}_\mu - i\hat{A}_\mu * \hat{\Lambda}_\alpha[A] \\ &= \partial_\mu \alpha(x) + h^1 \partial_\mu \Lambda_\alpha^1[A] + h^2 \partial_\mu \Lambda_\alpha^2[A] + \dots \\ &\quad + i(\alpha(x) + h^1 \Lambda_\alpha^1[A] + h^2 \Lambda_\alpha^2[A] + \dots) * (A_\mu + h^1 A_\mu^1[A] + h^2 A_\mu^2[A] + \dots) \\ &\quad - i(A_\mu + h^1 A_\mu^1[A] + h^2 A_\mu^2[A] + \dots) * (\alpha(x) + h^1 \Lambda_\alpha^1[A] + h^2 \Lambda_\alpha^2[A] + \dots) \\ \partial_\mu \hat{\Lambda}_\alpha[A] + i[\hat{\Lambda}_\alpha[A], \hat{A}_\mu] &= \partial_\mu \alpha(x) + h^1 \partial_\mu \Lambda_\alpha^1[A] + h^2 \partial_\mu \Lambda_\alpha^2[A] + \dots + i \left\{ \alpha(x) A_\mu + \frac{i}{2} h \theta^{ij} \partial_i \alpha(x) \partial_j A_\mu + \dots \right. \\ &\quad + h^1 \alpha(x) A_\mu^1[A] + \frac{i}{2} h^2 \theta^{ij} \partial_i \alpha(x) \partial_j A_\mu^1[A] + \dots + h^2 \alpha(x) A_\mu^2[A] + \frac{i}{2} h^3 \theta^{ij} \partial_i \alpha(x) \partial_j A_\mu^2[A] + \dots \\ &\quad + h^1 \Lambda_\alpha^1[A] A_\mu + \frac{i}{2} h^2 \theta^{ij} \partial_i \Lambda_\alpha^1[A] \partial_j A_\mu + \dots + h^2 \Lambda_\alpha^1[A] A_\mu^1[A] + \frac{i}{2} h^3 \theta^{ij} \partial_i \Lambda_\alpha^1[A] \partial_j A_\mu^1[A] + \dots \\ &\quad + h^3 \Lambda_\alpha^1[A] A_\mu^2[A] + \frac{i}{2} h^4 \theta^{ij} \partial_i \Lambda_\alpha^1[A] \partial_j A_\mu^2[A] + \dots + h^2 \Lambda_\alpha^2[A] A_\mu + \frac{i}{2} h^3 \theta^{ij} \partial_i \Lambda_\alpha^2[A] \partial_j A_\mu + \dots \\ &\quad \left. + h^3 \Lambda_\alpha^2[A] A_\mu^1[A] + \frac{i}{2} h^4 \theta^{ij} \partial_i \Lambda_\alpha^2[A] \partial_j A_\mu^1[A] + \dots + h^4 \Lambda_\alpha^2[A] A_\mu^2[A] + \frac{i}{2} h^5 \theta^{ij} \partial_i \Lambda_\alpha^2[A] \partial_j A_\mu^2[A] + \dots \right\} \\ &\quad - i \left\{ A_\mu \alpha(x) + \frac{i}{2} h \theta^{ij} \partial_i A_\mu \partial_j \alpha(x) + \dots + h^1 A_\mu \Lambda_\alpha^1[A] + \frac{i}{2} h^2 \theta^{ij} \partial_i A_\mu \partial_j \Lambda_\alpha^1[A] + \dots + h^2 A_\mu \Lambda_\alpha^2[A] \right. \\ &\quad + \frac{i}{2} h^3 \theta^{ij} \partial_i A_\mu \partial_j \Lambda_\alpha^2[A] + \dots + h^1 A_\mu^1[A] \alpha(x) + \frac{i}{2} h^2 \theta^{ij} \partial_i A_\mu^1[A] \partial_j \alpha(x) + \dots + h^2 A_\mu^1[A] \Lambda_\alpha^1[A] \\ &\quad + \frac{i}{2} h^3 \theta^{ij} \partial_i A_\mu^1[A] \partial_j \Lambda_\alpha^1[A] + \dots + h^3 A_\mu^1[A] \Lambda_\alpha^2[A] + \frac{i}{2} h^4 \theta^{ij} \partial_i A_\mu^1[A] \partial_j \Lambda_\alpha^2[A] + h^2 A_\mu^2[A] \alpha(x) \\ &\quad + \frac{i}{2} h^3 \theta^{ij} \partial_i A_\mu^2[A] \partial_j \alpha(x) + \dots + h^3 A_\mu^2[A] \Lambda_\alpha^1[A] + \frac{i}{2} h^4 \theta^{ij} \partial_i A_\mu^2[A] \partial_j \Lambda_\alpha^1[A] + \dots + h^4 A_\mu^2[A] \Lambda_\alpha^2[A] \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} h^5 \theta^{ij} \partial_i A_\mu^2[A] \partial_j \Lambda_\alpha^2[A] + \dots \right\} \end{aligned}$$

Donc l'équation premier ordre de (h) on trouve :

$$\delta_\alpha A_\mu^1[A] = \partial_\mu \Lambda_\alpha^1[A] + i[\Lambda_\alpha^1[A], A_\mu] + i[\alpha(x), A_\mu^1[A]] - \frac{1}{2} \theta^{kl} \{ \partial_k \alpha(x), \partial_l A_\mu \}$$

06) Confirmation expérimentale de la masse :

Les masses de Z^0 , $w^\pm$ et de Higgs H peut être mesure expérimental par (CERN) à partir les phénomènes :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z^0 \rightarrow e^+ e^- \\ Z^0 \rightarrow \mu^+ \mu^- \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} w^\pm \rightarrow e^\pm \nu_e (\bar{\nu}_e) \\ w^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) \end{array} \right. \quad \text{Et} \quad \left\{ \begin{array}{l} H \rightarrow Z^0 Z^0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H \rightarrow e^+ e^- e^+ e^- \\ H \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^- \end{array} \right. \\ H \rightarrow \gamma\gamma \end{array} \right.$$

Exemple :

Détection de boson Z^0 par l'expérience CDF :

Si on utilise la relation de l'énergie relativiste qui donnée par :

$$E_Z^2 = \vec{p}_Z^2 c^2 + m_Z^2 c^4$$

En appliquant les principes de conservation de l'énergie et l'impulsion :

$$E_Z = E_+ + E_-$$

$$\vec{p}_Z = \vec{p}_+ + \vec{p}_-$$

Donc on peut trouve la masse :

$$m_Z = \sqrt{\left(\frac{E_+ + E_-}{c^2} \right)^2 - \left(\frac{\vec{p}_+ + \vec{p}_-}{c} \right)^2}$$

Après les donnée numériques des valeurs associe au (E_+ , $\vec{p}_+$, E_- et $\vec{p}_-$), on trouve les masses expérimental de Z^0 :

$$M_Z \approx 91.2 \text{ GeV}/c^2$$

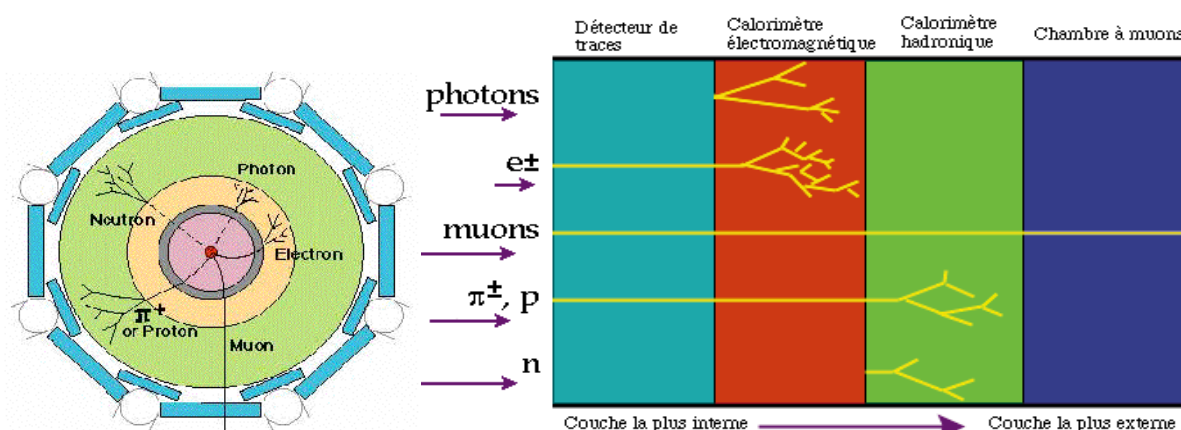


Schéma représente les traces des particules transversale et longitudinale

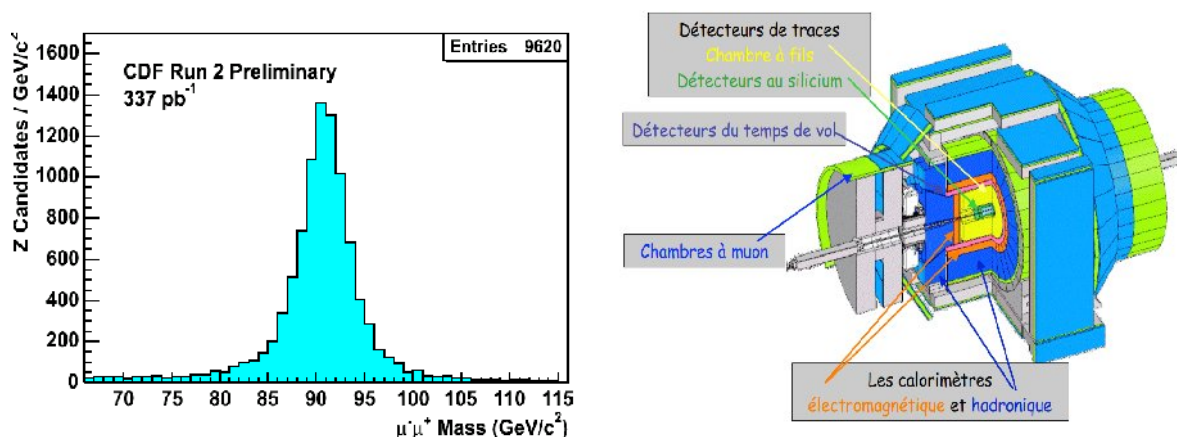


Schéma représente la masse de Z^0 à gauche et le détecteur CDF à droite

Caractéristique de détecteur :

1. Recherche du boson de Higgs, particule responsable de la masse des Z^0 et $w^\pm$ (et également de toutes les autres particules).
2. Recherche de nouvelle physique (par ex. particules supersymétriques).
3. Détecteur interne : Trace laisse par des particules chargées, mesure de leurs moments.
4. Calorimètre électromagnétique : Mesure l'énergie des électrons et des photons.
5. Calorimètre hadronique : Mesure l'énergie des hadrons.
6. Spectromètre à muons : Mesures précises sur les muons, essentiellement leurs moments.

✚ La courbe représentée est réalisé dans la conférence de physique théorique ou département de physique (Faculté des Sciences-Université de M'sila) : en 20 mai 2013 "Physics without frontiers".

Par des enseignants de physique :

- * Kate Shaw: " Introduction to Particle Physics" ;
- * Kate Shaw: "Introduction to LHC hands on session" ;
- * Amine Ahriche: "The Standard Model and Beyond" ;
- * Rachik Soualah: "Discovering Physics with ATLAS" .

Références bibliographiques :

- [01] E. Elbaz, de l'électromagnétisme à l'électrofaible. Ellipses, 1989.
- [02] E. Sérié, Théories de jauge en géométrie non commutative et généralisation du modèle De Born-Infeld, these de Doctorat, université de Paris 06, 20 septembre 2005, fichier PDF.
- [03] M. Shaposhinkove, champ quantique relativiste, 2005, fichier PDF.
- [04] F. AfAsion, théorie de jauge. Paradis 2004.
- [05] F. Delduc, introduction aux Groupes de Lie destinée aux physiciens, Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon, septembre 2008, fichier PDF.
- [06] L. Marleau, introduction à la physique des particules, université LAVAL, Québec, Canada, 1998-2003.
- [07] T-P. Cheng and L-Fong Li, Gauge theory of elementary particle physics, Oxford, September 1982.
- [08] David London, PHY6611A: Le Modèle Standard, Université de Montréal, automne 2012, fichier PDF.
- [09] T. Morii and C. S. Lim and S. N. Mukherjee, the Physics of the Standard Modele and Beyond, fichier PDF.2004.
- [10] D. BAILIN & A. LOVE, Introduction to Gauge Field Theory, ISBN 1993.

- [11] H. Menigher, au-dela du modèle standard et applications, mémoire de magister, Université Mentouri-Constantine, 17/10/2007, fichier PDF.
- [12] K. FARID, ASPECTS MATHEMATIQUES ET PHYSIQUES DE LA GEOMETRIE NON COMMUTATIVE, Université d'Arizona, 2007, fichier PDF.
- [13] B. Jurco ,L. Moller ,S. Schraml , P. Schupp ,J. Wess , construction of non-Abelian gauge theories on non commutative space, 2001, [arXiv:hep-th/0104153 V4], fichier PDF.
- [14] P. Schupp, non-Abelian gauge theory on noncommutative spaces, 2001, [arXiv:hep-th/0111038 V1], fichier PDF.
- [15] X. Calmet, Effective Field Theories on Non-Commutative Space-Time, May-2003, [arXiv:hep-ph/0305027 V2], fichier PDF.
- [16] J. D.Brace , B.L.Cerchiai , B.Zumino , Nonabelian Gauge Theories on Noncommutative Spaces, 2001, [arXiv:hep-th/0107225 V3].
- [17] Michael wohlgenannt, Chernivtsi, Ukraine, Introduction to a Non-Commutative Version Of the Standard Model, Oct 28-Nov 2, 2002.
- [18] X.Calmetl, B.Jurco, P.Schupp, J.Wess, M.Wohlgenannt ,The Standard Model on Non-commutative Spaces-Time, [arXiv:hep-ph/0111115v4 9 Jul 2002].
- [19] **M.Chaichian**, P.Presnajder, M.M.Sheukh-Jabbari end A.Tureanu, Noncommutative Standard Model: Model building, [arXiv:hep-ph/0107055v2 12 Aug 2003].

ملخص

تطرقنا في هذه الدراسة الفيزيائية الخاصة بمذكرة الماستر في فيزياء الجسيمات عالية الطاقة إلى تطبيق الصيغ الرياضية الخاصة بالفضاء اللاتبادلي على النظرية الكهروضعيفة المعروفة اختصاراً بالزمرة $SU(2) \times U(1)$. وبعدها قمنا بعرض مختلف التحويلات الخاصة بالنظرية الكهروضعيفة وكذا الانكسار التلقائي للتناظر في الفضاءين اللاتبادلي و الفضاء العادي، لاحظنا بان التناظر الفيزيائي تم توسيعه أكثر وهذا يسمح بطرح الشروط الفيزيائية المناسبة لإيجاد نظرية فيزيائية مقاربة في الطاقات العالية.

كلمات مفتاحية

نظرية العيار، تحويلات العيار، تفاعل كهرو ضعيف، فضاء لاتبادلي، فضاء عادي، الانكسار التلقائي للتناظر، آلية هيكز، طريقة زيبارغ- ويتن.

Résumé

Nous avons abordé dans cette étude physique du mémoire de master en physique des particules à haute énergie l'application des formalismes mathématiques de l'espace non commutatif sur la théorie électrofaible, qui sont connues par le groupe $SU(2) \times U(1)$. Puis après nous avons présenté différent transformations particulières par la théorie électrofaible et la brisure spontanée de la symétrie dans l'espace non commutatif et l'espace ordinaire. Nous avons observé que la symétrie physique est plus large. Ce qui permet de proposer les conditions physiques correspondantes pour obtenir probablement une théorie physique converge à haute énergie.

Mots clés

Théorie de jauge, transformations de jauge, interaction électrofaible, espace non commutatif, espace ordinaire, brisure spontanée de la symétrie, mécanisme de Higgs, méthode de Seiberg-Witten.

Abstract

We discussed in this physical study of the report of master in physics of the particles with high energy the application of the mathematical formalisms of non commutative space on the electroweak theory, which are known by the group $SU(2) \times U(1)$. Then after we presented different the particular transformations by the electroweak theory and the spontaneous symmetry breaking in non commutative space and ordinary space. We observed that physical symmetry is large and big which give a possible to propose the corresponding physical conditions to probably obtain a physical theory converge at high energy.

Key words

Gauge theory, gauge transformations, electroweak interaction, non commutative space, ordinary space, spontaneous symmetry breaking, Higgs mechanism, Seiberg-Witten Method.