DEMOCRATIC AND POPULAR REPUBLIC OF ALGERIA
Ministry of Higher Education and Scientific Research
Mohamed Boudiaf university of M'sila
Faculty of Mathematics and Computer Science
Department of Mathematics

MASTER THESIS

Field: Mathematics and Informatices
Stream: Mathematics.
Option: Mathematical and Numerical Analysis

Presented by : *Ms*. LAIZI KHADIDJA

Theme

Operational Matrices of Lucas Polynomials for Solving Linear Fredholm Integral Equations

Publicly supported:10\06\2024.

Board of jury :

Dr. DJAIDJA Noui	**M.C.B,**	**University of M'sila**	***President***
Dr. KHIRANI Amina	**M.C.A,**	**University of M'sila**	***Supervisor***
Dr. SEGHIRI Nabila	**M.A.A,**	**University of M'sila**	***Examiner***

Academic year : 2023/2024.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématiques et numérique

Thème

Matrices Opérationnelles des Polynômes de Lucas pour la Résolution des Equations Intégrales Linéaires de Fredholm

---

Présenté par :
M^elle^. LAIZI KHADIDJA

Soutenu publiquement le : 10/06/2024

Devant le jury composé de :

DJAIDJA Noui	**M.C.B,**	**Université de M'sila**	**Président**
KHIRANI Amina	**M.C.A,**	**Université de M'sila**	**Encadreur**
SEGHIRI Nabila	**M.A.A,**	**Université de M'sila**	**Examinateur**

Année universitaire 2023/2024.

Résume

Dans ce travail, nous avons étudier une méthode de collocation matricielle par les polynômes de Lucas pour résoudre les équations intégrales de Fredholm. Le but de ce travail est de montrer l'efficacité de méthode présentée et leurs avantages. Ensuite, nous avons fait une comparaison entre les résultats de cette méthode et la solution exacte de l'équation. Les résultats de la méthode de collocation matricielle de polynômes de Lucas sont plus proches de la solution exacte

Mots clés:

Équations intégrales de Fredholm, approximatin, méthode de collocation,polynômes de Lucas

Abstract

In this work, we studied the matrix collocation method using Lucas polynomials to solve the Fredholm integral equations. The purpose of this work is to show the effectiveness of the method presented and their advantages. Then, we made a comparison between the results of this method and the exact solution of the equation.The results of lucas matrix collocation method are closer to the exact solution.

Keywords:

Fredholm integral equations, approximation, collocation method, Lucas polynomials.

ملخص

في هذا العمل، قمنا بدراسة طريقة تجميعية مصفوفية باستعمال كثير الحدود لوكاس لحل معادلات فريدهولم التكاملية، الهدف من هذا العمل هو اظهار كفاءة الطريقة المقدمة ومزاياها ثم قمنا باجراء مقارنة بين نتائج هذه الطريقة والحل الدقيق للمعادلة وكانت النتائج طريقة التجميع متعدد الحدود لوكاس قريبة الى الحل الدقيق.

الكلمات المفتاحية: معادلة فريدهلم التكاملية، التقريبية، طريقة التجميع، متعدد الحدود لوكاس.

Remerciements

Au nom du Dieu Clément et Miséricordieux

Avant tout, je remercie le Dieu, notre créateur de m'avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste. je veux remercier particulièrement mon encadreur la docteur (**Amina KHIRANI**) Pour ses précieux conseils et son encadrement tout au long de la réalisation de cette thèse et pour le temps que tu m'as alloué. Je tiens à remercier le jury qui a accepté d'écouter, d'évaluer et d'examiner mon travail. J'adresse également mes remerciements à tous nos professeurs du département de mathématiques de l'université Mohamed Boudiaf de M'sila pour leur générosité et leur grande patience. Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué à la réussite de mon parcours universitaire, notamment ma famille.

Je ne saurais oublier dans mes remerciements tous ceux qui m'ont apporté leur contribution et leur aide de près ou de loi et de ce fait m'ont permis d'achever ce travail.

Dédicace

"Celui qui dit que je suis à elle l'aura"

Louange à **Allah**, par amour, gratitude et remerciement. le voyage n'a pas été court, et il ne devrait pas l'être. Le rêve n'était pas proche et le chemin n'était pas semé d'embûches, mais je l'ai fait, a facilité les débuts et m'a amené à la fin avec sa grâce et sa générosité.

(Louange à Allah, Seigneur des Mondes)

À celui qui a décoré mon nom des plus beaux titres. Celui qui m'a soutenu sans limites et qui m'a donné gratuitement. A celui qui m'a appris que le monde est une lutte et que son arme est la connaissance et le savoir. A celui qui m'a inculqué l'esprit des bonnes mœurs, mon premier supporter dans ma carrière et mon soutien....

"Mon cher père"

À celle qui dieu a fait un paradis sous ses pieds, et dont le cœur m'a embrassé devant sa main et supplications , à la grande personne que j'ai toujours aimée, Le secret de ma force et de ma réussite et le lampe de mon chemin...

"Ma chère mère"

À mon côté ferme et à la sécurité de mes jours. À ceux avec qui j'ai renforcé mon soutien et ils étaient pour moi des sources auxquelles je buvais à la confusion et à la pureté de mes jours....

"Mes chers frères et sœurs"

À tous ceux qui ont été aide et soutien sur ce chemin, à mes compagnons au fil des années et à ceux qui ont vécu l'adversité et les crises, je vous dédie cette réalisation et le fruit de ma réussite, que j'ai toujours souhaité. et aujourd'hui, j'ai achevé les prémices, alors Dieu soit loué.

Merci!!!

LAIZI KHADIDJA

Table des matières

Notations

H	Espace de Hilbert.
A	Opérateur Linéaire.
I	Opérateur d'identité.
a_i	Coefficient du polynômes de Lucas.
λ	Constante.
$\varphi(x)$	La Solution Exacte.
$\varphi_i(x)$	La Solution Approchée.
$[a;b]$	Intervalle Réel.
$K(x;y)$	Noyau de l'intégrale.
$f(x)$	Fonction Donnée.
$L_n(x)$	Polynômes de Lucas.
$EILF$	Equation Integrale Linéaire de Fredholm.

Liste des figures

Liste des tableaux

INTRODUCTION

En mathématique, une équation dans laquelle la fonction inconnue est sous un signe d'intégration, est appelée équation intégrale. Les équations intégrales sont de type Fredholm ou Volterra. Dans ce mémoire, l'accent est mis principalement les équations intégrales de Fredholm du deuxième type.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \quad , a \leq x, t \leq b \tag{I}$$

les équation intégrale de Fredholm qui ont été introduites par le mathématicien Suédois Ivar Fredholm en 1900, Les équations intégrales de Fredholm linéaires constituent un domaine important des mathématiques appliquées, avec des applications dans divers domaines tels que l'analyse numérique, la théorie des équations différentielles et la physique mathématique. Résoudre ces équations peut être un défi mathématique complexe, nécessitant des techniques spécifiques pour obtenir des solutions précises et efficaces. les Scientifiques, les ingénieurs et les mathématiciens se sont vivement intéressés àfaire des recherches sur les équations intégrales, car elles ont un large éventail d'applications. Certaines équations intégrales sont complexe à résoudre à l'aide de méthodes analytiques, c'est pourquoi les chercheurs ont développé des méthodes numériques pour résoudre équations intégrales qui ne peuvent pas être résolues analytiquement. Dans littérature, il existe de nombreuses méthodes pour résoudre équations intégrales de Fredholm, en utilisant diverses méthodes de quadrature, tels que les fonctions hybrides [3], les ondelettes de Haar [8], la méthode sinc-collocation [10], la méthode sinc-Galerkin [11], ces méthodes se sont avérées utiles et efficaces pour trouver des solutions approximatives à l'équation intégrale de Fredholm du deuxième type.

Le but de ce mémoire, est de présenter une méthode numérique pour résoudre les équations intégrales de Fredholm du deuxième type par la méthode de collocation, en utilisant polynômes de Lucas. l'équation intégrale de Fredholm est transformée en équation matricielle fondamentale,qui est ensuite résolue et les valeurs requises de la matrices des coefficients le polynômes de Lucas sont trouvées. Cette méthode présente un avantage par rapport aux autres méthodes, car elle transforme le problème en un système d'équations linéaire. les Matrices plus grandes sont facilement résolues à l'aide de logiciels informatiques tels que MATLAB, MAPLE SOFT et MATEMATICA .

Ce mémoire est divisé en 3 chapitres comme suit:

Chapitre 01: Dans ce chapitre**,** un rappel sur l'analyse fonctionnelle, les espaces de fonctions et les généralités sur les équations intégrales ainsi que la classification d'équations intégrales notamment: équations intégrales de Volterra, équations intégrales de Fredholm, équations intégrales de Volterra-Fredholm.

et donner la théorie de l'existence et de l'unicité de la solution l'équation intégrale de Fredholm .

Chapitre 02: Dans ce chapitre, nous fournissons quelques définitions liés aux polynômes de Lucas et la méthode de collocation, puis on résoud l'équation intégrale linéaire de Fredholm par la méthode de collocation en utilisaant polynômes de Lucas avec des applications pour éclaircir la technique

Chapitre 03: Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques exemples numériques, notamment avec la méthode dont nous avons parlé dans le deuxième chapitre, que nous avons résolue à l'aide du programme Matlab et obtenu les résultats présentés dans ce chapitre .

Chapitre 1

Rappel et Généralisation

L'objectif de ce chapitre est de définir quelques notions fondamentales et rappeler des propriétés qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire.

1.1 Rappel sur les espaces fonctionnels

1.1.1 Définition des Normes

Définition 1.1.1 *: Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que :*

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}$ *(homogénéité).*

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$ (*inégalité triangulaire*).

1.1.2 Espaces Normés

Définition 1.1.2 *: Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|.\|$.*

1.1.3 Espaces de Banach

Définition 1.1.3 *: On appelle espace de Banach* $(E; \|.\|)$ *tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.*

1.1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.1.4 *:On appelle espace de Hilbert tout espace euclidien* H *complet au sens de la métrique associée à sa norme*

$$\rho(f, g) = \|f - g\| .$$

Remarque 1.1.1 *: Généralement l'espace* H *est séparable est de dimension infinie, en d'autres termes, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans* H *et pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* n *vecteurs dans* H *linéairement indépendants.*

1.2 Rappel sur les opérateurs

1.2.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.2.1 *:Soient* E *et* F *deux espaces normés, On appelle opérateur* A *une application défini sur* E *dans* F

$$A : E \longrightarrow F$$

il est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :

- *Condition additive*

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2) \tag{1}$$

- *Condition homogéne*

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \Bbbk = (\mathbb{R}\text{ou}\mathbb{C}), \text{on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi) \tag{2}$$

1.2.2 Opérateurs continus

Définition 1.2.2 *:Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble$G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si on a, la propriété suivante: Pour toute suite x_n de G converge vers x_0; la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$; c'est à dire:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n) = A(x_0)$$

Remarque 1.2.1 *:*

L'opérateur linéaire A est dit continu sur G, s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

1.2.3 Opérateurs compacts

Définition 1.2.3 *:*

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F. Autrement dit, la ferméture $\overline{A(G)}$ est compacte.

Ensembles relativement compacts :

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite un de G, il existe une sous suite $\left\{u_{n(k)}\right\}$ qui converge dans F.

Théorème 1.2.1 *:(critére de compacité)*

Un opérateur linéaire $A : E \longrightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E, la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente dans F.

Démonstration. **:** Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact . ■

1.2.4 Opérateurs intégraux

Définition 1.2.4 *: On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire A défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F donné sous la forme :*

$$A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x,y)\varphi(y)dy, \quad x \epsilon G_1 \tag{1}$$

où $k(x, y)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$ et $\varphi(y)$ est une fonction mesurable définie sur G_2 .

Noyau d'un opérateur :

La fonction mesurable $k(x, y)$ est dite noyau de l'opérateur intégral A .

Remarque 1.2.2 *:*

Un noyau K est dit séparable ou dégénéré s'il peut s'écrire sous la forme:

$$k(x,t) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) b_i(t)$$

avec les fonctions (a_i) indépendantes .

1.3 Intoduction aux Equations Intégrales linéaires

Une équation dans la quelle la fonction inconnue d'une ou plusieurs variables figure sous le signe intégral est dite équation intégrale.Cette définition générale tient compte de beaucoup de formes naturellementissues de la modélisation des différents problémes de la mécanique et de la physique mathématique ou par remaniement d'une importante classe de problémes formulés auparavant par des opérateurs différentiels.

Définition 1.3.1 *:*

On appelle équation intégrale linéaire, une équation fonctionnelle de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (*)$$

oú $h(x)$, $f(x)$, $k(x, t)$ sont des fonctions données, la fonction $\varphi(x)$ qui figure à l'intérieur et à léxtèrieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer; $\boldsymbol{\lambda}$ *est un paramétre réel ou complexe différent de zéro. La fonction $k(x, t)$ est appelée noyau de l'équation intégral. Ou sous forme d'opérateur :*

$$(I - \lambda A)\varphi(x) = f(x)$$

oú I est l'application identité .

1.4 Classification des équations intégrales

Les équations intégrales apparaissent sous forme de nombreux types. Les types dépendent principalement des bornes de l'intégration et le noyau de l'équation. Dans ce texte nous nous s'intéressons aux équations intégrales du type suivant :

1.4.1 Équations Intégrales de Volterra

Définition 1.4.1 *:*

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra une équation de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{I}$$

oú $h(x)$ est une fonction inconnue et $K(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et un paramétre réel .

1) *si $h(x) = 0$ l'équation s'écrit :*

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1}$$

est appelée équation intégrale de Volterra de premiére espéce.

Exemple 1.4.1 *:*

$$x^2 - x + \int_0^x x\cos(t)\varphi(t)dt = 0$$

2) *si $h(x) = 1$ l'équation s'écrit :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espéce .

Exemple 1.4.2 *:*

$$\varphi(x) = x - 3 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt$$

3) *Si $h(x) \neq 1 \neq 0$;donc l'équation intégrale linéaire de Volterra est appelée équation intégrale deVolterra de troisiéme espéce .*

Remarque 1.4.1 *:*

1) *si* $f(x) \neq 0$ *est dite équation intégrale de Volterra linéaire de seconde espéce non homogéne .*

2) *si* $f(x) = 0$*est dite équation intégrale de Volterra linéaire de seconde espéce homogéne, s'écrit :*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

1.4.2 Équations Intégrales de Fredholm

Définition 1.4.2 *:*

une équation intégrale dont les bornes d'intégration sont fixées c-à-d $\Omega = [a; b]$ *est dite équation inégrale linéair de Fredholm, donc est de la forme :*

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

oú $f(x)$ *une fonction donné ,*$k(x,t)$ *appelée noyan de l'équation intégrale .*

1) *si* $h(x) = 0$ *l'équation s'écrit*

$$\varphi(x) : f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = 0$$

est appelée équation intégrale de Fredholm de premiére espéce .

Exemple 1.4.3 *: est une équation intégrale linéaire de Fredholm de premiére espéce.*

$$2x^2 - x + 4 + \int_0^1 (x-t)\varphi(t)dt = 0$$

2) *si* $h(x) = 1$ *l'équation s'écrit* :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espéce .

Exemple 1.4.4 *: est une équation intégrale linéaire de Fredholm de second espéce*

$$\varphi(x) = x + 4 - \int_0^1 (x-t)\varphi(t)dt \tag{2.1}$$

3) *Si* $h(x) \neq 1 \neq 0$;*donc l'équation intégrale linéaire de Fredholm est appelée équation intégrale de Fredholm de troisiéme espéce .*

Remarque 1.4.2 *:*

1) *si* $f(x) \neq 0$ *est dite équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espéce non homogéne .*

2) *si* $f(x) = 0$*est dite équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espéce homogéne, s'écrit :*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

1.4.3 Équations Intégrales de Volterra-Fredholm

Définition 1.4.3 *:*

Les équations intégrales de Volterra-Fredholm apparaissent dans la littérature sous eux formes,á savoir

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt \tag{1}$$

et

$$\varphi(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^t \int_\Omega^F F(x,t,\mu,\tau,\varphi(\mu,\tau))d\mu d\tau \tag{2}$$

oú $f(x,t)$ *et* $F(x,t,\mu,\tau,\varphi(\mu,\tau))$ *sont des fonctions analytiques sur* $D = \Omega \times [0,T]$*; et est un sous ensemble fermé de* $R^n; n = 1,2,3$ *.*

Exemple 1.4.5 *:Soient les équations intégrales:*

$$\varphi(x) = 6x^2 + 3x + 2 - \int_0^x x\varphi(t)dt - \int_0^1 t\varphi(t)dt$$

et

$$\varphi(x,t) = x + t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \int_0^t \int_0^1 (\tau - \mu)d\mu d\tau \tag{2.1}$$

1.5 Théorèmes d'existence et d'unicité

Théorème 1.5.1 *: (Unique Solution), [12].*

Si le noyau $k(x,t)$ de l'équation intégrale de Fredholm est une fonction à valeurs réelles bornée et continue sur $[a,b]\times[a,b]$, et si $f(x)$ est une fonction continue à valeur réelle, alors la condition nécessaire d'existence et d'unicité d'une solution pour 'équation est donner par :

$$|\lambda|\, M(b-a) < 1 \tag{1}$$

où

$$|k(x,t)| \leqslant M \;\in\; \mathbb{R} \tag{2}$$

Au contraire, si la condition (1) *n'est pas vérifiée, alors une solution continue I peut exister pour l'équation intégrale de Fredholm. pour illustrer cela, considérons l'équation intégrale de Fredholm:*

$$\varphi(x) = -2 - 3x + \int_0^1 (3x+t)\varphi(t)dt. \tag{3}$$

il est clair que $x = 1, |k(x,t)| \leq 4$ et $(b-a) = 1.$cela donne:

$$|\lambda|\, M(b-a) = 4 \nless 1 \tag{4}$$

cependant, l'équation de Fredholm(3) *a une solution exacte donnée par:*

$$\varphi(x) = 6x.$$

Théorie de Riesz-Fredholm

Théorème 1.5.2 *:*

Soit E un espace de Banach et soit $T\epsilon\ K(E)$. Alors :

a) $N(I-T)$ *est de dimension finie.*

b) $R(I-T)$ *est fermée.*

c) $R(I-T) = N(I-T^{*})^{\perp}$.

d) $N(I-T) = 0 \Leftrightarrow R(I-T) = E$**.**

e) $dimN(I-T) = dimN(I-T^*)$.

Ce théorème concerne la résolution de l'équation de seconde espèce $u - Tu = f$ *où* T *est un opérateur compact dans un espace de Banach, il exprime que :*

a) *l'équation homogène* $u - Tu = 0$ *admet au plus un nombre fini de solutions linéairement indépendantes* $u \neq 0$.

b) *si* $u_n - Tu_n = f_n$ *et* $f_n \to f$ *dans* E, *alors il existe un* $u \in E$ *tel que* $u - Tu = f$ *(attention! cela ne signifie pas que* $u_n \to u$ *dans* E*).*

c) *l'équation* $u - Tu = f$ *admet une solution si et seulement si* $f \in N(I-T^*)^{\perp}$.

d) $u = 0$ *est la solution unique de l'équation homogène* $u - Tu = 0$ *si et seulement si l'équation non homogène* $u - Tu = f$ *admet une solution* $u \in E$ *pour tout* $f \in E$.

e) *les équations* $u - Tu = 0$ *et* $v - T^*v = 0$ *ont le même nombre de solutions linéairement indépendantes non nulles.*

En particulier, les énoncés ***c)*** *et* ***d)*** *sont des résultats classiques bien connus .*

Chapitre 2

Résolution numérique des équations intégrales de Fredholm par la méthode de Lucas collocation

2.1 Définition de Polynômes de Lucas

Les polynômes de Lucas est une séquence de nombres entiers qui suit une relation récurrente particulière. Il est nommé d'après le mathématicien français Édouard Lucas, qui a étudié cette séquence dans les années 1870.

Définition 2.1.1 *:*

La suite des polynômes de Lucas $(L_n(x))_{n\epsilon N}$ *sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} L_0(x) = 2 \ , L_1(x) = x \\ L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x) \ ; n \geq 2 \end{cases}$$

ou par Leur forme explicite pour $n \geq 1$ *est:*

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{n-k}{k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} \qquad (2)$$

$$\text{avec } L_0(x) = 2. \qquad (2.1.1)$$

En utilisant l'équation(1)*ou l'équation* (2), *les premiers termes des polynômes de Lucas sont donnés par* :

$$L_0(x) = 2.$$
$$L_1(x) = x.$$
$$L_2(x) = x^2 + 2.$$
$$L_3(x) = x^3 + 3x.$$
$$L_4(x) = x^4 + 4x^2 + 2.$$
$$L_5(x) = x^5 + 5x^3 + 5x.$$
$$L_6(x) = x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2.$$

2.2 Propriétés des polynômes de Lucas

La fonction génératrice des polynômes de Lucas est :

$$L(z) = \frac{2 - xz}{1 - xz - z^2} \tag{1}$$

Démonstration. :

posons

$$L(z) = \sum_{n\geq 0} L_n(x) z^n$$

alors la fonction génératrice associée à $L_n(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
L(z) &= 2 + xz + \sum_{n\geq 2}(xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x))z^n \\
&= 2 + xz + \sum_{n\geq 2} xL_{n-1}(x)z^n + \sum_{n\geq 2} L_{n-2}(x)z^n \\
&= 2 + xz + xz\sum_{n\geq 2} L_{n-1}(x)z^{n-1} + z^2\sum_{n\geq 2} L_{n-2}(x)z^{n-2} \\
&= 2 + xz + xz\sum_{n\geq 1} L_n(x)z^n + z^2\sum_{n\geq 0} L_n(x)z^n \\
&= 2 + xz + xz\sum_{n\geq 0} L_n(x)z^n - 2xz + z^2\sum_{n\geq 0} L_n(x)z^n \\
&= 2 - xz + xzL(z) + z^2L(z)
\end{aligned}$$

D'où

$$L(z) = \frac{2 - xz}{1 - xz - z^2}$$

■

2.3 Approximation d'une fonction par les polynôme de Lucas

Exemple 2.3.1 *:*

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \cos(x)$$

an veut l'approximer par les trois premiers polynômes de Lucas, on a:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{2} \alpha_i L_i(x) \\ f(x) &= \alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x) \\ cos(x) &= \alpha_0(2) + \alpha_1(x) + \alpha_2(x^2+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\textit{pour } x = 0 &&\Longrightarrow 2\alpha_0 + 2\alpha_2 = 1 \\ &\textit{pour } x = 0.1 &&\Longrightarrow 2\alpha_0 + 0.1\alpha_1 + 2.01\alpha_2 = \cos(0.1) \\ &\textit{pour } x = 0.2 &&\Longrightarrow 2\alpha_0 + 0.2\alpha_1 + 2.04\alpha_2 = \cos(0.2) \end{aligned}$$

on obtient le system matriciel suivante:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0.1 & 2.01 \\ 2 & 0.2 & 2.04 \end{pmatrix} ; \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} ; F = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(0.1) \\ \cos(0.2) \end{pmatrix}$$

$$L * \alpha = F \Longrightarrow \alpha = L^{-1} * F$$

Alors: $\alpha = [0.9971; -0.0002; -0.4971]^T$

$\cos(x) = 0.9971(2) + (-0.0002)(x) + (-0.4971)(x^2+2)$

D'où: $\cos(x) = 1 - 0.0002x - 0.4971x^2$

2.4 Description de la méthode

2.4.1 Méthode de Collocation

Définition 2.4.1 *:*

Nous considérons le problème linéaire :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1}$$

et nous supposons que l'intégrale de l'opérateur k où

$$(k\varphi)(x) = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

est compacte sur un espace de Banach X en lui-même la résoudre approximativement pour ce dennier probléme ,nous choisissons une séquence de sous-espaces de dimension finie $X_N \subset X$ avec

$$X_N = span\{L_0, L_1, \cdots, L_N\} \dim X_N = N+1$$

nous développons la solution approchée $\varphi_N(x) \simeq \varphi(x)$ comme suit:

$$\varphi_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i L_i(x) \in X_N$$

la méthode de collocation force le résidu à disparaitre judicieusement en un enemble de points noeuds distincts l'intervalle $I = [a,b]$, la méthode de collocation pour l'équation(1) revient à trouver $\varphi_N \; \epsilon \in X_N$ tel que le résidu

$$R_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i L_i(x) - \lambda \int_a^b k(x,t) \sum_{i=0}^{N} \alpha_i L_i(t)dt - f(x), \; x \in I \tag{2}$$

$$R_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i L_i(x) - \lambda \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \int_a^b k(x,t)L_i(t)dt - f(x), \; x \in I \tag{2.4.1}$$

$$R_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \left\{ L_i(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)L_i(t)dt \right\} - f(x), \quad x \in I \tag{2.4.2}$$

2.4.2 Relations matricielles importantes

Soit l'équation intégrale de Fredholm suivante:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1}$$

Dans travail, nous supposons la solution approchée du problème (1) sous la forme d'une série de polynômes de Lucas tronqués:

$$\varphi(x) \simeq \varphi_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i L_i(x), \qquad a \leq x \leq b \tag{2}$$

Où, $i = 0, 1, 2.....N$

L_i est le polynômes de Lucas et α_i est coefficient du polynômes de Lucas. le polynômes de Lucas sont définis par leur forme explicite pour $i \geq 1$ est :

$$L_i(x) = \sum_{k=0}^{\frac{i}{2}} \frac{i-k}{k} \binom{i-k}{k} x^{i-2k} \tag{3}$$

A partir de la solution approchée $\varphi(x)$ de (1) qui est donnée par une série de polynômes de Lucas tronquée (2) pour $\{i = 0, 1, 2, ..., N\}$ nous convertissons la série finie (2) sous la forme matricielle comme :

$$\varphi(x) \simeq \varphi_i(x) = [L_0(x) \quad L_1(x) \quad L_2(x)...L_i(x)].A = L(x)A \tag{4}$$

Où, $A = [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2... \ \alpha_N]^T$. En utilisant la définition des polynômes de Lucas, on obtient la matrice $L(x)$ comme :

$$L(x) = X(x)Q \tag{5}$$

la relation matricielle(5) est alors substituée à la relation matricielle(4) pour obtenir :

$$\varphi(x) \simeq \varphi_N(x) = \ X(x)QA \tag{6}$$

on obtient la mtrice Q dans (6) à partir de Q^T qui est défini comme :

si N est impair:

$$Q^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1}\binom{1}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{2}{1}\binom{1}{1} & 0 & \frac{2}{2}\binom{2}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\binom{2}{1} & 0 & \frac{3}{3}\binom{3}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{\frac{N}{N+1}}{2}\binom{\frac{N+1}{2}}{\frac{N-1}{2}} & 0 & \frac{\frac{N}{N+3}}{2}\binom{\frac{N+3}{2}}{\frac{N-3}{2}} & \cdots & \frac{N}{N}\binom{N}{0} \end{pmatrix}$$

si N est pair:

$$Q^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1}\binom{1}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{2}{1}\binom{1}{1} & 0 & \frac{2}{2}\binom{2}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\binom{2}{1} & 0 & \frac{3}{3}\binom{3}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\frac{N}{N}}{2}\binom{\frac{N}{2}}{\frac{N}{2}} & 0 & \frac{\frac{N}{N+2}}{2}\binom{\frac{N+1}{2}}{\frac{N-2}{2}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Nous introduisons la relation matricielle d'une fonction noyau comme :

$$k(x,t) = X(x)KX^T(t) \tag{7}$$

Où :

$$K = [k_{ij}]; k_{pq} = \frac{1}{p!q!}\frac{\partial^{i+j}k(0.0)}{\partial x^i \partial t^j}; \qquad i,j = 0,1,2.....N$$

En utilisont (6) la relation matricielle pour$\varphi(t)$ est obtenue comme:

$$\varphi(t) = X(t)QA \tag{8}$$

En remplaçant les relations matricielles (6), (7) et(8) dans l'équation (1) :

$$\begin{aligned} X(x)QA &= f(x) + \lambda \int_a^b X(x)KX^T(t)X(t)QAdt \\ X(x)QA &= f(x) + \lambda X(x)K \underbrace{\int_a^b \boldsymbol{X^T(t)X(t)dt}}_{M} QA \end{aligned}$$

$$X(x)QA = f(x) + \lambda X(x)KMQA \tag{9}$$

la matrice M est obtenue à partir du calcul de l'intégrale ci-dessous

$$\begin{aligned} M &= \int_a^b X^T(t)X(t)dt \\ &= \int_a^b \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & x^N \end{bmatrix} dt \\ &= \int_a^b \left[t^{i+j}\right] dt; \qquad i,j = 0,1,2,....,N \end{aligned}$$

d'où

$$M = \left[\frac{t^{i+j+1}}{i+j+1}\right]_a^b = \left[\frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}\right]; i,j = 0,1....N$$

Pour obtenir la solution polynomiale de Lucas de l'équation (1) sous la forme équation (2), nous calculons d'abord les coefficients de Lucas au moyen de points de collocation définis par :

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0.1,....,N$$

les étapes suivantes sont suivies pour obtenir le système d'équations matricielles:

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \lambda \int_a^b k(x_i,t_i)\varphi(t_i), \quad i = 0.1,....,N$$

en substituant les relations matriciells dans l'équation(9):

$$X(x_i)QA = f(x_i) + \lambda X(x_i)KMQA \quad ,i = 0.1,....,N$$

$$F = XQA - \lambda XKMQA \tag{10}$$

Où :

$$X = X(x_i) = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix}; F = f(x_i) = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_1) \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} \quad ,i = 0.1,....,N$$

En outre, l'équation matricielle fondamentale (10) peut être exprimée sous la forme:

$$WA = F \Leftrightarrow [W; F] \tag{11}$$

Où :

$$W = (X - \lambda XKM)Q \tag{12}$$

ou sous forme de matrice augmentée présentée ci-dessous :

$$[W; F] = \begin{bmatrix} W_{00} & W_{01} & \cdots & W_{0N} & ; & f_0 \\ W_{10} & W_{11} & \cdots & W_{1N} & ; & f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ W_{N0} & W_{N1} & \cdots & W_{NN} & ; & f_N \end{bmatrix}$$

la relation matricielle(11) a une solution unique si et seulement si son déterminant n'est pas égal à zéro, donc:

$$|W| \neq 0 \Rightarrow A = W^{-1}F \tag{13}$$

A est la matrice de coefficients du polynômes de Lucas à déterminer, donc la solution approchée (2) maintenant obtenue.

2.4.3 Exemples Illustratifs

Exemple 2.4.1 *:*

Considérons l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$\varphi(x) = x + \int_0^1 (xt - x^2)\varphi(t)dt; \;\; 0 \leq x, t \leq 1 \tag{I}$$

la solution exacte de l'équation (I) est :

$$\varphi(x) = \frac{96}{73}x - \frac{36}{73}x^2$$

D'après l'équation (I), on obtient $f(x) = x$ *et* $k(x,t) = xt - x^2$.

qui sont des fonctions continues dans l'intervalle $[0, 1]$ *, pour trouver la solution numérique de ce problème, la méthode des séries de polynômes de Lucas est utilisée pour* $N = 2$, *la solution approximative est donnée par :*

$$\varphi(x) = \varphi_2(x) = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i L_i(x)$$

L'équation matricielle fondamentale pour ce problème s'écrit :

$$\{X - \lambda XKM\}\, QA = F,\ \ si\ W = \{X - \lambda XKM\}\, Q, alors\ WA = F$$

et les points de collocation sont calculés comme :

$$\left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1\right\}$$

Où :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} ;X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;F = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} ;A = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} ;\lambda = 1.$$

Après avoir effectué les opérations nécessaires sur l'équation matricielle fondamentale, la matrice augmentée suivante est obtenue:

$$[W, F] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & ; & 0 \\ 2 & \frac{11}{24} & \frac{53}{24} & ; & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{7}{6} & \frac{49}{12} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

la solution du système de trois inconnues dans la matrice ci-dessus est :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{36}{73.} & \frac{96}{73} & \frac{-36}{73} \end{bmatrix}^T$$

Par conséquent, la solution numérique de l'équation (I) est obtenu comme suit:

$$\varphi_2(x) = \frac{36}{73}(2) + \frac{96}{73}(x) + (-)\frac{36}{73}(x^2 + 2) = \frac{96}{73}x - \frac{36}{73}x^2$$

C'est exactement la solution exacte .

Exemple 2.4.2 *:*

considérons l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$\varphi(x) = e^x - x + \int_0^1 xt\varphi(t)dt;\ \ 0 \leq x, t \leq 1 \qquad \text{(II)}$$

la solution exacte de l'équation (II) est :

$$\varphi(x) = e^x$$

D'après l'équation (II), on obtient $f(x) = e^x - x$ *et* $k(x,t) = xt$.

qui sont des fonctions continues dans l'intervalle $[0,1]$, *pour trouver la solution numérique à ce problème, la méthode des séries de polynômes de Lucas est utilisée pour* $N = 2$**,** *la solution approximative est donnée*

par :

$$\varphi(x) = \varphi_2(x) = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i L_i(x)$$

Où :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} ;X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;F = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\ e^1 - 1 \end{bmatrix} ;A = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} ;\lambda = 1.$$

Après avoir effectué les opérations nécessaires sur l'équation matricielle fondamentale, la matrice augmentée suivante est obtenue:

$$[W,F] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & ; & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & \frac{13}{8} & ; & e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{4} & ; & e^1 - 1 \end{bmatrix}$$

la solution du système de trois inconnues dans la matrice ci-dessus est :

$$A = \begin{bmatrix} -0.3417 & 0.8805 & 0.8417 \end{bmatrix}^T$$

Par conséquent, la solution numérique de l'équation (II) est obtenu comme suit:

$$\varphi_2(x) = -0.3417(2) + 0.8805(x) + 0.8417(x^2+2) \cong 1 + 0.8805x + 0.8417x^2$$

qui represente le devlopment de taylor de la solution exacte $\varphi(x) = e^x$ *Pour* $N = 2$.

Chapitre 3

Résultats Numériques

3.0.4 Exemple 01:

Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm:

$$\varphi(x) = e^{x+2} - 2\int_0^1 e^{x+t}\varphi(t)dt \tag{1}$$

la solution exacte soit donnée par:

$$\varphi(x) = e^x$$

on obtient,$f(x) = e^{x+2}$,et $k(x,t) = e^{x+t}$. la solution approximative $\varphi_n(x)$ de $\varphi(x)$ est obtenue par la méthode collocation de polynômes Lucas

Tableau 1: Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple (1) dans certains points arbitraires, l'erreur pour chaque valeur N est calculée

Tableau 1: Résultat Numérique de l'Exemple 01

x	Sol.Ex	Sol.App $N = 3$	Sol.App $N = 7$	Sol.App $N = 11$	Sol.App $N = 15$
0.0	$1.0000e + 00$	$9.6654e - 01$	$9.9984e - 01$	$9.9998e - 01$	$1.0000e + 00$
0.1	$1.1052e + 00$	$1.0979e + 00$	$1.1071e + 00$	$1.1054e + 00$	$1.1052e + 00$
0.2	$1.2214e + 00$	$1.2184e + 00$	$1.2235e + 00$	$1.2216e + 00$	$1.2214e + 00$
0.3	$1.3499e + 00$	$1.3377e + 00$	$1.3512e + 00$	$1.3500e + 00$	$1.3499e + 00$
0.4	$1.4918e + 00$	$1.4658e + 00$	$1.4923e + 00$	$1.4919e + 00$	$1.4918e + 00$
0.5	$1.6487e + 00$	$1.6121e + 00$	$1.6485e + 00$	$1.6487e + 00$	$1.6487e + 00$
0.6	$1.8221e + 00$	$1.7865e + 00$	$1.8214e + 00$	$1.8221e + 00$	$1.8221e + 00$
0.7	$2.0138e + 00$	$1.9986e + 00$	$2.0129e + 00$	$2.0137e + 00$	$2.0137e + 00$
0.8	$2.2255e + 00$	$2.2583e + 00$	$2.2248e + 00$	$2.2255e + 00$	$2.2255e + 00$
0.9	$2.4596e + 00$	$2.5751e + 00$	$2.4591e + 00$	$2.4596e + 00$	$2.4596e + 00$
1.0	$2.7183e + 00$	$2.9588e + 00$	$2.7180e + 00$	$2.7182e + 00$	$2.7183e + 00$

Tableau 2: La comparaison des erreurs absolues correspondant à l'exemple 01

x	Erreur $N = 3$	Erreur $N = 7$	Erreur $N = 11$	Erreur $N = 15$
0.0	$3.3460e - 02$	$1.5651e - 04$	$1.7395e - 05$	$2.1647e - 06$
0.1	$7.3179e - 03$	$1.9661e - 03$	$2.0832e - 04$	$2.5804e - 05$
0.2	$3.0525e - 03$	$2.0838e - 03$	$1.9962e - 04$	$2.3060e - 05$
0.3	$1.2112e - 02$	$1.3560e - 03$	$1.1510e - 04$	$1.2208e - 05$
0.4	$2.6065e - 02$	$4.6139e - 04$	$2.9878e - 05$	$2.4783e - 06$
0.5	$3.6619e - 02$	$2.5739e - 04$	$2.8680e - 05$	$3.5802e - 06$
0.6	$3.5627e - 02$	$6.7869e - 04$	$5.7820e - 05$	$6.3011e - 06$
0.7	$1.5109e - 02$	$8.1218e - 04$	$6.5176e - 05$	$6.9016e - 06$
0.8	$3.2732e - 02$	$7.3091e - 04$	$6.0750e - 05$	$6.5590e - 06$
0.9	$1.1549e - 01$	$5.2130e - 04$	$5.2967e - 05$	$6.0856e - 06$
1.0	$2.4054e - 01$	$2.4744e - 04$	$4.7271e - 05$	$5.9028e - 06$

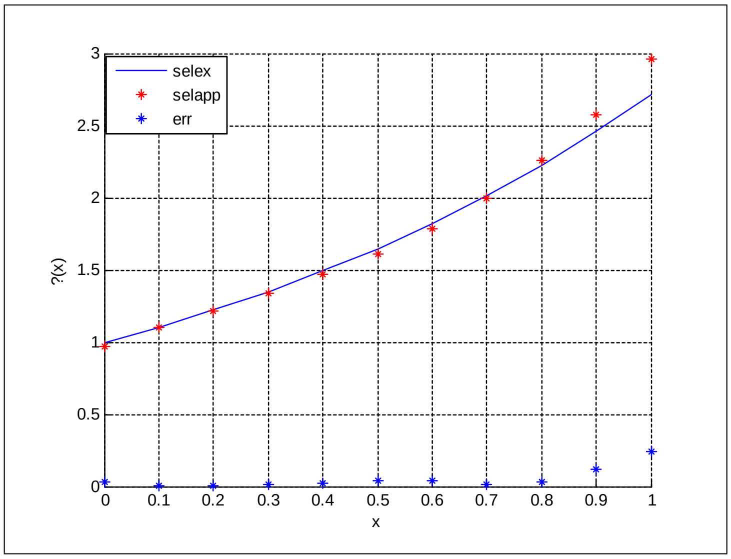

Figure 1.1: Solutions Exacte, Approximative et Erreur Absolue ($N = 3$)pour l'Exemple(1)

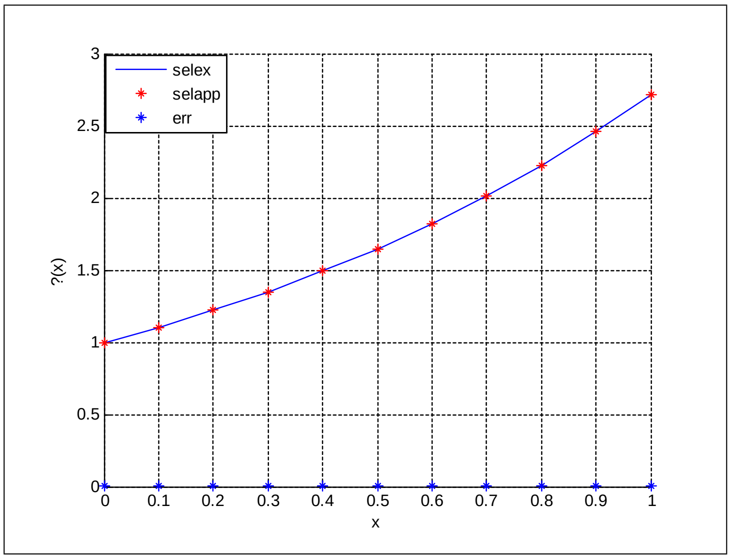

Figure 1.2: Solutions Exacte, Approximative et Erreur Absolue ($N = 15$)pour l'Exemple(1)

3.0.5 Exemble 02:

considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm :

$$\varphi(x) = \sin(x) + \int_0^{\pi} \cos(x) + \cos(t)\varphi(t)dt, 0 \leq x \leq \pi \tag{2}$$

la solution exacte est donnée par :

$$\varphi(x) = \sin(x) + \frac{4}{2-\pi^2}\cos(x) + \frac{2\pi}{2-\pi^2}$$

les résultats numériques pour differentes valeurs de N pour l'équation (2) de l'exemple (2) obtenus par cette méthode, sur certains points arbitraires sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Tableau 3: Résultat Numérique de l'exemple 02

x	Sol.Ex	Sol.App $N=5$	Sol.App $N=9$	Sol.App $N=11$	Sol.App $N=15$
0	$-1.3067e+00$	$-1.2627e+00$	$-1.3073e+00$	$-1.3067e+00$	$-1.3067e+00$
$\frac{\pi}{10}$	$-9.7280e-01$	$-9.2737e-01$	$-9.7337e-01$	$-9.7277e-01$	$-9.7280e-01$
$\frac{\pi}{5}$	$-6.2184e-01$	$-5.7133e-01$	$-6.2221e-01$	$-6.2182e-01$	$-6.2184e-01$
$\frac{3\pi}{10}$	$-2.8816e-01$	$-2.3064e-01$	$-2.8824e-01$	$-2.8816e-01$	$-2.8816e-01$
$\frac{2\pi}{5}$	$-4.4240e-03$	$6.0116e-02$	$-4.1345e-03$	$-4.4456e-03$	$-4.4240e-03$
$\frac{\pi}{2}$	$2.0159e-01$	$2.6881e-01$	$2.0228e-01$	$2.0154e-01$	$2.0159e-01$
$\frac{3\pi}{5}$	$3.0971e-01$	$3.6660e-01$	$3.1075e-01$	$3.0964e-01$	$3.0971e-01$
$\frac{7\pi}{10}$	$3.0937e-01$	$3.2892e-01$	$3.1049e-01$	$3.0929e-01$	$3.0937e-01$
$\frac{4\pi}{5}$	$2.0058e-01$	$1.3635e-01$	$2.0101e-01$	$2.0054e-01$	$2.0058e-01$
$\frac{9\pi}{10}$	$-5.9873e-03$	$-2.2446e-01$	$-8.3426e-03$	$-5.8450e-03$	$-5.9871e-03$
π	$-2.9013e-01$	$-7.5987e-01$	$-3.0032e-01$	$-2.8932e-01$	$-2.9013e-01$

Tableau 4: Comparaison des Erreurs Absolues Aorrespondant à l'Exemple 02

x	Erreur $N=5$	Erreur $N=9$	Erreur $N=11$	Erreur $N=15$
0	$4.3974e-02$	$6.2622e-04$	$3.3743e-05$	$4.9809e-08$
$\frac{\pi}{10}$	$4.5431e-02$	$5.6633e-04$	$3.0387e-05$	$2.8136e-08$
$\frac{\pi}{5}$	$5.0511e-02$	$3.7135e-04$	$1.8284e-05$	$2.7783e-08$
$\frac{3\pi}{10}$	$5.7513e-02$	$7.8721e-05$	$6.2542e-07$	$3.6598e-09$
$\frac{2\pi}{5}$	$6.4540e-02$	$2.8944e-04$	$2.1691e-05$	$4.1133e-08$
$\frac{\pi}{2}$	$6.7217e-02$	$6.8900e-04$	$4.6316e-05$	$8.1112e-08$
$\frac{3\pi}{5}$	$5.6888e-02$	$1.0345e-03$	$6.9269e-05$	$1.2144e-07$
$\frac{7\pi}{10}$	$1.9556e-02$	$1.1235e-03$	$8.0513e-05$	$1.5260e-07$
$\frac{4\pi}{5}$	$6.4233e-02$	$4.2880e-04$	$4.6392e-05$	$1.3069e-07$
$\frac{9\pi}{10}$	$2.1847e-01$	$2.3553e-03$	$1.4228e-04$	$1.8043e-07$
π	$4.6974e-01$	$1.0190e-02$	$8.0273e-04$	$1.8877e-06$

Tableau 5: Comparaison des Résultats pour valeur **N** dans l'Exemple 02

Dans l'Exemple (2) les résultats obtenus par la méthode presentée est plus proche de la solution exacte que les resultat obtenus par la méthode quadrature de simpson modifiée [1]
.

x	Erreur $N = 13$	Erreur $N = 16$ [1]
0	$1.2607e-06$	$1.500861e-03$
$\frac{\pi}{8}$	$9.9798e-07$	$1.532374e-03$
$\frac{\pi}{4}$	$2.1818e-07$	$1.622115e-03$
$\frac{3\pi}{8}$	$9.3261e-07$	$1.756422e-03$
$\frac{\pi}{2}$	$2.2896e-06$	$1.914847e-03$
$\frac{5\pi}{8\pi}$	$3.5800e-06$	$2.073273e-03$
$\frac{3\pi}{4}$	$3.8794e-06$	$2.207580e-03$
$\frac{7\pi}{8}$	$2.3744e-06$	$2.297321e-03$
π	$4.5223e-05$	$2.328833e-03$

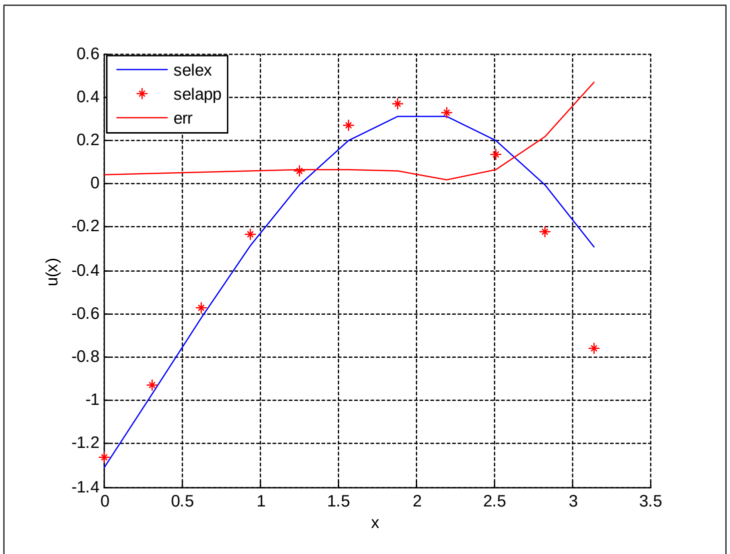

Figure 2.1: Solutions Exacte, Approximative et Erreur Absolue ($N = 5$)pour l'Exemple(2)

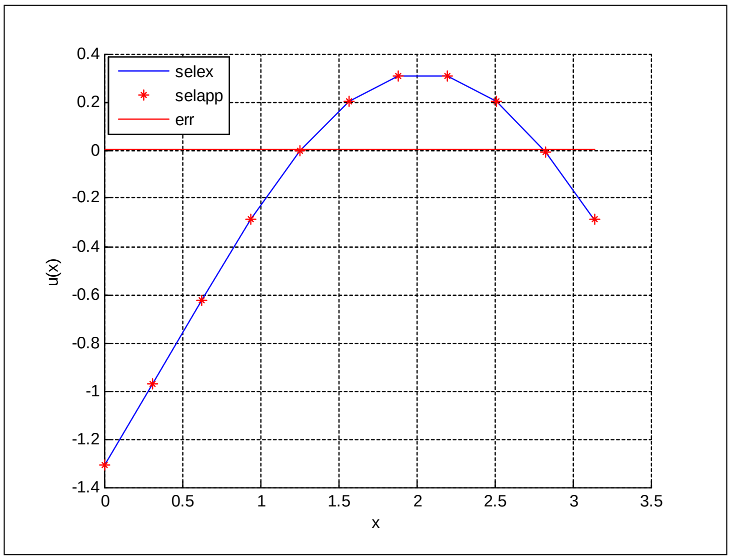

Figure 2.2: Solutions Exacte, Approximative et Erreur Absolue ($N = 11$)pour l'Exemple(2)

3.0.6 Exemple 03 :

considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm :

$$\varphi(x) = 2x + \int_{-1}^{1} \frac{xt}{2}\varphi(t)dt \quad , -1 \leq x, t \leq 1 \tag{3}$$

la solution exacte soit donnée par :

$$\varphi(x) = 3x$$

la solution approximative $\varphi_n(x)$de $\varphi(x)$ est obtenue par la méthode collocation de la polynômes Lucas.tableau nous présentée l'exacte et la solution approximative de l'equation (3) dans l'exemple (3) de certains points arbitraires, l'erreur pour$N = 3$ est calculée et comparée

Tableau 6: Résultat Numérique de l'Exemple 03

x_i	Sol.Ex	Sol.App, $N=3$	Erreur,$N=3$
-1.0	$-3.0000e+00$	$-3.0000e+00$	$8.8818e-16$
-0.8	$-2.4000e+00$	$-2.4000e+00$	$4.4409e-16$
-0.6	$-1.8000e+00$	$-1.8000e+00$	$2.2204e-16$
-0.4	$-1.2000e+00$	$-1.2000e+00$	$2.2204e-16$
-0.2	$-6.0000e-01$	$-6.0000e-01$	0
0.0	0	0	0
0.2	$6.0000e-01$	$6.0000e-01$	0
0.4	$1.2000e+00$	$1.2000e+00$	$2.2204e-16$
0.6	$1.8000e+00$	$1.8000e+00$	$2.2204e-16$
0.8	$2.4000e+00$	$2.4000e+00$	$4.4409e-16$
1.0	$3.0000e+00$	$3.0000e+00$	$8.8818e-16$

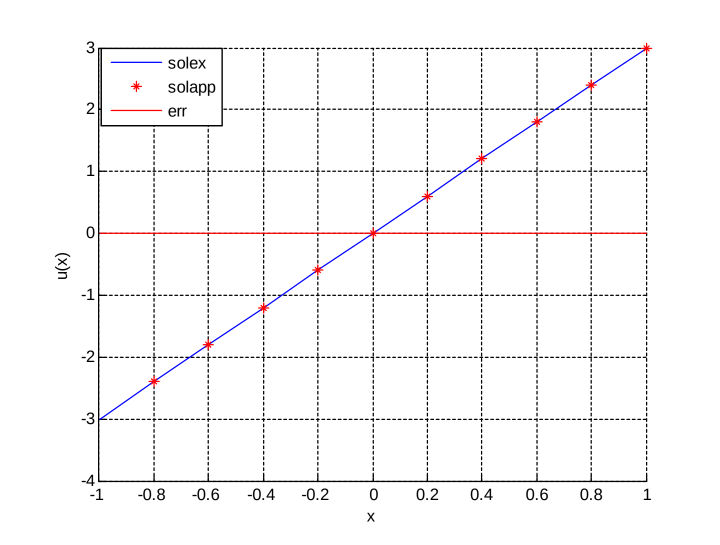

Figure 3.1: Solutions Exacte, Approximative et Erreur Absolue ($N=3$)pour l'Exemple(3)

Conclusion générale

Dans ce travail,une méthode de collocation matricielle à été présentée pour résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm du deuxième type en utilisant les polynômes de Lucas, en suite nous avons fait une comparasion entre les résultats numériques et la solution exacte de l'équation, les solutions approchéés se rapprochent de la solutions exacte avec valeurs croissantes de N, comme le montrent les exemples, la comparaison de deuxième exemple avec de la méthode quadrature de simpson modifiée en a été présentée[1], qui prouve que cette méthode fournit une approximation plus précise par rapport aux autres méthodes. Autre cette propriété, cette méthode présente de nombreux avantages pour ce type de problème car des matrices plus grandes peuvent être facilement résolues à l'aide de logiciel MATLAB.

Bibliographie

[1] Djaidja, N, & Khirani, A. (2024). Approximate Solution of Linear Fredholm Integral Equation of the Second Kind Using Modified Simpson's Rule. Mathematical Modelling of Engineering Problems, 11(3).

[2] Elmacia, D., & Savasanerilb, N. B. (2022). The Lucas Polynomial Solution Of Linear Volterra-Fredholm Integral Equations. Matrix Science Mathematic (MSMK), 6(1), 21-25.

[3] Kajani, M.T., Vencheh, A.H. (2005). Solving secondkind integral equations with hybrid Chebyshev andblock-pulse functions. Applied Mathematics andComputation, 163(1): 71-77.

[4] Lukonde,A,P. (2021). Pell-Lucas Series Solution for Fredholm Integral Equations of the Second Kind, International Journal of Science and Research (IJSR) ·

[5] M.Nadir. (2004). Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila Algérie .

[6] M.Nadir and M.Dilmi, Eulera Series Solutions For Linear Integral Equations, Article 11, pp.1-7,.

[7] M. Nadir, B.Lakehali. (2017). A variational form with Legendre series for linear integral equations, in Malaya Journal of Matematik.6(1), (2018), 49-52.

[8] Maleknejad, K., & Mirzaee, F. (2005). Using rationalized Haar wavelet for solving linear integral equations. Applied Mathematics and Computation, 160(2), 579-587

[9] Rahmoune, A. (2018). Equations intégrales linéaires et non linéaires. Analyse et techniques de résolution, 44, 46.

[10] Rashidinia, J., Zarebnia, M. (2005). Numerical solutionof linear integral equations by using Sinc–collocationmethod. Applied Mathematics and Computation, 168(2):806-822.

[11] Stenger, F. (1979). A "Sinc-Galerkin" method of solutionof boundary value problems. Mathematics of Computation, 33(145): 85-109.

[12] Wazwaz, A.M. (2011). Linear and nonlinear integralequations: Methods and applications. Springer, NewYork, NY, USA.