N°d'ordre:

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR

Département De Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

Par

Chougui Nadhir

SUJET

Analyse Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact avec Frottement et Adhésion

Soutenu publiquement le 20/01/2010 devant le jury composé de:

Naceurdine	BENSALEM	Professeur	UFA (Sétif)	Président
Salah	DRABLA	Professeur	UFA (Sétif)	Rapporteur
Norddine	BENHAMIDOUCHE	Professeur	U.M'sila	Examinateur
Nacereddine	HEMICI	MC	UFA (Sétif)	Examinateur
Hamid	BENSERIDI	MC	UFA (Sétif)	Examinateur

Promotion : 2009/2010

Résumé

Ce mémoire est destiné à l'étude variationnelle et numérique de quelques problèmes de contact unilatéral, avec adhésion et avec adhésion et frottement, entre un corps déformable et une base rigide ou déformable. Nous étudions des processus quasi-statiques pour des matériaux élastiques et viscoélastiques sous l'hypothèse des petites transformations. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité des solutions faibles dans l'étude variationnelle et l'estimation d'erreur dans l'étude numérique. Le mémoire est partitionné en trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à l'étude variationnelle et numérique d'un problème de contact avec adhésion entre un corps élastique et une base rigide. Le deuxième chapitre est destiné à l'étude variationnelle d'un problème de contact avec adhésion et frottement entre un corps élastique et une base rigide. Le dernier chapitre est dédié à l'étude variationnelle d'un problème de contact avec adhésion et frottement entre un corps viscoélastique et une base déformable. Enfin, on présente une annexe comprenant les outils nécessaires pour la réalisation de ce mémoire.

Mots-clés

Elasticité, viscoélasticité, contact unilatéral, compliance normale, adhésion, frottement de coulomb, inéquation quasi-variationnelle, solution faible, point fixe, approximation variationnelle.

Abstract

The aim of this memorandum is the variational and numerical analysis of some boundary unilateral contact problems, with adhesion and then adhesion and friction, between a body and a rigid or deformable foundation. We study the quasi-static processes for elastic and viscoelastic materials in a case of light transformation.

The results we get concern the existence and uniqueness of weak solutions in the variational study and the numerical analysis of error estimates in numerical study. This memorandum is divided into three chapters. The first chapter is dedicated a variational and numerical study of the contact problem with adhesion between a body and a rigid foundation. The second chapter is destined to a variational study of the contact problem with adhesion and friction between an elastic body and a rigid foundation. The last chapter is intended to a variational study of the contact problem with normal compliance, adhesion and friction. At last, we present an appendix including necessary tools for the realization of this work.

Key words

Elasticity, viscoélasticity, unilateral contact, normal compliance, adhesion, Coulomb's friction, quasi-variational inequality, weak solution, fixed point, variational approximation.

Dédicaces

A mes parents, qui sont la graine de mon existence, pour leurs encouragements et leurs sacrifices.

A toi Ilheme pour ton réconfort, ta compréhension, ton soutien moral surtout dans les moments difficiles durant ce mémoire, de m'avoir poussé et encouragé à aller au delà de mes capacités et surtout d'avoir été présente à chaque fois que j'ai eu besoin de toi et surtout je te remercie pour tes sacrifices et ta patience.

A mes deux petites filles Maram et Assil et à tous les membres de ma famille.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance envers mon directeur de mémoire, le Professeur Drabla Salah du Laboratoire de Mathématiques à l'Université de Setif, pour sa confiance et pour son aide inestimable, ses qualités pédagogiques, sa patience conjuguée à une rigueur scientifique d'exception ainsi que ses qualités humaines ont contribué de manière décisive à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie tout particulièrement le professeur BensaLem Naceurdine, chef du Département de Mathématiques à l'Université de Setif, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je suis très honoré par la présence dans le jury des Messieurs : Norddine Benhamidouche, Nacereddine Hemici, Hamid Benseridi qui ont bien voulu être juges de ce mémoire. Je leur adresse toute ma reconnaissance.

J'exprime mes très sincères remerciements à Monsieur Lakhdar Bouharoud, pour la confiance qu'il m'a fait, pour son humanisme et surtout pour avoir toujours été à l'écoute de mes problèmes et inquiétudes et pour toute l'aide qu'il m'a apportée.

Enfin que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail reçoivent mes remerciements.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 5

NOTATIONS PRINCIPALES 7

1 ETUDE D'UN PROBLÈME ÉLASTIQUE AVEC ADHÉSION 10
1.1 Position du problème et hypothèses 10
1.2 Formulation variationnelle 15
1.3 Résultats d'existence et d'unicité 16
1.4 Approximation semi-discrète 24
1.5 Analyse de la convergence 33

2 ANALYSE VARIATIONNELLE D'UN PROBLÈME ÉLASTIQUE AVEC FROTTEMENT ET ADHÉSION 36
2.1 Position du problème mécanique et hypothèses 36
2.2 Formulation variationnelle du problème P 40
2.3 Résultats d'existence et d'unicité 44

3 ANALYSE VARIATIONNELLE D'UN PROBLÈME VISCOÉLASTIQUE AVEC COMPLIANCE NORMALE, FROTTEMENT ET ADHÉSION 54
3.1 Position du problème mécanique et hypothèses 55
3.2 Formulation variationnelle du problème P 59
3.3 Résultats d'existence et d'unicité 61

4 RAPPELS DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS 69
A Préliminaires et modèles 70
A.1 Notations et conventions 70
A.2 Modèle mathématique 71
A.3 Lois de comportement 72
A.4 Conditions aux limites de contact 73
B Espaces fonctionnels 77
B.1 Espaces de Sobolev 77
B.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles 78
C Analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert 81
C.1 Rappels sur les espaces de Hilbert 81
C.2 Fonctions convexes et semi-continuité inférieure 84
C.3 Différentiabilité et sous différentiabilité 85
C.4 Inéquations variationnelles elliptiques 86
D Compléments dévers 87

E Approximation variationnelle 89

BIBLIOGRAPHIE 89

Introduction

La mécanique du contact est un domaine très étendu et embrasse plusieurs phénomènes qui apparaissent abondamment dans notre vie quotidienne et essentiellement dans l'industrie. Ces phénomènes jouent un rôle essentiel dans la mécanique des structures et plus particulièrement dans le secteur de l'automobile, l'aéronautique (fissuration des composites et des interfaces fibre/matrice) et dans les systèmes des transmissions.

Un progrès considérable a été réalisé récemment dans la modélisation, l'analyse mathématique et l'analyse numérique des différents processus impliqués dans le contact entre corps déformables ou entre corps déformables et bases rigides.

Du fait de l'importance des processus de contact, un effort considérable a été fait dans leurs modélisations et la littérature sur ce sujet est large. On cite à titre d'exemple les travaux de J. R. Fernandez, M. Shillor and et M. Sofonea [19] qui concerne des problèmes viscoélastiques, les études faites par W. Han, M. Sofonea [21] et D. Kendri [26] pour des matériaux viscoplastiques avec variable interne d'état et les résultats obtenus par S. Drabla [15] pour des matériaux élastiques et viscoplastiques.

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différent. Pour cette raison, en plus des phénomènes de frottement, le processus d'adhésion est très important dans plusieurs montages industriels où les parties usuellement non métalliques sont collées ensemble. Pour modéliser le phénomène d'adhésion, quand l'assemblage n'est pas permanent, les matériaux composites pouvant subir un décollement sous l'effet des tensions, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact. En se basant sur les idées de M. Frémond [17] ; [18] ; l'idée est l'introduction d'une variable interne de surface appelée, champ d'adhésion, qui prend ses valeurs entre zéro et un, et qui décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact. On peut trouver ces modèles dans un grand nombre de publications récentes, voir par exemple : O. Chaud et J. R. Fernandez et M. Sofonea [7] ; Z. Lerguet [28] ; L. Jianu, M. Shillor and M. Sofonea [25] ; A. Matei [30], qui ont étudié des problèmes de contact avec adhésion et sans frottement et L. Cangémi [6] qui a élaboré des traitements numériques et les a appliqués à l'interface.

On peut trouver différentes lois de frottement engendrés par des expériences faites sur le frottement, comme par exemple la loi non standard de frottement posée par Stromberg [37]. La condition de contact utilisée dans ce mémoire est une loi non local de frottement de Coulomb. De tel modèle de frottement ont été étudiés dans S. Drabla [15], Cocu [13] et Kendri [26].

Le but de ce Mémoire est de fournir une contribution dans l'étude des problèmes de contact pour les matériaux élastiques et viscoélastiques avec adhésion.

Partout dans ce manuscrit le comportement du matériau est modélisé à l'aide d'une équation constitutive élastique et viscoélastique ; le contact est décrit à l'aide des conditions de Signorini ou de compliance normale, avec adhésion ou adhésion et frottement, nous présentons les formulations variationnelles de chaque problème étudié puis nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible pour le modèle considéré. De plus, nous donnons une approximation variationnelle et une estimation d'erreur pour l'un des problèmes étudiés. Ces résultats représentent une contribution dans l'étude des problèmes de contact pour des matériaux purement élastique ou viscoélastiques, c'est-à-dire dans le cas où les propriétés de frottement et d'adhésion ne sont pas prises en considération.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'un problème de contact adhésif sous des conditions de contact de type Signorini entre un corps élastique et une base rigide où la loi de comportement est linéaire. Tout d'abord nous dérivons une formulation variationnelle du problème mécanique pour lequel nous démontrons qu'il existe une solution faible unique en utilisant des techniques de point fixe, de monotonie et des résultats sur les inéquations variationnelles elliptiques. De plus, nous donnons deux approximations variationnelles (semi-discète et complète) et une estimation d'erreur de la solution.

Dans le deuxième chapitre on s'intéresse à l'étude théorique d'un problème de contact avec frottement et adhésion entre un corps élastique déformable et une base rigide dans le cas quasistatique. Les conditions de contact sont de type Signorini et la loi de comportement est non linéaire. Nous obtenons une formulation variationnelle au problème mécanique et nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible pour le modèle mécanique que nous démontrons en utilisant des techniques similaires.

Finalement, le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un problème de processus quasistatique de contact avec compliance normale, adhésion et frottement pour un matériau viscoélastique. L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Nous dérivons une formulation variationnelle au problème mécanique et nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible, en utilisant aussi des résultats sur les inéquations variationnelles d'évolution, suivis d'un argument de point fixe.

Enfin, et pour rendre aisé la lecture de ce document, on insère une annexe qui comprend un rappel des principaux résultats de la théorie de la mécanique des milieux continus, de l'approximation variationnelle et des espaces fonctionnels.

Notations principales

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$, on note par :

Ω	l'adhérence de Ω,
Γ	la frontière de Ω, supposée régulière,
$\Gamma_i (i = \overline{1,3})$	une partition de la frontière Γ,
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d-1)$ dimensionnelle de Γ_1,
ν	la normale unitaire sortante à Γ,
v_ν, v_τ	les composantes normales et tangentielle du champ vectoriel v,
σ_ν, σ_τ	les composantes normales et tangentielle du champ tensoriel σ,
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions réelles sur Ω indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω,
$\mathcal{D}'(\Omega)$	espace des distributions sur Ω,
$C^1(\overline{\Omega})$	espace des fonctions réelles continûment différentiable sur $\overline{\Omega}$,
D	l'espace $\mathcal{D}(\Omega)^d$,
D'	l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)^d$,
$\mathcal{D}$	l'espace $\mathcal{D}(\Omega)^{d\times d}_S$,
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$,
$\mathcal{H}$	l'espace $L^2(\Omega)^{d\times d}_s$,
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$,
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{\sigma\epsilon\mathcal{H} \ / \ div \ \sigma = (\sigma_{ij,j})\epsilon H \}$,
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$,
H'_Γ	l'espace dual de H_Γ,
$\gamma : H_1 \longrightarrow H_\Gamma$	l'application de trace pour les fonctions vectorielles,
$z : H_\Gamma \longrightarrow H_1$	l'inverse à droite de l'application γ,
$\overline{\gamma} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow H'_\Gamma$	l'application de trace pour les fonctions tensorielles,
$\overline{z} : H'_\Gamma \longrightarrow \mathcal{H}_1$	l'inverse à droite de l'application $\overline{\gamma}$.

Si X est un espace de *Hilbert* réel, on a les notations suivantes :

$(\cdot , \cdot)_X$	le produit scalaire de x,
$(\cdot , \cdot)_{X'\times X}$	le produit de dualité entre X' et X,
$\Vert \cdot \Vert_X$	la norme de X,
2^X	l'ensemble de toutes les parties de X
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X,
$x_n \mapsto x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X,
$\mathcal{L}\ (X)$	l'espace des applications linéaires continues de X dans X .

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par :

$C(0,T;H)$	l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ dans H,
$\|\cdot\|_{0,H}$	la norme de $C(0,T;H)$,
$C^1(0,T;H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0,T]$ dans H,
$\|\cdot\|_{1,H}$	la norme de $C^1(0,T;H)$,
$L^p(0,T;H)$	l'espace de Lebesgue,
$\|\cdot\|_{L^p(0,T;H)}$	la norme de $L^p(0,T;H)$,
$W^{k,p}(0,T;H)$	l'espace de *Sobolev de* paramètre k et p,
$\|\cdot\|_{W^{k,p}(0,T;H)}$	la norme de $W^{k,p}(0,T;H)$.

Pour une fonction f , on note par :

$\dot{f}$, $\ddot{f}$	les dérivées première et seconde de f par rapport au temps
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à la i *ème* composante x_i
∇f	le gradient de f,
$Divf$	la divergence de f,
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$,
∂f	le sous différentiel (classique) de f,
$dom\ f$	le domaine de f.

Autre notation :

$lim\ inf$	la limite inférieur,
S_d	l'espace des tenseurs symétrique du second ordre sur $\mathbb{R}^d$,
I_d	le tenseur identité du second ordre sur $\mathbb{R}^d$,
0_d	le zéro de $\mathbb{R}^N$ et S_d,
C, c	des constates génériques strictement positives,
p, p	presque partout.

Chapitre 1

Etude d'un problème élastique avec adhésion

Dans ce chapitre, on considère un problème quasistatique de contact avec adhésion entre un corps élastique et une base rigide. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appelée, champ d'adhésion.

Ce chapitre est structuré comme suit : Dans la première section, nous commençons par formuler le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données, dans la deuxième section nous donnons la formulation variationnelle du problème mécanique et dans la troisième section, nous énonçons et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible du problème mécanique. Cependant, la quatrième et la cinquième section sont consacrées à l'étude numérique de ce problème, où on présente le problème approché, ensuite nous donnons et nous estimons l'erreur de la discrétisation incomplète et complète du problème approché. Finalement on présente un résultat de convergence pour les schémas de discrétisation complète et incomplète. Ces deux schémas sont analysés à l'aide de la méthode des éléments finis. La convergence forte des deux cas est établie sous une régularité minimale de la solution.

Les techniques employées sont basées sur les résultats des inéquations variationnelles d'évolution et la théorie des opérateurs monotones, suivi par des arguments de point fixe.

1.1 *Position du problème et hypothèses*

Dans cette section, on décrit le modèle pour le processus quasistatique. Le cadre physique est comme suit :

Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ avec une surface frontière supposée assez régulière Γ, partitionnée en trois partie disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telle que $mes\ \Gamma_1 > 0$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ. Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. On suppose que f_0 et f_2 varient très lentement par rapport au temps. Par conséquent, nous supposons que les accélérations dans le système sont négligeables. Nous nous plaçons donc dans le cas *quasistatique*.

Le corps est soumis à des conditions de contact unilatéral et adhésion sur la partie Γ_3 de la frontière. On suppose aussi que le matériau est élastique avec la loi constitutive de la forme :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u), \tag{1.1.1}$$

où $\mathcal{A}$ est une fonction constitutive donnée.

Par la suite, on va décrire les conditions de contact avec adhésion sur Γ_3, suivant [**17**] et [**18**] on introduit une variable interne d'état β définie sur Γ_3, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ en un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion et quand $0 < \beta < 1$, l'adhésion est partielle et mesure la fraction des liens.

On suppose que la contrainte normale satisfait la condition suivante :

$$\sigma_\nu - p_\nu(\beta, u_\nu) \leq 0, \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T], \tag{1.1.2}$$

où p_ν est une fonction positive. En particulier, on peut considérer le cas :

$$p_\nu(\beta, u_\nu) = \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu), \tag{1.1.3}$$

dans la quelle γ_ν est un coefficient positif et $R_\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'opérateur de troncation défini par :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

Ici $L > 0$ est la longueur caractéristique des liens.

On suppose que la résistance au mouvement tangentiel est générée par la colle et que la traction tangentielle est négligeable, ainsi, elle dépend seulement de l'intensité d'adhésion et du déplacement tangentiel.

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau), \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \tag{1.1.5}$$

On peut considérer le cas :

$$p_\tau(\beta, u_\tau) = \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau), \tag{1.1.6}$$

dans la quelle γ_τ est un coefficient positif et $R_\tau : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est l'opérateur de troncation défini par :

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si } \|v\| \leq L, \\ L\dfrac{v}{\|v\|} & \text{si } \|v\| > L. \end{cases} \tag{1.1.7}$$

Le processus d'adhésion est gouverné par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\beta}(t) = -(\beta(t)(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_\tau(t)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+ \ , \ sur\ \Gamma_3 \times (0,T)\,. \tag{1.1.8}$$

Le problème mécanique se formule de la manière suivante :
Problème P : *Trouver le champ des déplacements* $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$, *le champ des contraintes* $\sigma : \Omega \times (0,T) \to S_d$ *et le champ d'adhésion* $\beta : \Gamma_3 \times (0,T) \to [0,1]$ *tels que :*

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{1.1.9}$$

$$Div\sigma + f_0 = 0 \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{1.1.10}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T)\,, \tag{1.1.11}$$

$$\sigma\nu = f_2 \qquad \text{sur } \Gamma_2 \times (0,T)\,, \tag{1.1.12}$$

$$u_\nu \leq 0,\ \sigma_\nu - p_\nu(\beta, u_\nu) \leq 0,\ u_\nu(\sigma_\nu - p_\nu(\beta, u_\nu)) = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T)\,, \tag{1.1.13}$$

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\beta, u_\tau) \text{ sur } \Gamma_3 \times [0,T], \tag{1.1.14}$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\beta(t)(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_\tau(t)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T)\,, \tag{1.1.15}$$

$$u(0) = u_0 \text{ dans } \Omega, \tag{1.1.16}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \text{ sur } \Gamma_3. \tag{1.1.17}$$

L'équation (**1.1.9**) représente la loi de comportement élastique. L'équation (**1.1.10**) est l'équation d'équilibre où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable Ω, tandis que les conditions (**1.1.11**) et (**1.1.12**) sont respectivement, des conditions aux limites en déplacement et en traction. Les conditions (**1.1.13**) représentent les conditions de contact de type *Signorini* avec adhésion sur la partie Γ_3 de la frontière de Ω. La condition (**1.1.14**) représente l'équation de la résistance au mouvement tangentiel qui générée par la colle tel que le contact est sans frottement. L'équation (**1.1.15**) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion et pour finir, Les conditions (**1.1.16**) – (**1.1.17**) représentent les conditions initiales

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème P, on a besoin de quelques notations supplémentaires. Soit V le sous-espace de H_1défini par :

$$V = \left\{v \in H_1,\ \text{tel que } v = 0\ sur\ \Gamma_1\right\}.$$

Puisque $mes\Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V ; alors, il existe une constante $C_k > 0$ qui dépend seulement de Ω et Γ_1 , telle que :

$$\|(\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq C_k \|v\|_{H_1}, \ \forall v \in V.$$

Nous considérons sur l'espace V, le produit scalaire et la norme associée, donnée par :

$$(u,v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \ \forall u, \ v \in V, \tag{1.1.18}$$

$$\|v\|_V = \|(\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}, \ \forall v \in V. \tag{1.1.19}$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|.\|_{H_1}$ et $\|.\|_V$ sont des normes équivalentes sur V, donc $(V, \|.\|_V)$ est un espace de Hilbert réel. De plus, en utilisant le théorème de trace de *Sobolev* on obtient :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|v\|_V, \ \forall v \in V. \tag{1.1.20}$$

De plus, on considère les hypothèses suivantes :

Précisons maintenant les hypothèses sur les données. Nous supposons que le tenseur d'élasticité $\mathcal{A}$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \textbf{(a)}\ \mathcal{A} : \Omega \times S_d \longmapsto S_d \text{ est un tenseur symétrique positivement défini et} \\ \mathcal{A}_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \text{ pour tout } i,j,k,l = \overline{1,d}. \\ (b)\ \mathcal{A}\sigma.\tau = \sigma.\mathcal{A}\tau, \text{ pour tout } \sigma, \tau \in S_d. \\ (c) \text{ il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } \mathcal{A}\sigma.\sigma \geq \alpha \mid \sigma \mid^2, \text{ pour tout } \sigma \in S_d. \end{cases} \tag{1.1.21}$$

De même, nous supposons que la fonction p_ν satisfait :

$$\begin{cases} p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ (a) \text{ Il existe } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ \quad \mid p_\nu(x, \beta_1, r_1) - p_\nu(x, \beta_2, r_2) \mid \leq L_\nu(\mid \beta_1 - \beta_2 \mid + \mid r_1 - r_2 \mid) \\ \forall \beta_1, \ \beta_2, \ r_1, \ r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b)\ x \rightarrow p_\nu(x, \beta, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall \beta, \ r \in \mathbb{R}. \\ (c)\ x \rightarrow p_\nu(x, 0, 0) \in L^\infty(\Gamma_3). \\ (d) \text{ L'application } x \rightarrow p_\nu(x, \beta, r) = 0 \text{ pour tout } r = 0. \end{cases} \tag{1.1.22}$$

Et la fonction p_τ satisfait :

$$\begin{cases} p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \\ (a) \text{ Il existe } L_\tau > 0 \text{ tel que} \\ \quad \| p_\tau(x, \beta_1, r_1) - p_\tau(x, \beta_2, r_2)\| \leq L_\tau(\mid \beta_1 - \beta_2 \mid + \|r_1 - r_2\|) \\ \forall \beta_1, \ \beta_2 \in \mathbb{R}, \ r_1, \ r_2 \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b)\ x \rightarrow p_\tau(x, \beta, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \ \forall \beta \in \mathbb{R}, \ r \in \mathbb{R}^d. \\ (c)\ x \rightarrow p_\tau(x, 0, 0) \in L^\infty(\Gamma_3)^d. \\ (d)\ p_\tau(x, \beta, r).\nu(x) = 0, \ \forall \beta \in \mathbb{R}, \ r \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } r.\nu(x) = 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{1.1.23}$$

Les coefficients d'adhésion γ_τ, γ_ν et ε_a satisfont les conditions suivantes :

$$\gamma_\tau, \gamma_\nu \in L^\infty(\Gamma_3),\ \varepsilon_a \in L^2(\Gamma_3),\ \gamma_\tau,\ \gamma_\nu,\ \varepsilon_a \geq 0,\ \text{p.p. sur } \Gamma_3. \tag{1.1.24}$$

On suppose aussi que le champ initial d'adhésion vérifie :

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3),\ 0 \leq \beta_0 \leq 1,\ \text{p.p. sur } \Gamma_3, \tag{1.1.25}$$

et que les forces volumiques et les tractions surfaciques aient la régularité :

$$f_0 \in W^{1,\infty}(0,T;H),\ f_2 \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_2)^d). \tag{1.1.26}$$

On note par υ_ν et υ_τ les composantes normale respectivement tangentielle de υ sur la frontière Γ données par :

$$\upsilon_\nu = \upsilon.\nu,\ \upsilon_\tau = \upsilon - \upsilon_\nu\nu. \tag{1.1.27}$$

Similairement, on définit les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes par :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu,\ \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu. \tag{1.1.28}$$

En outre, on définit l'ensemble des "déplacements admissibles" par :

$$U_{ad} = \{\upsilon \in H_1 \ tel\ que\ :\ \upsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \ et\ \upsilon_\nu \leq 0\ sur\ \Gamma_3\}.$$

Finalement, on suppose que la condition initiale de déplacement vérifie :

$$u_0 \in U_{ad}. \tag{1.1.29}$$

Le théorème de représentation de *Riesz* entraîne l'existence d'une fonction f : $[0,T] \to V$ définie par :

$$(f(t),\upsilon)_V = (f_0(t),\upsilon)_H + (f_2(t),\upsilon)_{L^2(\Gamma_2)^d}\ \forall \upsilon \in V,\ \text{p.p. } t \in (0,T). \tag{1.1.30}$$

On note que (**1.1.26**) implique que :

$$f \in W^{1,\infty}(0,T;V). \tag{1.1.31}$$

Nous définissons maintenant la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \to \mathbb{R}$ définie par :

$$j_{ad}(\beta,u,\upsilon) = \int_{\Gamma 3} -p_\nu(\beta,u_\nu)\upsilon_\nu da + \int_{\Gamma 3} p_\tau(\beta,u_\tau).\upsilon_\tau da. \tag{1.1.32}$$

On remarque que les conditions (**1.1.22**) et (**1.1.23**) entraînent que l'intégrale (**1.1.32**) est bien définie.

1.2 Formulation variationnelle

Dans cette section, on va donner la formulation variationnelle du problème P. Soit $v \in U_{ad}$, selon une procédure standard basée sur la formule de *Green* et (**1.1.10**) on obtient :

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} = (f_0, v - u(t))_H + \int_{\Gamma} \sigma(t)\nu.(v - u(t))da \ \forall v \in H_1, \quad (1.2.1)$$

en utilisant (**1.1.11**), (**1.1.12**) et (**1.1.30**), nous obtenons :

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} = (f(t), v - u(t))_V + \int_{\Gamma 3} \sigma(t)\nu.(v - u(t))da, \ \forall v \in U_{ad}, \quad (1.2.2)$$

en remplaçant maintenant, les relations (**1.1.27**) et (**1.1.28**) dans (**1.2.2**) on trouve :

$$\begin{aligned}(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} &= (f(t), v - u(t))_V + \int_{\Gamma 3} \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t))da \\ &+ \int_{\Gamma 3} \sigma_\tau(t).(v_\tau - u_\tau(t))da \ \forall v \in U_{ad}, \ \text{p.p. } t \in (0, T).\end{aligned} \quad (1.2.3)$$

D'après (**1.1.2**) et (**1.1.5**), on peut écrire la relation (**1.2.3**) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} &= (f(t), v - u(t))_V - \int_{\Gamma 3} p_\tau(\beta, u_\tau).(v_\tau - u_\tau(t))da + \\ &+ \int_{\Gamma 3} p_\nu(\beta(t), u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t))da + \\ &+ \int_{\Gamma 3} (\sigma_\nu(t) - p_\nu(\beta(t), u_\nu(t)))(v_\nu - u_\nu(t))da,\end{aligned} \quad (1.2.4)$$

mais on a $v_\nu \leq 0$ et d'après (**1.1.13**) on a $\sigma_\nu - p_\nu(\beta, u_\nu) \leq 0$ d'où $(\sigma_\nu(t) - p_\nu(\beta(t), u_\nu(t)))v_\nu \geq 0$. On a aussi $u_\nu(t)(\sigma_\nu(t) - p_\nu(\beta(t), u_\nu(t))) = 0$ sur $\Gamma_3 \times (0, T)$ donc :

$$\begin{aligned}(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} &\geq (f(t), v - u(t))_V - \int_{\Gamma 3} p_\tau(\beta, u_\tau(t)).(v_\tau - u_\tau(t))da \\ &- \int_{\Gamma 3} - p_\nu(\beta(t), u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t))da,\end{aligned}$$

moyennant (**1.1.32**) il vient :

$$\begin{aligned}(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v) - \\ - j_{ad}(\beta(t), u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_V \\ \forall u, \ v \in U_{ad}, \ \text{p.p. } t \in (0, T).\end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Finalement, de (**1.1.9**), (**1.1.15**) – (**1.1.17**) et (**1.2.5**) on obtient la formulation variationnelle suivante du problème P.

Problème $\mathbf{P}_V$: *Trouver le champ des déplacements $u : [0,T] \to V$, le champ des contraintes $\sigma : [0,T] \to \mathcal{H}_1$ et le champ d'adhésion $\beta : [0,T]] \to L^2(\Gamma_3)$ tels que :*

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(u(t)), \tag{1.2.6}$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\beta(t)(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_\tau(t)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times [0,T], \tag{1.2.7}$$

$$\begin{aligned} &u(t) \in U_{ad},\ (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v) - \\ &- j_{ad}(\beta(t), u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_V \\ &\forall v \in U_{ad},\ \text{p.p. } t \in [0,T], \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

$$u(0) = u_0,\ \beta(0) = \beta_0 \text{ sur } \Gamma_3. \tag{1.2.9}$$

1.3 Résultats d'existence et d'unicité

Notre intérêt principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnel P_V.

Théorème 1.3.1 : *Sous les hypothèses* $(\mathbf{1.1.21}) - (\mathbf{1.1.26})$ *et* $(\mathbf{1.1.29})$ *le problème P_V admet une solution unique (u, σ, β) ayant la régularité suivante :*

$$u \in W^{1,\infty}(0,T;V), \tag{1.3.1}$$

$$\sigma \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1), \tag{1.3.2}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2\ (\Gamma_3)). \tag{1.3.3}$$

Remarque 1.3.2 : *On conclut que sous les hypothèses* $(\mathbf{1.1.21}) - (\mathbf{1.1.26})$ *et* $(\mathbf{1.1.29})$ *le problème P admet une solution faible unique satisfaisant* $(\mathbf{1.3.1}) - (\mathbf{1.3.3})$.

Démonstration. : La démonstration du **Théorème 1.3.1** sera faite en plusieurs étapes. Elle est basée sur des résultats sur les inéquations variationnelles, les opérateurs fortement monotones et les arguments du point fixe. A cet effet, nous assumons dans la suite que $(\mathbf{1.1.21}) - (\mathbf{1.1.26})$ et $(\mathbf{1.1.29})$ sont satisfaites et c est une constante positive générique qui peut dépendre de Ω, Γ_1, Γ_3, P_ν, P_τ, γ_ν, γ_τ et L, dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite de diverses fonctions de $x \in \Omega \cup \Gamma$. ■

Dans la première étape, nous considérons le problème suivant :
Problème $\mathbf{P}^{\beta_u}$: *Trouver le champ d'adhésion $\beta_u : [0,T] \to L^2(\Gamma_3)$ tels que :*

$$\dot{\beta}_u(t) = -(\beta_u(t)(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_\tau(t)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+,\ \text{p.p. } t \in [0,T], \tag{1.3.4}$$

$$\beta_u(0) = \beta_0. \tag{1.3.5}$$

Lemme 1.3.3 : *Pour tout $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ donnée, il existe une unique solution $\beta_u \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$ satisfaisant :*

$$\dot{\beta}_u(t) = -(\beta_u(t)(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_\tau(t)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+, \ p.p. \ t \in [0,T],$$
$$\beta_u(0) = \beta_0.$$

En outre, $0 \leq \beta_u(t) \leq 1$, pour toute $t \in [0,T]$ et il existe une constante $c > 0$, telle que, pour tout $u_1, u_2 \in W^{1,\infty}(0,T;V)$:

$$\parallel \beta_{u_1}(t) - \beta_{u_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V \ \forall t \in [0,T]. \tag{1.3.6}$$

Démonstration. : Soit $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ donnée. Nous considérons l'application $F : [0,T] \times L^2(\Gamma_3) \to L^2(\Gamma_3)$ défini par :

$$F(t,\beta_u) = -(\beta_u(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_\tau(t)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+ \ , \forall t \in [0,T], \tag{1.3.7}$$

pour tout $t \in [0,T]$ et $\beta_u \in L^2(\Gamma_3)$. Il s'ensuit d'après les propriétés des opérateurs de troncation R_ν et R_τ que F est de *Lipschitz* par rapport à la second variable, uniformément en temps. De plus, pour tout $\beta_u \in L^2(\Gamma_3)$ l'application $t \to F(t,\beta_u)$ appartient à $L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_3))$. En utilisant maintenant une version du théorème de *Cauchy-Lipschitz*, nous obtenons l'existence d'une fonction unique $\beta_u \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$ qui résout le problème P^{β_u}. Notons que la restriction $0 \leq \beta_u(t) \leq 1$ est incluse implicitement dans le problème variationnel P_V. En effet (**1.3**.4) et (**1.3**.5) nous garantie que $\beta_u(t) \leq \beta_0$, pour tout $t \geq 0$ (parce que β_u est une fonction décroissante pour la variable t) donc l'hypothèse (**1.1**.**25**) montre que $\beta_u(t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. sur Γ_3. D'un autre coté, si $\beta_u(t_0) = 0$ à $t = t_0$, alors il s'ensuit de (**1.3**.4) que $\dot{\beta}_u(t) = 0$ pour $t \geq t_0$(car si $t \geq t_0 \Rightarrow \beta_u(t) \leq \beta_u(t_0)$ donc (**1.3**.4) nous donne $\dot{\beta}_u(t) = 0$ pour $t \geq t_0$) donc $\beta_u(t)$ est constante pour tout $t \geq t_0$ d'où $\beta_u(t) = \beta_u(t_0) = 0$ pour tout $t \geq t_0$. Nous concluons que $0 \leq \beta_u(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0,T]$, p.p. sur Γ_3. Maintenant soit u_1, $u_2 \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ et $t \in [0,T]$, nous avons d'après (**1.3**.4) pour $i = 1,2$:

$$\beta_{u_i}(t) = \beta_0 - \int_0^t (\beta_{u_i}(s)(\gamma_\nu R_\nu(u_{i\nu}(s))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_{i\tau}(s)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+ ds,$$

donc de l'égalité précédente on obtient :

$$\parallel \beta_{u_2}(t) - \beta_{u_1}(t) \parallel_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t \parallel \beta_{u_1}(s)(R_\nu(u_{1\nu}(s))^2 - \beta_{u_2}(s)(R_\nu(u_{2\nu}(s))^2 \parallel_{L^2(\Gamma_3)} ds +$$
$$+c\int_0^t \parallel \beta_{u_1}(s) \parallel R_\tau(u_{1\tau}(s)) \parallel^2 - \beta_{u_2}(s) \parallel R_\tau(u_{2\tau}(s)) \parallel^2 \|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

En utilisant la définition de R_ν et R_τ et écrivant $\beta_{u_1} = \beta_{u_1} - \beta_{u_2} + \beta_{u_2}$, nous arrivons à :

$$\parallel \beta_{u_2}(t) - \beta_{u_1}(t) \parallel_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t \parallel \beta_{u_2}(s) - \beta_{u_1}(s) \parallel_{L^2(\Gamma_3)} ds + c\int_0^t \parallel u_1(s) - u_2(s) \parallel_{L^2(\Gamma_3)^d} \ ds.$$

Moyennant une version des lemmes de *Gronwall*, il s'ensuit que :

$$\| \beta_{u_2}(t) - \beta_{u_1}(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s) \|_{L^2(\Gamma_3)^d} \, ds,$$

en utilisant (**1.1.20**) on obtient :

$$\| \beta_{u_2}(t) - \beta_{u_1}(t) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_V \, ds \;\; \forall t \in [0, T]. \tag{1.3.8}$$

■

Problème Q_V : *Trouver le champ des déplacements* $u : [0, T] \to V$ *et le champ des contraintes* $\sigma : [0, T] \to \mathcal{H}_1$ *tels que :*

$$\begin{array}{l} u(t) \in U_{ad}, \;\; (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + \\ + j_{ad}(\beta_u(t), u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_V \\ \forall v \in U_{ad}, \;\; t \in [0, T], \end{array} \tag{1.3.9}$$

$$u(0) = u_0. \tag{1.3.10}$$

Lemme 1.3.4 : *Sous les hypothèse* (**1.1.21**) – (**1.1.26**) *et* (**1.1.29**), *il existe une solution unique* (u, σ) *du problème* Q_V *telle que* $u \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ *et* $\sigma \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H}_1)$.

Soit $\eta \in W^{1,\infty}(0, T \, ; V)$ et on considère le problème variationnel suivant :
Problème Q_V^η : *Trouver le champ des déplacements* $u_\eta : [0, T] \to V$ *tel que :*

$$\begin{array}{c} u_\eta(t) \in U_{ad}, \;\; (\mathcal{A}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + \\ + (\eta(t), v - u_\eta(t))_V \geq (f(t), v - u_\eta(t))_V \\ \forall v \in U_{ad}, \;\; t \in [0, T], \end{array} \tag{1.3.11}$$

$$u_\eta(0) = u_0. \tag{1.3.12}$$

Nous avons les résultats suivants :

Lemme 1.3.5 : *Il existe une solution unique du problème* Q_V^η *qui satisfait* $u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$

Démonstration. : Soit

$$L(v) = (\mathcal{A}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \;\; \forall v \in V$$

et nous posons :

$$f_\eta(t) = f(t) - \eta(t). \tag{1.3.13}$$

On remarque que pour u_η donnée $L : V \to \mathbb{R}$ est linéaire continue donc d'après le théorème de représentation de *Riesz*, il existe un unique élément $w(t) \in V$ tel que :

$$(w(t), v)_V = L(v) = (\mathcal{A}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \;\; \forall v \in V,$$

d'où, $\forall u_\eta(t) \in V$, $\exists!\ w(t) \in V$ tel que :

$$(w(t), v)_V = L(v) = (\mathcal{A}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}\ \forall v \in V.$$

Donc on peut définir l'opérateur $G : V \to V$ par :

$$G(u_\eta(t)) = w(t),$$

d'où on obtient :

$$(G(u_\eta(t)), v)_V = L(v) = (\mathcal{A}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}\ \forall v \in V. \tag{1.3.14}$$

L'opérateur G est fortement monotone et de lipshitz. ■

Pour $\eta_1, \eta_2 \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ on pose $u_1 = u_{\eta_1}$, $u_2 = u_{\eta_2}$.

1) On a d'après (**1.3.14**) :

$$(G(u_1(t)), u_2(t) - u_1(t))_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u_1(t)), \varepsilon(u_2(t)) - \varepsilon(u_1(t)))_{\mathcal{H}},$$

donc on obtient :

$$(G(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t))_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t)))_{\mathcal{H}}.$$

Par sommation des égalités précédentes on trouve :

$$(G(u_1(t)) - G(u_2(t)), u_2(t) - u_1(t))_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(u_2(t)) - \varepsilon(u_1(t)))_{\mathcal{H}},$$

d'où on obtient :

$$(G(u_1(t)) - G(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t))_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t)))_{\mathcal{H}}.$$

d'autre part, d'après (**1.1.21**)(**c**) on obtient :

$$(G(u_1(t)) - G(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t))_V \geq \alpha \|\varepsilon(u_1(t) - u_2(t))\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Finalement, d'après (**1.1.19**) il résulte que :

$$(G(u_1(t)) - G(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t))_V \geq \alpha \|u_1(t) - u_2(t)\|^2_V\ \forall u_1(t),\ u_2(t) \in V,$$

donc G est un opérateur fortement monotone sur V.

2) On a d'après (**1.3.14**) :

$$(G(u_1(t)) - G(u_2(t)), v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}},$$

d'où on obtient :

$$\mid (G(u_1(t)) - G(u_2(t)), v)_V \mid = \mid (\mathcal{A}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \mid .$$

En utilisant l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on trouve :

$$| (G(u_1(t)) - G(u_2(t)), v)_V | \leq \|\mathcal{A}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}} \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}},$$

mais, d'après (**1.1.21**) l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire continue donc il existe $L_{\mathcal{A}} > 0$ tel que :

$$\|\mathcal{A}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}}.$$

On obtient alors le résultat suivant :

$$| (G(u_1(t)) - G(u_2(t)), v)_V | \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}} \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}$$

et d'après (**1.1.19**) on obtient :

$$| (G(u_1(t)) - G(u_2(t)), v)_V | \leq L_{\mathcal{A}} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V \|v\|_V.$$

On pose dans l'inégalité précédente :

$$v = G(u_1(t)) - G(u_2(t)),$$

pour déduire que :

$$\|G(u_1(t)) - G(u_2(t))\|_V | \leq L_{\mathcal{A}} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V,$$

d'où G est un opérateur de *Lipschitz*. Donc d'après (**1.3.11**) on a :

$$\begin{array}{c} u_\eta(t) \in U_{ad}, \ (G(u_\eta(t)), v - u_\eta(t))_V \geq (f_\eta(t), v - u_\eta(t))_V \\ \forall v \in U_{ad}, \ t \in [0, T], \end{array} \tag{1.3.15}$$

et comme $U_{ad} \subset V$ est un ensemble convexe, fermé et non vide et $G : V \longrightarrow V$ est un opérateur fortement monotone et de *Lipschitz*, alors, d'après un résultat classique d'existence et d'unicité de la solution sur les inégalités quasi-variationnelles, il existe un unique élément $u_\eta(t) \in V$, qui vérifie :

$$\begin{array}{c} u_\eta(t) \in U_{ad}, \ (G(u_\eta(t)), v - u_\eta(t))_V \geq (f_\eta(t), v - u_\eta(t))_V \\ \forall v \in U_{ad}, \ t \in [0, T]. \end{array} \tag{1.3.16}$$

En utilisant maintenant (**1.3.13**), (**1.1.14**) et (**1.3.15**), il résulte que $u_\eta(t)$ vérifie (**1.3.11**) et (**1.3.12**).

Nous montrons maintenant que $u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$. Pour cela, soit $t_1, t_2 \in [0, T]$, nous notons $u_\eta(t_i) = u_i, \ f_\eta(t_i) = f_i, \ \forall i = 1, 2$. En utilisant (**1.3.15**) et quelques manipulations algébriques on obtient :

$$(Gu_1 - Gu_2, u_1 - u_2)_{\mathcal{H}} \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_V.$$

En utilisant l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on obtient :

$$| (Gu_1 - Gu_2, u_1 - u_2)_{\mathcal{H}} | \leq \|f_1 - f_2\|_V \|u_1 - u_2\|_V,$$

mais on a démontré que G est fortement monotone c-à-d :

$$(Gu_1 - Gu_2, u_1 - u_2)_V \geq \alpha \|u_1 - u_2\|_V^2 \ \forall u_1,\ u_2 \in V,$$

donc d'après les trois inégalités précédentes on obtient :

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq c\|f_1 - f_2\|_V,$$

d'où on trouve :

$$\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V \leq c\|f_\eta(t_1) - f_\eta(t_2)\|_V \ \forall t_1, t_2 \in [0, T],$$

mais $f_\eta = f(t) - \eta(t) \in W^{1,\infty}(0, T; V)$, donc $u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$.

Pour tout $\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$, on prend u_η la solution du problème Q_V^η obtenue par le lemme (**1.3.5**). On définit l'opérateur $\Lambda : V \to V$ par :

$$(\Lambda\eta(t), v)_V = j_{ad}(\beta_{u_\eta}(t), u_\eta(t), v),\ \forall v \in V, t \in [0, T], \tag{1.3.17}$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 1.3.6 : *Pour tout $\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$, la fonction $\Lambda\eta : [0, T] \to V$ appartient à $W^{1,\infty}(0, T; V)$. En outre, il existe un unique élément $\eta^* \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ tel que $\Lambda\eta^* = \eta^*$.*

Démonstration. : Soit $\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ et soit $t_1,\ t_2 \in [0, T]$. En utilisant (**1.3.17**) et (**1.1.32**) nous obtenons :

$$\mid (\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2), v)_V \mid = \mid j_{ad}(\beta_{u_\eta}(t_1), u_\eta(t_1), v) - j_{ad}(\beta_{u_\eta}(t_2), u_\eta(t_2), v) \mid,$$

d'où on déduit que :

$$\mid (\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2), v)_V \mid \leq \int_{\Gamma 3} \mid (p_\nu(\beta_{u_\eta}(t_2), u_{\eta\nu}(t_2)) - p_\nu(\beta_{u_\eta}(t_1), u_{\eta\nu}(t_1)))v_\nu \mid da +$$
$$+ \int_{\Gamma 3} \mid (p_\tau(\beta_{u_\eta}(t_1), u_{\eta\tau}(t_1)) - p_\tau(\beta_{u_\eta}(t_2), u_{\eta\tau}(t_2))).v_\tau \mid da,$$

d'après l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on obtient :

$$\mid (\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2), v)_V \mid \leq \int_{\Gamma 3} \mid p_\nu(\beta_{u_\eta}(t_2), u_{\eta\nu}(t_2)) - p_\nu(\beta_{u_\eta}(t_1), u_{\eta\nu}(t_1)) \mid\mid v_\nu \mid da +$$
$$+ \int_{\Gamma 3} \| p_\tau(\beta_{u_\eta}(t_1), u_{\eta\tau}(t_1)) - p_\tau(\beta_{u_\eta}(t_2), u_{\eta\tau}(t_2)) \| \|v_\tau \| da,$$

en utilisant (**1.1.22**)(a) et (**1.1.23**)(a) on trouve :

$$\mid (\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2), v)_V \mid \leq \int_{\Gamma 3} L_\nu(\mid \beta_{u_\eta}(t_2) - \beta_{u_\eta}(t_1) \mid + \mid u_{\eta\nu}(t_2) - u_{\eta\nu}(t_1) \mid) \mid v_\nu \mid da +$$
$$+ \int_{\Gamma 3} L_\tau(\mid \beta_{u_\eta}(t_1) - \beta_{u_\eta}(t_2) \mid + \|u_{\eta\tau}(t_1) - u_{\eta\tau}(t_2)\|)\|v_\tau \| da.$$

De l'inégalité précédente on déduit que :

$$| (\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2), \upsilon)_V | \leq c \parallel \beta_{u_\eta}(t_1) - \beta_{u_\eta}(t_2) \parallel_{L^2(\Gamma_3)} \|\upsilon \|_{L^2(\Gamma_3)^d} + \\ +c\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)^d}\|\upsilon \|_{L^2(\Gamma_3)^d},$$

d'après (**1.1.20**) et l'inégalité précédente on obtient :

$$| (\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2), \upsilon)_V | \leq c \parallel \beta_{u_\eta}(t_1) - \beta_{u_\eta}(t_2) \parallel_{L^2(\Gamma_3)} \|\upsilon \|_V + \\ +c\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V\|\upsilon \|_V .$$

On pose $\upsilon = \Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2)$ pour obtenir :

$$\|\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2)\|_V \leq c \parallel \beta_{u_\eta}(t_1) - \beta_{u_\eta}(t_2) \parallel_{L^2(\Gamma_3)} +c\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V. \quad (1.3.18)$$

En utilisant le **Lemme 1.3.3** et le **Lemme 1.3.5** on a $u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ et $\beta_{u_\eta} \in W^{1,\infty}(0,T\ ; L^2(\Gamma_3))$, donc d'après (**1.3.18**) on obtient $\Lambda\eta \in W^{1,\infty}(0,T\ ;V)$. Soit maintenant $\eta_1, \eta_2 \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ et on pose $u_{\eta_i} = u_i$. Nous utilisons des arguments semblables à ceux utilisés dans la preuve de (**1.3.18**) on trouve :

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \leq c\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + c \parallel \beta_{u_1}(t) - \beta_{u_2}(t) \parallel_{L^2(\Gamma_3)} \forall t \in [0,T] .$$

d'après l'inégalité précédente et (**1.3.8**) on obtient :

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \leq c\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \\ +c\int_0^t \parallel u_1(s) - u_2(s) \parallel_V ds\ \forall t \in [0,T], \quad (1.3.19)$$

D'autre part, d'après (**1.3.11**) on obtient :

$$(\mathcal{A}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t)))_{\mathcal{H}} \leq (\eta_1(t) - \eta_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V$$

et d'après (**1.1.19**), (**1.1.21**)(**c**) on obtient :

$$\alpha \parallel u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq (\eta_1(t) - \eta_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V,$$

L'utilisation de l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* dans cette dernière inégalité nous donne :

$$\parallel u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq c \parallel \eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V \parallel u_1(t) - u_2(t)\|_V,$$

d'où on obtient le résultat suivant :

$$\parallel u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq c \parallel \eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V, \forall t \in [0,T], \quad (1.3.20)$$

Maintenant d'après (**1.3.19**) on trouve :

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V \leq c \parallel \eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V + c\int_0^t \parallel \eta_1(s) - \eta_2(s) \parallel_V ds \\ \forall t \in [0,T]. \quad (1.3.21)$$

L'itération de cette inégalité n fois entraîne l'inégalité suivante :

$$\|\Lambda^n\eta_1 - \Lambda^n\eta_2\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} \leq \frac{c^n(n+T)^n}{n!} \| \eta_1 - \eta_2 \|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}, \qquad (1.3.22)$$

donc pour n suffisamment grand l'inégalité (**1.3.22**) montre que $\Lambda^n : W^{1,\infty}(0,T;V) \to W^{1,\infty}(0,T;V)$ est une contraction dans l'espace de Banach $W^{1,\infty}(0,T;V)$, d'où par l'utilisation du théorème du point fixe Λ^n possède un unique point fixe η^* tel que $\Lambda^n\eta^* = \eta^*$. Nous concluons que Λ possède un unique point fixe η^* tel que $\Lambda\eta^* = \eta^*$. ■

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour établir la solution du problème (Q_V).

Lemme 1.3.7 : *Il existe un unique champ des déplacements $u : [0,T] \to V$ et un unique champ des contraintes $\sigma : [0,T] \to \mathcal{H}_1$ du problème (Q_V) tel que* (**1.3.1**) *et* (**1.3.2**) *sont vérifiés.*

Démonstration. : **1) Existence** : Soit $\eta^* \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ le point fixe de Λ et soit u la solution du problème (Q_V^η) pour $\eta = \eta^*$ c'est à dire $u = u_{\eta^*}$. Nous notons par σ la fonction donnée par (**1.2.6**). En utilisant (**1.3.11**), (**1.3.12**), (**1.3.17**) et on prend on compte que $\Lambda\eta^* = \eta^*$, nous obtenons que le couple $(u, \boldsymbol{\sigma})$ est la solution du problème (Q_V). En outre, on a démontré que $u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ donc pour $\eta = \eta^*$ on obtient $u = u_{\eta^*} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$. Nous choisissons maintenant $v = u \pm \varphi \in D^d(\Omega)$ (qui est dense dans $H_0^1(\Omega)^d$) dans (**1.2.8**) on obtient : ■

1) Pour $v = u + \varphi$ on a :

$$(\sigma(t), \varepsilon(\varphi))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u(t), \varphi) \geq (f_0(t), \varphi)_H + (f_2(t), \varphi)_{L^2(\Gamma_2)^d} \ \forall\varphi \in D^d(\Omega),$$

mais $j_{ad}(\beta(t), u(t), \varphi) = 0$ et $(f_2(t), \varphi)_{L^2(\Gamma_2)^d} = 0$ parce que $\varphi_{|\Gamma} = 0$. D'où on obtient :

$$(\sigma(t), \varepsilon(\varphi))_{\mathcal{H}} + (-f_0(t), \varphi)_H \geq 0 \ \forall\varphi \in D^d(\Omega) = D. \qquad (1.3.23)$$

2) Pour $v = u - \varphi$, de la même manière on obtient :

$$(\sigma(t), \varepsilon(\varphi))_{\mathcal{H}} + (-f_0(t), \varphi)_H \leq 0 \ \forall\varphi \in D^d(\Omega) = D, \qquad (1.3.24)$$

de (**1.3.23**) et (**1.3.24**) on a :

$$(\sigma(t), \varepsilon(\varphi))_{\mathcal{H}} + (-f_0(t), \varphi)_H = 0 \ \forall\varphi \in D^d(\Omega) = D,$$

donc on obtient le résultat :

$$Div\sigma(t) + f_0(t) = 0 \ \forall t \in [0,T], \qquad (1.3.25)$$

d'où d'après (**1.3.25**) et (**1.1.26**) on obtient $Div\sigma \in W^{1,\infty}(0,T\ ;H)$, donc $\sigma \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$.

2) Unicité : L'unicité de la solution du problème (Q_V) est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ.

On prend maintenant $\beta = \beta_u$ dans le problème (P^{β_u}) d'où $\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$. Finalement, du **Lemme 1.3.3** et le **Lemme 1.3.7** on déduit que le triplet $(u, \boldsymbol{\sigma}, \beta)$ est la solution unique du problème (P_V).

Le **Théorème 1.3.1** maintenant est une conséquence du **Lemme 1.3.3** et le **Lemme 1.3.7**.

L'approximation numérique des problèmes aux limites est un domaine mathématique qui, historiquement, a fait l'objet de nombreuses recherches et continue cependant de rester d'actualité, par le fait qu'elle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique, la biologie, ect... Il est essentiel de construire des méthodes numériques de résolution de ces problèmes qui soient à la fois simples, peu coûteuses et efficaces. Les méthodes modernes sont basées sur une "discrétisation" des équations et inéquations dont l'idée est d'approcher la solution. Pour les cas quasistatiques, on distingue deux types de discrétisation incomplète et complète. La première consiste à discrétiser seulement l'espace ; cependant la deuxième est basée sur la discrétisation de l'espace ainsi que l'intervalle de temps. En faite, ces approches, dans le cas des inéquations variationnelles ont fait l'objet de plusieurs études tel que [**7**] dans le cas d'un problème viscoélastique ; [**8**] , [**21**] et [**24**] pour des problèmes viscoplastique et [**19**] pour un problème de contact avec adhésion. Dans notre étude on considère l'approximation variationnelle d'un problème élastique avec adhésion. Cette section se compose de trois parties.

La première partie est destinée à présenter le problème approché, ensuite donner et estimer L'erreur de discrétisation incomplète du problème approché. Dans la seconde partie on présente un résultat de convergence pour le schéma. Le schéma de discrétisation incomplète est analysé a l'aide de la méthode des éléments finis, voir par exemple [**11**]. En fait, cette méthode est utilisée pour discrétiser l'espace. La convergence forte de ce cas est établie sous une régularité minimale de la solution. Finalement on donne dans la troisième partie une application brève pour mieux comprendre comment construire les espaces à dimension finie ainsi que les solutions approchées.

1.4 Approximation semi-discrète

On analyse dans cette section, une approximation semi-descrète du problème P_V, en discrétisant le domaine spatiale. On considère une position générale des espaces arbitraires de dimension finie $V_h \subset V$, $\mathcal{H}_h \subset \mathcal{H}$ et $L^2_h(\Gamma_3) \subset L^2(\Gamma_3)$ utilisés pour approcher les espace V, $\mathcal{H}$ et $L^2(\Gamma_3)$; h est un paramètre de discrétisation destiné à tendre vers zéro. Partout dans cette section, c dénote une constante positive qui ne dépend que de h dont sa valeur peut changer d'une place à une autre. On considère, pour chaque h, un ensemble $K_h \subset V_h$ qui approche U_{ad} et qui vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 1)\ K_h \text{ est un ensemble convexe fermé de } V_h. \\ 2)\ K_h \text{ approche } U_{ad} \text{ au sens suivant :} \\ i)\ \forall v \in U_{ad}, \text{on peut trouver } v_h \in K_h \text{ avec } v_h \to v \text{ dans } V. \\ ii)\ \text{Si } u_h \in K_h, u_h \to u \text{ dans } V, \text{ alors } u \in U_{ad}. \end{cases}$$

Ainsi, on considère l'approximation incomplète suivante du problème variationnel P_V.

Problème $\mathbf{P}_V^h$: *Trouver le champ des déplacements $u_h : [0,T] \to V_h$, le champ des contraintes $\sigma_h : [0,T] \to \mathcal{H}_{1_h}$ et le champ d'adhésion $\beta_h : [0,T] \to L_h^2(\Gamma_3)$ tels que :*

$$\sigma_h(t) = \mathcal{A}\varepsilon(u_h(t)),\ \forall t \in [0,T], \tag{1.4.1}$$

$$\dot{\beta}_h(t) = -(\beta_h(t)(\gamma_\nu(R_\nu(u_{h\nu}(t))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_{h\tau}(t)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+\ ,\ \forall t \in [0,T], \tag{1.4.2}$$

$$\begin{aligned} &u_h(t) \in K_h,\ (\sigma_h(t), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u_h(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta_h(t), u_h(t), v_h) - \\ &-j_{ad}(\beta_h(t), u_h(t), u_h(t)) \geq (f(t), v_h - u_h(t))_V\ \forall v_h \in K_h,\ t \in [0,T], \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

$$u_h(0) = u_{0h},\ \beta_h(0) = \beta_{0h}, \tag{1.4.4}$$

En utilisant des arguments similaire à ceux utilisés pour la démonstration du **Théorème 1.3.1**, on démontre que le problème P_V^h possède une solution unique. Soit le théorème suivant :

Théorème 1.4.1 : *On suppose que les conditions* (**1.1.21**) − (**1.1.26**) *et* (**1.1.29**) *sont vérifiées. Alors, il existe une solution unique (u_h, σ_h, β_h) du problème P_V^h . De plus, la solution satisfait $u_h \in W^{1,\infty}(0,T;V_h)$, $\sigma_h \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_{1_h})$, $\beta_h \in W^{1,\infty}(0,T\ ;L_h^2(\Gamma_3))$.*

Notre objectif est de tirer des estimations d'erreur pour les différences $u - u_h$, $\sigma - \sigma_h$ et $\beta - \beta_h$. Pour cela, soit $t \in [0,T]$, en utilisant (**1.2.6**) − (**1.2.9**) on obtient :

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(u(t)), \tag{1.4.5}$$

$$\beta(t) = \beta_0 - \int_0^t (\beta(s)(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu(s))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_\tau(s)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+\, ds\ \forall\ t \in [0,T]\,, \tag{1.4.6}$$

$$\begin{aligned} &u(t) \in U_{ad},\ (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v) - \\ &-j_{ad}(\beta(t), u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_V\ \forall v \in U_{ad},\ \forall t \in [0,T], \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

et de (**1.4.1**) − (**1.4.4**) on obtient :

$$\sigma_h(t) = \mathcal{A}\varepsilon(u_h(t)), \tag{1.4.8}$$

$$\beta_h(t) = \beta_{0h} - \int_0^t (\beta_h(s)(\gamma_\nu(R_\nu(u_{h\nu}(s))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_{h\tau}(s)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+\, ds \quad \forall\ t \in [0,T]\,, \tag{1.4.9}$$

$$\begin{aligned}&u_h(t) \in K_h,\ (\sigma_h(t), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u_h(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta_h(t), u_h(t), v_h) - \\ &- j_{ad}(\beta_h(t), u_h(t), u_h(t)) \geq (f(t), v_h - u_h(t))_V\ \forall v_h \in K_h,\ t \in [0,T].\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

En soustrayant (**1.4.8**) de (**1.4.5**) on obtient :

$$\sigma(t) - \sigma_h(t) = \mathcal{A}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(u_h(t)),$$

et comme $\mathcal{A}$ et ε sont linéaires on trouve :

$$\sigma(t) - \sigma_h(t) = \mathcal{A}\varepsilon(u(t) - u_h(t)). \tag{1.4.11}$$

De plus, en remplaçant (**1.4.5**) dans (**1.4.7**) on déduit que :

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v) - \\ &- j_{ad}(\beta(t), u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_V\ \forall v \in U_{ad},\ \forall t \in [0,T].\end{aligned}$$

De l'inégalité précédente on obtient :

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(u(t)) - \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \leq j_{ad}(\beta(t), u(t), v) - \\ &- j_{ad}(\beta(t), u(t), u(t)) + (f(t), u(t) - v)_V\ \forall v \in U_{ad},\ \forall t \in [0,T],\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

en remplaçant (**1.4.8**) dans (**1.4.10**) on obtient :

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(u_h(t)), \varepsilon(u_h(t)) - \varepsilon(v_h))_{\mathcal{H}} \leq j_{ad}(\beta_h(t), u_h(t), v_h) - \\ &- j_{ad}(\beta_h(t), u_h(t), u_h(t)) + (f(t), u_h(t) - v_h)_V\ \forall v_h \in K_h, t \in [0,T],\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

de (**1.4.12**) et pour $v = u_h(t)$ on aura donc :

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(u(t)) - \varepsilon(u_h(t)))_{\mathcal{H}} \leq j_{ad}(\beta(t), u(t), u_h(t)) - \\ &- j_{ad}(\beta(t), u(t), u(t)) + (f(t), u(t) - u_h(t))_V\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

et de (**1.4.13**) pour $v_h = v_h(t)$ on aura :

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(u_h(t)), \varepsilon(u_h(t) - u(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{A}\varepsilon(u_h(t)), \varepsilon(u(t) - v_h(t)))_{\mathcal{H}} \leq \\ &j_{ad}(\beta_h(t), u_h(t), v_h(t)) - j_{ad}(\beta_h(t), u_h(t), u_h(t)) + (f(t), u_h(t) - v_h(t))_V \\ &\forall v_h(t) \in K_h,\ t \in [0,T].\end{aligned} \tag{1.4.15}$$

Par sommation de (**1.4.14**) et (**1.4.15**) on obtient :

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(u(t) - u_h(t)), \varepsilon(u(t) - u_h(t)))_{\mathcal{H}} \leq \\ &+ j_{ad}(\beta(t), u(t), u_h(t)) - j_{ad}(\beta(t), u(t), u(t)) + \\ &+ j_{ad}(\beta_h(t), u_h(t), v_h(t)) - j_{ad}(\beta_h(t), u_h(t), u_h(t)) + \\ &+ (\mathcal{A}\varepsilon(u_h(t)), \varepsilon(v_h(t) - u(t)))_{\mathcal{H}} + (f(t), u(t) - v_h(t))_V \\ &\forall v_h \in K_h,\ t \in [0,T],\end{aligned} \tag{1.4.16}$$

de l'inégalité (**1.4.16**) on déduit que :

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(u(t) - u_h(t)), \varepsilon(u(t) - u_h(t)))_{\mathcal{H}} \leq \\ &+ j_{ad}(\beta(t), u(t), u_h(t) - u(t)) - j_{ad}(\beta_h(t), u_h(t), u_h(t) - u(t)) + \\ &+ j_{ad}(\beta_h(t), u_h(t), v_h(t) - u(t)) + (\mathcal{A}\varepsilon(u_h(t)), \varepsilon(v_h(t) - u(t)))_{\mathcal{H}} + \\ &+ (f(t), u(t) - v_h(t))_V\ \forall v_h(t) \in K_h,\ t \in [0,T],\end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}\varepsilon(u(t)-u_h(t)),\varepsilon(u(t)-u_h(t)))_{\mathcal{H}} \leq \\
&+j_{ad}(\beta(t),u(t),u_h(t)-u(t)) - j_{ad}(\beta_h(t),u_h(t),u_h(t)-u(t))+ \\
&+j_{ad}(\beta_h(t),u_h(t),v_h(t)-u(t)) - j_{ad}(\beta(t),u(t),v_h(t)-u(t))+ \\
&+j_{ad}(\beta(t),u(t),v_h(t)-u(t)) + (\mathcal{A}\varepsilon(u_h(t)-u(t)),\varepsilon(v_h-u(t)))_{\mathcal{H}}+ \\
&+(\mathcal{A}\varepsilon(u(t)),\varepsilon(v_h(t)-u(t)))_{\mathcal{H}} + (f(t),u(t)-v_h(t))_V \\
&\forall v_h(t)\in K_h,\ t\in[0,T].
\end{aligned}
$$

Finalement nous obtenons l'inégalité suivante :

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}\varepsilon(u(t)-u_h(t)),\varepsilon(u(t)-u_h(t)))_{\mathcal{H}} \leq (\mathcal{A}\varepsilon(u_h(t)-u(t)),\varepsilon(v_h(t)-u(t)))_{\mathcal{H}}+ \\
&+j_{ad}(\beta(t),u(t),u_h(t)-u(t)) - j_{ad}(\beta_h(t),u_h(t),u_h(t)-u(t))+ \\
&+j_{ad}(\beta_h(t),u_h(t),v_h(t)-u(t)) - j_{ad}(\beta(t),u(t),v_h(t)-u(t))+ \\
&+\mathcal{R}(v_h(t)-u(t)), \forall v_h(t)\in K_h,\ t\in[0,T],
\end{aligned}
\tag{1.4.17}
$$

où la fonction $\mathcal{R}$ est définie par :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(v(t)) = (\mathcal{A}\varepsilon(u(t)),\varepsilon(v(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t),u(t),v(t)) - (f(t),v(t))_V, \\
\forall v(t)\in U_{ad},\ t\in[0,T],
\end{aligned}
$$

et elle verifie l'inégalité suivante :

$$
|\ \mathcal{R}(v(t)\ | \leq c(\|u(t)\|_V + \|f(t)\|_V + \|\beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)})\|v(t)\|_V. \tag{1.4.18}
$$

De (**1.1.21**)(**c**) et (**1.1.19**), on a :

$$
(\mathcal{A}\varepsilon(u(t)-u_h(t)),\varepsilon(u(t)-u_h(t)))_{\mathcal{H}} \geq \alpha\|u(t)-u_h(t)\|_V^2, \tag{1.4.19}
$$

et La fonctionnelle j_{ad} satisfait l'inégalité suivante pour tout $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ de $L^2(\Gamma_3)$ et $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)\in V$

$$
\begin{aligned}
|\ j_{ad}(\beta_1(t),u_1(t),u_3(t)) - j_{ad}(\beta_2(t),u_2(t),u_3(t))\ | \leq \\
\leq c(\|\beta_1(t)-\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|u_1(t)-u_2(t)\|_V)\|u_3(t)\|_V.
\end{aligned}
\tag{1.4.20}
$$

D'après (**1.4.17**), (**1.4.18**), (**1.4.19**) et (**1.4.20**) on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\alpha\|u(t)-u_h(t)\|_V^2 \leq c(|\ \beta(t)-\beta_h(t)\ |_{L^2(\Gamma_3)} + \|u(t)-u_h(t)\|_V)\|u(t)-u_h(t)\|_V + \\
&+c(\|\beta(t)-\beta_h(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|u(t)-u_h(t)\|_V)\|v_h(t)-u(t)\|_V + \\
&+c(\|u(t)\|_V + \|f(t)\|_V + \|\beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)})\|v_h(t)-u(t)\|_V,\ \forall v_h(t)\in K_h, t\in[0,T].
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité élémentaire suivante :

$$
ab \leq \frac{a^2}{2\delta} + \frac{\delta b^2}{2},
$$

pour obtenir l'inégalité :

$$\begin{aligned}
&\alpha\|u(t)-u_h(t)\|_V^2 \leq \\
&\frac{c}{2\,\delta}[|\ \beta(t)-\beta_h(t)\ |_{L^2(\Gamma_3)} + \|u(t)-u_h(t)\|_V]^2 + \frac{c\,\delta}{2}\|u(t)-u_h(t)\ \|_V^2 + \\
&+\frac{c}{2\,\delta}[|\ \beta(t)-\beta_h(t)\ |_{L^2(\Gamma_3)} + \|u(t)-u_h(t)\|_V]^2 + \frac{c\,\delta}{2}\|v_h(t)-u(t)\ \|_V^2 + \\
&c(\|u_h\|_V + \|f\|_V + \|\beta\|_{L^2(\Gamma_3)})\|v_h-u\|_V\ \forall v_h \in K_h,\ t\in[0,T],
\end{aligned}$$

mais on sait que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}\ \forall a,\ b \in \mathbb{R}_+$ d'où on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\alpha}\|u(t)-u_h(t)\|_V \leq \\
&\sqrt{\frac{c}{2\,\delta}}[|\ \beta(t)-\beta_h(t)\ |_{L^2(\Gamma_3)} + \|u(t)-u_h(t)\|_V] + \sqrt{\frac{c\,\delta}{2}}\|u(t)-u_h(t)\ \|_V + \\
&+\sqrt{\frac{c}{2\,\delta}}[|\ \beta(t)-\beta_h(t)\ |_{L^2(\Gamma_3)} + \|u(t)-u_h(t)\|_V] + \sqrt{\frac{c\,\delta}{2}}\|v_h(t)-u(t)\ \|_V + \\
&c(\|u\|_V + \|f\|_V + \|\beta\|_{L^2(\Gamma_3)})^{\frac{1}{2}}\|v_h(t)-u(t)\|_V^{\frac{1}{2}}\ \forall v_h \in K_h,\ t\in[0,T],
\end{aligned}$$

on peut écrire l'inégalité précédente sous la forme :

$$\begin{aligned}
&\|u(t)-u_h(t)\|_V \leq \\
&2\sqrt{\tfrac{C}{2\,\alpha\,\delta}}\ |\ \beta(t)-\beta_h(t)\ |_{L^2(\Gamma_3)} + (2\sqrt{\tfrac{C}{2\,\alpha\,\delta}} + \sqrt{\tfrac{C\,\delta}{2\,\alpha}})\|u(t)-u_h(t)\ \|_V \\
&\sqrt{\tfrac{C\,\delta}{2}}\|v_h(t)-u(t)\ \|_V + C(\|u_h\|_V + \|f\|_V + \|\beta\|_{L^2(\Gamma_3)})^{\frac{1}{2}}\|v_h-u\|_V^{\frac{1}{2}} \\
&\forall v_h \in K_h,\ t\in[0,T].
\end{aligned} \tag{1.4.21}$$

De plus, d'après (**1.4.11**) on a :

$$\sigma(t)-\sigma_h(t) = \mathcal{A}\varepsilon(u(t)-u_h(t)),$$

en utilisant(**1.1.19**) et la linéarité de $\mathcal{A}$ et ε on obtient :

$$\|\sigma(t)-\sigma_h(t)\|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{A}}\|u(t)-u_h(t)\|_V. \tag{1.4.22}$$

Finalement, en soustrayant (**1.4.9**) de (**1.4.6**) on trouve :

$$\begin{aligned}
&\beta-\beta_h(t) = \int_0^t [(\beta_h(s)(\gamma_\nu(R_\nu(u_{h\nu}(s))^2 + \gamma_\tau\ \|\ R_\tau(u_{h\tau}(s))\ \|^2) - \\
&-(\beta(s)(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu(s))^2 + \gamma_\tau\ \|\ R_\tau(u_\tau(s))\ \|^2))]ds_+\beta_0\ -\beta_{0h} \\
&\forall\ t \in [0,T].
\end{aligned}$$

En utilisant les mêmes techniques utilisées pour obtenir (**1.3.8**) on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|\ \beta(t)-\beta_h(t)\ \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t \|u(s)-u_h(s)\|_V ds + \\
&+c\int_0^t \|\beta(s)-\beta_h(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + c\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{L^2(\Gamma_3)}.
\end{aligned} \tag{1.4.23}$$

Donc, en additionnant (**1.4.21**) et (**1.4.23**) on trouve :

$$\begin{aligned}
&\|u(t)-u_h(t)\|_V+\mid \beta(t)-\beta_h(t)\mid_{L^2(\Gamma_3)}\leq\\
&2\sqrt{\frac{c}{2\,\alpha\,\delta}}\mid \beta(t)-\beta_h(t)\mid_{L^2(\Gamma_3)}+(2\sqrt{\frac{c}{2\,\alpha\,\delta}}+\sqrt{\frac{c\,\delta}{2\,\alpha}})\|u(t)-u_h(t)\,\|_V\\
&c\int_0^t\|u(s)-u_h(s)\|_V ds+c\int_0^t\|\beta(s)-\beta_h(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}ds+c\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{L^2(\Gamma_3)}+\\
&\sqrt{\frac{c\,\delta}{2}}\|v_h(t)-u(t)\,\|_V+c(\|u\|_V+\|f\|_{\,V}+\|\beta\|_{L^2(\Gamma_3)})^{\frac{1}{2}}\|v_h-u\|_V^{\frac{1}{2}}\\
&\forall v_h\in K_h,\ t\in[0,T],
\end{aligned}$$

d'où il résulte :

$$\begin{aligned}
&(1-2\sqrt{\frac{c}{2\,\alpha\,\delta}}-\sqrt{\frac{c\,\delta}{2\,\alpha}})\|u(t)-u_h(t)\|_V+(1-2\sqrt{\frac{c}{2\,\alpha\,\delta}})\mid \beta(t)-\beta_h(t)\mid_{L^2(\Gamma_3)}\leq\\
&c\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{L^2(\Gamma_3)}+\sqrt{\frac{c\,\delta}{2}}\|v_h(t)-u(t)\,\|_V+c(\|u\|_V+\|f\|_{\,V}+\|\beta\|_{L^2(\Gamma_3)})^{\frac{1}{2}}\|v_h-u\|_V^{\frac{1}{2}}+\\
&+c\int_0^t(\|u(s)-u_h(s)\|_V+\|\beta(s)-\beta_h(s)\|_{L^2(\Gamma_3)})ds\ \forall v_h\in K_h,\ t\in[0,T].
\end{aligned}$$

on prend δ tel que :

$$1-2\sqrt{\frac{c}{2\,\alpha\,\delta}}-\sqrt{\frac{c\,\delta}{2\,\alpha}}>0 \text{ et } 1-2\sqrt{\frac{c}{2\,\alpha\,\delta}}>0,$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|u(t)-u_h(t)\|_V+\|\ \beta(t)-\beta_h(t)\ \|_{L^2(\Gamma_3)}\leq c\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{L^2(\Gamma_3)}+\\
&+c\|v_h(t)-u(t)\,\|_V+c(\|u(t)\|_V+\|f(t)\|_{\,V}+\|\beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)})^{\frac{1}{2}}\|v_h(t)-u(t)\|_V^{\frac{1}{2}}+\\
&+c\int_0^t(\|u(s)-u_h(s)\|_V+\|\beta(s)-\beta_h(s)\|_{L^2(\Gamma_3)})ds\ \forall v_h\in K_h,\ t\in[0,T].
\end{aligned}\tag{1.4.24}$$

Moyennant une version des lemmes de *Gronwall*, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
&\|u(t)-u_h(t)\|_V+\mid \beta(t)-\beta_h(t)\mid_{L^2(\Gamma_3)}\leq c\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{L^2(\Gamma_3)}+\\
&+c\|v_h(t)-u(t)\,\|_V++\,c(\|u(t)\|_V+\|f(t)\|_{\,V}+\|\beta\|_{L^2(\Gamma_3)})^{\frac{1}{2}}\|v_h(t)-u(t)\|_V^{\frac{1}{2}}\\
&\forall v_h(t)\in K_h,\ t\in[0,T].
\end{aligned}\tag{1.4.25}$$

Par conséquent, on a le résultat suivant :

Théorème 1.4.2 *: Soit (u,β) la solution du problème P_V et soit (u_h,β_h) la solution du problème P_V^h. Alors on a l'estimation d'erreur suivante :*

$$\begin{aligned}
&\|u-u_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;\,V)}+\|\ \beta-\beta_h\ \|_{W^{1,\infty}(0,T;\,L^2(\Gamma_3))}\leq\\
&c\|\beta_0-\beta_{0h}\|_{W^{1,\infty}(0,T;\,V)}+c\inf_{v_h\in K_h}(\|v_h-u\,\|_{W^{1,\infty}(0,T;\,V)}+\\
&+(\|u\|_{W^{1,\infty}(0,\,T;\,V)}+\|f\|_{\,W^{1,\infty}(0,T\,;\,V)}+\|\beta\|_{W^{1,\infty}(0,T;\,L^2(\Gamma_3))})^{\frac{1}{2}}\|v_h-u\|^{\frac{1}{2}}_{W^{1,\infty}(0,T\,;\,V)}.
\end{aligned}\tag{1.4.26}$$

L'estimation (**1.4.26**) est la base de l'analyse de convergence du schéma semi-discrèt. En effet, en argumentant comme dans *Raviart* [**33**], on déduit le résultat de convergence suivant :

Corollaire 1.4.3 *: On suppose que les conditions* (**1.1.21**) – (**1.1.26**) *et* (**1.1.29**) *sont satisfaits, et*

$$\|\beta_0 - \beta_{0h}\| \to 0 \text{ quand } h \to 0. \tag{1.4.27}$$

Alors moyennant (**1.4.22**), (**1.4.26**) *et* (**1.4.27**) *on obtient :*

$$\|u - u_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} + \|\beta - \beta_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))} + \|\sigma - \sigma_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)} \to 0.$$

Donc la méthode converge lorsque $h \to 0$.

On considère maintenant une approximation complète du problème P_V. Soit $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$, une partition de l'intervalle de temps $[0,T]$, et soit $k = T/N$ le pas de discrétisation et $t_n = nk$ les noeuds pour $n = 0, 1, ..., N$. Pour une fonction continue $t \to w(t)$ on utilise la notation $w_n = w(t_n)$ et pour une suite $\{w_n\}_{n=0}^N$ on note $\delta w_n = (w_n - w_{n-1})/k$. Dans cette section, c dénote une constante positive indépendante des paramètre de discrétisation k et h.

La discrétisation complète est basée sur un schéma progressif d'*Euler* et elle est donnée sous la forme suivante :

Problème $\mathbf{P}_V^{hk}$ *: Trouver le champ des déplacements* $u^{hk} = \{u_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V_h$ *, le champ des contraintes* $\sigma^{hk} = \{\sigma_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset \mathcal{H}_{1_h}$ *et le champ d'adhésion* $\beta^{hk} = \{\beta_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset B_h$ *tels que :*

$$u^{hk}(0) = u_0^h, \beta^{hk}(0) = \beta_0^h. \tag{1.4.28}$$

Et pour $n = 1, ..., N$

$$\sigma_n^{hk} = \mathcal{A}\varepsilon(u_n^{hk}), \tag{1.4.29}$$

$$\delta\beta_n^{hk} = -(\beta_{n-1}^{hk}(\gamma_\nu(R_\nu(u_{(n-1)\nu}^{hk})^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_{(n-1)\tau}^{hk}) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+, \tag{1.4.30}$$

$$\begin{aligned} & u_n^{hk} \in K_h, (\sigma_n^{hk}, \varepsilon(v^h) - \varepsilon(u_n^{hk}))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, v^h) - \\ & - j_{ad}(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, u_n^{hk}) \geq (f_n, v^h - u_n^{hk})_V \\ & \forall v^h \in K_h. \end{aligned} \tag{1.4.31}$$

En utilisant les arguments classiques des inégalités variationnelles, on déduit l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème P_V^{hk}. Ce que nous énonçons comme suit :

Théorème 1.4.4 *: On suppose que les conditions* (**1.1.21**) – (**1.1.26**) *et* (**1.1.29**) *sont vérifiées. Alors, il existe une solution unique* $(u^{hk}, \sigma^{hk}, \beta^{hk})$ *du problème* P_V^{hk}.

Notre intérêt est d'estimer les différences $u_n - u_n^{hk}$, $\sigma_n - \sigma_n^{hk}$, $\beta_n - \beta_n^{hk}$. Soit $n \in \{1, ..., N\}$ et on définit $u_n = u(t_n)$, $\sigma_n = \sigma(t_n)$, $\beta_n = \beta(t_n)$. En utilisant (**1.4.5**) pour $t = t_n$ on obtient :

$$\sigma_n = \mathcal{A}\varepsilon(u_n), \tag{1.4.32}$$

en suite, en soustrayant (**1.4.29**) de (**1.4.32**) on trouve :

$$\sigma_n - \sigma_n^{hk} = \mathcal{A}\varepsilon(u_n - u_n^{hk}),$$

mais d'après (**1.1.21**) l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire continue donc il existe $L_{\mathcal{A}} > 0$ tel que :

$$\|\mathcal{A}\varepsilon(u_n - u_n^{hk})\|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon(u_n - u_n^{hk})\|_{\mathcal{H}},$$

et d'après (**1.1.19**) on obtient :

$$\|\mathcal{A}\varepsilon(u_n - u_n^{hk})\|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{A}} \|u_n - u_n^{hk}\|_V,$$

d'où, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{A}} \|u_n - u_n^{hk}\|_V. \tag{1.4.33}$$

En remplaçant (**1.4.29**) dans (**1.4.31**), il résulte :

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(u_n^{hk}), \varepsilon(v^h) - \varepsilon(u_n^{hk}))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, v^h) - \\ &- j_{ad}(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, u_n^{hk}) \geq (f_n, v^h - u_n^{hk})_V, \ \forall v^h \in K_h,\end{aligned}$$

d'où, on déduit l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(u_n^{hk}), \varepsilon(u_n^{hk}) - \varepsilon(v^h))_{\mathcal{H}} \leq j_{ad}(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, v^h) - \\ &- j_{ad}(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, u_n^{hk}) + (f_n, u_n^{hk} - v^h)_V, \ \forall v^h \in K_h.\end{aligned} \tag{1.4.34}$$

En suite, par sommation de (**1.4.34**) et (**1.4.12**) pour $t = t_n$ et $v = u_n^{hk}$, on obtient :

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(u_n - u_n^{hk}), \varepsilon(u_n - u_n^{hk}))_{\mathcal{H}} \leq \\ &+ j_{ad}(\beta_n, u_n, u_n^{hk} - u_n) - j_{ad}(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, u_n^{hk} - u_n) + \\ &+ j_{ad}(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, v_h - u_n) + (\mathcal{A}\varepsilon(u_n^{hk}), \varepsilon(v_h - u_n))_{\mathcal{H}} + \\ &+ (f_n, u_n - v_h)_V, \forall v_h \in K_h.\end{aligned}$$

En utilisant des arguments similaire à ceux utilisés pour la démonstration de (**1.4.21**) on obtient :

$$\begin{aligned}&\|u_n - u_n^{hk}\|_V \leq \\ &2\sqrt{\frac{c}{2\,\alpha\,\delta}} \mid \beta_n - \beta_n^{hk} \mid_{L^2(\Gamma_3)} + (2\sqrt{\frac{c}{2\,\alpha\,\delta}} + \sqrt{\frac{c\,\delta}{2\,\alpha}}) \|u_n - u_n^{hk}\|_V + \\ &\sqrt{\frac{c\,\delta}{2}} \|v_h - u_n(t)\|_V + c(\|u_n^{hk}\|_V + \|f_n\|_V + \|\beta_n\|_{L^2(\Gamma_3)})^{\frac{1}{2}} \|v_h - u_n\|_V^{\frac{1}{2}} \\ &\forall v_h \in K_h, \ t \in [0, T].\end{aligned} \tag{1.4.35}$$

Il reste d'estimer $\|\beta_n - \beta_n^{hk}\|$, pour cela on a de (**1.4.30**) :

$$\beta_n^{hk} = \beta_0^{hk} - \sum_{j=1}^{n} k(\beta_{j-1}^{hk}(\gamma_\nu(R_\nu(u_{(j-1)\nu}^{hk})^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_{(j-1)\tau}^{hk}) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+, \quad (1.4.36)$$

et de (**3.2.7**) on a pour $t = t_n$:

$$\beta_n = \beta_0 - \sum_{j=1}^{n} k(\beta_{j-1}(\gamma_\nu(R_\nu(u_{(j-1)\nu})^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_{(j-1)\tau}) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+. \quad (1.4.37)$$

En soustrayant (**1.4.36**) de (**1.4.37**) et en effectuant quelques transformations, on trouve :

$$\begin{aligned} \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\sum_{j=1}^{n} k(\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\| + \|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\|_V) + \\ + J_n + \|\beta_0 - \beta_0^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}, \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

où

$$\begin{aligned} J_n = \| \int_0^{t_n} (\beta(s)(\gamma_\nu(R_\nu(u_\nu(s))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_\tau(s)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+ \, ds + \\ -\sum_{j=1}^{n} k(\beta_{j-1}(\gamma_\nu(R_\nu(u_{(j-1)\nu})^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_{(j-1)\tau}) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+\|_{L^2(\Gamma_3)}. \end{aligned} \quad (1.4.39)$$

De (**1.4.33**), (**1.4.35**) et (**1.4.38**) nous avons :

$$\begin{aligned} &\|u_n - u_n^{hk}\|_V + \|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\|_{\mathcal{H}} + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq L_{\mathcal{A}}\|u_n - u_n^{hk}\|_V + \\ &+2\sqrt{\frac{c}{2\,\alpha\,\delta}} \mid \beta_n - \beta_n^{hk} \mid_{L^2(\Gamma_3)} + (2\sqrt{\frac{c}{2\,\alpha\,\delta}} + \sqrt{\frac{c\,\delta}{2\,\alpha}})\|u_n - u_n^{hk}\|_V + \\ &+J_n + \|\beta_0 - \beta_0^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)} + C\sum_{j=1}^{n}(\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\| + \|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\|_V) + \\ &+\sqrt{\frac{c\,\delta}{2}}\|v_h - u_n(t)\|_V + c(\|u_n^{hk}\|_V + \|f_n\|_V + \|\beta_n\|_{L^2(\Gamma_3)})^{\frac{1}{2}}\|v_h - u_n\|_V^{\frac{1}{2}} \\ &\forall v_h \in K_h. \end{aligned}$$

En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour la démonstration de (**1.4.24**) on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} &\|u_n - u_n^{hk}\|_V + \|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\|_{\mathcal{H}} + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \\ &+cJ_n + c\|\beta_0 - \beta_0^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)} + c\sum_{j=1}^{n}(\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\| + \|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\|_V) + \\ &+c\|v_h - u_n(t)\|_V + c(\|u_n^{hk}\|_V + \|f_n\|_V + \|\beta_n\|_{L^2(\Gamma_3)})^{\frac{1}{2}}\|v_h - u_n\|_V^{\frac{1}{2}} \\ &\forall v_h \in K_h, \end{aligned} \right.$$

$$(1.4.40)$$

et en utilisant des techniques similaires à celles utilisées dans [8] on obtient :

$$J_n \leq ckt_n(\|\dot{u}\|_{L^\infty(0,\,T;\,V)} + \mid \dot{\beta} \mid_{L^\infty(0,T;\,L^2(\Gamma_3))}).$$

Alors, (**1.4.40**) devient :

$$\begin{aligned}
&\|u_n - u_n^{hk}\|_V + \|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\|_{\mathcal{H}} + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \\
&+ckt_n(\|\dot{u}\|_{L^\infty(0,\,T;\,V)} + \mid \dot{\beta} \mid_{L^\infty(0,T;\,L^2(\Gamma_3))})+ \\
&+c\|\beta_0 - \beta_0^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)} + c\sum_{j=1}^{n}(\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\| + \|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\|_V)+ \\
&+c\|v_h - u_n(t)\|_V + c(\|u_n^{hk}\|_V + \|f_n\|_V + \|\beta_n\|_{L^2(\Gamma_3)})^{\frac{1}{2}}\|v_h - u_n\|_V^{\frac{1}{2}} \\
&\forall v_h \in K_h.
\end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à utiliser le lemme suivant :

Lemme 1.4.5 *: Soient $\{g_n\}_{n=1}^N$ et $\{e_n\}_{n=1}^N$ deux suites de nombres non négatifs satisfont à :*

$$e_n \leq cg_n + \sum_{j=1}^{n} k_j e_j, \tag{1.4.41}$$

Alors :

$$e_n \leq c(g_n + \sum_{j=1}^{n} k_j e_j), \tag{1.4.42}$$

Donc :

$$\max_{n\leq N} e_n \leq c \max_{n\leq N} g_n. \tag{1.4.43}$$

Pour la démonstration, on peut consulter [**26**] , [**27**] et [**8**].

L'application de ce dernier lemme, nous donne l'estimation de l'erreur suivante :

$$\begin{aligned}
&\max_{n\leq N}\left[\|u_n - u_n^{hk}\|_V + \|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\|_{\mathcal{H}} + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}\right] \leq \\
&c \max_{n\leq N}\left[\|v_h - u_n(t)\|_V + (\|u_n^{hk}\|_V + \|f_n\|_V + \|\beta_n\|_{L^2(\Gamma_3)})^{\frac{1}{2}}\|v_h - u_n\|_V^{\frac{1}{2}}\right] + \\
&+ckt_n(\|\dot{u}\|_{L^\infty(0,\,T;\,V)} + \mid \dot{\beta} \mid_{L^\infty(0,T;\,L^2(\Gamma_3))}) + c\|\beta_0 - \beta_0^{hk}\|_{L^2(\Gamma_3)}.
\end{aligned}$$

Cette estimation va être utilisée pour analyser la convergence de la méthode de discrétisation complète.

1.5 Analyse de la convergence

Dans cette section, on analyse la convergence de la discrétisation complète et incomplète des solutions du problème P. On fait cette analyse sous les conditions de régularité :

$$\begin{gathered}
u \in W^{1,\infty}(0,T;V), \\
\sigma \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1), \\
\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)),
\end{gathered}$$

On considère, tout d'abord les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1.5.1 :

Il existe un sous espace $V_0 \subset V$ dense dans V et une fonction $\alpha(h) \geq 0$ tel que :

$$\lim_{h \to 0+} \alpha(h) = 0,$$

et

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V \leq \alpha(h)\|v\|_{V_0} \quad \forall v \in V_0.$$

Hypothèse 1.5.2 :

Il existe un sous espace $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ dense dans $\mathcal{H}$ et une fonction $\gamma(h) \geq 0$ tel que :

$$\lim_{h \to 0^+} \gamma(h) = 0,$$

et

$$\inf_{z_h \in \mathcal{H}_h} \|z - z_h\|_{\mathcal{H}} \leq \gamma(h)\|z\|_{\mathcal{H}_0} \quad \forall z \in \mathcal{H}_0.$$

Hypothèse 1.5.3 :

Il existe un sous espace $L^2(\Gamma_3)_0 \subset L^2(\Gamma_3)$ dense dans $L^2(\Gamma_3)$ et une fonction $\theta(h) \geq 0$ tel que :

$$\lim_{h \to 0^+} \theta(h) = 0,$$

et

$$\inf_{\eta_h \in L^2(\Gamma_3)} \|\eta - \eta_h\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \theta(h)\|\eta\|_{L^2(\Gamma_3)_0} \; \forall \eta \in L^2(\Gamma_3)_0.$$

On peut maintenant étudier la convergence de la discrétisation incomplète du problème **P**.

Théorème 1.5.4 : *Soit $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, $\sigma \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$, $\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$ la solution du problème P_V et $u_h \in W^{1,\infty}(0,T;V_h)$, $\sigma_h \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_{1_h})$, $\beta_h \in W^{1,\infty}(0,T;L_h^2(\Gamma_3))$ la solution qui correspond à la discrétisation incomplète du problème $\boldsymbol{P}_V^h$.*

Ainsi, sous les hypothèses **(1.5.1)**, **(1.5.2)** et **(1.5.3)** on a :

$$\|u - u_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} + \|\beta - \beta_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))} + \|\sigma - \sigma_h\|_{W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H})} \to 0.$$
$$\text{quand } h \to 0$$

Démonstration. : D'après les hypothèses **(1.5.1)**, **(1.5.2)** et **(1.5.3)** on a :

■

$$\|u_0 - u_{0h}\| \to 0, \|\sigma_0 - \sigma_{0h}\| \to 0, |\ \beta_0 - \beta_{0h}\ | \to 0 \text{ quand } h \to 0. \tag{1.5.1}$$

On a $W^{1,\infty}(0,T;V_0)$ dense dans $W^{1,\infty}(0,T;V)$ d'où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tilde{u} \in W^{1,\infty}(0,T;V_0)$ tel que :

$$\|u - \tilde{u}\| \leq \varepsilon, \tag{1.5.2}$$

donc :

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V^{\frac{1}{2}} \leq \|u - \tilde{u}\|^{\frac{1}{2}} + \inf_{v_h \in V_h} \|\tilde{u} - v_h\|_V^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\alpha(h)}\|\tilde{u}\|_{V_0}. \tag{1.5.3}$$

Alors, la convergence est déduite de **(1.5.1)** et **(1.5.3).**

Revenons maintenant à l'analyse de la convergence pour la discrétisation complète.

Théorème 1.5.5 *: Soit* $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, $\sigma \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$, $\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$ *la solution du problème* $\boldsymbol{P}_V$ *et* $u_n^{hk} \in W^{1,\infty}(0,T;V_h)$, $\sigma_n^{hk} \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_h)$, $\beta_n^{hk} \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{B}_h)$ *pour* $n = \overline{1,N}$, *la solution qui correspond à la discrétisation complète du problème* $\boldsymbol{P}_V^{hk}$.

Alors sous les hypothèses **(1.5.1)**, **(1.5.2)** et **(1.5.3)** on a :

$$\max_{n \leq N} \left[\|u_n - u_n^{hk}\| + \|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\| + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|\right] \to 0, \text{ quand } h \to 0. \tag{1.5.4}$$

Démonstration. : En suivant les mêmes étapes que précédemment on obtient :

$$\inf_{v_n^{hk} \in V_h} \|u_n - v_n^{hk}\|_V^{\frac{1}{2}} \leq \|u_n - \tilde{u}\|^{\frac{1}{2}} + \inf_{v_n^{hk} \in V_h} \|\tilde{u} - v_n^{hk}\|_V^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\alpha(h)}\|\tilde{u}\|_{V_0}, \tag{1.5.5}$$

donc :

$$\begin{aligned} \max_{n \leq N} \inf_{v_n^{hk} \in V_h} \|u_n - v_n^{hk}\|_V^{\frac{1}{2}} &\leq \max_{n \leq N}(\|u_n - \tilde{u}\|^{\frac{1}{2}} + \inf_{v_n^{hk} \in V_h} \|\tilde{u} - v_n^{hk}\|_V^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\alpha(h)}\|\tilde{u}\|_{V_0}. \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

Alors, de **(1.5.1)** et **(1.5.6)**; la relation **(1.5.4)** est vérifiée, ce qui termine la démonstration. ■

Chapitre 2

Analyse variationnelle d'un problème élastique avec frottement et adhésion

Dans ce chapitre, on s'intéresse à un problème quasistatique de contact avec frottement et adhésion entre un corps élastique et une base rigide.

Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appelée champ d'adhésion et les conditions de contact sont de type *Signorini*.

Le problème est formulé par un système d'équation aux dérivées partielles contenant l'équation d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section, nous commençons par formuler le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Ensuite, dans la deuxième section, nous donnons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans la troisième section, nous énonçons et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible relatif au problème mécanique.

Les techniques employées sont basées sur la théorie des opérateurs monotones, des résultats sur les inéquations variationnelles d'évolution et sur le théorème de point fixe.

2.1 Position du problème mécanique et hypothèses

Nous considérons un corps élastique qui à l'instant $t = 0$ occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = (2, 3)$ de frontière Γ, supposée suffisamment régulière et partitionnée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 tel que $mes\,\Gamma_1 > 0$. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question.

Ce corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe, soumis à une densité de forces volumiques f_0 sur Ω et à des forces surfaciques de densité f_2 sur Γ_2 et est en contact avec une base rigide le long de Γ_3. De plus, le contact avec cette base est supposé avec frottement et adhésion.

Problème P : *Trouver le champ des déplacements* $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, *le champ des contraintes* $\sigma : \Omega \times [0,T] \longrightarrow S_d$ *et le champ d'adhésion* $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tels que :*

$$\sigma = \mathcal{F}\varepsilon(u) \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{2.1.1}$$

$$Div\sigma + f_0 = 0 \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{2.1.2}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T), \tag{2.1.3}$$

$$\sigma\nu = f_2 \qquad \text{sur } \Gamma_2 \times (0,T), \tag{2.1.4}$$

$$u_\nu \leq 0, \ \sigma_\nu - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \leq 0, \ u_\nu(\sigma_\nu - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)) = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{2.1.5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \| \leq \mu p(| R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) |), \\ \| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \| < \mu p(| R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) |) \Longrightarrow u_\tau = 0, \\ \| \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \| = \mu p(| R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) |) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que :} \\ \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda u_\tau, \end{array}\right. \tag{2.1.6}$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \| R_\tau(u_\tau) \|^2) - \varepsilon_a)_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{2.1.7}$$

$$u(0) = u_0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{2.1.8}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \qquad \text{sur } \Gamma_3. \tag{2.1.9}$$

Rappelons que l'équation $(\mathbf{2.1.1})$ représente la loi de comportement élastique, la relation $(\mathbf{2.1.2})$ représente l'équation d'équilibre où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable Ω. les conditions $(\mathbf{2.1.3}) - (\mathbf{2.1.4})$ sont les conditions de déplacement-traction. Les conditions $(\mathbf{2.1.5})$ représentent les conditions de contact de type *Signorini* avec adhésion sur la partie Γ_3 de la frontière de Ω où u_ν est la composante normale du vecteur u et σ_ν la composante normale du tenseur des contraintes σ. $\gamma_\nu$est un coefficient positif et $R_\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'opérateur de troncation défini par :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s \leq -L, \\ -s \text{ si } & -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases} \tag{2.1.10}$$

Ici $L > 0$ est la longueur caractéristique des liens.

Les conditions $(\mathbf{2.1.6})$ représentent une version de la loi de *Coulomb* non locale généralisée où γ_τ est un coefficient positif et $R_\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est l'opérateur de troncation défini par :

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si } \|v\| \leq L, \\ L\dfrac{v}{\|v\|} & \text{si } \|v\| \geq L. \end{cases} \tag{2.1.11}$$

R représente une régularisant normale c'est à dire, un opérateur linéaire et continu de $H^{-\frac{1}{2}}$ dans $L^2(\Gamma)$. p est une fonction non négative appelée fonction de frottement, μ est le coefficient du frottement. L'équation (**2**.**1**.**7**) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion. Finalement les conditions (**2**.**1**.**8**) – (**2**.**1**.**9**) représentent les conditions initiales. Pour l'étude du problème mécanique, on considère les hypothèses suivantes :

Nous supposons que l'opérateur d'élasticité $\mathcal{F} : \Omega \times S_d \to S_d$ satisfait :

$$\begin{cases} \textbf{(a)} \text{ Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que : } \|\mathcal{F}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{F}(x,\varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{F}}\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \quad \forall\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in S_d,\ \text{p.p. } x \in \Omega. \\ \textbf{(b)} \text{ Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que :} \\ \quad (\mathcal{F}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{F}(x,\varepsilon_2)).(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{F}}\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \\ \quad \forall\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in S_d,\ \text{p.p. } x \in \Omega. \\ \textbf{(c)} \text{ L'application } x \to \mathcal{F}(x,\varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega\ \forall\varepsilon \in S_d. \\ \textbf{(d)} \text{ L'application } x \to \mathcal{F}(x,0) \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{2.1.12}$$

De même nous supposons que la fonction $p : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\begin{cases} \textbf{(a)} \text{ Ilexiste } M > 0 \text{ tel que :} \\ \quad \mid p(x,r_1) - p(x,r_2) \mid \leq M \mid r_1 - r_2 \mid \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R},\ \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \textbf{(b)}\ x \to p(x,r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3\ \forall r \in R. \\ \textbf{(c)}\ p(x,0) = 0,\ \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{2.1.13}$$

On suppose aussi que les forces volumiques et la traction surfacique ont la régularité :

$$f_0 \in W^{1,\infty}(0,T;H), \tag{2.1.14}$$

$$f_2 \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_2)^d). \tag{2.1.15}$$

Le théorème de représentation de *Riesz* entraîne l'existence d'une fonction $f : [0,T] \to V$ tel que :

$$(f(t),v)_V = (f_0(t),v)_H + (f_2(t),v)_{L^2(\Gamma_2)^d}\ \forall v \in V,\ \text{p.p. } t \in (0,T). \tag{2.1.16}$$

Les conditions (**1**.**1**.**14**) – (**1**.**1**.**15**) impliquent que :

$$f \in W^{1,\infty}(0,T;V). \tag{2.1.17}$$

Pour le problème de Signorini nous utilisons l'ensemble convexe de "déplacements admissibles" donné par :

$$U_{ad} = \{v \in H_1/v = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\ v_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\}. \tag{2.1.18}$$

Pour une fonction scalaire β qui représente le champ d'adhésion sur Γ_3, nous définissons l'ensemble :

$$\mathcal{Q} = \left\{\theta \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_3)\right)\ /\ 0 \leq \theta(t) \leq 1\ \forall t \in (0,T),\ \text{p.p. sur } \Gamma_3\right\}.$$

Les conditions initiales satisfont :

$$u_0 \in U_{ad},\ \beta_0 \in L^2(\Gamma_3) \cap Q. \tag{2.1.19}$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν, γ_τ et ε_a satisfont les conditions :

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3),\ \varepsilon_a \in L^2(\Gamma_3),\ \gamma_\nu, \gamma_\tau, \varepsilon_a \geq 0,\ \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \tag{2.1.20}$$

Tandis que le coefficient de frottement μ satisfait :

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3),\ \mu(x) \geq 0,\ \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \tag{2.1.21}$$

Pour l'étude du problème **P**, on définit le l'espace fermé V de H_1 par :

$$V = \{v \in H_1 /\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \tag{2.1.22}$$

Puisque $mes\Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V, alors, il existe une constante $C_k > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que :

$$\|(\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq C_k \|v\|_{H_1}\ \forall v \in V. \tag{2.1.23}$$

Nous considérons sur l'espace V, le produit scalaire donné par :

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}\ \forall u,\ v \in V, \tag{2.1.24}$$

et soit $\|.\|_V$ la norme associée, c-à-d :

$$\|v\|_V = \|(\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.1.25}$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|.\|_{H_1}$et $\|.\|_V$ sont des normes équivalentes sur V donc $(V, \|.\|_V)$ est un espace de Hilbert. De plus, en utilisant le théorème de trace de *Sobolev*, on obtient :

$$\|v\|_{L^2\ (\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|v\|_V\ \forall v \in V. \tag{2.1.26}$$

Nous définissons maintenant la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \to \mathbb{R}$ par :

$$j_{ad}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma 3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau).v_\tau) da, \tag{2.1.27}$$

et nous définissons la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : L^\infty(\Gamma_3) \times \mathcal{H}_1 \times V \times V \to \mathbb{R}$ par :

$$j_{fr}(\beta, \sigma, u, v) = \int_{\Gamma 3} \mu P(|\ R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)\ |) \|v_\tau\| da. \tag{2.1.28}$$

2.2 Formulation variationnelle du problème P

Soit $v \in U_{ad}$, en utilisant la formule de *Green* nous obtenons :

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + (Div\sigma, v - u(t))_H = \int_\Gamma \sigma(t)\nu.(v - u(t))da \ \forall v \in H_1.$$

De cette dernière égalité on obtient :

$$\begin{aligned}(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + (Div\sigma(t), v - u(t))_H = \int_{\Gamma_1} \sigma(t)\nu.(v - u(t))da + \\ + \int_{\Gamma 2} \sigma(t)\nu.(v - u(t))da + \int_{\Gamma 3} \sigma(t)\nu.(v - u(t))da \ \forall v \in U_{ad}.\end{aligned}$$

En utilisant (**2.1.2**), (**2.1.3**) et (**2.1.4**) on trouve :

$$\begin{aligned}(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} - (f_0(t), v - u(t))_H = \int_{\Gamma_1} \sigma(t)\nu.(v - u(t))da + \\ + \int_{\Gamma 2} f_2(t).(v - u(t))da + \int_{\Gamma 3} \sigma(t)\nu.(v - u(t))da \ \forall v \in u_{ad}.\end{aligned}$$

Sachant que $u \in U_{ad}$ et $v \in U_{ad}$ on obtient :

$$\begin{aligned}(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} = (f_0(t), v - u(t))_H + \\ + \int_{\Gamma 2} f_2(t).(v - u(t))da + \int_{\Gamma 3} \sigma(t)\nu.(v - u(t))da, \ \forall v \in U_{ad}\end{aligned}$$

d'où on aura :

$$\begin{aligned}(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} = (f_0(t), v - u(t))_H + \\ + (f_2(t), v - u(t))_{L^2(\Gamma_2)^d} + \int_{\Gamma 3} \sigma\nu.(v - u(t))da, \ \forall v \in U_{ad},\end{aligned}$$

et d'après (**2.1.16**) on obtient :

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} = (f(t), v - u(t))_V + \int_{\Gamma 3} \sigma\nu.(v - u)da \ \forall v \in U_{ad}. \quad (2.2.1)$$

En utilisant :

$$\sigma\nu.(v - u) = \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) + \sigma_\tau.(v_\tau - u_\tau),$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma\nu.(v - u) = (\sigma_\nu - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu))(v_\nu - u_\nu) + \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu)(v_\nu - u_\nu) + \\ + (\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).(v_\tau - u_\tau) - \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).(v_\tau - u_\tau).\end{aligned}$$

On peut écrire cette dernière égalité comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma\nu.(v - u) = - \left[-\gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu)(v_\nu - u_\nu) + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).(v_\tau - u_\tau)\right] + \\ + (\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).v_\tau - (\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).u_\tau + \\ + (\sigma_\nu - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu))v_\nu - (\sigma_\nu - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu))u_\nu.\end{aligned} \quad (2.2.2)$$

D'après (**2.1.5**) on a :

$$(\sigma_\nu - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu))u_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma 3, \tag{2.2.3}$$

$$(\sigma_\nu - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu))v_\nu \geq 0 \text{ sur } \Gamma 3, \tag{2.2.4}$$

donc, de (**2.2.2**), (**2.2.3**) et (**2.2.4**) on obtient :

$$\int_{\Gamma 3} \sigma\nu.(v-u)da \geq -\int_{\Gamma 3} \left[-\gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu)(v_\nu - u_\nu) + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).(v_\tau - u_\tau)\right] da+ \\ + \int_{\Gamma 3} (\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).v_\tau da - \int_{\Gamma 3} (\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).u_\tau da.$$

Par substitution de l'inégalité précédente dans (**2.2.1**) on obtient :

$$\begin{aligned}
&(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} \geq (f(t), v - u(t))_V - \\
&-\int_{\Gamma 3} \left[-\gamma_\nu\beta(t)^2 R_\nu(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) + \gamma_\tau\beta(t)^2 R_\tau(u_\tau(t))).(v_\tau - u_\tau(t))\right] da+ \\
&+\int_{\Gamma 3} (\sigma_\tau(t) + \gamma_\tau\beta(t)^2 R_\tau(u_\tau(t))).v_\tau da- \\
&-\int_{\Gamma 3} (\sigma_\tau(t) + \gamma_\tau\beta(t)^2 R_\tau(u_\tau(t))).u_\tau(t) da.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Lemme 2.2.1 : *La condition* (**2.1.6**) *est équivalente à :*

$$\begin{aligned}
&\|\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)\| \leq \mu p(\mid R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \mid) \\
&(\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).u_\tau + \mu p(\mid R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \mid)\|u_\tau\| = 0 \ sur\ \Gamma 3.
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Démonstration. : On suppose que (**2.1.6**) est vérifiée, alors on a $u_\tau = 0$ ou $\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda u_\tau$ d'où on obtient :

$$(\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).u_\tau + \mu p(\mid R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \mid)\|u_\tau\| = 0.$$

Supposons maintenant que (**2.2.6**) est vérifiée. ■

- Si : $\|\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)\| = \mu p(\mid R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \mid)$, alors :

$(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).u_\tau = -\|\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)\|\|u_\tau\| \Rightarrow \exists\lambda \geq 0$ tel que $\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda u_\tau$.

- Si : $\|\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)\| < \mu p(\mid R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \mid)$, alors :

$$\begin{aligned}
&0 = (\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).u_\tau + \mu p(\mid R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \mid)\|u_\tau\| \geq \\
&\geq -\|\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)\|\|u_\tau\| + \mu p(\mid R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \mid)\|u_\tau\|.
\end{aligned}$$

De cette dernière égalité on obtient :

$$\begin{aligned}
&0 = (\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).u_\tau + \mu p(\mid R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \mid)\|u_\tau\| \geq \\
&\geq \|u_\tau\|(\mu p(\mid R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \mid) - \|\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).
\end{aligned}$$

Mais : $(\mu p(\mid R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \mid) - \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)) > 0$, donc il résulte que $u_\tau = 0$. On a aussi d'après l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* :

$$\mid (\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)).v_\tau \mid \leq \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| \|v_\tau\|,$$

d'où on obtient :

$$(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)).v_\tau \geq -\|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| \|v_\tau\|.$$

En utilisant (**2.2.6**), on déduit que :

$$(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)).v_\tau \geq -\mu p(\mid R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \mid) \|v_\tau\|. \tag{2.2.7}$$

D'après (**2.2.5**), (**2.2.6**) et (**2.2.7**) on obtient :

$$\begin{aligned}
&(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} \geq (f(t), v - u(t))_V - \\
&- \int_{\Gamma 3} [-\gamma_\nu \beta(t)^2 R_\nu(u_\nu(t))(v_\nu - u_\nu(t)) + \gamma_\tau \beta(t)^2 R_\tau(u_\tau(t))).(v_\tau - u_\tau(t))] \, da - \\
&- \int_{\Gamma 3} \mu P(\mid R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \mid) \|v_\tau\| da + \\
&+ \int_{\Gamma 3} \mu p(\mid R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \mid) \|u_\tau\| da.
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Moyennant (**2.1.27**) et (**2.1.28**) et (**2.2.8**) il vient :

$$\begin{aligned}
&(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} \geq (f(t), v - u(t))_V - j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) - \\
&- j_{fr}(\beta(t), \sigma(t), u(t), v) + j_{fr}(\beta(t), \sigma(t), u(t), u(t)),
\end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned}
&(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) + \\
&+ j_{fr}(\beta(t), \sigma(t), u(t), v) - j_{fr}(\beta(t), \sigma(t), u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_V \\
&\forall v \in U_{ad} \ , \ \text{p.p. } t \in [0, T]
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Finalement, la formulation variationnelle du problème **P** est :
Problème $\mathbf{P}_V$: *Trouver le champ des déplacements* $u : [0, T] \mapsto V$, *le champ des contraintes* $\sigma : [0, T] \to \mathcal{H}_1$ *et le champ d'adhésion* $\beta : [0, T] \to L^2(\Gamma_3)$ *tels que :*

$$\sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u(t)), \tag{2.2.10}$$

$$\begin{aligned}
&u(t) \in U_{ad}, \ (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) + \\
&+ j_{fr}(\beta(t), \sigma(t), u(t), v) - j_{fr}(\beta(t), \sigma(t), u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_V \\
&\forall v \in U_{ad}, \ \text{p.p. } t \in (0, T),
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\beta(t)((\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_\tau(t)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+, \ \text{p.p. sur } [0, T], \tag{2.2.12}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2.2.13}$$

$$\beta(0) = \beta_0. \tag{2.2.14}$$

Dans le reste de cette section, nous dérivons quelques inégalités pour les fonctionnelles j_{ad} et j_{fr} qui seront employées dans les sections suivantes. Dans cette section, β, β_1 et β_2 dénote des éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tels que $0 \leq \beta,\ \beta_1,\ \beta_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3; u_1, u_2, v_1, v_2, u et v représentent des éléments de V; σ, σ_1, σ_2 dénotent des éléments de $\mathcal{H}_1$ et c est une constante positive générique qui peut dépendre de Ω, Γ_1 , Γ_3, p, γ_ν , γ_τ et L, dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite de diverses fonctions de $x \in \Omega \cup \Gamma_3$.

D'abord, nous remarquons que j_{ad} est linéaire par rapport au dernier argument, donc :

$$j_{ad}(\beta, u, -v) = -j_{ad}(\beta, u, v). \tag{2.2.15}$$

En utilisant (**2.1.27**) et les inégalités $\mid R_\nu(u_\nu) \mid \leq L$, $\|R_\tau(u_\tau)\| \leq L$, $\mid \beta_1 \mid \leq 1$, $\mid \beta_2 \mid \leq 1$, nous déduisons que :

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \int_{\Gamma 3} \mid \beta_1 - \beta_2 \mid \|u_1 - u_2\|. \tag{2.2.16}$$

En combinant cette inégalité avec (**2.1.26**) on obtient :

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)}\|u_1 - u_2\|_V. \tag{2.2.17}$$

Puis, nous choisissons $\beta = \beta_1 = \beta_2$ dans (**2.2.17**) pour trouver :

$$j_{ad}(\beta, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta, u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \tag{2.2.18}$$

Par des manipulations semblables, basées sur les propriétés des opérateurs R_ν, R_τ, on montre que :

$$\mid j_{ad}(\beta, u_1, v) - j_{ad}(\beta, u_2, v) \mid \leq c\|u_1 - u_2\|_V\|v\|_V. \tag{2.2.19}$$

En prenant $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (**2.2.18**) et en employant les égalités $R_\nu(0) = 0$, $R_\tau(0) = 0$ on obtient :

$$j_{ad}(\beta, v, v) \geq 0. \tag{2.2.20}$$

Puis, nous employons (**2.1.13**)(**a**), (**2.1.26**) et (**2.1.28**), et les inégalités $\mid R_\nu(u_\nu) \mid \leq L$, $\|R_\tau(u_\tau)\| \leq L$, $\mid \beta_1 \mid \leq 1$, $\mid \beta_2 \mid \leq 1$, nous déduisons que :

$$\begin{gathered} j_{fr}(\beta_1, \sigma_1, u_1, u_2) - j_{fr}(\beta_1, \sigma_1, u_1, u_1) + j_{fr}(\beta_2, \sigma_2, u_2, u_1) - j_{fr}(\beta_2, \sigma_2, u_2, u_2) \leq \\ c_0^2 M\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}(\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|u_1 - u_2\|_V + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathcal{H}})\|u_1 - u_2\|_V. \end{gathered} \tag{2.2.21}$$

Maintenant, en utilisant (**2.1.13**)(**a**) et (**2.1.21**), il s'ensuit que (**1.1.28**) est bien définie. De plus, nous avons :

$$j_{fr}(\beta, \sigma, u, v) \leq c_0^2 M\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}(\|\beta\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|u\|_V + \|\sigma\|_{\mathcal{H}})\|v\|_V \tag{2.2.22}$$

2.3 Résultats d'existence et d'unicité

Théorème 2.3.1 *: Sous les hypothèse* $(\mathbf{2.1.12})-(\mathbf{2.1.15})$ *et* $(\mathbf{2.1.19})-(\mathbf{2.1.21})$, *il existe* $\mu_0 > 0$ *dépendant seulement de* Ω, Γ_1, Γ_3, $\mathcal{F}$ *et* p *tel que : si* $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, *le problème* P_V *admet une solution unique* (u, σ, β). *De plus, la solution satisfait :*

$$u \in W^{1,\infty}(0,T;V) \tag{2.3.1}$$

$$\sigma \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1) \tag{2.3.2}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q} \tag{2.3.3}$$

Le triplet de fonction (u, σ, β) satisfaisant à $(\mathbf{2.2.10})$ $-(\mathbf{2.2.14})$ est appelé solution faible du problème $\mathbf{P}$. Nous concluons du **Théorème 2.3.1** que, sous les hypothèses $(\mathbf{2.1.12})-(\mathbf{2.1.15})$ et $(\mathbf{2.1.19})-(\mathbf{2.1.21})$, si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ alors, il existe une unique solution faible du Problème $\mathbf{P}$ qui vérifie $(\mathbf{2.3.1})$, $(\mathbf{2.3.2})$, $(\mathbf{2.3.3})$.

La démonstration du **Théorème 2.3.1** sera faite en plusieurs étapes. Elle est basée sur les résultats des inéquations variationnelles d'évolutions avec les opérateurs monotones et le théorème du point fixe.

Nous supposons dans la suite que $(\mathbf{2.1.12})-(\mathbf{2.1.15})$ et $(\mathbf{2.1.19})-(\mathbf{2.1.21})$ sont vérifiées. Pour la simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite de diverse fonctions de $x \in \Omega \cup \Gamma$.

Soit $\mathcal{Z} = \{\beta \in W^{1,\infty}([0,T];\ L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}\ /\ \beta(0) = \beta_0\}$.

Et soit $\xi \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, $g \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$ et $\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}$ donnés.

Problème $\mathbf{P}_V^{u_{g\xi}^{\beta}}$ *: Trouver le champ des déplacements* $u_{g\xi}^{\beta} : [0,T] \to V$ *et le champ des contraintes* $\sigma_{g\xi}^{\beta} : [0,T] \to \mathcal{H}_1$ *tels que :*

$$\sigma_{g\xi}^{\beta}(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u_{g\xi}^{\beta}(t)), \tag{2.3.4}$$

$$\begin{aligned}
&u_{g\xi}^{\beta}(t) \in U_{ad}\ ,\ (\sigma_{g\xi}^{\beta}(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_{g\xi}^{\beta}(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), \xi(t), v - u_{g\xi}^{\beta}(t)) + \\
&+ j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), v) - j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), u_{g\xi}^{\beta}(t)) \geq (f(t), v - u_{g\xi}^{\beta}(t))_V \\
&\forall v \in U_{ad},\ \text{p.p. } t \in [0,T],
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

$$u_{g\xi}^{\beta}(0) = u_0, \tag{2.3.6}$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.3.2 *: Sous les hypothèse* $(\mathbf{2.1.12})-(\mathbf{2.1.15})$ *et* $(\mathbf{2.1.19})-(\mathbf{2.1.21})$, *le problème* $\boldsymbol{P}_V^{u_{g\xi}^{\beta}}$ *admet une solution unique* $(u_{g\xi}^{\beta}, \sigma_{g\xi}^{\beta})$ *ayant la régularité suivante :*

$$u_{g\xi}^{\beta} \in W^{1,\infty}(0,T;V),\ \sigma_{g\xi}^{\beta} \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1).$$

Démonstration. : Pour tout $u^{\beta}_{g\xi}(t)$ donnée l'opérateur $L_1 : V \to V$ définie par :

$$L_1(v) = (\mathcal{F}\varepsilon(u^{\beta}_{g\xi}(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), \xi(t), v),$$

est linéaire continue sur V, donc d'après le théorème de représentation de *Riesz*, il existe un unique élément $\omega(t) \in V$ tel que :

$$L_1(v) = (\omega(t), v)_V = (\mathcal{F}\varepsilon(u^{\beta}_{g\xi}(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), \xi(t), v) \ \forall v \in V,$$

d'où, on peut définir l'opérateur : $A : V \longrightarrow V$ tel que : $A(u^{\beta}_{g\xi}(t)) = \omega(t)$ et par conséquent :

$$(A(u^{\beta}_{g\xi}(t)), v)_V = (\mathcal{F}\varepsilon(u^{\beta}_{g\xi}(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), \xi(t), v) \ \forall v \in U_{ad}, \ t \in [0, T]. \tag{2.3.7}$$

Montrons que : l'opérateur A est fortement monotone est de Lipschitz sur V. Soit $u_1, u_2 \in V$ alors, d'après (**2.3.7**) on obtient :

$$\begin{aligned}&(Au_1(t), u_2(t) - u_1(t))_V = (\mathcal{F}\varepsilon(u_1(t)), \varepsilon(u_2(t)) - \varepsilon(u_1(t)))_{\mathcal{H}} + \\ &+ j_{ad}(\beta(t), \xi(t), u_2(t) - u_1(t)),\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned}&(Au_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V = (\mathcal{F}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t)))_{\mathcal{H}} + \\ &+ j_{ad}(\beta(t), \xi(t), u_1(t) - u_2(t)).\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Par addition de (**2.3.8**) et (**2.3.9**) on obtient :

$$\begin{aligned}&(Au_1(t) - Au_2(t), u_2(t) - u_1(t))_V = \\ &(\mathcal{F}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{F}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(u_2(t)) - \varepsilon(u_1(t)))_{\mathcal{H}} + \\ &+ j_{ad}(\beta(t), \xi(t), u_2(t) - u_1(t)) + j_{ad}(\beta(t), \xi(t), u_1(t) - u_2(t)).\end{aligned}$$

Mais la linéarité de j_{ad} pour le dernier argument sur V entraîne que :

$$j_{ad}(\beta(t), \xi(t), u_2(t) - u_1(t)) + j_{ad}(\beta(t), \xi(t), u_1(t) - u_2(t)) = 0,$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned}&(Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V = \\ &(\mathcal{F}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{F}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t)))_{\mathcal{H}}.\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

D'après l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on obtient :

$$\begin{aligned}&| (Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V | \leq \\ &\|\mathcal{F}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{F}\varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}} \ \| \varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t)) \|_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

et d'après (**2.1.25**) on obtient :

$$| (Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V | \leq \|\mathcal{F}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{F}\varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V.$$

On pose : $u_1 - u_2 = Au_1 - Au_2$ dans l'inégalité précédente on obtient :

$$\| Au_1(t) - Au_2(t) \|_V \leq \|\mathcal{F}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{F}\varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}}$$

mais d'après $(\mathbf{2.1.12})(\mathbf{a})$ et $(\mathbf{2.1.25})$ on a :

$$\|\mathcal{F}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{F}\varepsilon(u_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{F}}\|\varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{F}}\|u_1(t) - u_2(t)\|_V,$$

d'où on obtient :

$$\| Au_1(t) - Au_2(t) \|_V \leq L_{\mathcal{F}}\|u_1(t) - u_2(t)\|_V. \tag{2.3.11}$$

Donc A est lipschizien. D'autre part, d'après $(\mathbf{2.1.12})(\mathbf{b})$ et $(\mathbf{2.1.25})$ on a :

$$(\mathcal{F}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{F}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t)))_{\mathcal{H}} \geq m_F\|u_1(t) - u_2(t)\|^2{}_V,$$

d'où d'après $(\mathbf{2.3.10})$:

$$(Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V \geq m_F\|u_1(t) - u_2(t)\|^2{}_V. \tag{2.3.12}$$

Donc A est fortement monotone. ■

On démontre maintenant que j_{fr} est convexe, propre et semi continue inférieurement.

1) $j_{fr}(\beta(t), g, \xi, v) < +\infty$ d'après $(\mathbf{2.1.13})$, $(\mathbf{2.1.20})$ et $(\mathbf{2.1.21})$, donc j_{fr} est propre.

2) Soit $u, v \in V$ et $t \in [0,1]$, d'après $(\mathbf{2.1.28})$ on a :

$$j_{fr}(\beta, g, \xi, tv + (1-t)u) = \int_{\Gamma 3} \mu P(|\ R(g_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(\xi_\nu)\ |)\|tv_\tau + (1-t)u_\tau\|da,$$

d'où on obtient :

$$\begin{aligned} j_{fr}(\beta, g, \xi, tv + (1-t)u) \leq t\int_{\Gamma 3} \mu P(|\ R(g_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(\xi_\nu)\ |)\|v_\tau\|da \\ +(1-t)\int_{\Gamma 3} \mu P(|\ R(g_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(\xi_\nu)\ |)\|u_\tau\|da. \end{aligned}$$

Il résulte d'après l'inégalité précédente et $(\mathbf{2.1.28})$ que :

$$j_{fr}(\beta, g, \xi, tv + (1-t)u) \leq tj_{fr}(\beta, g, \xi, v) + (1-t)j_{fr}(\beta, g, \xi, u),$$

alors, j_{fr} est convexe.

3) Soit $v_n \to v$ sur V et on a :

$$\begin{aligned} &|\ j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), v_n) - j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), v)\ | = \\ &|\int_{\Gamma 3} \mu P(|\ R(g_\nu(t)) - \gamma_\nu \beta(t)^2 R_\nu(\xi_\nu(t))\ |)\|v_{n\tau}\|da - \\ &-\int_{\Gamma 3} \mu P(|\ R(g_\nu(t)) - \gamma_\nu \beta(t)^2 R_\nu(\xi_\nu(t))\ |)\ \|\ v_\tau\ \|\ da\ |\ . \end{aligned}$$

D'après quelque manipulation algébriques et (**2.1.21**), (**2.1.26**), (**2.1.28**) on obtient :

$$| j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), v_n) - j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), v) | \leq cc_0 M \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \| \|v_n - v\|_V,$$

et comme $v_n \to v$ dans V, alors $\| v_n - v \|_V \to 0$ d'où :

$$lim\ inf\ j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), v_n) = j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), v).$$

Donc j_{fr} est s.c.i.

Nous concluons de (**2.3.11**) et (**2.3.12**) que l'opérateur A est fortement monotone et de Lipschitz sur V et on a démontré que la fonctionnelle j_{fr} est convexe, propre et s.c.i et comme $U_{ad} \subset V$ est un ensemble convexe, fermé et non vide, alors, d'après un résultat d'existence et d'unicité sur les inégalité variationnelles, il existe un unique élément $u^\beta_{g\xi}(t) \in U_{ad}$ qui vérifie.

$$\begin{aligned} &u^\beta_{g\xi}(t) \in U_{ad},\ (A(u^\beta_{g\xi}(t)), v - u^\beta_{g\xi}(t))_V + j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), v) - \\ &- j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), u^\beta_{g\xi}(t)) \geq (f(t), v - u^\beta_{g\xi}(t))_V\ \forall v \in U_{ad},\ \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

En utilisant maintenant (**2.3.7**) et (**2.3.13**), il résulte que $u^\beta_{g\xi}(t)$ verifie (**2.3.5**). Prenant maintenant $\sigma^\beta_{g\xi}$, définie par (**2.3.4**). D'après (**2.1.16**), (**2.3.5**) et pour $v = u^\beta_{g\xi}(t) + \varphi$ avec $\varphi \in D = \mathcal{D}(\Omega)^d \subset H^1_0(\Omega)^d$ on obtient :

$$\begin{aligned} &(\sigma^\beta_{g\xi}(t), \varepsilon(\varphi(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), \xi(t), \varphi(t)) + j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), u^\beta_{g\xi} + \varphi(t)) - \\ &- j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), u^\beta_{g\xi}(t)) \geq (f_0, \varphi(t))_H + (f_2, \varphi(t))_{L^2(\Gamma_2)^d}\ \forall \varphi \in D, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Mais $\varphi \in D = \mathcal{D}(\Omega)^N \subset H^1_0(\Omega)^N \Rightarrow \gamma(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ sur Γ, donc :

$$\begin{aligned} &(f_2, \varphi(t))_{L^2(\Gamma_2)^N} = 0, \\ &j_{ad}(\beta(t), \xi, \varphi(t)) = 0, \\ &j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), u^\beta_{g\xi}(t) + \varphi(t)) = j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), u^\beta_{g\xi}(t)), \end{aligned}$$

d'où on obtient :

$$j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), u^\beta_{g\xi}(t) + \varphi(t)) - j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), u^\beta_{g\xi}(t)) = 0.$$

Par conséquent,

$$(\sigma^\beta_{g\xi}(t)), \varepsilon(\varphi(t)))_{\mathcal{H}} \geq (f_0, \varphi(t))_H\ \forall \varphi \in D,\ \forall t \in (0, T). \tag{2.3.14}$$

De la même manière pour $v = u^\beta_{g\xi} - \varphi$, on obtient :

$$(\sigma^\beta_{g\xi}(t)), \varepsilon(\varphi(t)))_{\mathcal{H}} \leq (f_0, \varphi(t))_H\ \forall \varphi \in D,\ \forall t \in [0, T]. \tag{2.3.15}$$

De (**2.3.14**) et (**2.3.15**) on a :

$$(\sigma^{\beta}_{g\xi}(t)), \varepsilon(\varphi(t)))_{\mathcal{H}} = (f_0(t), \varphi(t))_H \ \forall \varphi \in D, \ \forall t \in [0, T],$$

donc, $Div\sigma^{\beta}_{g\xi}(t) = -f_0(t)$ et comme $f_0(t) \in H \Rightarrow Div\sigma^{\beta}_{g\xi}(t) \in H$ d'où, $\sigma^{\beta}_{g\xi}(t) \in \mathcal{H}_1$.

Nous montrons maintenant que $u^{\beta}_{g\xi} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ et $\sigma^{\beta}_{g\xi} \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$. Pour cela, soit $t_1, \ t_2 \in [0,T]$, nous notons $u^{\beta}_{g\xi}(t_i) = u_i, \ \sigma^{\beta}_{g\xi}(t_i) = \sigma_i, \ \beta(t_i) = \beta_i, g(t_i) = g_i, \ \xi(t_i) = \xi_i, \ f(t_i) = f_i, \ \forall i = 1, 2$. En utilisant (**2.3.4**), (**2.3.5**) et quelque manipulations algébriques on obtient :

$$\begin{aligned}&(\mathcal{F}\varepsilon(u_1) - \mathcal{F}\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_{\mathcal{H}} \leq \\ &j_{ad}(\beta_1, \xi_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, \xi_2, u_1 - u_2) + \\ &+ j_{fr}(\beta_1, g_1, \xi_1, u_2) - j_{fr}(\beta_1, g_1, \xi_1, u_1) + \\ &+ j_{fr}(\beta_2, g_2, \xi_2, u_1) - j_{fr}(\beta_2, g_2, \xi_2, u_2) + \\ &+ (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_V.\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Mais, (**2.2.21**) nous donne :

$$\begin{aligned}&j_{fr}(\beta_1, g_1, \xi_1, u_2) - j_{fr}(\beta_1, g_1, \xi_1, u_1) + j_{fr}(\beta_2, g_2, \xi_2, u_1) - j_{fr}(\beta_2, g_2, \xi_2, u_2) \leq \\ &c_0^2 M \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\xi_1 - \xi_2\|_V + \|g_1 - g_2\|_{\mathcal{H}}) \|u_1 - u_2\|_V,\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

et (**2.2.17**) nous donne :

$$\begin{aligned}&j_{ad}(\beta_1, \xi_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, \xi_2, u_1 - u_2) \leq \\ &c(\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\xi_1 - \xi_2\|_V) \|u_1 - u_2\|_V.\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Et d'après l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on trouve :

$$(f_1 - f_2, u_1 - u_2)_V \leq \|f_1 - f_2\|_V \|u_1 - u_2\|_V. \tag{2.3.19}$$

Puis, en utilisant (**2.1.12**)(**b**), (**2.3.16**), (**2.3.17**), (**2.3.18**) et (**2.3.19**) on obtient :

$$\begin{aligned}&\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \\ &\frac{cM}{m_{\mathcal{F}}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\xi_1 - \xi_2\|_V + \|g_1 - g_2\|_{\mathcal{H}} + \|f_1 - f_2\|_V).\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

D'autre part, on a d'après (**2.3.4**), (**2.1.12**)(**a**), (**2.3.20**) et (**2.1.25**) :

$$\begin{aligned}&\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{F}\varepsilon(u_1) - \mathcal{F}\varepsilon(u_2)\|_{\mathcal{H}} \leq \\ &\frac{cL_{\mathcal{F}} M}{m_{\mathcal{F}}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\xi_1 - \xi_2\|_V + \|g_1 - g_2\|_{\mathcal{H}} + \|f_1 - f_2\|_V),\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

et comme :

$$\xi \in W^{1,\infty}(0,T;V), \ g(t) \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1) \text{ et } \beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q},$$

on déduit que :

$$u^{\beta}_{g\xi} \in W^{1,\infty}(0,T;V) \text{ et } \sigma^{\beta}_{g\xi} \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1). \tag{2.3.22}$$

Donc on a démontré le **Lemme 2.3.2**.

On a pour tout $\xi \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, $\exists! u^{\beta}_{g\xi} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ qui verifie (**2.3.4**), (**2.3.5**) et (**2.3.6**), donc on peut définir l'opérateur :

$$\Lambda_g : W^{1,\infty}(0,T;V) \to W^{1,\infty}(0,T;V) \text{ tel que : } \Lambda_g \xi = u^{\beta}_{g\xi}.$$

Lemme 2.3.3 *: Il existe $\mu_1 > 0$ dépendant seulement de Ω, Γ_1, Γ_3, $\mathcal{F}$ et p tel que si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_1$, l'opérateur Λ_g admet un unique point fixe ξ^* tel que : $\Lambda_g(\xi^*) = \xi^*$.*

Démonstration. : Soit ξ_1 , $\xi_2 \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, notons $u^{\beta}_{g\xi_i}(t) = u_i(t)$, $\forall i = 1,2$ la solution du problème $\mathbf{P}_V^{u^{\beta}_{g\xi_i}}$. On a

$$\| \Lambda_g \xi_1 (t) - \Lambda_g \xi_2 (t) \|_V = \| u_1(t) - u_2(t) \|_V \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.3.23}$$

Nous utilisons des arguments semblables à ceux utilisés dans la preuve de (**2.3.20**) dans le cas où $\beta_1 = \beta_2$, $g_1 = g_2$ et $f_1 = f_2$ pour déduire que :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \frac{cM}{m_{\mathcal{F}}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_V \ \forall t \in [0,T]. \tag{2.3.24}$$

Combinons maintenant (**2.3.23**) et (**2.3.24**), on obtient :

$$\| \Lambda_g \xi_1 (t) - \Lambda_g \xi_2 (t) \|_V \leq \frac{cM}{m_{\mathcal{F}}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_V, \ \forall t \in [0,T],$$

d'où :

$$\| \Lambda_g \xi_1 - \Lambda_g \xi_2 \|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} \leq \frac{cM}{m_{\mathcal{F}}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\xi_1 - \xi_2\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}. \tag{2.3.25}$$

On suppose maintenant que $\frac{cM}{m_{\mathcal{F}}} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < 1$ c-à-d. $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \frac{m_{\mathcal{F}}}{c\,M} = \mu_1$, donc : $\Lambda_g : W^{1,\infty}(0,T;V) \to W^{1,\infty}(0,T;V)$ est une contraction dans l'espace de *Banach* $W^{1,\infty}(0,T;V)$. Nous concluons par l'utilisation du théorème du point fixe que Λ_g possède un seul élément $\xi^* \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ tel que :

$$\Lambda_g(\xi^*) = \xi^*.$$

On a pour tout $g \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$, $\exists! u^{\beta}_{g\xi} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ qui vérifie (**2.3.4**), (**2.3.5**) et (**2.3.6**) donc on peut définir l'opérateur :

$$\Lambda : W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1) \to W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1), \text{ tel que : } \Lambda g(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u^{\beta}_{g\xi}(t))$$

Lemme 2.3.4 : *Il existe $\mu_2 > 0$ dépend seulement de Ω, Γ_1, Γ_3, $\mathcal{F}$ et p tel que si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_2$, l'opérateur Λ admet un unique point fixe g^*.*

Démonstration. : Soit g_1 , $g_2 \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, notons $\sigma^\beta_{g_i\xi}(t) = F\varepsilon(u^\beta_{g_i\xi}(t)) = F\varepsilon(u_i(t))$, $\forall i = 1,2$ la solution du problème $\mathbf{P}_V^{u^\beta_{g\xi_i}}$, on a :

$$\|\Lambda g_1\,(t) - \Lambda g_2\,(t)\,\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{F}\varepsilon(u_1(t)) - F\varepsilon(u_2(t)\|_{\mathcal{H}}, \qquad (2.3.26)$$

donc d'après (**2.1.12**)(**a**) et (**2.1.25**) on obtient :

$$\|\Lambda g_1\,(t) - \Lambda g_2\,(t)\,\|_{\mathcal{H}} \le L_{\mathcal{F}}\|u_1(t) - u_2(t)\|_V\ \forall t \in [0,T]. \qquad (2.3.27)$$

Nous utilisons des arguments semblables à ceux utilisés dans la preuve de (**2.3.20**) dans le cas où $\beta_1 = \beta_2$, $\xi_1 = \xi_2$, et $f_1 = f_2$ pour déduire que :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \le \frac{cM}{m_{\mathcal{F}}}\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\|g_1 - g_2\|_{\mathcal{H}}\ \forall t \in [0,T]. \qquad (2.3.28)$$

De (**2.3.27**) et (**2.3.28**) on obtient :

$$\|\Lambda g_1\,(t) - \Lambda g_2\,(t)\,\|_{\mathcal{H}} \le \frac{cL_{\mathcal{F}}M}{m_{\mathcal{F}}}\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\|g_1 - g_2\|_{\mathcal{H}}\ \forall t \in [0,T], \qquad (2.3.29)$$

d'où il résulte :

$$\|\,\Lambda g_1 - \Lambda g_2\,\|_{W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)} \le \frac{cL_{\mathcal{F}}M}{m_{\mathcal{F}}}\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\|g_1 - g_2\|_{W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)}. \qquad (2.3.30)$$

On suppose maintenant que $\frac{cL_{\mathcal{F}}M}{m_{\mathcal{F}}}\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < 1$ c-à-d. $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \frac{m_{\mathcal{F}}}{c\,L_{\mathcal{F}}\,M} = \mu_2$ donc : $\Lambda : W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1) \to W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$, est une contraction dans l'espace de *Banach* $W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$. Nous concluons par l'utilisation du théorème du point fixe que Λ possède un seul élément $g^* \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$ tel que :

$$\Lambda(g^*) = g^*.$$

Soit $u^\beta \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, la fonction données par :

$$u^\beta = u^\beta_{g\xi}, \qquad (2.3.31)$$

où $u^\beta_{g\xi}$ est le champ de déplacement obtenu dans le **Lemme 2.3.2**. ■

Dans l'étape suivante, nous utilisons le champ de déplacement u^β et nous considérons le problème suivant :

Problème $\mathbf{Q}_V^{\theta_\beta}$: *Trouver le champ d'adhésion $\theta_\beta : [0,T] \to L^2(\Gamma_3)$ tel que :*

$$\dot\theta_\beta(t) = -(\theta_\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u^\beta_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u^\beta_\tau(t)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+,\ \text{p.p. } t \in [0,T], \qquad (2.3.32)$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0. \qquad (2.3.33)$$

En utilisant une version du théorème de *Cauchy-Lipschitz* on a le résultat suivant :

Lemme 2.3.5 : *Il existe une unique solution du problème $Q_V^{\theta_\beta}$ et qui satisfait $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}$.*

Démonstration. : Nous considérons l'application $F : [0,T] \times L^2(\Gamma_3) \to L^2(\Gamma_3)$ défini par

$$F(t,\theta_\beta) = -(\theta_\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_{\beta\nu}(t))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_{\beta\tau}(t)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+ \ \forall t \in [0,T]$$

Soit $t \in [0,T]$ et $\theta_\beta \in L^2(\Gamma_3)$. Il s'ensuit d'après les propriétés des opérateurs de troncation R_ν et R_τ que F est de Lipschitz par rapport à la second variable, uniformément en temps. De plus, pour tout $\theta_\beta \in L^2(\Gamma_3)$ l'application $t \to F(t,\theta_\beta)$ appartient à $L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_3))$. En utilisant maintenant une version du théorème de *Cauchy-Lipschitz*, nous obtenons l'existence d'une fonction unique $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$ qui résout le problème $\mathbf{Q}_V^{\theta_\beta}$. ■

Notons que la restriction $0 \leq \beta(t) \leq 1$ est incluse implicitement dans le problème variationnel $\mathbf{P}_V$. En effet (**2.2.12**) et (**2.2.14**), nous garantie que $\beta(t) \leq \beta_0$, pour tout $t \geq 0$ (parce que β est une fonction décroissante pour la variable t), donc l'hypothèse ((**2.1.19**)) montre que $\beta(t) \leq 1$ pour $t \geq 0$ .p.p. sur Γ_3. D'autre part, si $\beta(t_0) = 0$ à $t = t_0$, alors, il s'ensuit de (**2.2.12**) que $\dot{\beta}_u(t) = 0$ pour $t \geq t_0$ (car si $t \geq t_0 \Rightarrow \beta(t) \leq \beta(t_0)$ donc (**2.2.12**) nous donne $\dot{\beta}(t) = 0$ pour $t \geq t_0$) donc $\beta(t)$ est constante pour tout $t \geq t_0$ d'où $\beta(t) = \beta(t_0) = 0$ pour tout $t \geq t_0$. Nous concluons que $0 \leq \beta(t) \leq 1$, pour tout $t \in [0,T]$. Il résulte de la définition de l'ensemble $\mathcal{Q}$ que $\theta_\beta \in \mathcal{Q}$, ce qui conclut la preuve du **Lemme 2.3.5**.

Il s'ensuit du **Lemme 2.3.5**, que pour tout $\beta \in \mathcal{Z}$ le problème $\mathbf{Q}_V^{\theta_\beta}$ admet une solution unique $\theta_\beta \in \mathcal{Z}$. Donc, on peut considérer l'opérateur $\bar{\Lambda} : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}$ donné par

$$\bar{\Lambda}\beta = \theta_\beta. \tag{2.3.34}$$

Dans la dernière étape, nous allons prouver le résultat suivant.

Lemme 2.3.6 : *Il existe un unique élément $\beta^* \in \mathcal{Z}$ tel que $\bar{\Lambda}\beta^* = \beta^*$.*

Démonstration. : Soit β_1 , $\beta_2 \in \mathcal{Z}$ et soit u_i, θ_i les fonctions obtenues dans le **Lemme 2.3.2** et **Lemme 2.3.5**, respectivement, pour $\beta = \beta_i$, $i = 1,2$. Soit $t \in [0,T]$, nous utilisons des arguments similaire à ceux utilisés pour démontrer (**2.3.20**) on obtient :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \frac{cM}{m_{\mathcal{F}}}\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}(\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}). \tag{2.3.35}$$

D'autre part, il s'ensuit de (**2.3.32**), (**2.3.33**) que :

$$\theta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t (\theta_i(s)(\gamma_\nu R_\nu(u_{i\nu}(s))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_{i\tau}(s)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+ \, ds.$$

Alors, de l'égalité précédente on obtient :

$$\theta_1(t)-\theta_2(t)=\int_0^t \gamma_\nu\left[\theta_2(s)R_\nu(u_{2\nu}(s))^2-\theta_1(s)R_\nu(u_{1\nu}(s))^2\right]ds+$$
$$+\int_0^t \gamma_\tau\left[\theta_2(s)\parallel R_\tau(u_{2\tau}(s))\parallel^2-\theta_1(s)\parallel R_\tau(u_{1\tau}(s))\parallel^2\right]ds,$$

d'où il résulte :

$$\parallel \theta_1(t)-\theta_2(t)\parallel_{L^2(\Gamma_3)}\leq \parallel \gamma_\nu\parallel_{L^2(\Gamma_3)}\int_0^t \parallel \theta_2(s)R_\nu(u_{2\nu}(s))^2-\theta_1(s)R_\nu(u_{1\nu}(s))^2\parallel_{L^2(\Gamma_3)}ds+$$
$$+\parallel \gamma_\tau\parallel_{L^2(\Gamma_3)}\int_0^t \parallel \theta_2(s)\parallel R_\tau(u_{2\tau}(s))\parallel^2-\theta_1(s)\parallel R_\tau(u_{1\tau}(s))\parallel^2\parallel_{L^2(\Gamma_3)}ds.$$

En utilisant la définition de R_ν et R_τ et écrivant $\theta_1=\theta_1-\theta_2+\theta_2$ nous arrivons à :

$$\parallel \theta_1(t)-\theta_2(t)\parallel_{L^2(\Gamma_3)}\leq c\int_0^t \parallel \theta_1(s)-\theta_2(s)\parallel_{L^2(\Gamma_3)}ds+$$
$$+c\int_0^t \parallel u_1(s)-u_2(s)\parallel_{L^2(\Gamma_3)^d}ds.$$

Moyennant une version des lemmes de *Gronwall*, il s'ensuit que :

$$\parallel \theta_1(t)-\theta_2(t)\parallel_{L^2(\Gamma_3)}\leq c\int_0^t \parallel u_1(s)-u_2(s)\parallel_{L^2(\Gamma_3)^d}ds,$$

et en utilisant (**2.1.26**), on obtient :

$$\parallel \theta_1(t)-\theta_2(t)\parallel_{L^2(\Gamma_3)}\leq c\int_0^t \parallel u_1(s)-u_2(s)\parallel_V ds, \tag{2.3.36}$$

d'où, d'après (**2.3.34**), (**2.3.35**) et (**2.3.36**) on obtient :

$$\parallel \bar\Lambda\beta_1(t)-\bar\Lambda\beta_2(t)\parallel_{L^2(\Gamma_3)}\leq \frac{cM}{m_{\mathcal{F}}}\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\int_0^t \|\beta_1(s)-\beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}. \tag{2.3.37}$$

Réitérons cette dernière inégalité n fois pour trouver :

$$\begin{aligned}&\parallel \bar\Lambda^n(\beta_1)-\bar\Lambda^n(\beta_2)\parallel_{W^{1,\infty}(0,T;\,L^2(\Gamma_3))}\leq\\ &\frac{\left(\frac{cM}{m_{\mathcal{F}}}\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\right)^n T^n}{n!}\parallel \beta_1-\beta_2\parallel_{W^{1,\infty}(0,T;\,L^2(\Gamma_3))}.\end{aligned} \tag{2.3.38}$$

Ce qui implique que pour n suffisamment grand l'opérateur $\bar\Lambda^n$ est une contraction dans l'espace de *Banach* $W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$, donc il possède un point fixe unique $\beta^*\in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$, et par conséquent β^* est l'unique point fixe de l'opérateur $\bar\Lambda$. ∎

Maintenant nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du **Théorème 2.3.1**.

1)Existence : Soit $\beta^* \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$, $\xi^* \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, $g^* \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$ les poins fixes, respectivement, des opérateurs $\bar{\Lambda}$, Λ, Λ_g, et soit (u,σ) la solution du problème $\mathbf{P}_V^{u^\beta_{g\xi}}$ et β la solution du problème $\mathbf{Q}_V^{\theta_\beta}$ pour $\beta = \beta^*$, $\xi = \xi^*$, $g = g^*$. En utilisant les **Lemmes 2.3.3**, **2.3.4**, **2.3.5** on obtient :

$$\begin{aligned} &u = u^{\beta^*}_{g^*\xi^*} = \Lambda_g(\xi^*) = \xi^*,\ \sigma = \sigma^{\beta^*}_{g^*\xi^*} = \mathcal{F}\varepsilon(u^{\beta^*}_{g^*\xi^*}) = \Lambda(g^*) = g^*, \\ &et\ \beta = \bar{\Lambda}\beta^* = \theta_{\beta^*} = \beta^* \end{aligned} \tag{2.3.39}$$

Donc nous concluons par (**2.3.4**), (**2.3.5**), (**2.3.6**), (**2.3.32**) et (**2.3.33**) que (u,σ,β) est une solution du problème $\mathbf{P}_V$. On a d'après (**2.3.22**), $u^\beta_{g\xi} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, $\sigma^\beta_{g\xi} \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$ d'où $u = u^{\beta^*}_{g^*\xi^*} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, $\sigma = \sigma^{\beta^*}_{g^*\xi^*} \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$. $\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$ découle du **Lemme 2.3.5.**

2) **Unicité** : L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité des points fixe des opérateurs Λ_g , Λ , $\bar{\Lambda}$.

Chapitre 3

Analyse variationnelle d'un problème viscoélastique avec compliance normale, frottement et adhésion

Dans ce chapitre, nous abordons à un problème quasistatique de contact entre un corps de loi constitutive viscoélastique et une fondation déformable. Le contact est adhésif et les conditions aux limites de contact et de frottement sont modélisées respectivement, par les conditions de compliance normale et la loi de frottement non locale de *Coulomb* généralisée en termes de vitesse. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appelée champ d'adhésion.

Le problème est formulé par un système d'équation aux dérivées partielles contenant l'équation d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau, une équation différentielle modélisant la champ d'adhésion et les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section nous dérivons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans la troisième section, nous fournissons l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème mécanique.

Les techniques employées sont basées sur les résultats des inéquations variationnelles d'évolution et la théorie des opérateurs monotones, suivi par des arguments de point fixe.

3.1 Position du problème mécanique et hypothèses

Nous considérons un corps élastique qui à l'instant $t = 0$ occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = (2, 3)$ de frontière supposée suffisamment régulière divisée en trois parties disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 tel que $mes\Gamma_1 > 0$. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question .

Ce corps est encastré sur Γ_1, soumis à une densité de forces volumiques f_0 sur Ω et à des forces surfaciques de densité f_2 sur Γ_2 et est en contact avec une fondation déformable le long de Γ_3. De plus, le contact avec cette fondation est supposé avec frottement et adhésion.

Problème P : *Trouver le champ déplacements* $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, *le champ des contraintes* $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_d$ *et le champ d'adhésion* $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \to [0, 1]$ *tels que :*

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \qquad \text{dans } \Omega \times (0, T), \tag{3.1.1}$$

$$Div\sigma + f_0 = 0 \qquad \text{dans } \Omega \times (0, T), \tag{3.1.2}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \tag{3.1.3}$$

$$\sigma\nu = f_2 \qquad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \tag{3.1.4}$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \tag{3.1.5}$$

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| \leq \mu p_\tau(|\ R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)\ |) \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| < \mu p_\tau(|\ R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)\ |) \Longrightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| = \mu p_\tau(|\ R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)\ |) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que :} \\ \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda \dot{u}_\tau. \end{cases} \tag{3.1.6}$$

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_\tau) \parallel^2 - \varepsilon_a)_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \tag{3.1.7}$$

$$u(0) = u_0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.1.8}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \qquad \text{sur } \Gamma_3. \tag{3.1.9}$$

Dans ce qui suit, nous fournissons quelques commentaires sur les conditions (**3**.1.1)– (**3**.1.**9**). L'équation (**3**.1.1) représente la loi de comportement visco-élastique, la relation (**3**.1.**2**) représente l'équation d'équilibre où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable Ω. Les conditions (**3**.1.**3**) – (**3**.1.**4**), sont les conditions de déplacement-traction, la condition (**3**.1.**5**) densité le contact avec compliance normale et adhésion et la condition (**3**.1.**6**) est la condition de frottement avec adhésion, l'équation (**3**.1.**7**) est l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion, les conditions (**3**.1.**8**) et (**3**.1.**9**) sont les conditions initiales, où u_0 et β_0 sont des champ donnés.

Pour l'étude du problème mécanique (**3**.1.1) – (**3**.1.**9**), on considère les hypothèses suivantes :

Nous supposons que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times S_d \to S_d$ satisfait :

$$\left\{\begin{array}{l}(a) \text{ Ilexiste } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que } \|\mathcal{A}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{A}(x,\varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}}\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \forall \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in S_d,\ \text{p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ Ilexiste } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que :} \\ (\mathcal{A}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{A}(x,\varepsilon_2)).(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}}\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \\ \forall \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in S_d,\ \text{p.p. } x \in \Omega. \\ (c) \text{ L'application } x \to \mathcal{A}(x,\varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega\ \forall \varepsilon \in S_d. \\ (d) \text{ L'application } x \to \mathcal{A}(x,0) \in \mathcal{H}. \end{array}\right. \tag{3.1.10}$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times S_d \to S_d$ satisfait :

$$\left\{\begin{array}{l}(a) \text{ Ilexiste } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que } \|\mathcal{G}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{G}(x,\varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{G}}\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \forall \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in S_d,\ \text{p.p. } x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \to \mathcal{G}(x,\varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega\ \forall \varepsilon \in S_d. \\ (c) \text{ L'application } x \to \mathcal{G}(x,0) \in \mathcal{H}. \end{array}\right. \tag{3.1.11}$$

La fonction $p_\nu : \Gamma_3 \times R \to R_+$ satisfait :

$$\left\{\begin{array}{l}(a) \text{ Ilexiste } L_\nu > 0 \text{ tel que :} \\ \mid p_\nu(x,r_1) - p_\nu(x,r_2) \mid \leq L_\nu \mid r_1 - r_2 \mid\ \ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R},\ \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \\ b)\ (p_\nu(x,r_1) - p_\nu(x,r_2))(r_1 - r_2) \geq 0\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R},\ \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c)\ x \to p_\nu(x,r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3,\ \forall r \in \mathbb{R}. \\ (d)\ p_\nu(x,r) = 0,\ \forall r \leq 0,\ \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array}\right. \tag{3.1.12}$$

et la fonction $p_\tau : \Gamma_3 \times R_+ \to R_+$ satisfait :

$$\left\{\begin{array}{l}(a) \text{ Ilexiste } L_\tau > 0 \text{ telque :} \\ \mid p_\tau(x,r_1) - p_\tau(x,r_2) \mid \leq L_\tau \mid r_1 - r_2 \mid\ \ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R},\ \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b)\ x \to p_\tau(x,r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3,\ \forall r \in \mathbb{R}. \\ (c)\ p_\tau(x,0) = 0,\ \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array}\right. \tag{3.1.13}$$

On suppose aussi que les forces volumiques et la traction surfacique ont la régularité :

$$f_0 \in W^{1,\infty}(0,T;H), \tag{3.1.14}$$

$$f_2 \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_2)^d). \tag{3.1.15}$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν, γ_τ et ε_a satisfont les conditions :

$$\gamma_\nu,\ \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3),\ \varepsilon_a \in L^2(\Gamma_3),\ \gamma_\nu,\ \gamma_\tau,\ \varepsilon_a \geq 0,\ \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \tag{3.1.16}$$

tandis que le coefficient de frottement μ satisfait :

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3),\ \mu(x) \geq 0,\ \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \tag{3.1.17}$$

Pour l'étude du problème P, on définit le sous-espace fermé V de H_1 par :

$$V = \{v \in H_1 / \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}, \tag{3.1.18}$$

et on le munit du produit scalaire défini par (**2.1.24**), et la norme définie par (**2.1.25**). Les conditions initiales satisfont :

$$u_0 \in V, \tag{3.1.19}$$

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3),\ 0 \leq \beta_0 \leq 1,\ \text{p.p. sur } \Gamma_3. \tag{3.1.20}$$

Le théorème de représentation de *Riesz*, entraîne l'existence d'un élément $f(t) \in V$ tel que :

$$(f(t), v)_V = (f_0(t), v)_H + (f_2(t), v)_{L^2(\Gamma_2)^d},\ \forall v \in V,\ \text{p.p. } t \in [0, T]. \tag{3.1.21}$$

Les conditions (**3.1.14**) $-$ (**3.1.15**) impliquent que :

$$f \in W^{1,\infty}(0, T; V). \tag{3.1.22}$$

Nous définissons la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \to \mathbb{R}$ par :

$$j_{ad}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma 3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)).v_\tau da, \tag{3.1.23}$$

et nous définissons la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : L^2(\Gamma_3) \times \mathcal{H}_1 \times V \times V \to \mathbb{R}$ par :

$$j_{fr}(\beta, \sigma, u, v) = \int_{\Gamma 3} \mu p_\tau(|\ R(\sigma_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)\ |) \parallel v_\tau \parallel da. \tag{3.1.24}$$

Finalement, nous définissons la fonctionnelle de compliance normale $j_{nc} : V \times V \to \mathbb{R}$ par :

$$j_{nc}(u, v) = \int_{\Gamma 3} p_\nu(u_\nu(t)) v_\nu da, \tag{3.1.25}$$

pour tout u, $v \in V$ et $t \in [0, T]$. D'après les hypothèses (**3.1.12**), (**3.1.13**) et la définition des opérateurs R_ν, R_τ il résulte que (**3.1.23**) $-$ (**3.1.25**), sont bien définies.

Dans le reste de cette section, nous dérivons quelques inégalités pour les fonctionnelles j_{ad}, j_{fr} et j_{nc} qui seront utilisées dans les sections suivantes. Dans cette section β, β_1 et β_2 dénote des éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tels que $0 \leq \beta,\ \beta_1,\ \beta_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3; u_1, u_2, v_1, v_2, u et v représentent des éléments de V; σ, σ_1, σ_2 dénotent des éléments de $\mathcal{H}_1$ et c est la constante positive générique qui peut dépendre de Ω, Γ_1, Γ_3, p, γ_ν, γ_τ et L, dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite de diverses fonctions de $x \in \Omega \cup \Gamma_3$.

D'abord, nous remarquons que j_{ad}, j_{nc} sont linéaires par rapport au dernier argument, donc :

$$j_{ad}(\beta, u, -v) = -j_{ad}(\beta, u, v),\ j_{nc}(u, -v) = -j_{nc}(u, v). \tag{3.1.26}$$

Puis, en utilisant (**3.1.23**) et les inégalités $| R_\nu(u_\nu) | \leq L$, $\|R_\tau(u_\tau)\| \leq L$, $| \beta_1 | \leq 1, | \beta_2 | \leq 1$, on déduit que :

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \int_{\Gamma 3} | \beta_1 - \beta_2 | \, \|u_1 - u_2\|.$$

En combinant cette inégalité avec (**2.1.26**) On obtient :

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)}\|u_1 - u_2\|_V. \tag{3.1.27}$$

Puis, nous choisissons $\beta = \beta_1 = \beta_2$ dans (**3.1.27**) pour trouver :

$$j_{ad}(\beta, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta, u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \tag{3.1.28}$$

Par une manipulation semblable, basée sur la définition des opérateurs R_ν, R_τ on montre que :

$$| j_{ad}(\beta, u_1, v) - j_{ad}(\beta, u_2, v) | \leq c\|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V. \tag{3.1.29}$$

En outre, nous prenons $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (**3.1.28**), et nous employons les égalités $R_\nu(0) = 0$, $R_\tau(0) = 0$ pour obtenir :

$$j_{ad}(\beta, v, v) \geq 0. \tag{3.1.30}$$

Maintenant, nous utilisons (**3.1.25**) pour voir que :

$$| j_{nc}(u_1, v) - j_{nc}(u_2, v) | \leq \int_{\Gamma 3} | p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu}) | | v_\nu | \, da,$$

et donc (**3.1.12**)(**a**) et (**2.1.26**) impliquent :

$$| j_{nc}(u_1, v) - j_{nc}(u_2, v) | \leq c_0^2 L_\nu \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V. \tag{3.1.31}$$

En utilisant encore une fois (**3.1.25**) on obtient :

$$j_{nc}(u_1, u_1 - u_2) - j_{nc}(u_2, u_1 - u_2) = \int_{\Gamma 3} (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu}))(u_{1\nu} - u_{2\nu}) da,$$

alors, (**3.1.12**)(**b**) implique :

$$j_{nc}(u_1, u_1 - u_2) - j_{nc}(u_2, u_1 - u_2) \geq 0. \tag{3.1.32}$$

Nous prenons maintenant $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans l'inégalité (**3.1.32**) et nous utilisons (**3.1.12**)(**d**) pour obtenir

$$j_{nc}(v, v) \geq 0. \tag{3.1.33}$$

Maintenant, nous utilisons (**3.1.13**)(**a**), (**2.1.26**), (**3.1.24**), les propriétés de l'opérateur R et les inégalités $\mid R_\nu(u_\nu) \mid \leq L$, $\|R_\tau(u_\tau)\| \leq L$, $\mid \beta_1 \mid \leq 1, \mid \beta_2 \mid \leq 1$, nous déduisons que :

$$\begin{gathered} j_{fr}(\beta_1, \sigma_1, u_1, u_2) - j_{fr}(\beta_1, \sigma_1, u_1, u_1) + j_{fr}(\beta_2, \sigma_2, u_2, u_1) - j_{fr}(\beta_2, \sigma_2, u_2, u_2) \leq \\ c_0^2 L_\tau \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}(\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|u_1 - u_2\|_V + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\mathcal{H}})\|u_1 - u_2\|_V. \end{gathered} \tag{3.1.34}$$

3.2 Formulation variationnelle du problème P

Soit $v \in V$. En utilisant la formule de *Green* on obtient :

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (Div\sigma(t), v - \dot{u}(t))_H = \int_\Gamma \sigma\nu.(v - \dot{u}(t))da \qquad \forall v \in H_1.$$

On peut écrire l'égalité précédente sous la forme :

$$\begin{gathered} (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + (Div\sigma(t), v - \dot{u}(t))_H = \int_{\Gamma_1} \sigma\nu.(v - \dot{u}(t))da + \\ + \int_{\Gamma 2} \sigma\nu.(v - \dot{u}(t))da + \int_{\Gamma 3} \sigma\nu.(v - \dot{u}(t))da \ \forall v \in V,\ t \in [0, T]. \end{gathered}$$

Sachant que $u \in V$, $v \in V$ et moyennant (**3.1.2**), (**3.1.3**) et (**3.1.4**)on obtient :

$$\begin{gathered} (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} = (f_0(t), v - \dot{u}(t))_H + (f_2(t), v - \dot{u}(t))_{L^2(\Gamma_2)^d} + \\ + \int_{\Gamma 3} \sigma\nu.(v - \dot{u}(t))da \ \forall v \in V. \end{gathered}$$

En utilisant (**3.1.21**), on déduit que :

$$\begin{gathered} (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} = (f(t), v - \dot{u}(t))_V + \\ + \int_{\Gamma 3} \sigma\nu.(v - \dot{u}(t))da, \forall v \in V,\ t \in [0, T]. \end{gathered} \tag{3.2.1}$$

D'autre part on a :

$$\sigma\nu.(v - \dot{u}) = \sigma_\nu(v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) + \sigma_\tau.(v_\tau - \dot{u}_\tau),$$

d'où on obtient :

$$\begin{gathered} \sigma\nu.(v - \dot{u}) = -(-\sigma_\nu + \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu))(v_\nu - \dot{u}_\nu) + \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu)(v_\nu - \dot{u}_\nu) + \\ +(\sigma_\tau + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).(v_\tau - \dot{u}_\tau) - \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)).(v_\tau - \dot{u}_\tau), \end{gathered}$$

donc on peut écrire cette dernière égalité comme suit :

$$\begin{aligned}&\sigma\nu.(v-\dot{u}) = -p_\nu(u_\nu)(v_\nu-\dot{u}_\nu)+\gamma_\nu\beta^2R_\nu(u_\nu)(v_\nu-\dot{u}_\nu)-\\&-\gamma_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)).(v_\tau-\dot{u}_\tau)+(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)).v_\tau-(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)).\dot{u}_\tau.\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

Les égalités (**3**.**2**.**1**) et (**3**.**2**.**2**) nous donnons :

$$\begin{aligned}(\sigma(t),\varepsilon(v)-\varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} &= (f(t),v-\dot{u}(t))_V-\int_{\Gamma3}[-\gamma_\nu\beta(t)^2R_\nu(u_\nu(t))(v_\nu-\dot{u}_\nu(t))+\\&+\int_{\Gamma3}\gamma_\tau\beta(t)^2R_\tau(u_\tau(t))).(v_\tau-\dot{u}_\tau(t))]da-\int_{\Gamma3}p_\nu(u_\nu(t))(v_\nu-\dot{u}_\nu(t))da\\&+\int_{\Gamma3}(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau(t))).v_\tau da-\int_{\Gamma3}(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau(t))).\dot{u}_\tau(t)da.\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

Lemme 3.2.1 : *La condition* (**3**.**1**.**6**) *est équivalente à :*

$$\begin{aligned}&\|\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)\|\leq\mu p_\tau(|\ R(\sigma_\nu)-\gamma_\nu\beta^2R_\nu(u_\nu)\ |)\\&(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)).\dot{u}_\tau+\mu p_\tau(|\ R(\sigma_\nu)-\gamma_\nu\beta^2R_\nu(u_\nu)\ |)\|\dot{u}_\tau\|=0\ sur\ \Gamma3.\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

Démonstration. : Pour la démonstration voir **Chapitre 2.** ■

On a aussi d'après l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* :

$$|\ (\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)).v_\tau\ |\leq\|\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)\|\|v_\tau\|,$$

d'où on obtient :

$$(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)).v_\tau\geq-\|\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)\|\|v_\tau\|.$$

On déduit d'après (**3**.**2**.**4**) que :

$$(\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)).v_\tau\geq-\mu p_\tau(|\ R(\sigma_\nu)-\gamma_\nu\beta^2R_\nu(u_\nu)\ |)\|v_\tau\|,\tag{3.2.5}$$

donc, d'après (**3**.**2**.**3**), (**3**.**2**.**4**) et (**3**.**2**.**5**) on obtient :

$$\begin{aligned}(\sigma(t),\varepsilon(v)-\varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} &= (f(t),v-\dot{u}(t))_V-\int_{\Gamma3}[-\gamma_\nu\beta(t)^2R_\nu(u_\nu(t))(v_\nu-\dot{u}_\nu(t))+\\&+\int_{\Gamma3}\gamma_\tau\beta(t)^2R_\tau(u_\tau(t))).(v_\tau-\dot{u}_\tau(t))]da-\int_{\Gamma3}p_\nu(u_\nu(t))(v_\nu-\dot{u}_\nu(t))da\\&-\int_{\Gamma3}\|\sigma_\tau+\gamma_\tau\beta^2R_\tau(u_\tau)\|\|v_\tau\|da+\int_{\Gamma3}\mu p_\tau(|\ R(\sigma_\nu)-\gamma_\nu\beta^2R_\nu(u_\nu)\ |)\|\dot{u}_\tau\|da.\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

Moyennant (**3**.**1**.**23**), (**3**.**1**.**24**), (**3**.**1**.**25**) et (**3**.**2**.**6**) il vient :

$$\begin{aligned}&(\sigma(t),\varepsilon(v)-\varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}}+j_{ad}(\beta(t),u(t),v-\dot{u}(t))+j_{nc}(u(t),v-\dot{u}(t))\\&+j_{fr}(\beta(t),\sigma(t),u(t),v)-j_{fr}(\beta(t),\sigma(t),u(t),\dot{u}(t))\geq(f(t),v-\dot{u}(t))_V\\&\quad\forall v\in V,\ \text{p.p. } t\in[0,T].\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

Finalement, d'après (**3.1.1**), (**3.1.7**)– (**3.1.9**) et (**3.2.7**) on obtient la formulation variationnelle du problème **P**

Problème $\mathbf{P}_V$: *Trouver le champ des déplacements $u : [0,T] \mapsto V$, le champ des contraintes $\sigma : [0,T] \to \mathcal{H}_1$ et le champ d'adhésion : $\beta : [0,T] \to L^2(\Gamma_3)$ tels que :*

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t)), \tag{3.2.8}$$

$$\begin{aligned}&(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - \dot{u}(t)) + j_{nc}(u(t), v - \dot{u}(t))\\ &+ j_{fr}(\beta(t), \sigma(t), u(t), v) - j_{fr}(\beta(t), \sigma(t), u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V\\ &\quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0,T),\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_\tau(t)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+ \ sur\ \Gamma_3 \times [0,T], \tag{3.2.10}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.2.11}$$

$$\beta(0) = \beta_0. \tag{3.2.12}$$

3.3 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section, on donne le résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnelle $\mathbf{P}_V$.

Théorème 3.3.1 : *Supposons que* (**3.1.10**) – (**3.1.17**) *et* (**3.1.19**)–(**3.1.20**) *sont vérifiées. Alors, le problème P_V admet une solution unique (u, σ, β) qui vérifie :*

$$u \in W^{1,\infty}(0,T;V), \tag{3.3.1}$$

$$\sigma \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1), \tag{3.3.2}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)). \tag{3.3.3}$$

On conclut que, sous les hypothèses (**3.1.10**) – (**3.1.17**) et (**3.1.19**)–(**3.1.20**), le problème **P** a une unique solution faible qui satisfait (**3.3.1**)– (**3.3.3**).

La démonstration du **Théorème 3.3.1** sera faite en plusieurs étapes, elle est basée sur les résultats des inéquations d'évolutions avec les opérateurs monotones et le théorème du point fixe.

Nous supposons dans la suite que (**3.1.10**) – (**3.1.17**) et (**3.1.19**) – (**3.1.20**) sont vérifiées. Soit $\eta \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ donné. Dans cette première étape nous considérons le problème suivant :

Problème $\mathbf{P}_V^\eta$: *Trouver le champ des déplacements $u_\eta : [0,T] \mapsto V$, tel que :*

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t))_V +\\ &+ j_{ad}(\beta_\eta(t), u_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t)) + j_{nc}(u_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t))\\ &+ j_{fr}(\beta_\eta(t), \sigma_\eta(t), u_\eta(t), v) - j_{fr}(\beta_\eta(t), \sigma_\eta(t), u_\eta(t), \dot{u}_\eta(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}_\eta(t))_V\\ &\quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0,T),\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

$$u_\eta(0) = u_0. \tag{3.3.5}$$

Lemme 3.3.2 *: Sous les hypothèses* (**3**.**1**.**10**) – (**3**.**1**.**17**) *et* (**3**.**1**.**19**) – (**3**.**1**.**20**) *, le problème* $\boldsymbol{P}_V^\eta$ *admet une solution unique* $u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;V)$.

Soit $\xi \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, $g \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$ et $\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$ donnés. Nous considérons le problème suivant :

Problème $\mathbf{P}^{u^{g\xi}_{\eta\beta}}$: *Trouver le champ des déplacements* $u^{g\xi}_{\eta\beta} : [0,T] \mapsto V$ *tels que :*

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(\omega_\eta(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\omega_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta(t), \xi(t), v - \omega_\eta(t)) + \\ &+ j_{nc}(\xi(t), v - \omega_\eta(t)) + j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), v) - j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi(t), \omega_\eta(t)) \\ &\geq (f_\eta(t), v - \omega_\eta(t))_V \\ &\forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0,T),\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

$$u^{g\xi}_{\eta\beta}(0) = u_0, \tag{3.3.7}$$

$$\omega_\eta = \dot{u}^{g\xi}_{\eta\beta}. \tag{3.3.8}$$

Lemme 3.3.3 *: Sous les hypothèses* (**2**.**1**.**10**) – (**2**.**1**.**17**) *et* (**2**.**1**.**19**)–(**2**.**1**.**20**)*, Il existe une unique solution* $u^{g\xi}_{\eta\beta}$ *du problème* $\boldsymbol{P}^{u^{\beta_\eta}_{g\xi}}$ *qui satisfait* $u^{g\xi}_{\eta\beta} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$.

Démonstration. : On pose

$$L(v) = (\mathcal{A}\varepsilon(\omega_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta_\eta(t), \xi(t), v) + j_{nc}(\xi(t), v) \ \forall v \in V,$$

et on pose aussi :

$$f_\eta(t) = f(t) - \eta(t), \ \forall t \in (0,T). \tag{3.3.9}$$

Nous remarquons que pour ω_η donné $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire continue donc d'après le théorème de représentation de *Riesz*, il existe un unique élément $\varphi(t) \in V$ tel que :

$$(\varphi(t), v)_V = L(v) = (\mathcal{A}\varepsilon(\omega_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta_\eta(t), \xi(t), v) + j_{nc}(\xi(t), v) \ \forall v \in V$$

d'où, $\forall \omega_\eta(t) \in V, \exists! \varphi(t) \in V$ tel que :

$$(\varphi(t), v)_V = L(v) = (\mathcal{A}\varepsilon(\omega_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta_\eta(t), \xi(t), v) + j_{nc}(\xi(t), v) \ \forall v \in V.$$

Donc on peut définir l'opérateur $G : V \longrightarrow V$ par :

$$G(\omega_\eta(t)) = \varphi(t),$$

d'où on obtient :

$$(G(\omega_\eta(t)), v)_V = L(v) = (\mathcal{A}\varepsilon(\omega_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j_{ad}(\beta_\eta(t), \xi(t), v) + j_{nc}(\xi(t), v) \ \forall v \in V. \tag{3.3.10}$$

En utilisant des arguments semblables à ceux utilisés dans le deuxième chapitre pour démontrer (**2.3.11**) et (**2.3.12**), on déduit que l'opérateur G est fortement monotone et de *Lipshitz* sur V. On a aussi démontré dans le même chapitre que j_{fr} est propre, convexe et s.c.i. ■

Maintenant, en utilisant un résultat d'existence et d'unicité sur les inégalité variationnelles, il s'ensuit l'existence d'un élément unique $\omega_\eta(t) \in V$ qui vérifie :

$$\begin{array}{l}(G(\omega_\eta(t)), v - \omega_\eta(t))_{\mathcal{H}} + j_{fr}(\beta_\eta(t), g(t), \xi(t), v) - \\ -j_{fr}(\beta_\eta(t), g(t), \xi(t), \omega_\eta(t)) \geq (f_\eta(t), v - \omega_\eta(t))_V \\ \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0,T).\end{array} \tag{3.3.11}$$

D'après quelques manipulations algébriques similaires à ceux utilisés pour obtenir (**2.3.24**) dans le premier chapitre, on obtient :

$$\omega_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;V). \tag{3.3.12}$$

Soit la fonction $u_{\eta\beta}^{g\xi} : [0,T] \mapsto V$, définie par :

$$u_{\eta\beta}^{g\xi}(t) = \int_0^t \omega_\eta(s) ds + u_0 \qquad \forall t \in [0,T], \tag{3.3.13}$$

d'où on déduire que $u_{\eta\beta}^{g\xi} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ est la solution unique du problème $\mathbf{P}^{u_{g\xi}^{\beta_\eta}}$.

Soit $u_\beta \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, la fonction donnée par :

$$u_\beta = u_{\eta\beta}^{g\xi}. \tag{3.3.14}$$

Dans l'étape suivante, nous utilisons le champ de déplacement u_β et nous considérons le problème suivant.

Problème $\mathbf{Q}_V^{\theta_\beta}$: *Trouver le champ d'adhésion $\theta_\beta : [0,T] \to L^2(\Gamma_3)$ tels que :*

$$\dot{\theta}_\beta(t) = -(\theta_\beta(t)(\gamma_\nu R_\nu(u_{\beta\nu}(t))^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_{\beta\tau}(t)) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+, \text{p.p. } t \in (0,T), \tag{3.3.15}$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0. \tag{3.3.16}$$

En utilisant une version du théorème de *Cauchy-Lipschitz* on obtient le résultat suivant.

Lemme 3.3.4 *: Il existe une unique solution θ_β du problème $\mathbf{Q}_V^{\theta_\beta}$, qui satisfait $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}$.*

Démonstration. : La démonstration du **Lemme 3.3.4** est similaire à celle du **Lemme (2.3.5)**. (voir **Chapitre 2**) ■

Pour tout $\eta \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, on prend $u_{\eta\beta}^{g\xi}$, la solution unique du problème $\mathbf{P}^{u_{\eta\beta}^{g\xi}}$.

Soit $\hat{\Lambda}\eta(t)$ l'élément de V donné par :

$$(\hat{\Lambda}\eta(t), v)_V = (\mathcal{G}\varepsilon(u_{\eta\beta}^{g\xi}(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \ \forall v \in V, \ t \in [0,T]. \tag{3.3.17}$$

On a le résultat suivant :

Lemme 3.3.5 : *Pour tout $\eta \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, la fonction $\hat{\Lambda}\eta : [0,T] \to V$ appartient à $W^{1,\infty}(0,T;V)$. En outre, il existe un unique élément $\eta^* \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ tel que $\hat{\Lambda}\eta^* = \eta^*$.*

Démonstration. : Soit $\eta \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ et t_1, $t_2 \in [0,T]$. En utilisant (**3.3.17**), on obtient :

$$| (\hat{\Lambda}\eta(t_1) - \hat{\Lambda}\eta(t_2), v)_V | = | (\mathcal{G}\varepsilon(u^{g\xi}_{\eta\beta}(t_1)) - \mathcal{G}\varepsilon(u^{g\xi}_{\eta\beta}(t_2), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} |,$$

d'après l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on obtient :

$$| (\hat{\Lambda}\eta(t_1) - \hat{\Lambda}\eta(t_2), v)_V | \leq \|(\mathcal{G}\varepsilon(u^{g\xi}_{\eta\beta}(t_1)) - (\mathcal{G}\varepsilon(u^{g\xi}_{\eta\beta}(t_2))\|_{\mathcal{H}} \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}},$$

et d'après (**3.1.11**)(**a**) et (**2.1.25**) on obtient :

$$| (\hat{\Lambda}\eta(t_1) - \hat{\Lambda}\eta(t_2), v)_V | \leq L_{\mathcal{G}} \|u^{g\xi}_{\eta\beta}(t_1) - u^{g\xi}_{\eta\beta}(t_2)\|_V \|v\|_V. \qquad (3.3.18)$$

On pose maintenant $v = \Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2)$ dans (**3.3.18**) pour obtenir :

$$\|\hat{\Lambda}\eta(t_1) - \hat{\Lambda}\eta(t_2)\|_V \leq L_{\mathcal{G}} \|u^{g\xi}_{\eta\beta}(t_1) - u^{g\xi}_{\eta\beta}(t_2)\|_V, \qquad (3.3.19)$$

et comme $u^{g\xi}_{\eta\beta} \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, nous concluons de l'inégalité (**3.3.19**) que $\hat{\Lambda}\eta \in W^{1,\infty}(0,T;V)$. ■

Soit maintenant η_1, $\eta_2 \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ et soit $u_i = u^{g\xi}_{\eta_i\,\beta}$ pour $i = 1, 2$. Pour tout $t \in [0,T]$, en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour la preuve de (**3.3.19**), nous obtenons :

$$\|\hat{\Lambda}\eta_1(t) - \hat{\Lambda}\eta_2(t)\|_V \leq L_{\mathcal{G}} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V, \qquad (3.3.20)$$

mais u_1, u_2 ont la même condition initiale donc :

$$\| u_1(t) - u_2(t)\|_V = \| \int_0^t (\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s))ds\|_V \leq \int_0^t \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V \, ds. \qquad (3.3.21)$$

Combinons l'inégalité (**3.3.20**) avec (**3.3.21**) on obtient :

$$\|\hat{\Lambda}\eta_1(t) - \hat{\Lambda}\eta_2(t)\|_V \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V \, ds, \forall t \in [0,T]. \qquad (3.3.22)$$

Nous notons par u_i la fonction obtenue dans le **Lemme 3.3.3**, pour $\eta = \eta_i$, $i = 1, 2$. En utilisant l'inégalité (**3.3.6**) et quelques manipulations algébriques on obtient :

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2))_{\mathcal{H}} &\leq (\eta_2 - \eta_1, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_V + j_{ad}(\beta, \xi, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) + \\ &+ j_{ad}(\beta, \xi, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) + j_{nc}(\xi, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) + j_{nc}(\xi, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) \\ &+ j_{fr}(\beta, g, \xi, \dot{u}_2) - j_{fr}(\beta, g, \xi, \dot{u}_1) + j_{fr}(\beta, g, \xi, \dot{u}_1) - j_{fr}(\beta, g, \xi, \dot{u}_2).\end{aligned} \qquad (3.3.23)$$

Mais d'après (**3.1.23**), (**3.1.24**) et (**3.1.25**) on a :

1) $j_{ad}(\beta, \xi, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) + j_{ad}(\beta, \xi, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) = 0.$
2) $j_{fr}(\beta, g, \xi, \dot{u}_2) - j_{fr}(\beta, g, \xi, \dot{u}_1) + j_{fr}(\beta, g, \xi, \dot{u}_1) - j_{fr}(\beta, g, \xi, \dot{u}_2) = 0.$
3) $j_{nc}(\xi, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) + j_{nc}(\xi, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) = 0.$

Donc l'inégalité (**3.3.23**) devient :

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2))_{\mathcal{H}} \leq (\eta_2 - \eta_1, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_V,$$

d'où l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* nous donne :

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2))_{\mathcal{H}} \leq \| \eta_1 - \eta_2 \|_V \| \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \|_V, \tag{3.3.24}$$

et d'après (**3.1.10**)(**b**) et (**2.1.25**) on a :

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1) - \varepsilon(\dot{u}_2))_{\mathcal{H}} \geq m_{\mathcal{A}} \|\dot{u}_1 - \dot{u}_2\|_V^2 \tag{3.3.25}$$

donc d'après (**3.3.24**) et (**3.3.25**) on obtient :

$$m_{\mathcal{A}} \|\dot{u}_1 - \dot{u}_2\|_V^2 \leq \| \eta_1 - \eta_2 \|_V \| \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \|_V,$$

ce qui implique que :

$$\| \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} \| \eta_1(t) - \eta_2(t) \|_V, \forall t \in [0, T]. \tag{3.3.26}$$

Combinons maintenant l'inégalité (**3.3.22**) avec (**3.3.26**) on obtient :

$$\|\hat{\Lambda}\eta_1(t) - \hat{\Lambda}\eta_2(t)\|_V \leq \frac{L_{\mathcal{G}}}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t \| \eta_1(s) - \eta_2(s) \|_V \, ds, \forall t \in [0, T].$$

On fait une itération sur cette dernière inégalité n fois pour trouver :

$$\|\hat{\Lambda}^n\eta_1 - \hat{\Lambda}^n\eta_2\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} \leq \frac{\left(\frac{L_{\mathcal{G}}}{m_{\mathcal{A}}}\right)^n T^n}{n!} \| \eta_1 - \eta_2 \|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}. \tag{3.3.27}$$

Ce qui implique que pour n suffisamment grand l'opérateur $\hat{\Lambda}^n$ est une contraction dans l'espace de *Banach* $W^{1,\infty}(0, T; V)$, donc il possède un point fixe unique $\eta^* \in W^{1,\infty}(0, T; V)$, et par conséquent η^* est l'unique point fixe de l'opérateur $\hat{\Lambda}$.

On a pour tout $\xi(t) \in W^{1,\infty}(0, T; V)$, $\exists! u^{g\xi}_{\eta^*\beta}(t) \in W^{1,\infty}(0, T; V)$, donc on peut définir l'opérateur : $\Lambda_g : W^{1,\infty}(0, T; V) \to W^{1,\infty}(0, T; V)$ tel que :

$$\Lambda_g(\xi) = u^{g\xi}_{\eta^*\beta}. \tag{3.3.28}$$

Lemme 3.3.6 : *Pour tout $\xi(t) \in V$, la fonction $\Lambda_g\xi : [0,T] \to V$ appartient à $W^{1,\infty}(0,T;V)$, et il existe un unique élément $\xi^* \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ tel que :*

$$\Lambda_g\xi^* = \xi^*. \tag{3.3.29}$$

Démonstration. : Soient ξ_1 , $\xi_2 \in W^{1,\infty}(0,T;V)$,on pose $u^{g\xi_1}_{\eta^*\beta} = u_1$ et $u^{g\xi_2}_{\eta^*\beta} = u_2$, d'après (**3.3.4**), (**3.3.17**) et quelques manipulation algébriques on obtient :

$$\begin{array}{l}
(\mathcal{A}\varepsilon(\dot u_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot u_2(t)), \varepsilon(\dot u_1(t)) - \varepsilon(\dot u_2(t)))_{\mathcal{H}} \leq \\
(\mathcal{G}\varepsilon(u_2(t)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_1(t)), \dot u_1(t) - \dot u_2(t))_{\mathcal{H}} + \\
+ j_{ad}(\beta(t), \xi_1(t), \dot u_2(t) - \dot u_1(t)) + j_{ad}(\beta(t), \xi_2(t), \dot u_1(t) - \dot u_2(t)) + \\
+ j_{nc}(\xi_1(t), \dot u_2(t) - \dot u_1(t)) + j_{nc}(\xi_2(t), \dot u_1(t) - \dot u_2(t)) + \\
+ j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi_1(t), \dot u_2(t)) - j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi_1(t), \dot u_1(t)) + \\
+ j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi_2(t), \dot u_1(t)) - j_{fr}(\beta(t), g(t), \xi_2(t), \dot u_2(t)).
\end{array}$$

Maintenant d'après (**3.1.29**), (**3.1.31**), (**3.1.34**) on obtient :

$$\begin{array}{l}
(\mathcal{A}\varepsilon(\dot u_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot u_2(t)), \varepsilon(\dot u_1(t)) - \varepsilon(\dot u_2(t)))_{\mathcal{H}} \leq \\
(\mathcal{G}\varepsilon(u_2(t)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_1(t)), \dot u_1(t) - \dot u_2(t))_{\mathcal{H}} + \\
+ c\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_V \|\dot u_1(t) - \dot u_2(t)\|_V + \\
c_0^2 L_\nu \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_V \|\dot u_1(t) - \dot u_2(t)\|_V + \\
c_0^2 L_\tau \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_V \|\dot u_1(t) - \dot u_2(t)\|_V,
\end{array}$$

d'où (**2.1.25**), (**3.1.10**)(b), (**3.1.11**)(**a**) et l'inégalité de *Cauchy -Schwarz* nous donne :

$$\|\dot u_1(t) - \dot u_2(t)\|_V \leq c\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + c\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_V.$$

Par intégration on aura :

$$\int_0^t \|\dot u_1(s) - \dot u_2(s)\|_V \, ds \leq c\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V \, ds + c\int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|_V \, ds,$$

d'où on obtient :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq c\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V \, ds + c\int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|_V \, ds.$$

Moyennant une version des lemmes de *Gronwall*, il s'ensuit que :

$$\begin{array}{c}
\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq c\displaystyle\int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|_V \, ds \\
\|u^{g\xi_1}_{\eta^*\beta}(t) - u^{g\xi_2}_{\eta^*\beta}\|_V \leq c\displaystyle\int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|_V \, ds,
\end{array} \tag{3.3.30}$$

donc d'après (**3.3.28**) on obtient :

$$\|\Lambda_g(\xi_1(t)) - \Lambda_g(\xi_2(t))\|_V \leq c\int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|_V \, ds.$$

On fait une itération sur cette dernière inégalité n fois pour trouver que :

$$\|\Lambda_g^n(\xi_1) - \Lambda_g^n(\xi_2)\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} \leq \frac{c^{\,n}T^{\,n}}{n!}\|\xi_1 - \xi_2\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)}. \qquad (3.3.31)$$

Ce qui implique que pour n suffisamment grand l'opérateur Λ_g^n est une contraction dans l'espace de *Banach* $W^{1,\infty}(0,T;V)$, donc il possède un point fixe unique $\xi^* \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, et par conséquent ξ^* est l'unique point fixe de l'opérateur Λ_g. ■

-On considère maintenant l'opérateur $\Lambda : W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1) \to W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$ tel que :

$$\Lambda g(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_{\eta^*\beta}^{g\xi_1}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u_{\eta^*\beta}^{g\xi_1}(t)) \ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.3.32)$$

Lemme 3.3.7 : *Pour tout $g(t) \in \mathcal{H}_1$, la fonction $\Lambda g : [0,T] \to \mathcal{H}_1$, appartient à $W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$ et il existe un unique élément $g^* \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$ tel que :*

$$\Lambda g^* = g^*. \qquad (3.3.33)$$

Démonstration. : Soient g_1 , $g_2 \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$,on pose $u_{\eta^*\beta}^{g_1\xi} = u_1$ et $u_{\eta^*\beta}^{g_2\xi} = u_2$. D'après (**3.3.32**) on a :

$$\|\Lambda(g_1(t)) - \Lambda(g_2(t))\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2(t))\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{G}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}},$$

et d'après (**3.1.10**)(a), (**3.1.11**)(a) et (**2.1.25**) on obtient :

$$\|\Lambda(g_1(t)) - \Lambda(g_2(t))\|_V \leq L_{\mathcal{A}}\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V + L_{\mathcal{G}}\|u_1(t) - u_2(t)\|_V.$$

Nous utilisons des arguments similaires à ceux utilisées pour démontrer (**3.3.30**) on déduit que :

$$L_{\mathcal{A}}\|\dot{u}_1(t)-\dot{u}_2(t)\|_V+L_{\mathcal{G}}\|u_1(t)-u_2(t)\|_V \leq c\|g_1(t)-g_2(t)\|_{\mathcal{H}}+c\int_0^t \|g_1(s)-g_2(s)\|_{\mathcal{H}}\, ds,$$

d'où on obtient :

$$\|\Lambda(g_1(t)) - \Lambda(g_2(t))\|_{\mathcal{H}} \leq c\|g_1(t) - g_2(t)\|_{\mathcal{H}} + c\int_0^t \|g_1(s) - g_2(s)\|_{\mathcal{H}}\, ds.$$

On fait une itération sur cette dernière inégalité n fois pour trouver que :

$$\|\Lambda^n(g_1) - \Lambda^n(g_2)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{c^n(n+T)^n}{n!}\|g_1 - g_2\|_{\mathcal{H}}.$$

Ce qui implique que pour n suffisamment grand l'opérateur Λ^n est une contraction dans l'espace de *Banach* $W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$, donc il possède un point fixe unique $g^* \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$, et par conséquent g^* est l'unique point fixe de l'opérateur Λ. ■

Il s'ensuit du **Lemme 3.3.4** que pour tout $\beta \in \mathcal{Z}$ le problème $\mathbf{Q}_V^{\theta_\beta}$ admet une solution unique $\theta_\beta \in \mathcal{Z}$ donc, on peut considérer l'opérateur $\bar{\Lambda} : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ donné par :

$$\bar{\Lambda}\beta = \theta_\beta.$$

Dans la dernière étape, nous allons prouver les résultats suivants.

Lemme 3.3.8 : *Il existe un unique élément $\beta^* \in \mathcal{Z}$ tel que*

$$\bar{\Lambda}\beta^* = \beta^* = \theta_{\beta^*}. \tag{3.3.34}$$

Démonstration. : La démonstration du **Lemme 3.3.8** est similaire à celle du **Lemme 2.3.6.** ■

Maintenant on peut établir la démonstration du **Théorème 3.3.1**.

1)**Existence** : Soit $\xi^*, g^*, \beta^*, \eta^*$ les poins fixes, respectivement, des opérateurs Λ_g , Λ , $\bar{\Lambda}, \hat{\Lambda}$ et soit $u = u_{g\xi}^{\beta\eta}$ la solution du problème $\mathbf{P}^{u_{g\xi}^{\beta_\eta}}$, pour $\xi = \xi^*$, $g = g^*$, $\beta = \beta^*$ et $\eta = \eta^*$. Nous dénotons par σ la fonction donnée par (**3**.**2**.**8**) et soit β la solution du problème $\mathbf{Q}_V^{\theta_\beta}$ c-à-d $\beta = \beta^* = \theta_{\beta^*}$. Il est clair que les égalités (**3**.**2**.**10**) et (**3**.**2**.**12**) sont vérifiées. De plus puisque $\xi = \xi^*$, $g = g^*$, $\beta = \beta^*$ et $\eta = \eta^*$, il s'ensuit du (**3**.**3**.**6**) et (**3**.**3**.**17**) que (**3**.**2**.**9**) est vérifiée. Du **Lemme 3.3.3**, il s'ensuit que $u \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, et en utilisant des arguments semblables à ceux utilisés dans le premier chapitre (voir **Chapitre 1**), on peut démontrer que $\sigma \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$. Finalement la régularité du champ d'adhésion $\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q}$ découle du **Lemme 3.3.4**. Nous concluons que (u, σ, β) est une solution du problème $\mathbf{P}_V$ qui satisfait (**3**.**3**.**1**) − (**3**.**3**.**3**).

2) **Unicité** : L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité des points fixe des opérateurs Λ_g , Λ , $\bar{\Lambda}, \hat{\Lambda}$.

Chapitre 4

Rappels de la mecanique des milieux continus

Dans le souci de rendre cet ouvrage facile à lire, il nous est paru utile de rappeler à la fin de ce mémoire de quelques notions et conventions mathématique nécessaire pour l'étude des problèmes mécanique, quelques notions principales de la mécanique des milieux continus, les espaces fonctionnelles, des résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espace de *Hilbert* et les propriétés de base de l'approximation variationnelle. Cette Annexe est divisée en cinq sections.

Dans la première section nous introduisons quelques notations et conventions mathématique puis nous donnons le modèle mathématique et quelques notions principales de la mécanique des milieux continus, ensuite nous décrivons les lois de comportement élastique et viscoélastique, les conditions de contact avec ou sans frottement, les différentes lois de frottement et les conditions de contact avec adhésion.

Dans la deuxième section nous rappelons de quelques espaces fonctionnels tels que les espaces de *Sobolev et les* espaces des fonctions à valeurs vectorielles.

Dans la troisième section nous rappelons de quelques notions de base de l'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert tels que les fonctions convexes et semi-continuité inférieure, différentiabilité et sous différentiabilité, des opérateurs fortement monotones et de *Lipschitz*. des inéquations variationnelles elliptiques et particulièrement des résultats d'existence et d'unicité.

La quatrième section est dédiée à une version du théorème de *Cauchy-Lipschitz* et quelques lemmes de type *Gronwall*.

La dernière section est consacrée à rappelée de quelques propriétés de base de l'approximation variationnelle.

A Préliminaires et modèles

Nous présentons dans cette section quelques notations et conventions, le modèle mathématique, des lois de comportement et des conditions aux limites de contact.

A.1 Notations et conventions

Avant d'obtenir le modèle mathématique, voici quelques notations et conventions.

Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d\,(d = 2, 3)$; "." et $\|.\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$. Ainsi, nous avons

$$u.v = u_i\, v_i,\, \|v\| = (v.v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u,\, v \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma.\tau = \sigma_{ij}\, \tau_{ij}, \quad \|\tau\| = (\tau.\tau)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d,$$

avec la convention de l'indice muet.

Pour un vecteur v, nous notons par v_ν et v_τ les composantes *normale* et *tangentielle* à la frontière, définies par

$$v_\nu = v.\nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu. \tag{A.1.1}$$

Nous désignons par $\sigma = \sigma(x,t)$ le champ des *contraintes*, par $u = u(x,t)$ le champ des *déplacements* et par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \overline{\Omega}$ et $t \in [0,\ T]$.

Pour un champ des contraintes σ nous dénotons par σ_ν et σ_τ les composantes *normale* et *tangentielle* à la frontière, données par :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu. \tag{A.1.2}$$

En utilisant (**A.1.1**) et (**A.1.2**), nous obtenons la relation

$$(\sigma\nu).v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau.v_\tau, \tag{A.1.3}$$

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps ; par exemple

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2},$$

où $\dot{u}$ désigne le *champ des vitesses* et $\ddot{u}$ désigne le *champ des accélérations*. Pour le champ des vitesses $\dot{u}$ les notations $\dot{u}_\nu$ et $\dot{u}_\tau$ représentent respectivement les vitesses *normale* et *tangentielle* à la frontière, c'est-à-dire

$$\dot{u}_\nu = \dot{u}.\nu, \quad \dot{u}_\tau = \dot{u} - \dot{u}_\nu \nu.$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)),\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq d. \tag{A.1.4}$$

Notons qu'ici et tout au long de la thèse, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale.

Passons maintenant à la description du modèle mathématique associé au problème mécanique.

A.2 Modèle mathématique

Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d\,(d = 2, 3)$ avec une surface frontière $\partial\Omega = \Gamma$ supposée assez régulière, rapporté à un système cartésien Ox_i $(i = \overline{1, d})$. Du point de vue mécanique, on étudie le nouvel état d'équilibre du corps résultant de l'application des forces volumiques dans Ω et des forces surfaciques sur une partie de la frontière Γ, dans un intervalle de temps $[0, T]$. Le modèle mathématique décrit l'évolution du corps qui occupe le domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d\,(d = 2, 3)$.

Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0,\ T] \to \mathbb{R}^d$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,\ T] \to \mathbb{S}^d$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \to [0, 1]$.

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de *Cauchy*

$$Div\,\sigma + f_0 = \rho\,\ddot{u} \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \tag{A.2.1}$$

où $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ désigne la *densité de masse* ; ici "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs, $Div\ \sigma = (\sigma_{ij,j})$. Le processus d'évolution défini par (**A.2.1**) s'appelle *processus dynamique*. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho\,\ddot{u}$ peut être négligé. Dans ce cas l'équation (**A.2.1**) devient

$$Div\,\sigma + f_0 = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0,\ T). \tag{A.2.2}$$

L'équation (**A.2.2**) s'appelle *l'équation d'équilibre*. Le processus d'évolution défini par (**A.2.2**) s'appelle *processus quasistatique*. Nous rappelons que dans le *cadre physique*, f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Par conséquent, nous supposons que les accélérations dans le système sont négligeables. Nous nous plaçons donc dans le cas *quasistatique* et nous utilisons l'équation (**A.2.2**).

Puisque le corps est encastré sur Γ_1, le champ des déplacements s'annule

$$u = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T). \tag{A.2.3}$$

La condition aux limites en tractions est

$$\sigma f = f_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T), \tag{A.2.4}$$

f_2 étant une donnée du problème.

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (**A.2.2**) – (**A.2.4**) par les conditions de contact sur la partie Γ_3 de la frontière.

A.3 Lois de comportement

Les lois de comportement caractérisent ce qui est propre à chaque type de matériau. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement ; par exemple, voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation. Dans la description des phénomènes purement mécaniques, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ, le tenseur des déformations infinitésimales ε et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$. Nous présentons par la suite les lois de comportement qui interviennent dans ce mémoire, elles correspondent à deux catégories particulières de matériaux : matériaux élastiques et matériaux viscoélastiques.

Dans le cas unidimensionnel, on dit qu'un matériau est *élastique* si, lors des essais de charge-décharge les courbes $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coïncident ; dans le cas contraire il est *plastique* (*anélastique*) et après décharge complète il subsiste une déformation résiduelle. Enfin, on dit qu'un matériau est *viscoélastique* s'il peut décrire le phénomène de relaxation ou de fluage.

En conclusion, l'analyse des données expérimentales permet d'établir ce qui est propre au matériau lui même et conduit à l'établissement de la forme des lois de comportement.

Lois de comportement des matériaux élastiques

Nous considérons ici une catégorie de matériaux pour lesquels la loi de comportement s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon). \tag{A.3.1}$$

Ici le tenseur des contraintes est une fonction (linéaire ou non linéaire) du tenseur des déformations infinitésimales $\varepsilon = \varepsilon(u)$; ceci correspond aux matériaux élastiques et la loi de comportement (**A.3.1**) s'appelle *loi de comportement élastique*. Dans le cas unidimensionnel la loi (**A.3.1**) peut modéliser certaines propriétés mises en évidence par les expériences de chargement-monotone : la linéarité de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (selon $\mathcal{F}$ est linéaire ou non linéaire), le durcissement ou l'adoucissement de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (selon $\mathcal{F}$ est monotone ou non monotone).

Par contre, ni le fluage, ni la relaxation ne peuvent être décrits par la loi (**A.3.1**). En effet, plaçons-nous dans le cas unidimensionnel ; si par exemple à l'instant $t = 0$ on a $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et nous maintenons la déformation constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \quad \forall t > 0$ il résulte que $\sigma(t) = \mathcal{F}(\varepsilon_0) \quad \forall t > 0$. Par conséquent le modèle (**A.3.1**) ne peut pas décrire le phénomène de relaxation mis en évidence par les essais expérimentaux. Un commentaire similaire peut se faire pour le phénomène de fluage. De même, pour l'équation (**A.3.1**), dans le cas unidimensionnel, les courbes charge-décharge $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coïncident. Donc, ce modèle ne peut pas décrire les déformations résiduelles.

En général, la fonction $\mathcal{F}$ dépend du point $x \in \Omega$ (Ω étant le domaine de $\mathbb{R}^d$ occupé par le corps), donc on a

$$\sigma(x,t) = \mathcal{F}(x,\, \varepsilon(x,t)) \quad \forall x \in \Omega,\ t > 0.$$

Si $\mathcal{F}$ ne dépend pas explicitement de x, le milieu est dit *homogène*, sinon il est dit *non-homogène*.

Lois de comportement des matériaux viscoélastiques

L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les pâtes, les huiles et les cires a mis en évidence les insuffisances de la théorie de l'élasticité. En effet, certains phénomènes, tels que le fluage ou la relaxation ne peuvent être décrits par les lois de comportement élastiques. C'est pourquoi les modèles visco-élastiques furent introduits. Ils sont utilisés aussi pour décrire le comportement de différents matériaux comme les métaux, les polymères, les caoutchoucs et les roches.

Dans le cas unidimensionnel, ces matériaux ont des caractéristiques élastiques, mais en même temps, les essais de chargement monotone indiquent que la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ dépend de $\dot{\varepsilon}$. Ce sont donc des *matériaux viscoélastiques*. Dans le cas multidimensionnel la loi viscoélastique de *Kelvin-Voigt* s'écrit

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \tag{A.3.2}$$

où $\mathcal{A}$ représente l'opérateur de *viscosité* et $\mathcal{G}$ est l'opérateur d'*élasticité*. Remarquons que lorsque $\mathcal{A} \equiv 0$, la loi (**A.3.2**) se réduit à une loi de comportement élastique de la forme (**A.3.1**).

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ_3 ; c'est l'objet des conditions de contact et des lois de frottement que nous décrirons dans le paragraphe suivant.

A.4 Conditions aux limites de contact

Afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'équilibre d'un matériau, il faut encore préciser les conditions aux limites de contact.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ le domaine régulier occupé par le corps, Γ la frontière de Ω et ν le vecteur normal unitaire sortant à Γ. Soit également $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \phi$, pour $i \neq j$, une partition de Γ.

On considère les conditions aux limites suivantes :

$$u = f_1 \qquad \textit{sur } \Gamma_1, \tag{A.4.1}$$

$$\sigma\nu = f_2 \qquad \textit{sur } \Gamma_2. \tag{A.4.2}$$

La condition (**A.4.1**) est appelée *condition aux limites de déplacement*; sa signification consiste en ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de la frontière Γ, la fonction f_0 étant une donnée du problème (par exemple, si $f_0 = 0$ le corps est encastré sur la portion Γ_1 de sa frontière). La condition (**A.4.2**) est appelée *condition aux limites de traction;* sa signification consiste en ce que le vecteur des contraintes de *Cauchy* $\sigma\nu$ est imposé sur la partie Γ_2 de la frontière Γ, f_2 représentant la densité des forces appliquées de surface et constituant une donnée du problème. Si $\Gamma_1 = \phi$ le problème aux limites est un *problème de traction pur* et si $\Gamma_2 = \phi$ le problème aux limites est un *problème de déplacement pur*. Si les parties Γ_1 et Γ_2 sont toutes les deux de mesure de *Lebesgue* $N-1$ dimensionnelle strictement positive, le problème considéré est un *problème mixte déplacement-traction*.

Conditions aux limites de contact sans frottement

On dit que le contact entre le corps et la base rigide S est sans frottement, si les mouvements tangentielles sont libres, ce qui se traduit par :

$$\sigma_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_3. \tag{A.4.3}$$

Puisque S représente une base rigide, elle ne subira donc pas de déformations. Le corps ne pourra donc pas y pénétrer ; cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité suivante :

$$u_\nu = u.\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_3, \tag{A.4.4}$$

où $g(x)$ dénote la distance de chaque point $x \in \Gamma_3$ à S dans la direction de la normale $\nu(x)$.

Aux points de Γ_3 tels que $u_\nu < g$, il n'existe pas de contact entre Ω et S donc le vecteur des contraintes de *Cauchy* s'annule ; par conséquent, on a :

$$u_\nu < g \implies \sigma_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3. \tag{A.4.5}$$

Aux points de Γ_3 tels que $u_\nu = 0$, on suppose que la base rigide S exerce une pression inconnue suivant la direction de la normale et orientée vers Ω; on a :

$$u_\nu = g \implies \sigma_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \tag{A.4.6}$$

Pour résumer, les conditions de contact (**A.4.3**)$-$(**A.4.6**) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante :

$$u_\nu \leq g,\ \sigma_\nu \leq 0,\ \sigma_\tau = 0,\ \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0 \text{ sur } \Gamma_3. \tag{A.4.7}$$

Les conditions aux limites de contact de la forme (**A.4.7**) sont aussi appelées conditions de contact de *Signorini*.

Conditions aux limites de contact avec compliance normale

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori (voir par exemple [**22**]). La contrainte normale σ_ν satisfait la condition dite de *compliance normale*

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g), \tag{A.4.8}$$

où u_ν est le déplacement normal, g représente l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée *fonction de compliance normale*. Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$. Précisons que dans les trois chapitres du mémoire nous considérons le cas où le corps repose sur la fondation, c'est-à-dire, l'interstice est nul, $g = 0$. Comme exemple de la fonction p_ν nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \tag{A.4.9}$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si} \quad r \leq \alpha, \\ \\ c_\nu \alpha & \text{si} \quad r > \alpha, \end{cases} \tag{A.4.10}$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (**A.4.8**) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, c-à-d, quand elle dépasse α, la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

Conditions aux limites de contact avec frottement

Maintenant, nous présentons quelques exemples sur les lois de frottement intervenant dans ce mémoire.

1) Loi de frottement de type Coulomb. C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu|\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow u_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \end{cases} \tag{A.4.11}$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement. On rajoute (**A.4.11**) des conditions aux limites $u_\nu \leq g$, $\sigma_\nu \leq 0$, $\sigma_\tau = 0$, $\sigma_\nu(u_\nu - g) = 0$ sur $\Gamma_3$tes de contact bilatéral ($u_\nu = 0$) ou unilatéral ($u_\nu \leq 0$, $\sigma_\nu \leq 0$, $\sigma_\tau = 0$, $\sigma_\nu u_\nu = 0$ sur Γ_3).

La loi de *Coulomb* est souvent utilisée pour les corps rigide ou élastique. On remarque également q'il s'agit d'une loi à seuil, tant que la seuil n'est pas atteint, il n'y a pas de glissement. Ce seuil est variable et dépend de la contrainte normale ce qui représente une difficulté majeure pour l'étude mathématique de cette loi de frottement, (voir par exemple [**16**] et [**12**]).

2) Loi de Coulomb avec seuil de type Stromberg. Cette loi de frottement est une version de la loi de *Coulomb* utilisée récemment dans [**28**] . On peut supposer que le contact est bilatéral ou unilatéral. On remplace dans la loi précédent le seuil de frottement $p = |\sigma_\nu|$ par le seuil de type $p(|\sigma_\nu|) = |\sigma_\nu|(1 - |\alpha\sigma_\nu|)_+$ où α est une constante positive liée à l'usure de la surface en contact. La considération de ce seuil de frottement est faite à partir des principes de la thermodynamique. Les essais expérimentaux donnent pour α des valeurs trés petites. En résumé, cette loi s'énonce comme suit :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p|\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p|\sigma_\nu| \Rightarrow u_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p|\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \end{cases} \tag{A.4.12}$$

3) Loi de Coulomb non locale généralisée. Finalement, on présente la loi de frottement qui fait l'objet de notre étude et qui généralise la loi précédente. Soit l'opérateur R une régularisant normale, c'est à dire un opérateur linéaire continu $R : H^{-\frac{1}{2}} \to L^2(\Gamma)$. Le régularisant R est introduit pour des raisons techniques car la trace du tenseur des contraintes sur la frontière est très irrégulière. Cette loi s'énonce comme suit :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p|R\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p|R\sigma_\nu| \Rightarrow u_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p|R\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau, \end{cases} \tag{A.4.13}$$

où $p : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est le seuil de frottement vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \textbf{(a)} \text{ Ilexiste } M > 0 \text{ tel que :} \\ \quad | \, p(x, r_1) - p(x, r_2) \, | \leq M \, | \, r_1 - r_2 \, | \; \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \textbf{(b)} \; x \to P(x, r) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \; \forall r \in R_+. \\ \textbf{(c)} \; p(x, 0) = 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{A.4.14}$$

La présence de l'opérateur R dans (**A.4.13**) nous conduit à appeler (**A.4.13**) *loi de frottement non locale*. Remarquons que l'hypothèse (**A.4.14**) est satisfaite pour les deux lois précédentes. Aux conditions (**A.4.14**) on rajoute des conditions de contact bilatéral ou unilatéral.

Conditions aux limites de contact avec adhèsion

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différente. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact. En se basant sur les idées de *M. Frémond* **[17]** et **[18]**, on introduit une variable interne de surface appelée, *champ d'adhésion*, qui prend ses valeurs entre zéro et un et qui décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact. Le processus est gouverné par l'équation différentielle

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \parallel R_\tau(u_\tau) \parallel^2) - \varepsilon_a)_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T)\,,$$

où $R_\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'opérateur de troncation défini par :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s \leq -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases}$$

Ici $L > 0$ est la longueur caractéristique des liens et $R_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est l'opérateur de troncation défini par :

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si } \|v\| \leq L, \\ L\dfrac{v}{\|v\|} & \text{si } \|v\| \geq L. \end{cases}$$

Pour plus de détails, on renvoie le lecteur *à* **[23]** , **[25]** et **[29]**

B Espaces fonctionnels

B.1 Espaces de Sobolev

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques u et σ :

$$H = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\},$$
$$\mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\},$$
$$H_1 = \{u = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega)\},$$
$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid \sigma_{ij,j} \in H \}.$$

Les espaces H, $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par :

$$(u,v)_H = \int_\Omega u_i v_i \, dx,$$

$$(\sigma,\tau)_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} \, dx,$$

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}},$$

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (Div\sigma, Div\tau)_H,$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1 \to \mathcal{H}$ et $Div : \mathcal{H}_1 \to H$ sont respectivement les opérateurs de *déformation* et de *divergence*, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \; Div \; \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces H, $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont notées par $\|.\|_H$, $\|.\|_{\mathcal{H}}$, $\|.\|_{H_1}$ et $\|.\|_{\mathcal{H}_1}$, respectivement. Puisque la frontière Γ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ. Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \longrightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_Γ ; ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_Γ le dual de H_Γ, et $(.,.)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ. Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément $\sigma\nu \in H'_\Gamma$ tel que :

$$(\sigma\nu, \; \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \; \sigma, \; v)_H \quad \forall v \in H_1. \tag{B.1.1}$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \; \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu.v \; da \; \forall v \in H_1. \tag{B.1.2}$$

Donc, pour σ assez régulier nous avons la formule suivante (Formule de *Green*) :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \; \sigma, \; v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu.v \; da \; \forall v \in H_1.$$

Pour plus de détails sur les espaces de *Sobolev*, on renvoie le lecteur *à* [**1**], [**4**] et [**39**].

B.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Bien que le contenu de ce paragraphe est standard et peut être trouvé dans un grand nombre d'ouvrages, une revue d'ensemble sur ce sujet nous a paru utile. Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X.

Définition B.1 : *Une fonction* $f : [0,T] \to X$ *est dite mesurable s'il existe un sous ensemble* $E \subset [0,T]$ *de mesure nulle et une suite* $(f_n)_{n\in N}$ *de fonctions appartenant à* $C_c(0,T;X)$ *telle que* $\|f_n(t) - f(t)\|_X \to 0$ *quand* $n \to \infty$, *pour tout* $t \in [0,T]\backslash E$.

Définition B.2 *Une fonction* $f : [0,T] \to X$ *est dite fortement dérivable dans* $t_0 \in (0,T)$ *s'il existe un élément* $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$ *appelé la dérivée forte de* f *dans* t_0, *tel que*

$$\|\frac{1}{h}(f(t_0+h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0)\|_X = 0$$

Définition B.3 *Une fonction* $f : [0,T] \to X$ *est dite intégrable s'il existe une suite* $(f_n)_{n\in N}$ *de fonctions appartenant à* $C_c(0,T;X)$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T ||f_n(t) - f(t)||_X \, dt = 0.$$

Théorème B.4 *(Bochner)* : *Une fonction* $f : [0,T] \to X$ *mesurable est intégrable si et seulement si* $x \mapsto ||f(x)||_X : [0,T] \to R_+$ *est intégrable. Dans ce cas,*

$$\| \int_0^T f \, dt\|_X \leq \int_0^T ||f||_X \, dt.$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. *L'espace de Lebesgue* $L^p(0,T;X)$ *est l'ensemble des classes de fonctions* $f : (0,T) \to X$ *mesurables, telles que l'application* $t \to ||f(t)||_X$ *appartient à* $L^p(0,T)$. *On sait que* $L^p(0,T;X)$ *est un espace vectoriel normé avec la norme*

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = (\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{c > 0 \quad | \quad \|f(t)\|_X \leq c, \quad t \in (0,T)\} \qquad p = \infty.$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants.

Proposition B.5 *(1)* $L^p(0,T;X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *est un espace de Banach.*

(2) Si X *est un espace de Hilbert avec le produit scalaire* $(.,.)_X$, *alors* $L^2(0,T;X)$ *est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire*$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt$.

(3) $L^r(0,T;X) \subseteq L^q(0,T;X)$, *avec injection continue,* $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

(4) Si X *est un espace de Hilbert, alors*

$$L^p(0,T;X)' = L^q(0,T;X), 1 < p,\, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0,T;X)' = L^\infty(0,T;X).$$

où $L^p(0,T;X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Définition B.6 *Soit $u, w \in L^1(0,T;X)$. La fonction w s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0,T)$ si*

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)w(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,T),$$

$C_c^\infty(0,T)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans $(0,T)$. Nous écrivons $w = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $w = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0,T;X)$ est l'espace des fonctions $u : [0,T] \to X$ telles que $u \in L^p(0,T;X)$ et $\dot{u} \in L^p(0,T;X)$. L'espace $W^{1,p}(0,T;X)$ est un espace de *Banach* muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|u\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Définition B.7 *Une fonction $f : [0,T] \to X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j, b_j) disjoints, inclus dans $[0,T]$, tels que $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum_j \|f(b_j) - f(a_j)\|_X \leq \varepsilon$.*

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace $W^{1,p}(0,T;X)$.

Théorème B.8 *Soit $1 \leq p \leq \infty$, X un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^p(0,T;X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $u \in W^{1,p}(0,T;X)$.

(2) u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte

dans $L^p(0,T;X)$.

(3) Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0,T;X)$, telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Il découle de la démonstration du théorème précédent que, si X est un espace réflexif, alors toute fonction $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ est fortement dérivable p.p. sur $(0,T)$ et

$\dot{u} = \dfrac{du}{dt}$ p.p. sur $(0,T)$. Par ailleurs, $W^{1,1}(0,T;X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions $u : [0,T] \to X$ absolument continues et $W^{1,\infty}(0,T;X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes $u : [0,T] \to X$. Étant donnés un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$ on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0,T;X) = \{u \in W^{k-1,p}(0,T;X); \dot{u} \in W^{k-1,p}(0,T;X)\}.$$

On vérifie aisément que $u \in W^{k,p}(0,T;X)$ si et seulement s'il existe k fonctions g_1, ..., $g_k \in L^p(0,T;X)$ telles que

$$\int_0^T u(t)\varphi^{(j)}(t)dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t)\varphi(t), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I),\ \forall j = 1, 2...k$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de φ.On peut donc considérer les dérivées successives $\dot{u} = g_1$, $u^{(2)} = g_2$, ..., $u^{(k)} = g_k$. L'espace $W^{k,p}(0,T;X)$ est un espace de *Banach* muni de la norme

$$||u||_{W^{k,p}(0,T;X)} = ||u||_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^{k} \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Nous dénotons aussi par $C([0,T];X)$ et $C^1([0,T];X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0,T]$ à valeurs dans X, respectivement, avec les normes

$$\|x\|_{C([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|_X,$$

$$\|x\|_{C^1([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|_X + \max_{t\in[0,T]} \|\dot{x}(t)\|_X,$$

C Analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Cette section comporte des rappels de quelques résultats d'analyse non linéaire utilisés dans ce mémoire. On précise que pour avoir plus de détails sur les rappels figurants dans cette section, on peut consulter par exemple [**5**] , [**34**] et [**35**] .

C.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Dans la suite, H désigne un espace de *Hilbert* réel muni de son produit scalaire ainsi que la norme associée notés respectivement par $(.,.)_H$ et $\|.\|_H$. On note aussi par H' l'espace dual de H et par $\|.\|_{H\times H'}$ la dualité entre H et H'.

Propriétés élémentaires

Théorème C.1 *: (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet). Etant donné $\eta \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que $(\eta, v)_{H'\times H} = (f, v)_H$ $\forall v \in H$, on a de plus*

$$\|\eta\|_{H'} = \|f\|_H.$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application $\eta \to f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et son dual $H^{'}$.

On dit que la suite $(u_n) \subset H$ est faiblement convergente vers l'élément $u \in H$ et on note $u_n \rightharpoonup u$ si

$$(v, u_n)_H \to (v, u)_H \ \forall v \in H.$$

Dans ce cas, u s'appelle *limite faible* de la suite (u_n). En utilisant l'inégalité de *Cauchy-Schwarz*, il résulte que si $u_n \to u$ dans H alors $u_n \rightharpoonup u$ dans H . La réciproque n'est pas en général vraie. De plus, puisque tout espace de *Hilbert* est réflexif, on a le résultat suivant :

Théorème C.2 : *Soit (u_n) une suite bornée de H. Il existe alors un élément $u \in H$ et une sous-suite de (u_n) encore notée (u_n) telles que $u_n \rightharpoonup u$.*

Un élément $u \in H$ qui est la limite faible d'une sous suite de la suite (u_n) s'appelle *point faiblement adhérent* à la suite (u_n). On prouve que :

Théorème C.3 : *Si la suite $(u_n) \subset H$ possède un unique point faiblement adhérent $u \in H$, alors $u_n \rightharpoonup u$.*

Autrement dit, le théorème précédent affirme que si toute les *sous suite faiblement convergentes d'une* suite (u_n) on la même limite faible u, alors toute la suite (u_n) converge faiblement vers u.

Soient u et v deux éléments de H. On dit que u et v sont *orthogonaux* et on note $u \perp v$ si $(u, v)_H = 0$. Soit M un sous-espace vectoriel de H. On pose

$$M^{\perp} = \{v \in H \ / \ v \perp u \ \forall u \in H\}.$$

On dit que $M^{\perp}$ est *orthogonal* de M dans H et on peut prouver le résultat suivant :

Théorème C.4 : *Soit M un sous-espace fermé de H. Alors $M^{\perp}$ est un supplémentaire topologique de M c'est à dire*

1. *$M^{\perp}$ est sous-espace fermé de H.*
2. *$M \cap M^{\perp} = \{0\}$ et $M + M^{\perp} = H$.*

On va finir ce paragraphe par un résultat concernant la projection sur un convexe fermé.

Théorème C.5 : *Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in K$ unique tel que :*

$$\|f - u\|_H = \min_{v \in K} \|f - v\|_H. \tag{C.1.1}$$

De plus, u est caractérisé par la propriété suivante :

$$u \in K, \ (u, v - u)_H \geq (f, v - u)_H \ \forall v \in K. \tag{C.1.2}$$

Etant donné $K \subset H$ un convexe fermé non vide, le théorème précédente nous permet d'associer à chaque élément $f \in H$ l'élément u définit par (**C.1.1**) ou (**C.1.2**). On note $u = P_K f$. on a mis ainsi en évidence l'opérateur $P_K : H \to K$ qui s'appelle opérateur projection de H sur K.

Théorème du point fixe-Théorème de Lax-Milgram

On va commencer par rappeler un résultat classique qui est le théorème de point fixe de *Banach*. Ce résultat intervient dans les démonstrations de bon nombre des résultats d'existence et d'unicité établis dans ce mémoire.

Théorème C.6 : *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $F : X \to X$ une application contractante, c'est à dire q'il existe un réel k vérifiant $0 < k < 1$ tel que :*

$$d(F(x_1), F(x_2)) \leq kd(x_1, x_2) \ \forall x_1, \ x_2 \in X.$$

L'application F admet alors un point fixe unique $x \in X$ c'est à dire $F(x) = x$.

Soit maintenant $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur $H \times H$. la forme a est dite

1) continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$| \ a(u, v) \ | \leq M \|u\|_H \|v\|_H \ \forall u, v \in H.$$

2) coercive s'il existe un réel $m > 0$ tel que :

$$a(u, v) \geq m \|u\|_H^2 \ \forall u \in H.$$

Remarque C.7 : *Soient $A : H \to H$ un opérateur et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par*

$$a(u, v) = (Au, v)_H \ \forall u, \ v \in H. \tag{C.1.3}$$

On a alors les propriétés suivantes :

1) a est linéaire si et seulement si A est linéaire.

2) a est continue si et seulement si A est continue.

3) a est coercive si et seulement si A est définit positif.

Le second rappel de ce paragraphe concerne le théorème de *Lax-Milgram*.

Théorème C.8 : *Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in H$ unique tel que :*

$$a(u, v) = (f, v)_H \ \forall \ v \in H. \tag{C.1.4}$$

C.2 Fonctions convexes et semi-continuité inférieure

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeur dans $]-\infty,+\infty]$. Une tlle fonction est dite *propre* si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est à dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite *convexe* si

$$\varphi(tu+(1-t)v) \leq t\varphi(u)+(1-t)\varphi(v)\ \forall u,\ v \in X, t \in [0,T].$$

La fonction φ est dite *strictement convexe* si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u,\ v \in X$ tel que $u \neq v$.

Pour toute fonction $\varphi : X \to]-\infty,+\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par :

$$dom\ \varphi = \{u \in X \setminus \varphi(u) < +\infty\}$$

$$epi\ \varphi = \{(u,\alpha) \in X \setminus \varphi(u) < \alpha\}$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants :

1) φ est propre si et seulement si $dom\varphi = \phi$.

2) Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.

3) φ est convexe si et seulement si $epi\varphi$ est un ensemble convexe de $X \times \mathbb{R}$.

Nous supposons maintenant l'espace vectoriel X muni d'une topologie. Une fonction $\varphi : X \to]-\infty,+\infty]$ est dite *semi-continue inférieurement* (s.c.i) si

$$lim\ \underset{n}{inf}\ \varphi(u_n) \geq \varphi(u)$$

pour tout $u \in X$ et $u_n \to u$ dans X. La propriété de semi-continuité inférieurement peut être caractérisée par :

Lemme C.9 *: soit $\varphi : H \to]-\infty,+\infty]$, alors Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) φ est semi-continue inférieurement.

2) L'épigraphe de φ est fermée dans $H \times \mathbb{R}$.

Puisque dans un espace vectoriel normé tout ensemble convexe est simultanément fermé pour la topologie forte et la topologie faible, le lemme précédent conduit au résultat suivant :

Théorème C.10 *: soit H un espace de Hilbert et $\varphi : H \to]-\infty,+\infty]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si φ est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie faible de H.*

Soit maintenant $K \subset H$. On appelle fonction indicatrice de K, la fonction $\psi_K : H \to]-\infty, +\infty]$ définie par :

$$\psi_K(u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \in K, \\ +\infty \text{ si } u \notin K. \end{cases} \tag{C.2.1}$$

En utilisant cette définition, on peut facilement prouver le résultat suivant :

Lemme C.11 (A.3.2) *: K est un ensemble convexe, fermé et non vide de H si et seulement si la fonction indicatrice ψ_K est convexe, s.c.i et propre.*

C.3 Différentiabilité et sous différentiabilité

On note à présent par 2^H l'ensemble de toutes les parties de H.

Une fonction $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est dite *Gâteaux-différentiable* au point $u \in H$ s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in H$ tel que :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_H \; \forall\, v \in H.$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ s'appelle la différentielle au sens de *Gâteaux de* φ en u.

la fonction φ est dite *Gâteaux-différentiable* si elle est *Gâteaux-différentiable en tout point de* H; dans ce cas l'opérateur $u \to \nabla\varphi(u)$ de H dans H s'appelle le gradient de φ.

La convexité des fonctions *Gâteaux-différentiable* peut être caractérisée comme suit :

Lemme C.12 *: Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction Gâteaux-différentiable. φ est alors une fonction convexe si et seulement si*

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u)_H \; \forall u, \; v \in H. \tag{C.3.1}$$

L'inégalité (**C.3.1**) suggère une généralisation de la notion de *gradient* aux fonctions convexes. On dit que la fonction $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est *sous-différentiable* en un point $u \in H$ s'il existe $f \in H$ tel que :

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H \; \forall\, v \in H. \tag{C.3.2}$$

L'élément f est alors appelé un *sous-gradient* de φ en u et l'ensemble des sous-gradients de φ en u est appelé le *sous-différentiel* de φ en u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \{ f \in H \setminus \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H \; \forall\, v \in H \}. \tag{C.3.3}$$

On note par *dom* $(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par :

$$dom\ (\partial\varphi) = \{ u \in H \setminus \partial\varphi(u) \neq \phi \}. \tag{C.3.4}$$

En utilisant (**A.3.3**) et (**A.3.4**) ainsi que la définition du domaine d'une fonction, il résulte

$$dom(\partial\varphi) \subset dom\varphi \tag{C.3.5}$$

L'opérateur multivoque $u \to \partial\varphi(u) : H \to 2^H$ s' appelle le sous-différentiel de φ. La fonction φ est dite *sous-différentiable* si elle est *sous-différentiable en tout point de* H, c'est à dire si $dom(\partial\varphi) = H$.

En utilisant l'inégalité (**A.3.2**), on obtient :

Lemme C.13 : *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction sous-différentiable. φ est alors une convexe, propre et semi-continue inférieurement.*

Lemme C.14 : *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et semi-continue inférieurement. Alors φ est sous-différentiable en tout point intérieur de son domaine $dom\varphi$.*

Lemme C.15 : *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. φ est alors sous-différentiable et $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$ pour tout $u \in H$.*

C.4 Inéquations variationnelles elliptiques

Soit $A : H \to H$ un opérateur non linéaire, $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$. La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques ou mécanique conduit aux *problèmes mathématiques* de la forme

$$\begin{cases} \text{trover } u \text{ tel que :} \\ u \in H,\ (Au, v-u)_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v-u)_H \ \forall\, v \in H. \end{cases} \tag{C.4.1}$$

Le problème (**C.4.1**) est appelé *inégalités variationnelles elliptiques de second espèce* sur H. D'autres problèmes rencontrés en physiques ou en mécanique conduit aux *inégalités variationnelles elliptiques* de la forme

$$\begin{cases} \text{trover } u \text{ tel que :} \\ u \in K,\ (Au, v-u)_H \geq (f, v-u)_H \ \forall\, v \in K. \end{cases} \tag{C.4.2}$$

où K est un sous-ensemble non vide de H. Le problème (**C.4.2**) est appelé *inéquation variationnelle elliptique de première espèce* sur H.

Remarquons que si $\varphi \equiv 0$ (ou $K = H$), alors (**C.4.1**) (resp. (**C.4.2**)) est équivalente au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trover } u \text{ tel que :} \\ u \in H,\ (Au, v)_H = (f, v)_H \ \forall\, v \in H. \end{cases} \tag{C.4.3}$$

On obtient une *équation variationnelle*.

On dit que l'opérateur A est :

a) *fortement monotone* s'il existe $m > 0$ tel que :

$$(Au - Av, u - v)_H \geq m\|u - v\|_H^2 \ \forall u, \ v \in H.$$

b) de *Lipschitz* s'il existe $M > 0$ tel que :

$$\|Au - Av\|_H \leq M\|u - v\|_H$$

On peut démontrer (voir par exemple [**36**]) que si A est *fortement monotone* et de *Lipschitz alors* A est inversible et A^{-1} est *fortement monotone* et de *Lipschitz*. En ce qui concerne les problèmes (**C.4.1**) et (**C.4.2**), on a les résultats d'existence et d'unicité suivant :

Théorème C.16 *: Si A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et φ une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement alors l'inéquation variationnelle elliptique* (**C.4.1**) *admet une solution unique.*

Théorème C.17 *: Si A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et K est un convexe fermé non vide de H alors l'inéquation variationnelle elliptique* (**C.4.2**) *admet une solution unique.*

D Compléments dévers

Dans cette section, nous allons rappeler une version du théorème de *Cauchy-Lipschitz*.

Théorème D.1 *: Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, .) : X \to X$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$, qui satisfait les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} \textit{il existe } L_F > 0 \textit{ tel que} \\ \|F(t,x) - F(t,y)\|_X \leq L_F\|x - y\|_X \quad \forall x, \, y \in X, \ p.p. \ t \in (0,T); \end{cases}$$

il existe $1 \leq p \leq +\infty$ tel que $F(., x) \in L^p(0, T; X)$ $\forall x \in X$.

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ telle que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad p.p. \ t \in (0, T),$$
$$x(0) = x_0.$$

Pour des détails sur ce théorème on peut renvoyer le lecteur par exemple à [**38**] (**p.60**).

A la fin, nous passons en revue les lemmes de Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans ce paragraphe, le lecteur pourra consulter par exemple [**24**] et [**35**]. Notons par ailleurs que dans certains paragraphes de ce mémoire, nous allons utiliser des versions "presque partout" de ces lemmes.

Lemme D.2 *: Soient $m, n \in C([0,T];\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$, $a \geq 0$ une constante, et $\psi \in C([0,T];\mathbb{R})$.*

(1) *Si*

$$\psi(t) \ \leq \ a + \int_0^t m(s)\,ds + \int_0^t n(s)\psi(s)\,ds \quad \forall\, t \in [0,T],$$

alors

$$\psi(t) \ \leq \ (a + \int_0^t m(s)\,ds)\,exp(\int_0^t n(s)\,ds) \quad \forall\, t \in [0,T].$$

(2)*Si*

$$\psi(t) \ \leq \ m(t) + a\int_0^t \psi(s)\,ds \quad \forall\, t \in [0,T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)\,ds \ \leq \ e^{aT}\int_0^t m(s)\,ds.$$

Dans le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient :

Corollaire D.3 *: Soit $n \in C([0,T];\mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\psi \in C([0,T];\mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\psi(t) \ \leq \ a + \int_0^t n(s)\psi(s)\,ds \quad \forall\, t \in [0,T],$$

alors

$$\psi(t) \ \leq \ a\,exp(\int_0^t n(s)\,ds) \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Le **Corollaire D.3** est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par ψ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \ \leq \int_0^t n(s)\psi(s)\,ds \quad \forall\, t \in [0,T],$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ψ.

Lemme D.4 *: Soient $m, n \in C([0,T],\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0$ $\forall\, t \in [0,T]$ et $a \geq 0$. Soit également $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :*

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\,\phi(t)\,dt + \int_0^s n(t)\,\phi^2(t)\,dt \qquad \forall\, s \in [0,T].$$

Alors,

$$|\phi(s)| \leq (a + \int_0^s m(t)\,dt)\,e^{\int_0^s n(t)\,dt} \qquad \forall\, s \in [0,T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$, le Lemme devient :

Corollaire D.5 : *Soit $m \in C([0,T],\mathbb{R})$ tel que $m(t) \geq 0$ $\forall t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Soit également $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\,\phi(t)\,dt \qquad \forall\ s \in [0,T].$$

Alors,

$$|\phi(s)| \leq a + \int_0^s m(t)\,dt \qquad \forall\ s \in [0,T].$$

E Approximation variationnelle

Soit H l'espace défini précédemment, on se donne un sous-espace H_h de H de dimension finie et dépendant d'un paramètre $h > 0$, soit I la dimension de H; en pratique, H_h représente une approximation de l'espace H de dimension infinie et on aura :

$$\lim_{h\to 0} I(h) = +\infty,$$

et soit le problème variationnelle suivant :
Problème P : *Trouver $u \in H$ tel que :*

$$u \in H,\ (Au, v-u)_H\ + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v-u)_H\ \forall\ v \in H,$$

où A et φ sont définis dans (**C.4.1**).

Afin d'obtenir une approximation numérique de la solution u on introduit un problème approché $\mathrm{P^h}$ posé dans un espace de dimension finie. On vérifie, en premier que le problème $\mathrm{P^h}$ *à* une solution unique puis on montre que sa solution converge vers la solution u du problème P.

Alors, au sous-espace H_h de H, on associe le problème approché $\mathrm{P^h}$ suivant :
Problème $\mathrm{P^h}$: Trouver $u^h \in H_h$ tel que :

$$u^h \in H_h,\ (Au^h, v^h - u^h)_H\ + \varphi(v^h) - \varphi(u^h) \geq (f, v^h - u^h)_H\ \forall\ v^h \in H.$$

L'intérêt de la méthode d'approximation variationnelle est de trouver une estimation d'erreur commise lorsqu'on approche u par u^h, c'est à dire démontrer le théorème suivant :

Théorème E.1 : *Il existe une constante C>0 indépendant de H_h tel que*

$$\|u - u^h\| \leq C \inf_{v^h \in H_h} \|u - v^h\|.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. A. Adams, "*Sobolev Spaces*", Academic Press, New York, 1975.

[2] B. Awbi, "*Analyse variationnelle de quelquesproblèmes viscoélastiques et viscoplastiques avec frottement*", Thèse, Université de Perpignan, **2001**.

[3] V.Barbu, " *Non lineair Semigroups and Differential Equations in Banach spaces*", Editura Academiei, Bucharest-Noodhoff, Leyden (**1976**).

[4] H. Brézis, "*Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*", Masson, **1987**.

[5] H. Brézis, "*Équations et inéquations nonlinéaires dans les espaces vectoriels en dualité*", Ann. Inst. Fourier, **18 (1968), 115–175**.

[6] L.Cangémi, "*Frottement et Adhdhérence : modèl, traitement numérique et application à linterface fibre / matrice*", Ph. D. Thesis, Univ.Méditerranée, Aix-Marseille **II (1997).**

[7] O. Chau, J. R. Fernández, M. Shillor, M. Sofonea, "*Variational and Numerical Analysis of a Quasistatic Viscoelastic Contact Problem with Adhesion*", Journal of Computational and Applied Mathematics, **159 (2003), 431-465**.

[8] J. Chen, W. Han, M. Sofonea, "*Numerical analysis of a quasistatic problem of a contact problem in Rate-type Viscoplasticity*" *Num. Func. Anal. opti. 22(2001), 505-527.*

[9] O. Chau, M. Shillor ,M. Sofonea, "*Dynamic frictionless contact with adhesion*", J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), **55, (2004), 32–47**.

[10] P.G. Ciarlet,"*Elasticité Tridimentionnelle*", Masson, Paris **(1986)**

[11] P.G. Ciarlet, "*The finite element method for elliptic problems*", North Holland, Amsterdam, **1978**.

[12] M. Cocu, "*Unilateral contact problems with friction for an elastoviscoplastic material with internal state variable*", Proc. Contact Mechanics Int. Symp. Edt. A.Curnier. PPUR (1992), 207-216.

[13] M. Cocu, "*On A Model Coupling Adhésion and Friction : Thermodynamics Basis and Mathematical Analysis*", Proced. of the fifth. Inter. Seminar. On Geometry, Conntinua and Microstructues, Romania (**2001**), **37-52.**

[14] M. Cocu, R. Rocca, "*Existence results for unilateral quasistaticcontact problems with friction and adhesion*" , Math. Model. Num. Anal **34, (2000), 981-1001**.

[15] S.Drabla, "*Analyse variationnelle de quelques problèmes aux limites en élasticité et viscoplasticité*", thése de doctorat, Université Farhat Abbes-Setif (**1999**).

[16] G. Duvaut, J.L. Lions, "*Les Inéquations en Mécanique et en Physique*", Dunod **1972**.

[17] M. Frémond, "*Equilibre des Structures qui Adhérent à leur support*", C. R. Académie des sciences, Paris 295, Série II **(1982), 913-916.**

[18] M. Frémond, "*Adhérence des solides*", J. Mécanique Théorique et Appliquée **6**, (**1987**), **383-407.**

[19] J.R. Fernández, M. Shillor, M. Sofonea, "*Analysis and numerical simulations*

of a dynamic contact problem with adhesion", Math. Comput. Modelling **37 (2003), 1317–1333**.

[20] R. Glowinski, J.L. Lions, R. Trémolières, "Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles", Tome 1 et 2,Dunod, (**1976**).

[21] W. Han, M. Sofonea, "*Numerical Analysis of a Frictionless Contact Problems for Elastic-Viscoplastic Maerials*" Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. **190** (**2000**), **179-191**.

[22] N.Hemici, B. Awbi, M. Sofonea, "*Viscoelastic problem contact with compliance normal and adhesion*" Annals of University of Bucarest 51 (2002) 131-142.

[23] N.Hemici, M. Sofonea, " *Analysis of dynamic bilateral contact problem with adhesion*" Proceedings of the Fourth International Conference on Applied Mathematics and Engineering Sciences, (**CIMASI 2002**), Casablanca (**2002**), CD-ROM.

[24] I.R. Ionesco, M. Sofonea, " *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*", Oxford University Press, Oxford, (1993).

[25] L.Jianu, M. Shillor and M. Sofonea, "*A Viscoelastic bilateral frictionless contact problem with adhesion*", Applic. Anal. **80 (2001), 233-255.**

[26] D. Kendri, "*Etude Théorique et Numérique de Quelques problèmes de contact*", Mémoire de Magister en Mathématique Appliquées, Univ, Ferhat Abbas, setif, 2001.

[27] Z. Lerguet, " *Analyse Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact en Elasticité et en Viscoplasticité*". Mémoire de Magister en Mathématique Appliquées, Univ, Ferhat Abbas, setif, **2003**.

[28] Z. Lerguet, " *Analyse de Quelques Problèmes de Contact avec Frottement et*

Adhésion", Thèse de Doctorat en Mathématique Appliquées, Univ, Ferhat Abbas, setif, **2008**.

[29] Z. Lerguet, M. Sofonea, S. Drabla, "*Analysis of a frictional contact problem with adhesion*" Accepté dans Acta Mathematica Universitatis Comenianae.

[30] A. Matei, "*Modélisation Mathématique en Mécanique du Contact*", Thèse de doctorat de l'Université de Perpignan (**2002**)

[31] M. Raous, L. Cangémi, M. Cocou, "*A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact*", Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., **177 (1999), 383–399.**

[32] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea," *Quasistatic nonlinear viscoelastic contact with normal compliance and friction*", Journal of Elasticity, **51 (1998), 105-126.**

[33] P. A. Raviard et J. M. Thomas, "*Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Prtielles*", Masson, Paris (**1992**)

[34] M. Sofonea, "*Problèmes Nonlinéaires dans la Théorie de l'Elasticité*" Cours de Magister de Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, Algérie, 1993.

[35] M. Sofonea, "*Problèmes Mathématiques en Élasticité et Viscoplasticité*", Cours de DEA de Mathématiques Appliquées, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 1991.

[36] M. Sofonea, A. Matei, "*A quasistatic frictionless contact problemwith normal compliance*", Ann. Univ. Craiova, Math-Info, XXVII (2000), 43-56.

[37] N. Strömberg, "Continuum Thermodynamics of Contact, friction and wear", Thèse de Ph.D, Linköping University, Sweden, (**1995**).

[38] P. Suquet, "*Plasticité et homogénéisation*", Thèse de Doctorat d'État, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1982.