N° d'ordre :………………

République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulaire
Ministère de l'**E**nseignement **S**upérieur et
de la **R**echerche **S**cientifique

Université de **M**'sila

Faculté des **S**ciences

Département de **P**hysique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

Bouaicha Hamza

THEME

Etude des systèmes quantiques relativistes dans l'espace-temps non commutatif

---

Soutenue le : 24/06/2013

Devant le jury composé de :

A. Mairech	**M.C.A.**	**Université de M'sila**	**Président**
S. Zaim	**M.C.A.**	**Université de Batna**	**Rapporteur**
Y. Sabri	**M.A.B.**	**Université de M'sila**	**Examinateur**

Promotion Juin 2013

Je dédie ce mémoir

A mon père

A ma mère

A mes frères omar, monir, khaled, farid

A mes sœurs halima, samra

A toute ma famille bouaicha

A tous mes amis

A tous ceux et celles qui m'ont aidé et encouragé de prés comme de loin.

Hamza.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier notre dieu tout puissant qui m'a éclairé le bon chemin.

Je veux remercier, mon encadreur monsieur Zaim Slimane, qui m'a proposé ce sujet, m'a dirigée pour sa bonne réalisation, je veux aussi lui exprimer ma sincère gratitude pour ses conseils, pour ses orientations et pour son aide dans la rédaction du mémoire.

J'exprime aussi toute ma gratitude et mon respect aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'accepter lire ce modeste travail.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants du département de physique et mes collègues de promotion 2013.

Table des matières

Introduction générale

La description du mode par la physique théorique repose sur de deux théorie extrêmement bien vérifiées expérimentalement. La relativité générale d'Einstein (1916) décrit l'interaction l'espace-temps (classique) et la matière et l'énergie de l'univers. Cette théorie dont la première pierre fut la relativité restreinte (1905), unifie l'espace et le temps et en fait un objet dynamique. La théorie de jauge (le modèle standard) unifie les interactions électrofaible et forte et rend compte de la physique à l'échelle des constituants élémentaires de la matière.

En physique classique, la mécanique de Newton est fondée sur quatre grands principes : les trois lois de newton (la loi de l'inertie, la loi fondamental de la dynamique, la loi action et réaction), et le principe de conservation d'énergie.

Durant le dernier siècle la physique fondamentale a vécu deux révolutions qui ont changé les concepts et la vision de la mécanique classique Newtonienne, se sont la relativité (restreinte et générale) inventée par Einstein et la mécanique quantique inventée et développée par des plusieurs physiciens (Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Pauli, Dirac, et d'autres).

La mécanique quantique s'intéresse aux phénomènes physiques qui sont à l'échelle de la constante de Planck $\hbar = 1{,}05\ 10^{-34} J.s$. Cette constante est fondement de la réalité physique, puisqu'on la retrouve dans la formulation du principe d'incertitude de Heisenberg qui rend impossible la mesure simultanée de la position et de l'impulsion d'une particule, car l'incertitude Δx sur la mesure de sa position et l'incertitude Δp sur son impulsion doivent satisfaire à la relation $\Delta x\,.\Delta p \simeq \hbar$.
La combinaison de la mécanique quantique et la relativité restreinte a induit la mécanique quantique relativiste ou la notion de l'antimatière a pris naissance. Le développement de la théorie des champs et la théorie des groupes (groupes de Lie) ont contribué à la construction des théories de jauge qui ont réussi à expliquer les trois interactions fondamentales.

Malgré ce succès appariant, il reste beaucoup de choses inexplicables (par exemple : l'unification de quatre forces fondamentaux), pour comprendre ces problèmes, les physiciens ont supposé plusieurs solutions, l'une de ces solutions est la géométrie non commutative.

La géométrie non commutative, est une outille mathématique appliquée à la physique théorique qui élaborée dans des plusieurs méthodes, une de ces méthodes est les approches de seiberg-witten, qui consiste à remplacer l'espace-temps ordinaire par un espace non commutatif, cette approche peut être formulée la théorie de jauge dans cas non commutatif.

Ce travail est organisé comme suit :

Le premier chapitre, consacré sur la théorie des perturbations stationnaires.

Le deuxième chapitre est consacré à l'équation de Klein-Gordon dans l'espace ordinaire et ses applications sur l'atome d'hydrogène.

Le troisième chapitres est consacré à une exposition des théories de jauge dans l'espace non commutatif, en utilisant le produit de Moyal (produit star) et des cartes de Seiberg-Witten.

Le quatrième chapitre, on va étudier l'équation de Klein-Gordon dans l'espace non commutatif.

On va finaliser notre travail par une conclusion qui étant comme un bilan des résultats obtenus.

Chapitre 1

La théorie des perturbations stationnaires

Introduction :

Dans la mécanique quantique l'équation $H\psi_k = E_k\psi_k$ n'est pas toujours soluble, on est obligé de rechercher des solutions approchées, en utilisant une méthode d'approximation appelé la théorie de perturbation.

Donc la théorie des perturbations « stationnaires » est très largement utilisée en physique, car elle correspond très bien à la démarche habituelle des physiciens : dans l'étude d'un phénomène ou d'un système physique donné.

1.1. La théorie des perturbations stationnaires :

On étudie dans ce chapitre le cas où H et w sont indépendants du temps ce qui correspond aux perturbations stationnaires, elle est applicable lorsque l'Hamiltonien H du système étudié qui se décompose sous la forme :

$$H = H_0 + w \tag{1.1}$$

Où :

H_0 : dénote l'Hamiltonien du système non-perturbé.

w : représente une petite perturbation.

Telle que H_0 proche de H.

De plus, nous supposons que les valeurs propres E_k^0 et les états propres Ψ_k^0 de l'Hamiltonien non-perturbé sont connus [1]:

$$H_0\psi_k^0 = E_k^0\psi_k^0 \tag{1.2}$$

L'indice k indique que les énergies non-perturbées forment un spectre discret, nous dénotons par ψ_k^0 le système complet d'états propre de H_0 d'énergies E_k^0. Les éléments de matrice de w sont petits devant ceux de H_0. Pour exprimer clairement la petitesse des éléments de matrice w devant ceux de H_0, on introduit le paramètre sans dimension λ en exprimant w sous la forme :

$$w = \lambda\hat{w} \quad \text{Avec} \quad \lambda \ll 1 \tag{1.3}$$

Où :

$\widehat{w}$ Étant un opérateur d'éléments de matrice comparables à ceux H_0.

L'introduction de ce paramètre λ prend tout son sens dans le cas d'une perturbation liée à un champ extérieur de force variable, nous verrons en fait que le résultat est indépendant de ce paramètre qui par contre permet de mieux séparer les différents ordres de perturbation.

Nous cherchons les valeurs propres de l'opérateur hermétique $H(\lambda)$:

$$H(\lambda) = H_0 + \lambda\widehat{w} \tag{1.4}$$

Si λ est suffisamment petit, les valeurs propres et les états propre associée à $H(\lambda)$ ne devaient que peu différer de ceux associées à H_0. Nous cherchons les états propres $|\,\psi(\lambda)\rangle$ et les valeurs propres $E(\lambda)$ de l'opérateur hermétique $H(\lambda)$ [2]:

$$H(\lambda)\psi_k(\lambda) = E_k(\lambda)\psi_k(\lambda) \tag{1.5}$$

Nous admettrons que $E_k(\lambda)$ et $\psi_k(\lambda)$ peuvent être développés en puissances de λ sous la forme :

$$E_k = E_k^0 + \lambda E_K^1 + \cdots + \lambda^q E_k^q + \cdots \tag{1.6}$$

$$|\,\psi_k(\lambda)\rangle = |\,\psi_k^0\rangle + \lambda|\,\psi_k^1\rangle + \cdots + \lambda^q|\,\psi_k^q\rangle + \cdots \tag{1.7}$$

Partons alors de ces développent, ainsi que la définition (1.4) de $H(\lambda)$ dans l'équation (1.5) :

$$(H_0 + \lambda\widehat{w})\left[\sum_{q=0}^{\infty}\lambda^q|\,\psi_k^q\rangle\right] = \left[\sum_{q'=0}^{\infty}\lambda^{q'}E_k^{q'}\right]\left[\sum_{q=0}^{\infty}\lambda^q|\,\psi_k^q\rangle\right] \tag{1.8}$$

Nous imposons à cette équation d'être vérifiée pour λ petit.

Nous devons donc égaler les coefficients des puissances successives de λ dans les deux membres. Nous obtenons ainsi :

D'ordre 0 de λ :

$$H_0|\,\psi_k^0\rangle = E_k^0|\,\psi_k^0\rangle \tag{1.9}$$

D'ordre 1 de λ :

$$(H_0 - E_k^0)|\,\psi_k^1\rangle + (\widehat{w} - E_K^1)|\,\psi_k^0\rangle = 0 \tag{1.10}$$

D'ordre 2 de λ :

$$(H_0 - E_k^0)|\,\psi_k^2\rangle + (\hat{w} - E_K^1)|\,\psi_k^1\rangle - E_K^2|\,\psi_k^0\rangle = 0 \tag{1.11}$$

Pour les termes généraux d'ordre q :

$$(H_0 - E_k^0)|\,\psi_k^q\rangle + (\hat{w} - E_K^1)|\,\psi_k^{q-1}\rangle - E_K^2|\,\psi_k^{q-2}\rangle \ldots E_k^q|\,\psi_k^0\rangle = 0 \tag{1.12}$$

Il est avantageux de ne pas normaliser $\psi_k(\lambda)$, mais plutôt d'imposer la condition :

$$\langle \psi_k(\lambda)\,|\psi_k^0\rangle = 1 \tag{1.13}$$

Comme ψ_k^0 est normalisé, ceci implique :

$$\langle \psi_k^n\,|\psi_k^0\rangle = 0, \forall n > 1 \tag{1.14}$$

Considérons une valeur propre particulière E_k^0 non-dégénérée de l'Hamiltonien H_0 non-perturbé, il lui est associé un vecteur propre ψ_k^0 unique.

Par l'adjonction, nous cherchons à déterminer les modifications apportées à cette énergie non-perturbée et à l'état stationnaire correspondant de la perturbation w à l'Hamiltonien.

Nous utilisons pour cela les équations de perturbation (1.10) à (1.11) ainsi que les conditions (1.13) et (1.14). Pour la valeur propre de $H(\lambda)$ qui tend vers E_k^0 quand $\lambda \to 0$

1.2. La Correction d'énergie d'un niveau non-dégénéré:

Le changement d'énergie résultant d'une perturbation $\hat{w}$ est obtenu en considérant le produit scalaire d'équation (1.10) avec ψ_k^0 :

$$\langle \psi_k^0|(H_0 - E_k^0)|\,\psi_k^1\rangle + \langle \psi_k^0|(\hat{w} - E_K^1)|\psi_k^0\rangle = 0 \tag{1.15}$$

Le premier terme est nul et le deuxième terme donne la première correction de l'énergie :

$$E_k^1 = \langle \psi_k^0|\,\hat{w}\,|\,\psi_k^0\rangle \tag{1.16}$$

En projette maintenant $\langle \psi_k^0|$ sur l'équation (1.11):

$$\langle \psi_k^0|(H_0 - E_k^0)|\,\psi_k^2\rangle + \langle \psi_k^0|(\hat{w} - E_K^1)|\,\psi_k^1\rangle - \langle \psi_k^0|E_K^2|\,\psi_k^0\rangle = 0 \tag{1.17}$$

On obtient finalement :

$$E_k^2 = \sum_{p\neq k} \frac{|\langle \psi_p^0 |\, \widehat{w}\, | \psi_k^0 \rangle|^2}{(E_k^0 - E_p^0)} \tag{1.18}$$

L'effet du niveau E_p^0 est donc de « repousser » le niveau d'énergie E_k^0. il faut de plus remarquer que pour un état fondamental, on a toujours $E_k^0 < E_p^0$ (pour tout p). La correction en énergie du $2^{éme}$ ordre est donc toujours négative.

La valeur propre $E_k(\lambda)$ de H qui correspond à E_k^0 s'écrit donc, au premier et deuxième ordre par rapport à la perturbation $w = \lambda\widehat{w}$:

$$E_k(\lambda) = E_k^0 + \langle \psi_k^0 |\, w \mid \psi_k^0 \rangle + \sum_{p\neq k} \frac{|\langle \psi_p^0 |\, w\, | \psi_k^0 \rangle|^2}{(E_p^0 - E_k^0)} + O(\lambda^3) \tag{1.19}$$

1.3. La correction de vecteur d'état d'un niveau non-dégénéré:

En prenant le produit scalaire d'équation (1.10) avec une autre fonction propre de l'Hamiltonien non-perturbé ψ_p^0 où $p \neq k$, nous obtenons :

$$\langle \psi_p^0 | (H_0 - E_k^0) | \psi_k^1 \rangle + \langle \psi_p^0 | (\widehat{w} - E_K^1) | \psi_k^0 \rangle = 0 \tag{1.20}$$

On peut écrire cette équation sous la forme :

$$E_p^0 \langle \psi_p^0 | \psi_k^1 \rangle + \langle \psi_p^0 |\, \widehat{w}\, | \psi_k^0 \rangle = E_k^0 \langle \psi_p^0 | \psi_k^1 \rangle \tag{1.21}$$

Un développement de ψ_k^1 dans la base du système complet d'états propre ψ_k^0 de H_0 implique :

$$\psi_k^1 = \sum_{p\neq k} c_p\, \psi_p^0 \qquad \text{Avec} \quad c_p = \langle \psi_p^0 | \psi_k^1 \rangle \tag{1.22}$$

Pour $p \neq k$ ceci mène à une équation pour les coefficients c_p :

$$\langle \psi_p^0 |\, \widehat{w}\, | \psi_k^0 \rangle = (E_k^0 - E_p^0) c_p \tag{1.23}$$

Si la valeur propre E_k^0 n'est pas dégénérée, si $E_l^0 \neq E_k^0$ pour tout $l \neq k$, nous obtenons :

$$\psi_k^1 = \sum_{l\neq k} \frac{\langle \psi_p^0 |\, \widehat{w}\, | \psi_k^0 \rangle}{(E_k^0 - E_p^0)} \psi_p^0 \tag{1.24}$$

La correction du premier ordre au vecteur d'état est donc une superposition linéaire de tous les états non-perturbé autre que ψ_k^0 .

Maintenant on va calculer la deuxième correction de la fonction d'onde ψ_k^2 :

En multipliant l'équation (1.11) par le Bra $\langle\psi_l^0|$ on obtient :

$$\langle\psi_l^0|(H_0 - E_k^0)|\,\psi_k^2\rangle + \langle\psi_l^0|(\hat{w} - E_K^1)|\,\psi_k^1\rangle - \langle\psi_l^0|E_K^2|\,\psi_k^0\rangle = 0 \tag{1.25}$$

D'après la simplification on peut trouver la formule suivante :

$$\psi_k^2 = \sum_{p\neq k, l\neq k}\left[\frac{\langle\psi_l^0|\,\hat{w}\,|\psi_p^0\rangle\langle\psi_p^0|\,\hat{w}\,|\psi_k^0\rangle}{(E_k^0-E_p^0)(E_k^0-E_l^0)} - \frac{\langle\psi_k^0|\,\hat{w}\,|\psi_k^0\rangle\langle\psi_p^0|\,\hat{w}\,|\psi_k^0\rangle}{\left(E_k^0-E_l^0\right)^2}\right]\psi_l^0 \tag{1.26}$$

Finalement on peut écrire l'ensemble des corrections sous la forme :

$$\psi_k(\lambda) = \psi_k^0 + \sum_{l\neq k}\frac{\langle\psi_p^0|\,w|\psi_k^0\rangle}{(E_k^0-E_p^0)}\psi_p^0$$

$$+\sum_{p\neq k, l\neq k}\left[\frac{\langle\psi_l^0|\,w\,|\psi_p^0\rangle\langle\psi_p^0|\,w|\psi_k^0\rangle}{(E_k^0-E_p^0)(E_k^0-E_l^0)} - \frac{\langle\psi_k^0|\,w\,|\psi_k^0\rangle\langle\psi_p^0|\,w|\psi_k^0\rangle}{\left(E_k^0-E_l^0\right)^2}\right]\psi_l^0 + O(\lambda^3) \tag{1.27}$$

Chapitre 2

L'équation de Klein-Gordon ordinaire

Introduction :

Avant d'aborder le formalisme, posons brièvement le problème. Deux théories, nées du XXème siècle, à savoir la relativité et la mécanique quantique, doivent s'unifier. Plus précisément, il s'agit ici d'inscrire la mécanique quantique dans un cadre et un formalisme relativiste, cette unification a débuté avec l'équation de Klein-Gordon.

L'équation de K-G a été proposée par Oskar Klein et Walter Gordon, est une version relativiste de l'équation de Schrödinger pour les ondes de matière décrivant des particules massives de spin nul, sans ou avec charge électrique, en suivant de pris les idées originales de Louis de Broglie qui en 1926 a proposé la description des électrons relativistes.

2.1. Rappelle sur l'équation de Schrödinger :

En 1925, Schrödinger proposa son équation et montra que les solutions correspondante permet que retrouver les niveaux d'énergies de Bohr et s'écrit [2]:

$$\mathrm{H}\,\Psi(\vec{r}\,,t) = E\Psi(\vec{r}\,,t) \tag{2.1}$$

Où :

$$\begin{cases} H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{r},t) \\ \vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla} \\ E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \end{cases} \tag{2.2}$$

H : l'opérateur hamiltonien

V : l'énergie potentielle

$\vec{P}$: $impulsion$

$\vec{\nabla}$: $l'opérateurde\ moment$

2.2. L'étude d'un champ libre:

L'équation relativiste la plus simple décrivant un champ libre est l'équation de Klein-Gordon. Son contenu physique est simplement d'imposer que le champ soit une superposition linéaire d'ondes planes (un paquet d'ondes) dont la propagation est conforme à la condition de couche de masse de la cinématique relativiste, $P^2 = m^2$ [3].

À partir de (2.1) avec $V(\vec{r},t) = 0$:

$$E\Psi(\vec{r}\,,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}\,,t) \tag{2.3}$$

On a:

$P^{\mu} = \left(\frac{E}{c},\vec{P}\right)$ et P_{μ}=$\left(\frac{E}{c},-\vec{P}\right)$ $donc$:

$$P^{\mu}P_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{P}^2 = m^2c^2 \tag{2.4}$$

L'équation (2.4) c'est l'équation relativiste donnant l'énergie de particule libre massive.

Le terme d'énergie relativiste décrire sous la forme :

$$E^2 = \vec{P}^2c^2 + m^2c^4 \tag{2.5}$$

On remplacer dans l'équation (2.3) avec:

$$E^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} \tag{2.6}$$

Donc on obtient :

$$\left[\vec{P}^2c^2 + m^2c^4\right]\Psi(\vec{r}\,,t) = -\hbar^2\frac{\partial^2}{(\partial t)^2}\Psi(\vec{r}\,,t) \tag{2.7}$$

D'après la simplification :

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Psi(\vec{r}\,,t) = 0 \tag{2.8}$$

Dans le domaine de physique des particules élémentaires, l'équation précédente est appelé 'équation relativiste covariante des bosons'

L'opérateur d'alembertien étant représenté par :

$$\begin{cases} \Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \vec{\nabla}^2 \\ \quad = \partial^{\mu}\partial_{\mu} = \eta^{\mu v}\partial_{\mu}\partial_{v} \qquad \text{D'où} \qquad \mu = 0,1,2,3 \end{cases} \tag{2.9}$$

$\eta^{\mu v}$: La métrique de Minkowski diag (1,-1,-1,-1)

Alors :

$$\begin{cases} \left[\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Psi(\vec{r}\,,t) = 0 \\ \left[\eta^{\mu v}\partial_\mu\partial_v + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\Psi(\vec{r}\,,t) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

En utilisant les unités naturelles (c=ħ=1) on obtient finalement :

$$[\Box + m^2]\Psi(\vec{r}\,,t) = 0 \tag{2.11}$$

Comme l'opérateur $\Box + m^2$ est invariant de Lorentz, on peut en principe l'appliquer à un champ de spin arbitraire. Elle s'applique en particulier au champ scalaire, sans spin.

La solution de l'équation (2.11) sont des fonctions planes s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}\,,t) &= \exp -\left(ip_\mu x^u\right) \\ &= \exp -[i(Et - \vec{p}.\vec{r})] \\ &= exp - \left[i(k^0 t - \vec{k}.\vec{r})\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

Est une fonction propre de l'opérateur d'alembertien avec valeur propre$-k^2$.

Elle sera donc une solution de Klein-Gordon pour autant que quadrivecteur d'onde k^μsatisfasse la condition $k^2 = m^2$

La solution de l'équation (2.11) peut alors s'écrire :

$$\Psi(\vec{r}\,,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4\, Kc(K)e^{ik_\mu x^\mu}\delta(k^2 - m^2) \tag{2.13}$$

La fonction $c(K)$ détermine la composition en ondes planes du paquet d'ondes scalaire$\Psi(\vec{r}\,,t)$.

On peut écrire l'équation (2.13) sous la forme :

$$\Psi(\vec{r}\,,t) = \int \frac{d^3K}{(2\pi)^3 2w_k}\left[a(\vec{k})e^{-i(w_k t - \vec{k}\vec{r})} + b(\vec{k})e^{+i(w_k t - \vec{k}\vec{r})}\right] \tag{2.14}$$

D'où :

$$w_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \tag{2.15}$$

Le théorème de Noether implique l'existence d'un courant J_μ d'écrire sous la forme :

$$J_\mu = -i\Psi^* \overleftrightarrow{\partial_\mu} \Psi \tag{2.16}$$

Et le courant est conservé alors :

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \tag{2.17}$$

Il faut remarquer que la composante temporelle j^0 n'est pas une quantité positive :

$$j^0 = -i\left[\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right] \tag{2.18}$$

On ne peut donc pas identifierj^0à une densité de probabilité comme on le fait en mécanique quantique basée sur l'équation de Schrödinger, l'équation de Klein-Gordon n'est donc pas appropriée à la description quantique d'une particule ayant Ψ comme fonction d'onde.

Il faudra de plus prendre garde à l'existence d'énergie négative.

$$E = \pm\sqrt{\vec{P}^2 + m^2} \tag{2.19}$$

La solution L'équation de Klein-Gordon ne possède apparemment pas d'état fondamental d'énergie minimum. Ce problème recevra une solution en termes d'antiparticules dans le cadre de la théorie quantique des champs.

On utilise couramment la terminologie suivante :

∗ Onde d'énergie positive : $e^{-ik_\mu x^\mu}$

∗ Onde d'énergie négative : $e^{+ik_\mu x^\mu}$

L'intérêt et la signification de cette convention peu intuitive apparaitront lors de la quantification du champ.

2.3. L'étude d'une particule chargée dans un champ externe :

Une particule chargée (e) en présence d'un champ électromagnétique externe donné, représentée par le quadri-potentielA^{μ}, la prescription de couplage minimal de fock conduit à substituer la quadri-impulsion p^{μ} à la quantité suivante :

$$p_{\mu} \rightarrow p_{\mu} - eA_{\mu} \tag{2.20}$$

Introduisons explicitement les composantes temporelles et spatiales de la quadri-impulsion :

$$p^{\mu} = \begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \text{ Et } \quad p_{\mu} = \begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{p} \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Et de quadri-potentiel :

$$A^{\mu} = \begin{pmatrix} A^{0} \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad \text{Et} \quad A_{\mu} = \begin{pmatrix} A_{0} \\ -\vec{A} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

A^{0} : représente le potentiel scalaire comme le potentiel coulombien

$\vec{A}$: représente le potentiel vectoriel comme le potentiel électromagnétique

De telle sorte l'équation de K-G devient :

$$(p_{\mu} - eA_{\mu})(p^{\mu} - \mathrm{e}A^{\mu})\Psi(\vec{r}\,,t) = m^{2}c^{4}\Psi(\vec{r}\,,t) \tag{2.23}$$

Cette équation s'applique à une particule chargée de charge (e) sans spin dans un champ électromagnétique

2.4. L'application sur l'atome d'hydrogène et la solution :

Dans cette partie, on va appliquer l'équation de K-G sur l'atome d'hydrogène puisque c'est le plus simple atome existe, elle est constitué un seul proton et un électron. L'interaction entre l'électron et le proton créer un potentiel coulombien :

$$A_{0} = -\frac{e^{2}}{4\pi\mathcal{E}_{0}r} \tag{2.24}$$

Avec le potentiel vecteur est nul($\vec{A} = 0$).

Dans ces conditions l'équation (2.23) s'écrire :

$$\left\{(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{e^2}{4\pi\mathcal{E}_0 r}\ )^2-\left(-i\hbar\,\vec{\nabla}\right)^2-(mc^2)^2\right\}\Psi(\vec{r},t)=0 \tag{2.25}$$

Le but c'est trouvée les états stationnaires d'énergie E, on peut écrire la fonction $\Psi(\vec{r},t)$ sous la forme :

$$\Psi(\vec{r},t)=\Psi(\vec{r})e^{-iEt} \tag{2.26}$$

D'après l'équation (1.25) On obtient :

$$\left\{(E+\frac{e^2}{4\pi\mathcal{E}_0 r}\ )^2-\left(-i\hbar\,\vec{\nabla}\right)^2-(mc^2)^2\right\}\Psi(\vec{r})=0 \tag{2.27}$$

Nous sommes en présence d'un système à symétrie sphérique, nous allons travailler au coordonnée sphérique en procédant à la séparation des variable (r,θ,φ) pour la recherche de solutions stationnaires sous la forme [4]:

$$\Psi(\vec{r})\rightarrow\Psi_{n,l,m}(\mathrm{r},\theta,\varphi)=\frac{1}{r}R_{n,l}(r)y_l^m\,(\theta,\varphi) \tag{2.28}$$

$R_{n,l}(r)$: Partie radial de la fonction d'onde

$y_l^m\,(\theta,\varphi)$: Partie angulaire de la fonctiond'onde

Les nombre réel n,l,m sont appelés nombres quantiques.

n : Le nombre quantique principal est nombre entier positif.

l : Le nombre quantique orbital est un nombre entier positif compris entre 0 et $n-1$

m : Le nombre quantique magnétique compris entre $-l$ et l

L'aplacien en coordonnés sphérique :

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\vec{L}^2}{\hbar^2}\right] \tag{2.29}$$

Telle que :

$$\vec{L}^2y_l^m\,(\theta,\varphi)=\hbar^2l(l+1)\,y_l^m\,(\theta,\varphi) \tag{2.30}$$

En remplaçant ceux-ci en (2.27) on obtient :

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)-e^4}{r^2}+\frac{2Ee^2}{r}+E^2-m_e^2\right\}R(r)=0 \qquad (2.31)$$

Pour rechercher la solution de l'équation (2.31), on utilise la méthode de NiKiforov-Uvarov.

Cette méthode est basée sur la résolution du type hypergéométrique d'équations différentielles du deuxième ordre par des moyens des fonctions spéciales orthogonales, pour un potentiel donné. Cette technique algébrique a été utilisée avec succès de la part de Schrödinger, Klein-Gordon et Duffin-kemmer-Petiau. Donc l'équation principal qui est donnée dans la formulaire ci-dessous[5]:

$$R''+\frac{\tilde{\tau}(r)}{\sigma(r)}R'+\frac{\tilde{\sigma}(r)}{\sigma^2(r)}R=0 \qquad (2.32)$$

Telle que :

$R(r)$: est la fonction de type hypergéométrique.

$\sigma(r)$ Et $\tilde{\sigma}(r)$: sont des poynomes de degré non supérieur à 2

$\tilde{\tau}(r)$: Un polynôme de degré non supérieur à 1

Selon (2.31) et (2.32), on obtient :

$\sigma(r)=r$, $\tilde{\tau}=0$, $\tilde{\sigma}=(Er+e^2)^2-r^2m_e^2-l(l+1)$

Essayons de mettre l'équation (2.32) sous une forme plus simple au moyen du changement

$$R(r)=\phi(r)y(r) \qquad (2.33)$$

Et d'un choix particulier de la fonction $\phi(r)$, Il vient :

$$y''+\left(2\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}+\frac{\tilde{\tau}(r)}{\sigma(r)}\right)y'+\left(\frac{\phi''(r)}{\phi(r)}+\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\frac{\tilde{\tau}(r)}{\sigma(r)}+\frac{\tilde{\sigma}(r)}{\sigma^2(r)}\right)y=0 \qquad (2.34)$$

En vue de rendre (2.31) plus simple que (2.32). On donnera au coefficient de y' l'aspect $\tau(r)/\sigma(r)$ où $\tau(r)$ est un polynome de degré non supérieur à1.

$$2\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}+\frac{\tilde{\tau}(r)}{\sigma(r)}=\frac{\tau(r)}{\sigma(r)} \qquad (2.35)$$

La fonction $\sigma(r)$ se définira alors par l'équation :

$$\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}=\frac{\pi(r)}{\sigma(r)} \qquad (2.36)$$

Dans laquelle :

$$\pi(r) = \frac{1}{2}[\tau(r) - \tilde{\tau}(r)] \tag{2.37}$$

Est polynôme de degré non supérieur à1.

On peut écrire :

$$\frac{\phi''(r)}{\phi(r)} = \left(\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\right)' + \left(\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\right)^2 = \left(\frac{\pi(r)}{\sigma(r)}\right)' + \left(\frac{\pi(r)}{\sigma(r)}\right)^2 \tag{2.38}$$

Dans ce cas, le coefficient $y(r)$ est transformé à une forme plus appropriée en prenant l'égalité donné dans l'équation (2.36).

$$\frac{\phi''(r)}{\phi(r)} + \frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\frac{\tilde{\tau}(r)}{\sigma(r)} + \frac{\tilde{\sigma}(r)}{\sigma^2(r)} = \frac{\tilde{\sigma}(r)}{\sigma^2(r)} \tag{2.39}$$

En substituant les cotés à droite de l'équation (2.35) et l'équation (2.39) dans l'équation (2.34), Une équation de type hypergéométrique est obtenue comme suit :

$$y'' + \frac{\tau(r)}{\sigma(r)}y' + \frac{\tilde{\sigma}(r)}{\sigma^2(r)}y = 0 \tag{2.40}$$

Où :

$$\tau(r) = \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r)$$

$$\tilde{\sigma}(r) = \tilde{\sigma}(r) + \pi^2(r) + \pi(r)[\tilde{\tau}(r) - \sigma'(r)] + \pi'(r)\sigma(r) \tag{2.41}$$

$\tau(r)$: Polynôme de degré non supérieur à1.

$\tilde{\sigma}(r)$: Polynôme de degré non supérieur à2.

Nous avons trouvé de cette façon la classe des transformations qui lassent le type de l'équation inchangée : ce sont les transformations qu'on fait subir à (2.32) en opérant le changement $R(r) = \phi(r)y(r)$, ou la fonction $\phi(r)$ vérifie l'équation (2.36), quel que soit le polynôme du premier degré $\pi(r)$.

Choisissons les coefficients du polynôme $\pi(r)$ de telle façon que le polynôme $\tilde{\sigma}(r)$ figurant dans (2.40) soit un multiple exact de $\sigma(r)$:

$$\tilde{\sigma}(r) = \lambda\sigma(r) \tag{2.42}$$

λ: constante

L'équation (2.40) deviendra donc :

$$\sigma(r)y'' + \tau(r)y' + \lambda y = 0 \qquad (2.43)$$

Nous disons que (2.43) est une équation hypergéométrique.

Ainsi de sa solution est donnée en fonction de type hypergéométrique. Pour déterminer le polynôme $\pi(r)$ l'équation (2.41) et la constant, mettons la condition (2.42) sous la forme :

$$\pi^2(r) + [\tilde{\tau}(r) - \sigma'(r)]\pi(r) + \tilde{\sigma}(r) - k\sigma(r) = 0 \qquad (2.44)$$

Où :

$$k = \lambda - \pi'(r) \qquad (2.45)$$

On peut expliciter $\pi(r)$ dans l'équation du second degré :

$$\pi(r) = \frac{\sigma'(r)-\tilde{\tau}(r)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(r)-\tilde{\tau}(r)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(r) + k\sigma(r)} \qquad (2.46)$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{(m_e^2 - E^2)r^2 + (k - 2e^2E)r + (l + \frac{1}{2})^2 - e^4}$$

On remarque que la racine de polynôme est du second degré, donc pour trouver des solutions, on va appliquer le discriminateur de la racine carrée est égal à zéro :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (k - 2e^2E)^2 - 4(m_e^2 - E^2)\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - e^4\right] = 0 \qquad (2.47)$$

Donc obtenu deux solutions pour k :

$$\left\{\pi(r) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{m_e^2 - E^2}r + \sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 - e^4}, k = 2e^2E + 2\sqrt{m_e^2 - E^2}\sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 - e^4} \right. \qquad (2.48)$$

$$\left\{\pi(r) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{m_e^2 - E^2}r - \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - e^4}, k = 2e^2E - 2\sqrt{m_e^2 - E^2}\sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 - e^4} \right. \qquad (2.49)$$

Pour la fonction $\tau(r) = \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r)$ à l'intervalle $[0, +\infty[$ qui doit avoir une dérivée est négative.

Donc :

$$\tau(r) = 1 + 2\left(\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - e^4} - \sqrt{m_e^2 - E^2}\, r\right) \tag{2.50}$$

Avec :

$$\pi(r) = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - e^4} - \sqrt{m_e^2 - E^2}\, r \tag{2.51}$$

Et :

$$k = \lambda - \pi'(r) \tag{2.52}$$

Avec :

$$\pi'(r) = -\sqrt{m_e^2 - E^2} \tag{2.53}$$

Donc :

$$\lambda = 2\left[e^2 E - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - e^4}\right)\sqrt{m_e^2 - E^2}\right] \tag{2.54}$$

L'énergie exacte de l'équation de Klein-Gordon pour le potentiel coulombien, il est possible de la constituer par la forme suivante :

$$\lambda + n\tau'(r) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(r) = 0 \tag{2.55}$$

Avec :

$$\tau'(r) = -\sqrt{m_e^2 - E^2}\ et\ \ \sigma''(r) = 0 \tag{2.56}$$

On obtient en effet les niveaux d'énergies suivants :

$$E_{n,l} = \frac{m_e\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}\right)}{\left[(n+\frac{1}{2})^2 + (l+\frac{1}{2})^2 + 2(n+\frac{1}{2})\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{2.57}$$

Avec $\alpha = e^2$

Les fonctions propres $R(r) = R_{n,l}(r)$ s'écrivent :

$$R_{n,l}(r) = A_{nl}\, x^{v+1} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{2v+1}(x) \tag{2.58}$$

Avec :

$$v = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}\ , x = 2ar \tag{2.59}$$

$$a = \sqrt{m_e^2 - E^2} \tag{2.60}$$

Et $A_{n,l}(r)$, $L_n^{2v+1}(x)$ sont des constants de normalisation et polynôme de Laguerre respectivement. A travers la condition de normalisation $\int_0^\infty R_{n,l}^2(r)dr = 1$. Nous trouvons :

$$A_{n,l} = \sqrt{\frac{a}{n+\mu+1}}\left(\frac{n!}{\Gamma(n+2\mu+2)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.61}$$

Ainsi, les fonctions radiales sont :

$$R_{n,l}(r) = \sqrt{\frac{a}{n+\mu+1}}\left(\frac{n!}{\Gamma(n+2\mu+2)}\right)^{\frac{1}{2}} x^{v+1} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{2v+1}(x) \tag{2.62}$$

Conclusion :

En remarque que l'énergie E est indépendante du nombre quantique magnétique m. il y a donc une dégénérescence sur l'état d'énergie.

Chapitre 3

La théorie de jauge dans l’espace non commutatif

Dans ce chapitre on va étudier la théorie de jauge dans le cadre de la géométrie non commutative.

3.1.1. Rappelle sur les groupes :

En théorie quantique des champs, toutes les transformations considérées forment des groupes. La plus souvent même des groupes de lie :

Soit G un ensemble,$*$ une application de $G \times G$ [6]:

$$\begin{cases} *: \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G} \\ \quad (\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2) \to \mathrm{g}_1 * \mathrm{g}_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

Le couple $(G,*)$ est construit un groupe si les axiomes suivantes sont satisfaits :

1. L'associativité :

$$(\mathrm{g}_1 * \mathrm{g}_2) * \mathrm{g}_3 = \mathrm{g}_1 * (\mathrm{g}_2 * \mathrm{g}_3)$$

2. L'élément neutre :

$$\exists \mathrm{e} \in \mathrm{G}, \mathrm{e} * \mathrm{g} = \mathrm{g} * \mathrm{e} = \mathrm{g}\,; \forall \mathrm{g} \in \mathrm{G}$$

3. L'élément inverse :

$$\forall \mathrm{g} \in \mathrm{G}, \exists \mathrm{g}^{-1} \in \mathrm{G}, \mathrm{g}^{-1} * \mathrm{g} = \mathrm{g}^{-1} * \mathrm{g} = \mathrm{e}$$

Le groupe sera qualifiée abélienne si :

$$\mathrm{g}_1 * \mathrm{g}_2 = \mathrm{g}_2 * \mathrm{g}_1$$

3.1.2. Groupe de lie :

Le groupe de lie unitaire $U(n)$, définit par l'ensemble des matrices complexes $(n \times n)$ unitaires [7]:

$$U \in M_n(c), U^+U = 1_n \tag{3.2}$$

Et pour le sous-groupe spécial unitaire $SU(n)$ on a :

$$SU(n) = U(n) + \{\det(U) = 1\}$$

3.2. La théorie de jauge dans l'espace ordinaire :

Le terme « jauge » est fut introduit pour la première fois par Hermann Weyl en 1919 dans une tentative d'unifier l'électromagnétisme et la gravitation, Mais pour diverses raison, cette tentative d'unification échoua. Par la suite, Weyl donna en 1929 le premier exemple d'une théorie de jauge local basée sur le groupe abélien $U(1)$, dans la théorie de Weyl, la jauge est une référence de mesure permettant d'étalonner l'échelle qui va servir à mesurer une quantité physique. L'idée a été généralisée par Dirac, puis Yang et Mills en utilisant des groupes non abéliens $SU(2)$ et $SU(3)$ [8,9].

La théorie de jauge est une théorie des champs qui décrit les interactions fondamentales (électromagnétique, faible, forte). Elle est basée sur le principe d'invariance de la densité lagrangienne lorsque cette dernières est soumise à une transformation de jauge, ces transformations sont [6] :

1. transformations appliquée sur les cordonnées d'espace-temps :

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = f(x^{\mu}, \alpha) \tag{3.3}$$

2. transformations appliquée sur les champs :

-champs scalaires $\phi(x^{\mu}, \alpha)$:

$$\phi(x^{\mu}, \alpha) \rightarrow \phi'(x'^{\mu}, \alpha) \rightarrow F(\phi(x^{\mu}, \alpha), x^{\mu}) \tag{3.4}$$

-champs fermioniques $\Psi(x^{\mu}, \alpha)$:

$$\Psi(x^{\mu}, \alpha) \rightarrow \Psi'(x'^{\mu}, \alpha) \rightarrow e^{i\alpha}\Psi(x^{\mu}, \alpha) \tag{3.5}$$

-champs vectoriels de spin $s = 1$:

$$A^{\mu}(x) \rightarrow A'^{\mu}(x) \rightarrow G^{\mu}(A^{\mu}(x), \alpha) \tag{3.6}$$

De telle sorte le principe de moindre action est satisfait :

$$\delta S = 0 \tag{3.7}$$

Dans l'espace ordinaire les transformations locales de champ fermionique, la dérivée covariante, le champ de jauge et le tenseur $F_{\mu\nu}$ respectivement est donnée par [10,11]:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha_a(x)T^a}\psi(x)$$

$$\begin{aligned}
&D_{\mu}\psi(x) \rightarrow D_{\mu}'\psi(x)' = U(\alpha(x))D_{\mu}\psi(x) \\
&A_{\mu} \rightarrow A_{\mu}' = U(\alpha(x))A_{\mu}U(\alpha(x))^{-1} - i(\partial_{\mu}U(\alpha(x))U(\alpha(x))^{-1} \\
&F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}' = U(\alpha(x))F_{\mu\nu}U(\alpha(x))^{-1}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Avec :

$$F_{\mu\nu} = (\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}) - i[A_{\mu}, A_{\nu}]$$

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\tau_a}{2}A_\mu^a \tag{3.9}$$

Qui sont devient dans le cas infinitésimal:

$$\begin{aligned}
&\psi'(x) = (1 + i\alpha_a(x)T^a)\psi(x) \\
&\Rightarrow \delta_\alpha\psi(x) = i\alpha_a(x)T^a\psi(x) \\
&\Rightarrow \delta_\alpha\psi(x) = i\alpha(x)\psi(x)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\delta_\alpha D_\mu\psi(x) = i\alpha(x)D_\mu\psi(x) \tag{3.11}$$

$$\delta_\alpha A_\mu = \partial_\mu\alpha(x) + i[\alpha(x), A_\mu] \tag{3.12}$$

$$\delta_\alpha F_{\mu\nu} = i[(\alpha(x), F_{\mu\nu}] \tag{3.13}$$

Et la combinaison de deux transformations s'écrit sous la forme [12]:

$$\begin{aligned}
(\delta_\alpha\psi(x)\delta_\beta\psi(x) - \delta_\beta\psi(x)\delta_\alpha\psi(x)) &= i\alpha_a(x)T^a(i\beta_b(x)T^b) \\
&- (i\beta_b(x)T^b)(i\alpha_a(x)T^a)\psi(x) \\
&= \alpha_a(x)\beta_b(x)[T^a, T^b]\psi(x) \\
&= i\alpha_a(x)\beta_b(x)f^{abc}T^c\psi(x) \\
&= [\alpha(x), \beta(x)]\psi(x) \\
&= \delta_{-i[\alpha(x),\beta(x)]}\psi(x)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.3.1. L'espace-temps non commutatif :

L'idée de l'étude l'espace non commutatif en physique des particules est très ancien. Le but était de pouvoir d'éliminer les divergences ultraviolettes de la théorie quantique de champ [13].

En mécanique quantique l'espace de phase est définie en remplaçant les variables et les moments canoniques $\hat{x}_i, \hat{p}_j$ par des opérateurs hermétiques qui obéissent aux règles de commutations canoniques suivantes :

$$\begin{cases} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \qquad \text{Où} \quad i,j = \overline{0,3} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

Dans l'espace non commutatif les coordonnées d'espace-temps ordinaire sont remplacées par des coordonnées non commutatives obéissant aux règles de commutations suivantes [14]:

$$\begin{cases} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \qquad \text{Où :} \quad i,j = \overline{0,3} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

Ici $\theta_{ij} = -\theta_{ji}$ est une matrice antisymétrique qui représente la non-commutativité de l'espace-temps. Cette algèbre est écriée dans le système $(C = \hbar = 1)$.

3.3.2. La quantification de Weyl :

Dans le cadre de la quantification canonique de la mécanique quantique Hermann Weyl a donné une prescription qui permet d'associer des opérateurs à des fonctions classiques des variables canoniques.

La transformé de Fourier de chaque fonction $f(x)$ ou $g(x)$, est note par $\tilde{f}(k)$ et $\tilde{g}(k)$ [14]:

$$\begin{cases} f(x) = \int d^4xe^{ikx}\tilde{f}(k) \\ g(x) = \int d^4xe^{ikx}\tilde{g}(k) \end{cases} \tag{3.17}$$

Peut être défini comme suit, nous associons à f et g les opérateurs de Weyl $W(f)$ et $W(g)$:

$$\begin{cases} W(f) = (2\pi)^{-4}\int d^4ke^{ik\hat{x}}\tilde{f}(k) \\ W(g) = (2\pi)^{-4}\int d^4ke^{ik\hat{x}}\tilde{g}(k) \end{cases} \tag{3.18}$$

3.3.3. Le produit de moyal :

D'après l'équation (2.17) le produit $W(f)W(g)$ est définie par :

$$W(f)W(g) = (2\pi)^{-4}(2\pi)^{-4}\int d^4kd^4pe^{ik\hat{x}}e^{ip\hat{x}}\tilde{f}(k)\tilde{g}(p) \tag{3.19}$$

Utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff :

$$e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}h[A,B]+\frac{1}{12}h^2[[A,B],B]-\frac{1}{12}h^3[[A,B],A]+.......} \tag{3.20}$$

On va trouver un produit noté produit star $(*)$ alors le produit $W(f)W(g)$ prend la forme:

$$W(f)W(g) = (2\pi)^{-4}(2\pi)^{-4}\int d^4k d^4p e^{ik\hat{x}+ip\hat{x}-h\frac{i}{2}k_i p_j \theta^{ij}}\,\tilde{f}(k)\tilde{g}(p)$$

$$= W(f * g) \qquad (3.21)$$

Où $f * g$ Est une nouvelle fonction définie par:

$$(f * g) = e^{\frac{i}{2}h\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}}[f(x)g(y)]_{y\to x} \qquad (3.22)$$

Cette relation est développée comme suite :

$$(f * g)(x) = f(x)g(x) + \frac{i}{2}h\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}f(x)\frac{\partial}{\partial x^j}g(x) + O(\theta^2) \qquad (3.23)$$

Exemple :

$$V * \Psi = V(\hat{x})\left[\exp\left(\frac{1}{2}i\hbar\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\hat{x}_j}\theta_{jk}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\hat{x}_k}\right)\right]\Psi(\hat{x},t) \qquad (3.24)$$

On peut écrire la formule précédente comme :

$$V(\hat{x})\left[\exp\left(\frac{1}{2}i\hbar\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\hat{x}_j}\theta_{jk}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\hat{x}_k}\right)\right]\Psi(\hat{x},t)$$

$$= \sum_{n=}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}i\hbar)^n}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial\hat{x}_{j_1}}\dots\frac{\partial}{\partial\hat{x}_{j_n}}V(\hat{x})\right]\theta_{j_1k_1}\dots\theta_{j_nk_n}\left[\frac{\partial}{\partial\hat{x}_{k_1}}\dots\frac{\partial}{\partial\hat{x}_{k_n}}\Psi(\hat{x},t)\right]$$

$$= \sum_{n=}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial\hat{x}_{j_1}}\dots\frac{\partial}{\partial\hat{x}_{j_n}}V(\hat{x})\right]\theta_{j_1k_1}\dots\theta_{j_nk_n}\left[\hat{p}_{k_1}\dots\hat{p}_{k_n}\Psi(\hat{x},t)\right] \qquad (3.25)$$

Alors, on explorer les transformations de Fourier de $V(\hat{x})$ pour écrire :

$$V(\hat{x})\left[\exp\left(\frac{1}{2}i\hbar\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\hat{x}_j}\theta_{jk}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\hat{x}_k}\right)\right]\Psi(\hat{x},t)$$

$$= \left\{\int\frac{d^n\hat{k}}{(2\pi\hbar)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\frac{i}{\hbar}\hat{k}_j[\hat{x}_j+\theta_{jk}\hat{p}_k]}V(\hat{k})\right\}\Psi(\hat{x},t) = V\left(\hat{x}_j + \frac{1}{2}i\hbar\theta_{jk}\frac{\partial}{\partial\hat{x}_k}\right)\Psi(\hat{x},t) \qquad (3.26)$$

Eq. (2.22) est représenté le produit de moyal sur l'algèbre de $[\hat{x}_j,\hat{x}_k] = i\hbar\theta_{jk}$, on obtient finalement :

$$V(\hat{x}) * \Psi(\hat{x},t) = V\left(\hat{x}_j + \frac{1}{2}i\hbar\theta_{jk}\frac{\partial}{\partial\hat{x}_k}\right)\Psi(\hat{x},t) \qquad (3.27)$$

3.3.4. Propriétés du produit star

Le produit star satisfait les déférentes propriétés [13] :

1-Le produit star est non commutatif **:**

$$f(x) * g(x) \neq g(x) * f(x)$$

2-Le produit star est associatif :

$$(f(x) * g(x)) * h(x) = f(x) * (g(x) * h(x))$$

3-La relation de complexe conjugué:

$$(f(x)*g(x))^* = f(x)^* * g(x)^*$$

4- La relation d'intégrale :

$$\int d^4x(f*g)(x) = \int d^4x(g*f)(x) = \int d^4x f(x)g(x)$$

5-Permutation cyclique:

$$\int d^Dx(f*g*h)(x) = \int d^Dx(h*f*g)(x) = \int d^Dx(f*h*g)(x)$$

6-Satisfait la règle de Leibniz:

$$\partial_\mu(f*g) = \partial_\mu f*g + f*\partial_\mu g$$

Pour distingue enter le cas de l'espace ordinaire et l'espace non commutatif, les quantités physiques dans l'espace ordinaire a partir ce moment noté par $\psi, A_\mu, F_{\mu\nu}, D_\mu$ et dans l'espace non commutatif noté par $\hat{\psi}, \hat{A}_\mu, \hat{F}_{\mu\nu}, \hat{D}_\mu$.

3.4.1. La théorie de jauge non commutative :

La théorie de jauge dans un espace non commutatif est formulée et baser sur l'algèbre de Seiberg-Witten, dans l'espace non commutatif la construction des théories de jauge se fait de la même manière qu'en théorie de jauge sur un espace ordinaire, il suffit de remplacer les champs classiques par les champs non commutatifs, le produit ordinaire commutatif par le produit de Moyal (produit star (*)).

Dans ce cas la relation (2.10) est remplacée par [14,15] :

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{\psi}(x) = i\hat{\Lambda}(x) * \hat{\psi}(x) \quad (3.28)$$

Avec :

$$\hat{\Lambda}(x) = \Lambda(x)_a T^a \quad (3.29)$$

Et les transformations précédentes deviennent sous la forme [14,12]:

-Pour la dérivée covariante:

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{D}_\mu \hat{\psi}(x) = i\hat{\Lambda}(x) * \hat{D}_\mu \hat{\psi}(x) \quad (3.30)$$

-Pour le champ de jauge :

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{A}_\mu = -i\left[x_{\mu} \overset{*}{,} \hat{\Lambda}(x)\right] + i\left[\hat{\Lambda}(x) \overset{*}{,} \hat{A}_\mu\right] \quad (3.31)$$

En utilisant le produit de Moyal-Weyl le commutateur $[x_{\mu} \overset{*}{,} f(x)]$ s'écrit, pour $\theta_{\mu\nu}$ constante, sous la forme :

$$[x_{\mu}\overset{*}{,} f(x)] = i\theta_{\mu\nu}\partial^{\nu} f(x) \tag{3.32}$$

Donc :

$$\hat{\delta}_{\Lambda}\hat{A}_{\mu} = \partial_{\mu}\hat{\Lambda}(x) + i\left[\hat{\Lambda}(x)\overset{*}{,}\hat{A}_{\mu}\right] \tag{2.33}$$

-pour le tenseur $\hat{F}_{\mu\nu}$:

$$\hat{F}_{\mu\nu} = (\partial_{\mu}\hat{A}_{\nu} - \partial_{\nu}\hat{A}_{\mu}) - i[\hat{A}_{\mu}\overset{*}{,}\hat{A}_{\nu}] \tag{3.34}$$

Ce teneur transforme dans l'espace non commutatif comme suivant :

$$\hat{\delta}_{\Lambda}\hat{F}_{\mu\nu} = i\left[\hat{\Lambda}(x)\overset{*}{,}\hat{F}_{\mu\nu}\right] \tag{3.35}$$

L'expression de paramètre $\Lambda(x)$ dans l'espace non commutatif en fonction des générateurs du groupe SU (N) est développée comme suite [14]:

$$\hat{\Lambda}(x) = \Lambda(x)_a :T^a: + \Lambda^1(x)_{ab} :T^aT^b: + \cdots + \Lambda^{n-1}(x)_{a_1\ldots a_n} :T^{a_1} \ldots T^{a_n}: \tag{3.36}$$

Où

$$\begin{aligned}
&:T^a := T^a \\
&:T^aT^b := \frac{1}{2}\{T^a, T^b\} \\
&:T^{a_1} \ldots . T^{a_n} := \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n} T^{a_1} \ldots . T^{a_n}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Avec la combinaison de deux transformations est devient [16]:

$$\hat{\delta}_{\Lambda}\hat{\psi}(x)\hat{\delta}_{\Sigma}\hat{\psi}(x) - \hat{\delta}_{\Sigma}\hat{\psi}(x)\hat{\delta}_{\Lambda}\hat{\psi}(x)$$

$$= \left(\hat{\Lambda}(x) * \hat{\Sigma}(x) - \hat{\Sigma}(x) * \hat{\Lambda}(x)\right) * \hat{\psi}(x)$$

$$= \left[\hat{\Lambda}(x)\overset{*}{,}\hat{\Sigma}(x)\right] * \hat{\psi}(x) \tag{3.38}$$

3.4.2. Les transformations des champs dans l'espace non commutatif :

Pour conserver la forme des transformations de jauge des différents champs dynamiques, on est obligé de travailler avec les Seiberg-Witten maps de ces champs ($\hat{\psi}[\psi, A]$, $\hat{A}_{\mu}[A]$) [13].

Donc Pour chaque paramètre il est possible de construire une théorie de jauge. Le champ spinoriel représenté dans l'équation (3.28) devient sous la forme [14,12]:

$$\hat{\delta}_\alpha \hat{\psi} = i\hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi} \tag{3.39}$$

Et les transformations non commutatives des relations précédentes deviennent :

$$\hat{\delta}_\alpha(\hat{D}_\mu \hat{\psi}(x)) = i\hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{D}_\mu \hat{\psi}(x) \tag{3.40}$$

$$\hat{\delta}_\alpha \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\Lambda}_\alpha[A] + i[\hat{\Lambda}_\alpha[A] \stackrel{*}{,} \hat{A}_\mu] \tag{3.41}$$

$$\hat{\delta}_\alpha \hat{F}_{\mu\nu} = i[(\hat{\Lambda}[A] \stackrel{*}{,} \hat{F}_{\mu\nu}] \tag{3.42}$$

Pour déterminer $\hat{\Lambda}_\alpha[A]$ en fonction de α(x) et $A_\mu(x)$ on utilise la relation suivante [14]:

$$[\hat{\delta}_\alpha, \hat{\delta}_\beta]\hat{\psi}(x) = \hat{\delta}_{-i[\alpha,\beta]}\hat{\psi}(x)$$

Avec: $$-i[\alpha, \beta] = \alpha \times \beta \tag{3.43}$$

A partir de l'équation (3.39) on peut écrire :

$$[\hat{\delta}_\alpha, \hat{\delta}_\beta]\hat{\psi}(x) = \hat{\delta}_\alpha(i\hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\psi}(x)) - \hat{\delta}_\beta(i\hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi}(x)) \tag{3.44}$$

On utilisant la règle de Leibniz (sixième propriétés de produit star) la relation (3.44) devient:

$$\begin{aligned}
& i\hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\psi}(x) + i\hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\delta}_\alpha \hat{\psi}(x) - i\hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi}(x) - i\hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\delta}_\beta \hat{\psi}(x) \\
&= i\hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\psi}(x) + i\hat{\Lambda}_\beta[A] * (i\hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi}(x)) - i\hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\psi}(x) - i\hat{\Lambda}_\alpha[A] \\
&\quad * (i\hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\psi}(x)) \\
&= i(\hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A]) * \hat{\psi}(x) + (\hat{\Lambda}_\alpha[A] * \hat{\Lambda}_\beta[A] - \hat{\Lambda}_\beta[A] * \hat{\Lambda}_\alpha[A]) * \hat{\psi}(x) \\
&= i(\hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A]) * \hat{\psi}(x) + [\hat{\Lambda}_\alpha[A] \stackrel{*}{,} \hat{\Lambda}_\beta[A]] * \hat{\psi}(x) = \hat{\Lambda}_{[\alpha,\beta]}[A] * \hat{\psi}(x)
\end{aligned}$$

Donc :

$$i(\hat{\delta}_\alpha \hat{\Lambda}_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \hat{\Lambda}_\alpha[A]) + [\hat{\Lambda}_\alpha[A] \stackrel{*}{,} \hat{\Lambda}_\beta[A]] = \hat{\Lambda}_{[\alpha,\beta]}[A] = i\hat{\Lambda}_{\alpha\times\beta}[A] \tag{3.45}$$

Ensuite on développe $\hat{\Lambda}_\alpha[a]$[14]:

$$\hat{\Lambda}_{\alpha}[A] = \alpha(x) + h\Lambda^{1}{}_{\alpha}[A] + h^{2}\Lambda^{2}{}_{\alpha}[A] + ... \quad (3.46)$$

On remplace (2.46) dans (2.45), ou premier ordre de h on trouve l'équation:

$$\begin{aligned} & i(\hat{\delta}_{\alpha}\Lambda^{1}{}_{\beta}[A] - \hat{\delta}_{\beta}\Lambda^{1}{}_{\alpha}[A]) + [\alpha, \Lambda^{1}{}_{\beta}[A]] - [\beta, \Lambda^{1}{}_{\alpha}[A]] - i\Lambda^{1}{}_{\alpha\times\beta}[A] \\ & = -\frac{i}{2}\theta^{ij}\{\partial_{i}\alpha(x), \partial_{j}\beta\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

La solution générale de cette contrainte est donnée par:

$$\Lambda^{1}_{\alpha}[A] = \frac{1}{4}\theta^{ij}\{\partial_{i}\alpha(x), A_{j}\} = \frac{1}{2}\theta^{ij}\{\partial_{i}\alpha_{a}(x), A_{j,b}\} : T^{a}T^{b} : \quad (3.48)$$

3.4.3. Le champ spénoriel :

En théorie de jauge non commutative le champ $\psi(x)$ transforme selon la relation (3.39). On développe $\psi(x)$ comme suit [12]:

$$\hat{\psi}[A] = \psi + h^{1}\psi^{1}[A] + h^{2}\psi^{2}[A] + ... \quad (3.49)$$

Les transformations du champ spénoriel dans l'espace non commutatif sont de la forme :

$$\hat{\delta}\hat{\psi}[A] = \delta\psi^{0} + h^{1}\delta\psi^{1}[A] + h^{2}\delta\psi^{2}[A] + ... \quad (3.50)$$

Où

$$\delta\psi = i\alpha(x)\psi$$

Sont les transformations dans le cas ordinaire (zéro ordre de h).

Si on remplace (3.49) dans (3.39) on trouve ou premier ordre de h la transformation:

$$\delta_{\alpha}\psi^{1}[A] = i\alpha(x)\psi^{1}[A] + i\Lambda^{1}_{\alpha}[A]\psi - \frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_{i}\alpha(x)\partial_{j}\psi \quad (3.51)$$

Et si on prend la solution (3.48) de $\Lambda^{1}_{\alpha}[A]$, nous trouvons:

$$\psi^{1}[A] = -\frac{1}{2}\theta^{ij}A_{i}\partial_{j}\psi + \frac{i}{2}\theta^{ij}A_{i}A_{j}\psi \quad (3.52)$$

De même pour les ordres plus supérieurs.

$$\delta_\alpha \psi^2[A] = i\alpha(x)\psi^2[A] + i\Lambda_\alpha^1[A]\psi^1[A] + i\Lambda_\alpha^2[A]\psi - \frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i\Lambda_\alpha^1[A]\partial_j\psi$$
$$-\frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i\alpha(x)\partial_j\psi^1[A] - \frac{i}{8}\theta^{ij}\theta^{kl}\partial_i\partial_k\alpha(x)\partial_j\partial_l\psi \qquad (3.53)$$

3.4.4. Le potentiel de jauge

De même façon on a vu le comportement du potentiel $\hat{A}_\mu$dans l'espace non commutatif. Les transformations non commutatif du potentiel de jauge sont donnée par :

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{A}_\mu = \partial_\mu \widehat{\Lambda}_\alpha(x) + i\left[\widehat{\Lambda}_\alpha(x) \overset{*}{,} \hat{A}_\mu\right] \qquad (3.54)$$

Qui développe comme suit :

$$\hat{A}_\mu[A] = A_\mu[A] + hA_\mu^1[A] + h^2 A_\mu^2[A] + ... \qquad (3.55)$$

Donc:

$$\hat{\delta}\hat{A}_\mu[A] = \delta A_\mu + h\delta A_\mu^1[A] + h^2\delta A_\mu^2[A] + ... \qquad (3.56)$$

Ou zéro ordre de h on trouve (3.12), et à premier ordre de h on trouve:

$$\delta_\alpha A_\mu^1[A] = \partial_\mu \Lambda_\alpha^1[A] + i[\Lambda_\alpha^1[A], A_\mu] + i[\alpha(x), A_\mu^1[A]] - \frac{1}{2}\theta^{kl}\left\{\partial_k\alpha(x), \partial_l A_\mu\right\} \qquad (3.57)$$

Avec :

$$A_\mu^1[A] = -\frac{1}{4}\theta^{kl}\left\{A_k, \partial_l A_\mu + F_{l\mu}\right\} \qquad (3.58)$$

De même pour le tenseur $\hat{F}_{\mu\nu}$, on trouve ou premier ordre de h:

$$F^1{}_{\mu\nu}[A] = \frac{1}{2}\theta^{kl}\left\{F_{\mu k}\ , F_{\nu l}\right\} - \frac{1}{4}\theta^{kl}\left\{A_k, (\partial_l + D_l)F_{\mu\nu}\right\} \qquad (3.59)$$

Donc les transformations de seiberg-witten sont:

$$\begin{cases} \Lambda_\alpha[A] = \alpha(x) + \frac{1}{4}\theta^{ij}\{\partial_i\alpha(x), A_j\} + O(\theta^2) \\ \hat{\psi}(x) = \psi \quad - \frac{1}{2}\theta^{ij}A_i\partial_j\psi \quad + \frac{i}{2}\theta^{ij}A_iA_j\psi \quad + O(\theta^2) \\ \hat{A}_\mu[A] = A_\mu - \frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_k, \partial_l A_\mu + F_{l\mu}\} + O(\theta^2) \\ \hat{F}_{\mu\nu}[A] = F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\theta^{kl}\{F_{\mu k}, F_{\nu l}\} - \frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_k, (\partial_l + D_l)F_{\mu\nu}\} + O(\theta^2) \end{cases} \tag{3.60}$$

Alors, dans un espace non commutatif on trouve :

$$terme_{non.commutative} = terme_{ordinaire} + correction_{non.commutative}$$

Chapitre 4

L’équation de Klein-Gordon dans l’espace non commutatif

Introduction :

La théorie des champs non commutative donne une nouvelle vision pour comprendre beaucoup des phénomènes physiques (divergence l'ultraviolet et infrarouge, l’unitarété, causalité et nouvelle physique à très courte distances de l'ordre de longueur de Planck) [17,18].

La théorie du champ non commutative est motivée par l'extension naturelle des relations des commutations de la mécanique quantique habituelle entre la positon et l’impulsion, en imposant des relations de la commutation supplémentaires entre les coordonnées de la position eux-mêmes.

On peut étudier les conséquences physiques de cette théorie en faisant détailler les évaluations analytiques pour les quantités physiques mesurables et comparé les résultats avec les données expérimentales pour trouver une limite supérieure sur le paramètre θ. Les plus phénomènes naturels évidents utiliser dans la recherche pour les effets du non commutative sont simples systèmes de la mécanique quantique, comme l'atome de l'hydrogène [19,20]. Dans l’espace non commutative on attend que la dégénérescence de la ligne spectrale initiale soit soulevée, donc on peut dire que la non commutativité joue le rôle du champ magnétique.

Dans ce travail on présenter une contribution importante à la non commutative approche à l'atome d'hydrogène. Notre but est résoudre l'équation Klein-Gordon pour le Coulomb potentiel dans un espace-temps non commutative en l'ordre haut de paramètre du non commutativité qui utilise les cartes de Seiberg-Witten et le produit de Moyal. Nous donc trouvons la modification du non-commutative des niveaux d'énergie d'atome d'hydrogène et nous montrons que le non commutativité est la source des corrections de déplacement des raies.

4.1. Les cartes de seiberg-witten :

Ici nous cherchons une correspondance $\phi^A \rightarrow \hat{\phi}^A$. Et $\lambda \rightarrow \hat{\lambda}(\lambda, A_\mu)$ où $\phi^A = (A_\mu, \varphi)$ est un champ générique, A_μEt φ est le champ de jauge et le champ scalaire chargé respectivement, et λ est paramètre de la jauge $U(1)$ de la transformation infinitésimal, tel que :

$$\hat{\phi}^A(A) + \hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{\phi}^A(A) = \hat{\phi}^A(A + \delta_\lambda) \tag{4.2}$$

Où : δ_λ est la transformation de la jauge ordinaire et $\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}$ est la transformation de jauge non commutative, sont définies par :

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{\varphi} = i\hat{\lambda} * \hat{\varphi}\ , \qquad \delta_\lambda \varphi = i\lambda\varphi \tag{4.3}$$

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\lambda} + i[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu]_*\ , \qquad \delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda \tag{4.4}$$

Conformément à la méthode générale des théories de jauge dans l'espace non commutative, en utilisant ces transformations et on peut obtenir le deuxième ordre du paramètre $\theta^{\mu\nu}$ de non commutative des cartes de Seiberg-Witten suivantes [21]:

$$\hat{\varphi} = \varphi + \theta\varphi^1 + \theta^2\varphi^2 + O(\theta^3) \tag{4.5}$$

$$\hat{\lambda} = \lambda + \theta\lambda^1(\lambda, A_\mu) + \theta^2\lambda^2(\lambda, A_\mu) + O(\theta^3) \tag{4.6}$$

$$\hat{A}_\xi = A_\xi + \theta A_\xi^1(A_\xi) + \theta^2 A_\xi^2(A_\xi) + O(\theta^3) \tag{4.7}$$

$$\hat{F}_{\mu\xi} = F_{\mu\xi}(A_\xi) + \theta F_{\mu\xi}^1(A_\xi) + \theta^2 F_{\mu\xi}^2(A_\xi) + O(\theta^3) \tag{4.8}$$

Où :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.9}$$

Pour commencer, nous considérons une théorie du champ non commutative avec une particule scalaire chargée dans la présence d'un champ de jauge électrodynamique dans un espace-temps de Minkowski. Nous pouvons écrire l'action comme [22]:

$$S = \int d^4 x \left(\eta^{\mu\nu}(\hat{D}_\mu\hat{\varphi})^+ * \hat{D}_\nu\hat{\varphi} + m^2\hat{\varphi}^+ * \hat{\varphi} - \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu}\right) \tag{4.10}$$

Où la dérivé covariante de jauge est définit par : $\hat{D}_\mu\hat{\varphi} = (\partial_\mu - ie\hat{A}_\mu) * \hat{\varphi}$.

Ensuite on utiliser les transformations infinitésimales du champ générique (4.3) et (4.4) et les relations de produit-star prouvent que l'action dans Eq.(4.10) est invariante. Par la variation de la densité scalaire sous la transformation de jauge et en généralisé l'équation du champ et le théorème de Noether, on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\varphi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \hat{\varphi})} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \hat{\varphi})} - \partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \partial_\sigma \hat{\varphi})} + O(\theta^3) = 0 \tag{4.11}$$

4.2. L'équation de Klein-Gordon non commutative :

On étudier d'équation de K-G pour l'interaction de Coulomb $\left(-\frac{e}{r}\right)$ dans l'espace libre non commutative. Ça veut dire que nous traiterons avec les solutions de l'équation du champ libre non commutative pour la jauge $U(1)$[23]. Pour ceci nous utilisons les équations de champ modifié dans Eq. (4.11) et le champ générique $\hat{A}_\mu$ afin que :

$$\delta \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\lambda} - ie\hat{A}_\mu * \hat{\lambda} + ie\hat{\lambda} * \hat{A}_\mu \tag{4.12}$$

Et les équations des champs libres non commutatifs :

$$\partial^\mu \hat{F}_{\mu\nu} - ie\left[\hat{A}^\mu, \hat{F}_{\mu\nu}\right]_* = 0 \tag{4.13}$$

On utiliser les cartes de Seiberg-Witten (4.7), (4.8) et le choix (4.13), pour obtenir la forme du potentiel Coulombien [23]:

$$\hat{a}_0 = -\frac{e}{r} + \frac{e^5}{20r^5}\left(\theta^{ij}\right)^2 + O(\theta^3) \tag{4.14}$$

$$\hat{a}_i = \frac{e^3}{4r^4}\theta^{ij}x_j + O(\theta^3) \tag{4.15}$$

Utiliser les équations de champ modifiées dans Eq. (4.11) et le champ générique $\hat{\varphi}$:

$$\delta_{\hat{\lambda}} \hat{\varphi} = i\hat{\lambda} * \hat{\varphi} \tag{4.16}$$

L'équation de K-G dans l'espace-temps non commutative à la présence de potentiel vecteur $\hat{A}_\mu$ peut être donnée en :

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2\right)\hat{\varphi} + \left(ie\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\hat{A}_\nu - e^2\eta^{\mu\nu}\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu + 2ie\eta^{\mu\nu}\hat{A}_\mu\partial_\nu\right)\hat{\varphi} = 0 \tag{4.17}$$

Utiliser maintenant la simplification suivant :

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\partial_0^2 + \Delta \tag{4.18}$$

Et : $$2ie\eta^{\mu\nu}\hat{A}_\mu\partial_\nu = i\frac{2e^2}{r}\partial_0 - i\frac{2e^6}{20r^5}\left(\theta^{ij}\right)^2\partial_0 - \frac{e^4}{2r^4}\theta.L \tag{4.19}$$

Et : $$-e^2\eta^{\mu\nu}\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu = \frac{e^4}{r^2} - \frac{2e^8}{20r^6}\left(\theta^{ij}\right)^2 - \frac{e^8}{16r^8}\left(\theta^{ij}x_j\right)^2 \tag{4.20}$$

Où $L = r \times p$ et $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Mettre que $\theta^{ij} = \epsilon^{ijk}\theta_k$ (ϵ^{ijk}est le symbole de Levi-Civita est sous tenseur du troisième niveau, et manque complètement de symétrie)

Alors l'équation de K-G (4.17) jusqu'à $O(\theta^3)$ prend la forme :

$$\Big[-\partial_0^2 + \Delta - m_e^2 + \frac{e^4}{r^2} + i\frac{2e^2}{r}\partial_0 - \frac{e^4}{2r^4}\theta.L - \frac{e^8}{16r^8}\left(\theta^{ij}x_j\right)^2 - i\frac{4e^6}{20r^5}\theta^2\partial_0 - \frac{4e^8}{20r^6}\theta^2\Big]\hat{\varphi} = 0 \tag{4.21}$$

L'équation (4.21) réduit à l'équation radiale :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)-e^4}{r^2} + \frac{2Ee^2}{r} + E^2 - m_e^2 - \frac{e^4}{2r^4}\theta.L - \frac{e^6}{5r^5}E\theta^2 - \frac{e^8}{16r^8}\left(\theta^{ij}x_j\right)^2 - \frac{e^8}{5r^6}\theta^2\right]R(r) = 0 \tag{4.22}$$

Dans l'équation (4.22) le potentiel de coulomb dans l'espace non commutative apparaître dans les termes de perturbations suivants :

$$-\frac{e^4}{2r^4}\theta.L - \frac{e^6}{5r^5}E\theta^2 - \frac{e^8}{16r^8}\left(\theta^{ij}x_j\right)^2 - \frac{e^8}{5r^6}\theta^2 \tag{4.23}$$

Le premier terme est obtenu dans les Refs. (4.12) et (4.14), le deuxième, troisième et dernier terme sont des nouvelles corrections obtenues par les cartes de Seiberg-Witten à deuxièmes ordres.

4.3. La solution :

Pour $\theta = 0$, la solution d’équation (4.22) on arrive à la solution dans l’espace ordinaire.

On obtient :

$$E = E_{n,l}^{0} = \frac{m_e\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right)}{\left[(n+\frac{1}{2})^2+(l+\frac{1}{2})^2+2(n+\frac{1}{2})\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (4.24)$$

Et : $$R_{nl}(r) = \sqrt{\frac{a}{n+\mu+1}}\left(\frac{n!}{\Gamma(n+2\mu+2)}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\nu+1} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{2\nu+1}(x) \qquad (4.25)$$

Où :

$$\nu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \quad , \qquad a = \sqrt{m_e^2 - E^2}.$$

Maintenant, pour obtenu la modification des niveaux d'énergie résulte des termes (4.23) dû à la non commutativité d’espace-temps, on utilise la théorie de la perturbation. Pour simplifier, on prend $\theta_3 = \theta$ et on suppose que les autres composants sont égalent à zéro, tel que $\theta . L = \theta L_z$ et $\left(\theta^{ij} x_j\right)^2 = \theta^2[(r^2 - z^2) - 2xy]$. De plus, on utilise :

$$\langle nlm|L_z|nlm'\rangle = m_l \delta_{mm'} \ , \quad -l \leq m_l \leq l \qquad (4.26)$$

Et aussi comme l’effet de premier-ordre de la théorie de perturbation la valeur attendu de $\frac{1}{r^4}$, $\frac{1}{r^5}$ et $\frac{1}{r^6}$ avec respectivement de la solution exacte (4.24), est donné par :

$$\langle nlm|r^{-k}|nlm'\rangle = \int_0^\infty R_{nl}^2\,(r) r^{-k} dr \delta_{mm'}$$

$$= \frac{2^k a^k n!}{2(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)}$$

$$\times \int_0^\infty x^{2\nu+2-k} e^{-x} [L_n^{2\nu+1}(x)]^2\, dx \delta_{mm'}$$

$$= f(k) \ \ (k = 3,4,5,6) \qquad (4.27)$$

On utiliser la relation entre la confluente fonction l'hypergéométrique $F(-n; \nu+1; x)$et les polynômes de Laguerre associé$L_n^{\nu}(x)$, à savoir :

$$L_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+1)} F(-n; \nu+1; x) \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-x} [F(-n; \gamma; x)]^2\, dx \\ = \frac{n!\Gamma(\nu)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \Big\{1 + \frac{n(\gamma-\nu-1)(\gamma-\nu)}{1^2\gamma} \\ + \frac{n(n-1)(\gamma-\nu-2)(\gamma-\nu-1)(\gamma-\nu)(\gamma-\nu+1)}{1^2 2^2 \gamma(\gamma+1)} \\ + \cdots + \frac{n(n-1)\dots(\gamma-\nu-1)\dots(\gamma-\nu+n-1)}{1^2 2^2 \dots n^2 \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}\Big\}\end{aligned} \tag{4.29}$$

L'équation (4.27) devient :

$$\langle nlm|r^{-4}|nlm'\rangle = \int_0^\infty R_{nl}^2\,(r) r^{-4} dr \delta_{mm'}$$

$$= \frac{16a^4 n!}{2(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)}$$

$$\times \int_0^\infty x^{2\nu-1-1} e^{-x} [L_n^{2\nu+1}(x)]^2\, dx \delta_{mm'}$$

$$= \frac{8a^4 n!}{(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)} \left[\frac{\Gamma(n+2\nu+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu+2)}\right]^2$$

$$\times \int_0^\infty x^{2\nu-2} e^{-x} [F(-n; 2\nu+2; x)]^2\, dx \delta_{mm'}$$

$$= \frac{4a^4}{(2\nu-1)\nu(2\nu+1)(n+\nu+1)}$$

$$\times \left[1 + \frac{3n}{(\nu+1)} + \frac{3n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)}\right] \delta_{mm'} = f(4) \tag{4.30}$$

$$\langle nlm|r^{-5}|nlm'\rangle = \frac{4a^5}{(2\nu-1)(\nu-1)\nu(2\nu+1)(n+\nu+1)}$$

$$\times \left[1 + \frac{6n}{(\nu+1)} + \frac{15n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)}\right.$$

$$\left. + \frac{5n(n-1)(n-2)}{(\nu+1)(2\nu+3)(\nu+2)}\right] \delta_{mm'} = f(5) \tag{4.31}$$

$$\langle nlm|r^{-6}|nlm'\rangle = \frac{4a^6}{(2\nu-1)(\nu-1)\nu(2\nu+1)(n+\nu+1)}$$

$$\times \left[1 + \frac{6n}{(\nu+1)} + \frac{15n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)}\right.$$

$$+\frac{5n(n-1)(n-2)}{(\nu+1)(2\nu+3)(\nu+2)}+\frac{15n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)}$$

$$\left.+\frac{5n(n-1)(n-2)}{(\nu+1)(2\nu+3)(\nu+2)}\right]\delta_{mm'}=f(6) \tag{4.32}$$

Réunir ces résultats on obtient :

$$\Delta E^{nc}=-\frac{\alpha^2 m_l}{2}f(4)\theta-\frac{\alpha^3}{5}\left(E^0_{n,l}f(5)+\frac{29}{24}\alpha f(6)\right)\theta^2 \tag{4.33}$$

Le changement d'énergie est dû aux termes (4.23). De plus, le premier terme d'ordre θ est multiplié par le nombre quantique magnétique indique la division d'états avec le même moment angulaire orbitale dans les composantes correspondantes. Ce comportement est semblable à l'effet Zeeman. Le reste des termes de deuxième ordre de θ est indépendant du nombre quantique magnétique qui clairement reflète l'existence de spin. Encore, la valeur des termes de correction qui contient θ^2 est très semblable au couplage spin-spin, donc le paramètre du non commutative θ Jeu le rôle de spin, c'est à dire la dégénérescence de niveaux est complètement enlevée.

Les niveaux d'énergie d'atome hydrogène dans le cadre d'équation de K-G non commutative est :

$$\hat{E}=E^0_{n,l}-\frac{\alpha^2 m_l}{2}f(4)\theta-\frac{\alpha^3}{5}\left(E^0_{n,l}f(5)+\frac{29}{24}\alpha f(6)\right)\theta^2 \tag{4.34}$$

On comparer ce résultat à l'actuelle précision théorique sur le déplacement de l'énergie du niveau $2P\ et\ 1S$ est environ 80 Hz et 14 KHz respectivement [24] et on trouver la borne de paramètre non commutatif θ :

De Eq.(2.59) on obtient : $\nu(2P)=0.99$ avec $\alpha=7.299\times10^{-3}$

Et Eq.(2.57) : $E^0_{2,1}=0.50877$ Mev

Avec : $f(4)=6.25\times10^{-6}$, $f(5)=-2.04\times10^{-6}$, $f(6)=-3.64\times10^{-7}$

On obtient finalement :

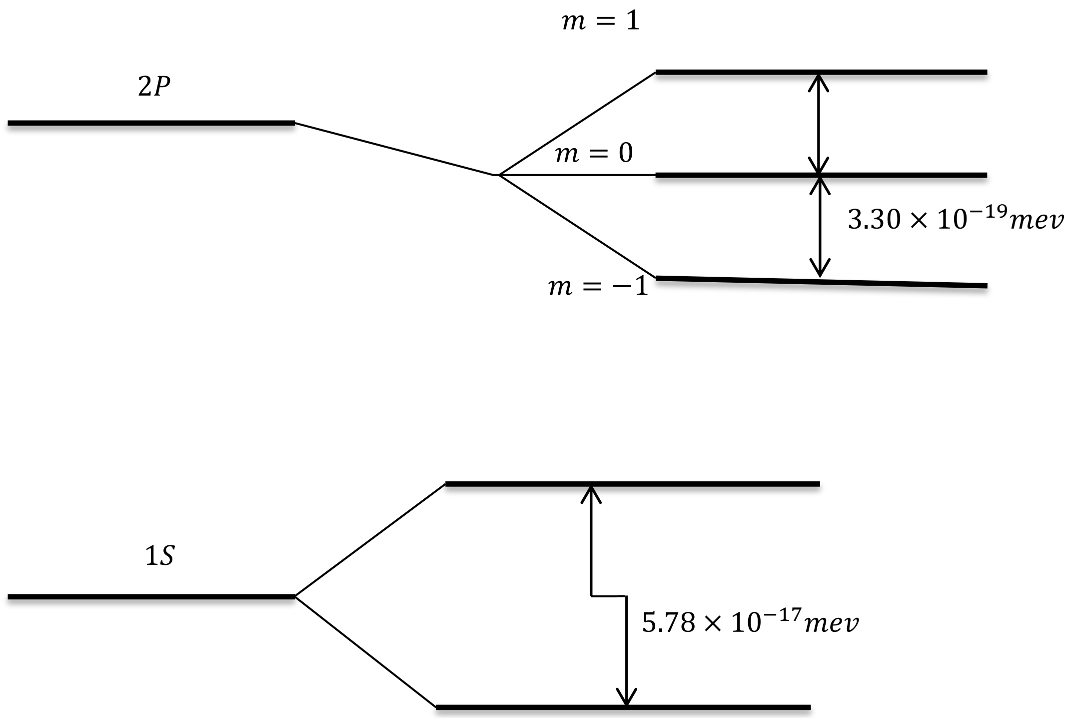
$$\Delta E^{nc}=-1.66\times10^{-10}m_l\theta+8.02\times10^{-14}\theta^2 \quad \text{Où} \quad m=0,\pm1 \tag{4.35}$$

Sachant que $dim(\theta^{\mu\nu})=masse^{-2}$

Avec :

$$\theta \leq (5.2\ Gev)^{-2} \tag{4.36}$$

Ceci est en accord avec d'autres résultats présentés par exemple dans la référence [23] ensuite, la figure ci-dessous montre que les déplacements des lignes du spectre de l'énergie en raison de la présence du paramètre θ, pour deux états dégénérés $1S$, $2P$ avec $E = 0$ on obtient :



Représentation des niveaux d'énergie d'atome d'hydrogène

CONCLUSION GENERALE

Le but de ce mémoire est de formuler l'étude d'un système relativiste dans le cadre de la géométrie non commutative.

A traverse ce mémoire, nous avons présenté la théorie des perturbations stationnaires et l'équation de Klein-Gordon dans l'espace ordinaire, et l'on a appliqué sur l'atome d'hydrogène pour obtenir une équation spécifique, et on obtenir sa solution par la méthode de Nikiforov-Uvarov, et on donne une exposition des théories de jauge dans l'espace ordinaire et l'espace non commutatif.

Dans chapitre 4 nous avons commencé à partir de la théorie de champs quantique dans l'espace canonique non commutatif et a utilisé une particule scalaire chargée relativiste dans l'espace-temps de Minkowski en trouve qui est invariant sous la transformation infinitésimale de jauge généralisée. Par l'utilisation des cartes de seiberg-witten et le produit star jusqu'à deuxième ordre de paramètre de non commutativité θ. Nous avons généralisés les équations de mouvement et a dérivé l'équation de K-G déformé pour le potentiel de coulomb non commutatif. En résoudre l'équation de K-G déformé pour trouver le changement d'énergie en deuxième ordre de θ. Où le premier terme est proportionnel de nombre quantique magnétique. Ce comportement est semblable à l'effet Zeeman ce qui est appliqué dans le champ magnétique du système sans spin et le deuxième ordre est proportionnel à θ^2, donc nous avons expliqué explicitement l'effet de spin dans cet espace. D'où on peut dire que l'équation de Klein-Gordon à deuxième ordre de θ dans l'espace non commutatif décrit des particules avec spin.

Nous résolvons l'équation de K-G déformé et obtient la correction non commutative des d'énergie et en comparant le résultat avec de la précision actuelle sur le déplacement de raie du niveau $1S$ et $2p$ pour obtenir un lié sur le paramètre de non commtativité.

Bibliographie

[1] Ruth Durrer, Mécanique Quantique II, Université de Genève Quai E. Ansermet 24,1211 Genève 4, suisse.

[2] C.Tannoudji, F.Laloe, Mécanique Quantique ; Université de Paris 6, (1973).

[3] Théorie Quantique des Champs, Jean-Pierre Derendinger, fichier pdf.

[4] B. H. Bransden and C. J. Joachain, Physics of Atoms and Molecules, fichier pdf.

[5] A.F.Nikiforov, V.B.Uvarov, Special Function of Mathematical Physics (Birkhauser, Basel, 1988).

[6] M. Shaposhinkove, Champ Quantique Relativiste, 2005, fichier pdf.

[7] F. Delduc, Introduction aux Groupes de Lie destinée aux physiciens, Laboratoire de physique de l'ENS Lyon, septembre 2008, fichier pdf.

[8] E. Elbaz, de l'électromagnétisme à l'électrofaible. Ellipses, 1989

[9] E. Sérié, Théorie de jauge en géométrie non commutative et généralisation du modèle de Born-Infeld, thèse de Doctorat, université de Pris 06, 20 Septempre 2005, fichier pdf.

[10] T. Mori and C. S. Lim and S. N. Mukherjee, the Physics of the Standard Modele and Beyond, fishier Pdf 2004.

[11] D. Bailin and A. Love, Introduction to Gauge Field Theory, ISBN 1993.

[12] B. Jurco, Moller, S.Schraml, P.Schupp, J.Wess, construction of non-Abelian gauge theories on non commutative space, Eur.Phys.J.C21:383-388,2001, [arXiv:hep-th/0104153 v4], fichier pdf.

[13] H. Menigher, au-dela du modèle standard et applications, mémoire de magister, université Mentouri-Constantine, 17/10/2007, fichier pdf.

[14] K. Farid, Aspects Mathématiques et physiques de la géométrie non commutative, université d'arisona, 2007, fichier pdf

[15] P. Schupp, non-Abelian gauge theory on noncommutative space, 2001, [arXiv:hep-th/0111038 V1], fichier pdf.

[16] X. Calmet, Effective Field theory on Non-Commutative space-time, Phy.Rev. D68 (2003)025016 [arXiv:hep-ph/0305027 V2], fichier pdf.

[17] N. Seiberg, L. Susskind and N. Toumbas, J. High Energy Phys. 0006, 044 (2000), [arXiv:hep-th/0005015].

[18] T. Yoneya, Progr. Theor. Phys. 103, 1081 (2000), [arXiv:hep-th/0004074].

[19] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari and A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. 86, 2716 (2001).

[20] H. Motavalli and A. R. Akbarieh, Mod. Phys. Lett. A 25, 2523 (2010).

[21] N. Seiberg and E. Witten, J. High Energy Phys. 032, 9909 (1999).

[22] N. Mebarki, S. Zaim, L. Khodja and H. Aissaoui, Phys. Scripta 78, 045101 (2008).

[23] A. Stern, Phys. Rev. Lett. 100, 061601 (2008).

[24] M. I. Eides, H. Grotchand, V. A. Shelyuto, Phys. Rep.342 (2001) 63.

ملخص

تطرقنا في هذه الدراسة الفزيائية الخاصة بمذكرة الماستر في فيزياء الجسيمات ذات الطاقة العالية الى تطبيق الصيغ الرياضية الخاصة بالفضاء اللاتبادلي على معادلة كلين-غوردن.

الانحطاط المتحصل عليه بالنسبة لذرة الهيدروجين في الفضاء العادي تم نزعه في الفضاء اللاتبادلي و تصحيح الطاقة ذو الرتبة الثانية يبين ان الفضاء اللاتبادلي يلعب دور السبين.

الكلمات المفتاحية : معادلة كلين-غوردن, طريقة نكيفوروف-اوفروف, نظرية العيار, طريقة زيبارغ-ويتن, فضاء لاتبادلي.

Résumé

Nous avons agressé dans cette étude physique du mémoire de master en physique des particules à haute énergie l’application des formalismes mathématiques de l’espace non commutatif sur l’équation de Klein-Gordon.

La dégénérescence qui nous avons trouvé pour l’atome d’hydrogène dans l’espace ordinaire est retiré dans l’espace non commutatif et la correction d’énergie d’ordre deux indique que l’espace non commutatif jeu le rôle de spin.

Les mots clés : l’équation de Klein-Gordon, méthode de Nikiforov-Uvarov, théorie de jauge, méthode de seiberg-witten, espace non commutatif.

Abstract

In this work of search we have accomplished this physique study of master theory in physics of particles high energy to apply the mathematic formalisms that are related to the non-commutative space on the Klein Gordon equation.

The degeneration that found us for atom of hydrogen in the ordinary space is withdrawn in the non commutative space and the correction of energy of order two indicates that the space non commutative play the role of spin.

Keys words : Klein Gordon equation, Nikiforov Uvarov method, Gauge theory, Seiberg Witten method, non commutative space.