REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Algèbre et Mathématiques Discrètes

Thème

Filtres et idéaux dans un treillis classiques

Présenté par :
DOUADI Imane.

Devant le jury composé de :

M^r LADJELAT	Lahcene	MAA,	Université de M'sila	**Président**.
M^r AMROUNE	Abdelaziz	Prof,	Université de M'sila	**Encadreur**.
M^r SAADAOUI	Kheir	MCB,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2020/2021

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Je remercie tout d'abord ***Dieu*** *le tout puissant qui m'a donné la santé, la volonté, le courage, et la patience afin de pouvoir accomplir ce modeste travail.*

Après je présente mes profondes gratitudes à ***Mr : AMROUNE Abdelaziz*** *qui m'a fait bénéficier de son savoir, son expérience et de ses précieux conseils, afin de perfectionner ce travail et d'avoir accepté de diriger travail.*

Je remercie également les membres de jury ***LADJELAT Lahcene*** et ***SAADAOUI Kheir*** *pour avoir accepté de juger travail.*

En fin mes remerciements vont aussi aux enseignent du département de mathématiques pour l'effort qu'ils fournissent, afin de transmettre pleinement leurs savoirs précieuses.

En fin je remercie toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

La théorie des treillis est née de l'étude de **Richard DEDEKIND** sur la distributivité.

Richard DEDEKIND, autour des années **1890** a considéré la question suivante : Combien de sous-groupes différents peut-on obtenir en utilisant que les opération d'intersection et la somme de sous-groupes ?

La théorie des treillis intervient autant en théorie des groupes, en topologie général et en théorie des anneaux. Les treillis les plus connus sont les algèbres de Boole (cette structure algébrique a été étudiée par le mathématicien **Georges Boole (1815 - 1864)**.

Le concept de treillis est important dans beaucoup de situation. C'est une classe très important d'ensemble ordonnés, car ils font le lien entre l'étude des relations d'ordre et l'étude de certaines structures algébriques où (on prendre considération la notion de bornes inférieure et supérieure des éléments), leur importance dans les sciences de l'ingénieur et en particulier en informatique.

Dans un treillis nous aurons à la fois les notions de filtre et d'idéal. L'objectif principale de ce mémoire est d'améliorer nos connaissances sur les notions de filtres et idéaux dans un treillis classique. La notion de filtre et d'ideal à été étudié une maniere intensive dans la léturature enciènne ainsi que que dans la mathématique floue [4, 5, 6, 14, 17].

Ce travail est réparti en trois chapitres :

- Le premier chapitre est consacré aux définitions et propriétés essentielles des ensembles ordonnés et de donner quelques exemples de ces ensembles, ainsi que l'introduction de la notion de treillis.

- Dans le deuxième chapitre nous étudions et caractérisons les type des filtres, filtre principale, filtre engendré par une partie, filtre premier, filtre irréductible et ultrafiltre dans différentes types de treillis. Aussi, nous faisons la même étude pour les idéaux.

-Le troisième chapitre concerne les treillis de Heyting où nous étudions les systèmes déductifs dans les algèbres Heyting ainsi que les filtres dans cette structure.

Chapitre 1

Généralités sur les treillis distributifs

Dans cette section nous allons présenter quelque définitions et des propriétés très importantes des treillis, treillis distributifs, modulaires, complémentés et treillis de Boole·

1.1 Relations d'ordres

Dans cette partie on va rappeler les notions essentielles sur les ensembles ordonnés et donner quelques propriétés de ces ensembles.

1.1.1 Ensemble ordonné

Soit E un ensemble et $\Re$ une relation binaire sur E.

Définition 1.1.1 *(**Ordre partiel**) [1, 2, 13, 7]*

*Une relation binaire $\Re$ sur un ensemble E est dite **relation d'ordre** (au bien ordre partiel), si pour tout $a, b, c \in E$ on a les propriétés suivants :*

- *Réflexivité: $x\Re x$.*
- *Antisymétrique: $x\Re y$ et $y\Re x$, alors $x = y$.*
- *Transitivité: $x\Re y$ et $y\Re z$ alors $x\Re z$.*

Dans ce cas le couple $(E, \Re\ )$ est dit ensemble ordonné (au bien ensemble partiellement ordonné).

Définition 1.1.2 ***(Ordre strict)*** *[1, 2, 13, 7]*

Une relation binaire $\Re$ sur un ensemble E est dite ***ordre strict****, si $\Re$ est irréflexive et transitive. Dans ce cas le couple $(E, \Re\ )$ est dit ensemble strictement ordonné.*

Exemple 1.1.1 *:*

1 : $(\mathbb{N}^*, |)$ est un ensemble ordonné.

2 : $(P(E), \subseteq)$ est un ensemble ordonné.

3 : $(\mathbb{N}, \leq)$ est un ensemble ordonné.

4 : $(\mathbb{N}, <)$ ensemble strictement ordonné.

Remarque 1.1.1 *[1, 12]*

• *Un relation strict $<$ est nécessairement antisymétrique. En effet, si on imagine $((x < y)$ et $(y < x))$, avec $x \neq y$, la transitivité de $<$ entraîne $x < x$, ce qui est contredit l'irréflexivité de $<$.*

Définition 1.1.3 ***(La comparabilité)****[1, 2]*

Soient $(E, \leq)$ est dit ensemble ordonné et x, y des éléments de E.

1. On dit que x et y sont comparables selon $\leq$ si $x \leq y$ ou $y \leq x$.

2. On dit que x et y sont incomparables selon $\leq$ si $x \nleq y$ et $y \nleq x$.

Définition 1.1.4 *[1, 11]*

Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est dit linéairement ordonné (ou bien totalement ordonné ou chaîne) si tous ses éléments sont comparables.

Définition 1.1.5 ***(Antichaîne)*** *[1, 13]*

Un ensemble ordonné $(E, \leq)$. Une partie A de E est dite antichaîne, si tous ses éléments sont deux à deux incomparables.

1.1.2 Éléments particuliers d'un ensemble ordonné*[1, 2, 15]*

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, $A \subset E$.

1. *Élément maximal.* Un élément a de E est dit maximal de A si pour tout $x \in A$ $a \leq x \Rightarrow x = a$ (aucun élément distinct de a ne majore a.

2. *Élément minimal.* Un élément a de E est dit minimal de A si pour tout $x \in A$: $x \leq a \Rightarrow x = a$ (aucun élément distinct de a ne minore a

3. *Plus grand élément (maximum).* On dit que $M \in A$ est le maximum de A si $x \leq M$ pour tout $x \in A$ (noté par 1_E).

4. *Plus petit élément (minimum).* On dit que $m \in A$ est le minimum de A si $m \leq x$,pour tout $x \in A$ (noté par 0_E).

5. *Majorant* . On dit que $a \in E$ est un majorant de A, si $x \leq a$ pour tout $x \in A$.

6. *Minorant* . On dit que $a \in E$ est un minorant de A , si $a \leq x$ pour tout $x \in A$.

7. *Borne supérieure.* On appelle borne supérieure d'une partie A de E tout élément s de E qui vérifie les deux propriétés:

- pour tout$x \in A$, $x \leq s$ (s est un majorant de A).
- Pour tout m majorant de A, $s \leq m$.

8. *Borne inférieur* . On appelle borne inférieur d'une partie A de E tout élément I de E qui vérifie les deux propriétés:

- pour tout$x \in A$, $x \leq I$ (I est un minorant de A).
- Pour tout m minorant de A, $I \leq m$.

1.2 Treillis

1.2.1 Définition d' un treillis

Soit $(T, \leq)$ un ensemble ordonné

Définition 1.2.1 *(sup.demi-treillis)[15]*

*T est dit un **sup.demi-treillis**, si tout pair* $\{x, y\}$ *de* T *possède une borne supérieure dans* T*, et on notera :* $\sup\{x, y\} = x \vee y \cdot$

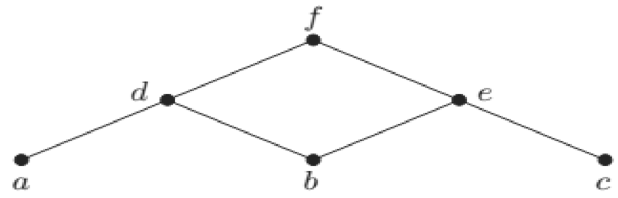


FIG.1.1-*Un sup.demi-treillis*

Définition 1.2.2 *(inf.demi-treillis) [15]*

*T est dit un **inf.demi-treillis**, si tout pair* $\{x, y\}$ *de* T *possède une borne inférieure dans* T*, et on notera :* $\inf\{x, y\} = x \wedge y \cdot$

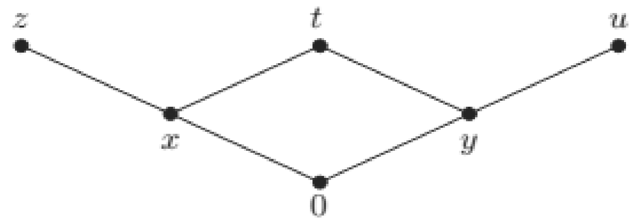


FIG.1.2- *Un inf.demi-treillis*

Définition 1.2.3 *(treillis)[7]*

On dit que T *est un **treillis** ssi tout pair* $\{x, y\}$ *de* T *admet une borne supérieure notée par* $x \vee y$ *et une borne inférieure notée par* $x \wedge y$ *.*

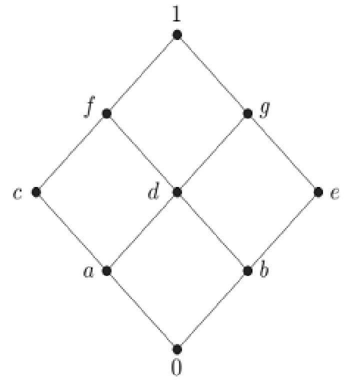


FIG.1.3- *Un Treillis*

Exemple 1.2.1 :

1. $(P(E), \subseteq)$ est un treillis avec $A \vee B = A \cup B$ et $A \wedge B = A \cap B$ pour tout $A, B \in P(E)$.

En effet $(P(E), \subseteq)$ est un ensemble ordonné et on montre que $A \vee B = A \cup B$.

$i) \begin{cases} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{cases} \Rightarrow A \cup B \in Maj\,\{A, B\}$.

$ii)$ Soit C un autre majorant de $\{A, B\}$:

$\begin{cases} A \subseteq C \\ B \subseteq C \end{cases} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$ i.e., $A \cup B$ est le plus petit majorant de $\{A, B\}$.

$$\text{Donc } A \vee B = A \cup B.$$

De la même méthode par $A \wedge B = A \cap B$.

2. $(\mathbb{N}^*, |)$ est un treillis : $x \vee y = ppcm\,(x, y)$ et $x \wedge y = p\gcd(x, y)$, pour tout $x, y \in \mathbb{N}^*\cdot$

3. Tout chaine est treillis : $x \vee y = \max(x, y)$ et $x \wedge y = \min(x, y)\cdot$

Proposition 1.2.1 *Si $(T, \leq)$ un treillis fini, alors T admet un plus petit élément et un plus grand élément .*

Proposition 1.2.2 *[7, 8]*

Dans un treillis quelconque $(T, \leq)$ et pour tout x, y et $z \in T$

1.

$$x \leq y \iff x = x \wedge y.$$
$$\iff y = x \vee y.$$

2. *Idempotence:*

$x \vee x = x$ *et* $x \wedge x = x.$

3.*Commutativité:*

$x \wedge y = y \wedge x$ *et* $x \vee y = y \vee x.$

4. *Associativité:*

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ *et* $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$

5. *Absorption:*

$x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x.$

Preuve. 1:

$i)$ On montre que $x \leq y \iff x = x \wedge y.$

$\Longleftarrow$) On a : $x = x \wedge y \Rightarrow x \leq x$ et $x \leq y \Rightarrow x \leq y.$

$\Longrightarrow$) On a ($x \leq x$ et $x \leq y$) $\Rightarrow x$ est minorant de $\{x, y\}$, et comme $x \wedge y$ est le plus grand des minorant de$\{x, y\}$.

Alors; $x \leq x \wedge y$ ....(1) et on par définition de $x \wedge y = \inf\{x, y\}$

$x \wedge y \leq x$.........(2).

De 1) et 2) : $x \leq x \wedge y \leq x \Rightarrow x = x \wedge y.$

Donc $x \leq y \iff x = x \wedge y.$

♦De la même façon $x \leq y \iff y = x \vee y.$

2:*Idempotence*,

♦ On montre que $x \vee x = x$ et $x \wedge x = x$:

on a $x \leq y \iff x \vee y = y$

$\iff x \wedge y = x$ et comme $\leq$ est reflexive, alors

$x \leq x \iff x \vee x = x$ et $x \wedge x = x.$

3: *La commutativité* ,

de la même méthode

♦ On montre que $x \vee y = y \vee x.$

On a $x \vee y = \sup\{x, y\} = \sup\{y, x\} = y \vee x.$

De la même méthode par $x \wedge y = y \wedge x$.

On a $x \wedge y = \inf \{x, y\} = \inf \{y, x\} = y \wedge x$.

4: *Pour l'associativité,*

♦ On montre que $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;

- Posons $S = x \vee (y \vee z)$, alors $x \leq S$ et $y \vee z \leq S$, cela veut dire que $x \leq S$, $y \leq S$ et $z \leq S$ i.e., $x \vee y \leq S$ et $z \leq S$ .Donc S est un majorant de $\{(x \vee y), z\}$.

- Soit M un autre majorant de $\{(x \vee y), z\}$, alors $x \leq M$, $y \leq M$ et $z \leq M$ i.e., $x \leq M$ et $y \wedge z \leq M$.

Donc M est un majorant de $\{x, (y \wedge z)\}$, alors S est un borne supérieure de $\{(x \vee y), z\}$.

Donc $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

♦De la même façon$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

5: *Pour l'absorption,*

♦On montre que $x \vee (x \wedge y) = x$.

- Nous avons $x \wedge y \leq x$ et $x \leq x$, alors x est un majorant de $\{x, x \wedge y\}$.

- Soit M un autre majorant de $\{x, x \wedge y\}$ tq $M \neq x$, alors $x \leq M$ et $x \wedge y \leq M$, donc x est un borne supérieure de $\{x, x \wedge y\}$, alors $x \vee (x \wedge y) = x$.

Donc $x \vee (x \wedge y) = x$.

♦De même méthode pour $x \wedge (x \vee y) = x$. ■

Théorème 1.2.1 *[15]*

Soit T un ensemble muni de deux lois internes $\wedge, \vee$ et qui sont idempotentes, commutatives, associatives et qui vérifiant les lois d'absorption, alors il existe une relation d'ordre unique $(\leq)$ sur T telle que T soit un treillis, avec sup$_T$ $\{x, y\} = (x \vee y)$ et inf$_T$ $\{x, y\} = (x \wedge y)$.

Cette relation d'ordre définie par : $(x \vee y) = y$ et $(x \wedge y) = x$ qui sont des relations équivalences.

Preuve. :

On démontre l'équivalence des deux relations :

$x \leq_1 y \Longleftrightarrow (x \vee y) = y$.

$x \leq_2 y \Longleftrightarrow (x \wedge y) = x$.

Supposons que $x \leq_1 y$ donc $(x \vee y) = y$ d'où $(x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x$ (loi d'absorption).

Donc $x \leq_2 y$.

Inversement,

Supposons que $x \leq_2 y$ donc $(x \wedge y) = x$ d'où $(x \vee y) = (x \wedge y) \vee y = y$ (loi d'absorption).

Donc $x \leq_1 y$.

D'où $\leq_1 = \leq_2$. ■

Proposition 1.2.3 *[7, 10]*

Dans un treillis $(T, \leq)$ et pour tout $x, y, z, t \in T$

♦ *Si $x \leq y$, alors pour tout $a \in T$: $x \wedge a \leq y \wedge a$ et $x \vee a \leq y \vee a$.*

♦ *Si $x \leq y$ et $z \leq t$, alors $x \wedge z \leq y \wedge t$ et $x \vee z \leq y \vee t$.*

Preuve. :

♦Si $x \leq y \Leftrightarrow (x \wedge y) = x$ et $(x \vee y) = y$, alors :

$(x \wedge a) \wedge (y \wedge a) = (x \wedge y) \wedge (a \wedge a) = (x \wedge a)$, donc $x \wedge a \leq y \wedge a$.

$(x \vee a) \vee (y \vee a) = (x \vee y) \vee (a \vee a) = (x \vee a)$, donc $x \vee a \leq y \vee a$.

♦ Si $x \leq y$ et $z \leq t$:

$x \wedge z \leq y \wedge z$ et $y \wedge z \leq y \wedge t$, donc $x \wedge z \leq y \wedge t$.

$x \vee z \leq y \vee z$ et $y \vee z \leq y \vee t$, donc $x \vee z \leq y \vee t$. ■

1.3 Sous-treillis

Définition 1.3.1 *(sous-sup.demi -treillis) [15]*

Soit A une partie non vide d'un sup.demi-treillis T, on dit que A est ***sous-sup.demi-treillis*** *si,*

- sup_A $\{x, y\}$ existe et égale à $x \vee y$, pour tout x, y dans A.

- $x \vee y \in A$, pour tout $x, y \in A$.

Exemple 1.3.1 *On considère le sup.demi-treillis $(\mathbb{N}^*, |)$ et la partie A définie par $A = \{1, 3, 4, 24\}$.*

A n'est pas un sous-sup.demi-treillis, car sup_A $\{3, 4\} = 24 \neq 3 \vee 4 = 12 \notin A$.

Définition 1.3.2 *(sous-inf.demi -treillis) [15]*

*Soit B une partie non vide d'un inf.demi-treillis T, on dit que B est **sous-inf.demi-treillis** si :*

- inf_B $\{x, y\}$ *existe et égale à* $x \wedge y$, *pour tout* x, y *dans* B.

- $x \wedge y \in B$, *pour tout* $x, y \in B$.

Définition 1.3.3 *(sous-treillis) [13]*

*Un partie A non vide d'un treillis $(T, \leq)$ est dit **sous-treillis** si, elle est à la fois un **sous-sup.demi-treillis** et un **sous-inf.demi-treillis** i·e., pour tout $x, y \in A : x \vee y \in A$ et $x \wedge y \in A$,où*

$$sup_A \ \{x, y\} = x \vee y \ et \ inf_A \ \{x, y\} = x \wedge y.$$

Exemple 1.3.2 *:*

1. Soit $(\mathbb{N}^*, |)$ treillis, nous désignons par $D(n)$ (l'ensemble des diviseurs de n). Alors $D(n)$ est un sous-treillis de $(\mathbb{N}^*, |)$.

En effet,

-Si $x \mid n$ et $y \mid n$, alors $p\,\text{gcd}(x, y) \mid n$, donc $D(n)$ sous-inf·demi -treillis·

-Si $x \mid n$ et $y \mid n$, alors $ppcm(x, y) \mid n$, donc $D(n)$ sous-sup·demi -treillis·

1.4 Morphisme et isomorphisme de treillis

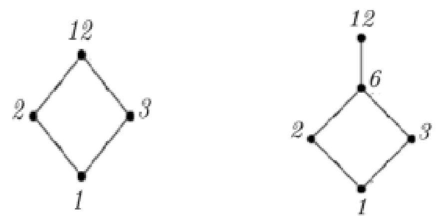
Définition 1.4.1 *(morphisme de treillis) [15, 8]*

*Soient T_1 et T_2 deux treillis. f est un application de T_1 dans T_2 , on dit que f est **morphisme de treillis** si vérifie pour tout $x, y \in T_1$:*

1. $f\ (x \wedge y) = f\ (x) \wedge f\ (y)$.

2. $f\ (x \vee y) = f\ (x) \vee f\ (y)$.

Exemple 1.4.1 *Soint T_1 et T_2 deux treillis définies par les diagrammes de Hasse suivantes:*



T_1 T_2

L'application $f \ : T_1 \longmapsto T_2$ définies par $f(n) = n$ n'est pas un morphisme de treillis, car en effet,

$f(2 \vee 3) = f(12) = 12$ et $f(2) \vee f(3) = 2 \vee 3 = 6.$

où $12 \neq 6.$

Remarque 1.4.1 *[15]*

Un morphisme de treillis est un application croissante·

En effet,

Si $x \leq y$, alors $x \vee y = y$ donc $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = f(y)$

$$\Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Définition 1.4.2 *(isomorphisme de treillis) [15]*

Un isomorphisme de treillis est un morphisme de treillis et bijectif. i.e.,

$$\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \cdot \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \cdot \\ f \quad \text{et injectif et surjectif} \cdot \end{cases}$$

1.5 Propriétés algébriques de quelques classes de treillis

1.5.1 Treillis fermés

Définition 1.5.1 *:*

*Un treillis T est dit **fermé** ou (borné) s'il possède un plus petit élément noté $\ll 0 \gg$ et un plus grand élément noté $\ll 1 \gg$.*

Exemple 1.5.1 *:*

1. L'ensemble des déviseures de 6. $D(n) = \{1, 2, 3, 6\}$ est un treillis fermé tel que : le minimun est 1, et le maximun est 6.

2. $(P(E), \subseteq)$ est un treillis fermé tel que : le plus petit élément est $\emptyset$ et le plus grand élément est E.

3. $(\mathbb{N}^*, |)$ n'est treillis fermé, car il ne possède pas un plus grand élément .

1.5.2 Treillis distributifs

Soit $(T, \vee, \wedge)$ un treillis

Définition 1.5.2 *[13, 16]*

Un treillis T est dit distributif si pour tout x, y et $z \in T$ on a :

(D$_1$). $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

(D$_2$). $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

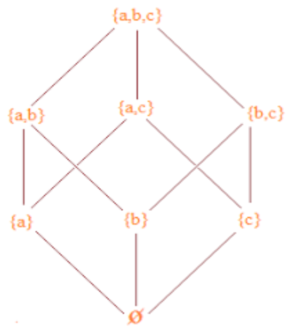


FIG.1.4-*Treillis distributif*

Exemple 1.5.2 *:*

1: $(P(E), \subseteq)$ est un treillis distributif, car on sait que chacune des lois $\cap$ et $\cup$ est distributive par rapport à l'autre.

En effet,

$(P(E), \subseteq)$ est un ensemble ordonné, et on montre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ pour tout A, B et $C \in P(E)$.

$\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in E, x \in A \cap (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \text{ et } x \in B \cup C \\ &\Rightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ou}(x \in A \text{ et } x \in C). \end{aligned}$$

Alors $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$............(1).

$\Leftarrow)$

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) &\Rightarrow x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\ &\Rightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C). \end{aligned}$$

Alors $x \in A \cap (B \cup C)$.....................(2).

De (1) et (2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

De même façon pour $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2: $T = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ treillis ordonné par divisibilité. Ce treillis n'est pas distributif, car :

$2 \wedge (3 \vee 5) = (2 \wedge 30) = 2$ et $(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = 1 \vee 1 = 1$.

Donc $2 \wedge (3 \vee 5) \neq (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5)$.

De même,

$2 \vee (3 \wedge 5) = 2 \vee 1 = 2$ et $(2 \vee 3) \wedge (2 \vee 5) = 30 \wedge 30 = 30$.

Donc $2 \vee (3 \wedge 5) \neq (2 \vee 3) \wedge (2 \vee 5)$.

Remarque 1.5.1 *[7, 15]*

Les conditions ($\boldsymbol{D_1}$) et ($\boldsymbol{D_2}$) sont équivalentes.

En effet, supposons ($\boldsymbol{D}_1$) soit vérifiée, on peut écrire:

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= [(x \wedge y) \vee x] \wedge [(x \wedge y) \vee z]. \\ &= x \wedge [z \vee (x \wedge y)] && \textit{\textbf{(loi d'absorption)}}. \\ &= x \wedge [(z \vee x) \wedge (z \vee y)]. \\ &= x \wedge (y \vee z). && \textit{\textbf{(loi d'absorption)}}. \end{aligned}$$

Donc ($\boldsymbol{D}_2$) est vérifiée.

La réciproque, supposons ($\boldsymbol{D}_2$) soit vérifiée, on peut écrire

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z]. \\ &= x \vee [(x \vee y) \wedge z] && \textbf{\textit{(loi d'absorption)}}. \\ &= x \vee \ [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] \\ &= x \vee (y \wedge z). && \textbf{\textit{(loi d'absorption)}}.\end{aligned}$$

Donc ($\boldsymbol{D}_1$) est vérifiée.

Remarque 1.5.2 *[8, 16]*

Dans tout treillis les deux conditions suivantes sont toujours vérifiées :

1 : pour tout $x, y, z : x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

2 : pour tout $x, y, z : x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

En effet :$(i) \begin{cases} x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \\ x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge z) \end{cases}$ donc $x \wedge (y \vee z) \geq \ (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

$(ii) \begin{cases} x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \\ x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee z) \end{cases}$ donc $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Théorème 1.5.1 *(Caractérisation des treillis distributifs) [2, 7, 8, 15, 12]*

Pour qu'un treillis T soit distributif il faut et suffit qu'il vérifié la condition pour tout $x, y, z \in T$;

$$\begin{cases} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{cases} , \textit{ alors } x = y.$$

Preuve. :

On montre que $(x \wedge z = y \wedge z$ et $x \vee z = y \vee z) \Longrightarrow x = y$.

$$\begin{aligned} x &= x \vee (x \wedge z) && \textbf{(loi d' absorption)}. \\ &= x \vee (y \wedge z) \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ &= (x \vee y) \wedge (y \vee z) && \blacksquare \\ &= (x \wedge z) \vee y \\ &= (y \wedge z) \vee y \\ &= y && \textbf{(loi d' absorption)}. \end{aligned}$$

Proposition 1.5.1 *[2]*

Toute chaîne est un treillis distributif, avec $x \wedge y = min(x, y)$ *et* $x \vee y = max(x, y)$.

Preuve. :

Soient $(T, \leq)$ une chaîne et x, y, z sont des éléments de T, comme tous les éléments sont comparables on a :

$$x \wedge (y \vee z) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \vee z; \\ (y \vee z) & \text{si } y \vee z \leq x. \end{cases}$$

1· Si $x \wedge (y \vee z) = x$ on aura $x \wedge (y \vee z) = x$ ce qui donne $x \leq y \vee z$

ainsi $x \leq y$ ou $x \leq z$ (car T est une chaîne).

♦ Si $x \leq y$ alors $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \vee (x \wedge z) = x$.

♦ Si $x \leq z$ alors $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge y) \vee x = x$.

2· Si $x \wedge (y \vee z) = y \vee z$ alors $x \wedge (y \vee z) = y \vee z \Longrightarrow y \vee z \leq x \Longrightarrow y \leq x$ et $z \leq x$.

Donc $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = y \vee z$. ■

1.5.3 Treillis modulaires

Définition 1.5.3 *[13, 16]*

Un treillis T est dit modulaire s'il vérifié la condition suivante pour tout $x, y, z \in T$

$$x \leq y \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

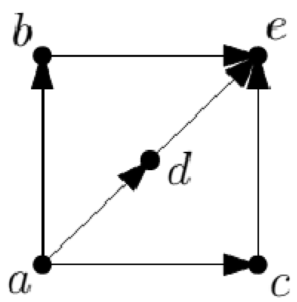


FIG.1.5-*Treillis modulaire*

Remarque 1.5.3 *[15]*

Tout treillis distributif est modulaire.

En effet : $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

donc si $x \leq z$ *:* $(x \vee z) = z$ *et* $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Mais la réciproque est en général inexacte.

Exemple 1.5.3 *:*

1: Le treillis précédent $T = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ qui n'est pas distributif est modulaire·

2: Soit $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ ordonné par divisibilité est un treillis non modulaire. Car;

$$2 \leq 4 \text{ mais } 2 \vee (5 \wedge 4) = 2 \vee 1 = 2 \quad \text{et} \quad (2 \vee 5) \wedge 4 = 20 \wedge 4 = 4\cdot$$

$$2 \neq 4\cdot$$

Théorème 1.5.2 *(Caractérisation des treillis modulaire) [8, 12]*

Pour qu'un treillis T *soit modulaire il faut et suffit qu'il vérifié la condition pour tout* $x, y, z \in T$

$$\left.\begin{array}{c} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{array}\right\} \Longrightarrow x \text{ et } y \text{ sont égaux ou incomparables.}$$

1.5.4 Treillis complémentés

Définition 1.5.4 *[13, 16]*

Soit T *un treillis fermé, on dit que le treillis* T *est complémenté si tout* $x \in T$ *admet au moins un complément, c'est-à-dire un élément* x' *et vérifiant :*

$$\begin{cases} x \wedge x' = 0; \\ \text{et} \\ x \vee x' = 1\cdot \end{cases}$$

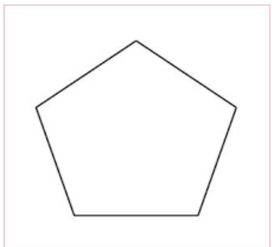


FIG.1.5*-Treillis complémenté*

Exemple 1.5.4 *:*

1. $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ est complémenté : $2' = 15, 15' = 2; 3' = 10, 10' = 3; 5' = 6, 6' = 5; 1' = 30, 30' = 1$.

2. $(P(T), \subseteq)$ est complémenté ; $A \cap A^c = \phi$, $A \cup A^c = T$.

Remarque 1.5.4 *[15]*

*Dans un treillis distributif le complément s'il existe et uniques (**Théorème 1.5.1**).*

En effet $x \wedge x' = x \wedge x'' = 1$ *et* $x \wedge x' = x \wedge x'' = 0$, *alors* $x' = x''$.

1.5.5 Treillis de Boole

Définition 1.5.5 *:*

On appelle treillis de Boole tout treillis fermé qui est à la fois distributif et complémenté.

Exemple 1.5.5 *:*

1. Tout treillis $(P(T), \subseteq)$ est treillis de Boole$\cdot$

2. $(D(6), |) = \{1, 2, 3, 6\}$ est un treillis de Boole$\cdot$

3. La chaine $U = \{0, 1\}$ est un treillis de Boole.

Proposition 1.5.2 *[7]*

Dans un treillis de Boole T *on a :*

1. $0' = 1$ et $1' = 0\cdot$

2. pour tout $x \in T$: $x'' = x\cdot$

3. Pour tout $x, y \in T$,

$$\begin{cases} (i) \ \ (x \wedge y)' = x' \vee y'. \\ (ii) \ \ (x \vee y)' = x' \wedge y'. \end{cases}$$

Ces deux égalités sont appellées lois de Morgan.

4. $\begin{cases} (x \wedge y) = (x' \vee y')' . \\ (x \vee y) = (x' \wedge y')' . \end{cases}$ pour tout $x, y \in T$

5. $\begin{cases} x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y' = 0. \\ x \leq y \Longleftrightarrow x' \vee y = 1. \end{cases}$ pour tout $x, y \in T$

6. $x \leq y \Longleftrightarrow y' \leq x'$.

Preuve. :

1:

$$\begin{cases} 1 \vee 0 = 1 \\ 1 \wedge 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow 0' = 1 \ ; \ 1' = 0 \cdot$$

2:

$$\begin{cases} x' \wedge x'' = x \wedge x' = 0 \\ x' \vee x'' = x \vee x' = 1 \end{cases} \Rightarrow x'' = x, \text{ car } T \text{ distributif.}$$

3:

(i) :

$$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') \quad = (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) \ = 0 \vee 0 = 0.$$
$$(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x \vee x' \vee y') \wedge (y \vee x' \vee y') \quad = (1 \vee y') \wedge (x' \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.$$

Donc $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

(ii) :

$$(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = (x \vee y \vee x') \wedge (x \vee y \vee y') \quad = (1 \vee y) \vee (x \vee 1) \ = 1 \wedge 1 = 1.$$
$$(x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = (x \wedge x' \wedge y') \vee (y \wedge x' \wedge y') \quad = (0 \wedge y') \vee (x' \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0.$$

Donc $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

4:

♦ $(x' \vee y')' = x'' \wedge y'' = x \wedge y$ (d'après 2 et 3).

♦ $(x' \wedge y')' = x'' \vee y'' = x \vee y$ (d'après 2 et 3).

5:

♦ $x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y' = 0$.

$(\Longrightarrow)$ $x \wedge y' \leq y \wedge y' = 0$, alors $x \wedge y' = 0$.

$(\Longleftarrow)$ si $x \wedge y' = 0$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} y \vee (x \wedge y') = y \vee 0 = y &\Longrightarrow (y \vee y') \wedge (x \vee y) = y \\ &\Longrightarrow 1 \wedge (x \vee y) = y \\ &\Longrightarrow (x \vee y) = y \\ &\Longrightarrow x \leq y. \end{aligned}$$

♦ $x \leq y \Longleftrightarrow x' \vee y = 1$.

($\Longrightarrow$) $1 = x \vee x' \leq x' \vee y$, alors $x' \vee y = 1$.

($\Longleftarrow$) si $x' \vee y = 1$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} x \wedge (x' \vee y) = x \wedge 1 = x &\Longrightarrow (x \wedge x') \vee (x \wedge y) = x \\ &\Longrightarrow 0 \vee (x \wedge y) = x \\ &\Longrightarrow (x \wedge y) = x \\ &\Longrightarrow x \leq y. \end{aligned}$$

6: $$\begin{aligned} x \leq y &\Longleftrightarrow (x \wedge y) = x \\ &\Longleftrightarrow (x \wedge y)' = x' \\ &\Longleftrightarrow (x' \vee y') = x' \\ &\Longleftrightarrow y' \leq x'. \end{aligned}$$ ■

Chapitre 2

Filtres et idéaux dans un treillis classique

Dans ce chapitre, on va étudier quelques définitions et propriétés de filtre sur un inf.demi-treillis (resp. idéal sur un sup.demi-treillis) et on présente les types de filtres (resp. idéals): filtre principal, filtre engendré par une partie, filtre premier et ultrafiltre (resp. idéal principal, engendré par une partie, premier et idéal maximal).

2.1 Filtre dans un inf.demi-treillis

2.1.1 Définitions et remarquables d'un filtre

Soit $(T, \leq)$ un inf.demi-treillis

Définition 2.1.1 *(Filtre) [7]*

*On appelle **filtre** de T tout partie non vide F de T vérifiant les conditions suivantes:*

1. Si $x \in F$, $y \in T$ et $x \leq y$, alors $y \in F$;
2. Si $x \in F$ et $y \in F$, alors $x \wedge y \in F$.

Exemple 2.1.1 *Dans l'ensemble $D(6) = \{1,2,3,6\}$ on a :*

- $F_1 = \{3, 6\}$ et $F_2 = \{6\}$ sont des filtres.

- $X = \{2, 3, 6\}$ n'est pas un filtre, car $2 \wedge 3 = 1 \notin X$.
- $Y = \{1, 3, 6\}$ n'est pas un filtre, car $1 \leq 2$ et $2 \notin Y$.

Remarque 2.1.1 *[15]*

1: D'après la condition (2) : un filtre est un sous-inf.demi-treillis mais la réciproque est fausse.

2: Tout filtre F différent de T $(F \neq T)$ sera dit filtre **propre,** sinon dit **impropre.**

3: D'après la condition (1):

♦ le plus grand élément de $T \ll 1 \gg$ appartenant à tout filtre c'est-à-dire $\{1\}$ est le plus petit filtre de T.

♦ un filtre est propre $\Longleftrightarrow 0 \notin F$ .En effet;

$\Rightarrow$) Si $0 \in F$, alors pour tout $x \in T, 0 \leq x \Rightarrow x \in F \Rightarrow F = T$ (contradiction).

$\Leftarrow$) Si $0 \notin F \Rightarrow F \neq T \Rightarrow F$ est propre.

Remarque 2.1.2 *[15]*

1: L'intersection d'une famille quelconque $(F_i)_{i \in I}$ de filtres est encore un filtre.

En effet, soit $F = \underset{I}{\cap} F_i$, on vérifie les conditions (1) et (2) :

1. Si $x \in F$,$y \in T$ et $x \leq y \Rightarrow y \in F$?

$$\begin{aligned} \text{soint } x \in F \text{ et } x \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad x \in F_i, \text{pour tout } i \text{ et } y \geq x. \\ &\Leftrightarrow \quad y \in F_i, \text{pour tout } i \\ &\Leftrightarrow \quad y \in F = \cap F_i, \text{ pour tout } i \ . \end{aligned}$$

2. $x \in F$ et $y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$?

$$\begin{aligned} \text{soint } x \in F \text{ et } y \in F \quad &\Leftrightarrow \quad x, y \in F_i, \text{ pour tout } i \\ &\Leftrightarrow \quad x \wedge y \in F_i, \text{ pour tout } i \\ &\Leftrightarrow \quad x \wedge y \in F = \cap F_i, \text{ pour tout } i \ . \end{aligned}$$

2: La réunion des filtres n'est pas toujours un filtre.

car, soit $T = \{0, a, b, 1\}$ et soit $F_1 = \{b, 1\}, F_2 = \{a, 1\}$ deux filtres de T.

On a $S = F_1 \cup F_2$, $S = \{1, a, b\}$ n'est pas un filtre, car la $2^{ème}$ condition n'est pas vérifié, en effet $a \wedge b = 0 \notin S$.

2.2 Génération de filtre

2.2.1 Filtre principal

Définition 2.2.1 *[6, 16]*

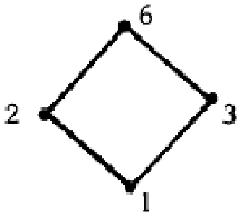
Soit T *un treillis et* $F \subset T$ *,* F *est dit filtre principal s'il existe* $\alpha \in T$ *tel que* $F = F_\alpha$ *et*

$$F_\alpha = \{x \in T : \alpha \leq x\}.$$

C'est-à-dire, le filtre principal est le filtre engendré par un seul élément α*.*

Exemple 2.2.1 *On a le treillis* $D(6) = \{1,2,3,6\}$*.*

On prend $\alpha = 2$ *donc le filtre principal engendré par* 2 *est* $F_2 = \{2, 6\}$.



$D(6)$

Remarque 2.2.1 *[15]*

Tout filtre principal F_α *est un filtre de* T *.*

En effet,

- $x \in F_\alpha$ *et* $x \leq y$

$\alpha \leq x \Rightarrow \alpha \leq y$ *donc* $y \in F_\alpha$.

- $\begin{cases} x \in F_\alpha \\ y \in F_\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \leq x \\ \alpha \leq y \end{cases} \Rightarrow \alpha \leq x \wedge y \Rightarrow x \wedge y \in F_\alpha.$

2.2.2 Filtre engendré par une partie

Définition 2.2.2 *[6, 16]*

Soit T *un treillis et* G *une partie non vide de* T *(* $G \subset T$ *) tel que* $G = \{a_1, ..., a_n,\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^*\}$*. Le filtre engendré par* G *noté par* F_G *est le plus petit filtre que contient* G*. On définit* F_G *comme suite :*

$$F_G = \{x \in T \mid \exists a_1, ..., a_n \in G,\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^* : x \geq a_1 \wedge .... \wedge a_n\}.$$

2.2.3 Caractérisation des filtres engendrés par une partie

Nous allons voir une construction pratique du filtre F_G engendré par une partie G .

Soit $F'_G = \{x \in T \mid \exists a_1, ..., a_n \in G, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* : x \geq a_1 \wedge .... \wedge a_n\}$.

- F'_G est un filtre :

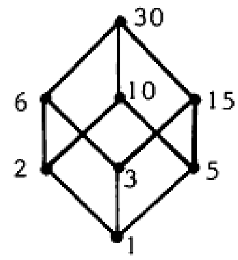
  - Si $x \geq a_1 \wedge .... \wedge a_n$ et $x \geq x$: $y \geq a_1 \wedge .... \wedge a_n$.
  - Si $x \geq a_1 \wedge .... \wedge a_n$ et $y \geq b_1 \wedge .... \wedge b_m$: $x \wedge y \geq a_1 \wedge .... \wedge a_n \wedge b_1 \wedge .... \wedge b_m$.
  -$F'_G \neq \emptyset$, car on a au moins $G \subset F'_G$ (si $a \in G : a \geq a$) .

- Soit F'' un autre filtre contenant G :

Si $x \in F'_G$, $x \geq a_1 \wedge .... \wedge a_n$, tous les a_i. appartenant à G donc aussi à F'', donc $a_1 \wedge .... \wedge a_n \in F''$, donc $x \in F''$

Ainsi $F'_G \subset F''$, donc F'_G est le plus petit filtre contenant G et par suite $F'_G = F_G$.

Exemple 2.2.2 *On a le treillis* $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, *on prend* $G = \{10\} \neq \emptyset$. *Dans ce cas le filtre engendré par* G *est* $F_G = \{10, 30\}$.



$D(30)$

Remarque 2.2.2 *:*

1. Un filtre principal F_a admet $\{a\}$ comme générateur.

2. Si $G = \emptyset \Longrightarrow F_G = \{1\}$, car on a $\inf \emptyset = 1_T$ et

$$\begin{aligned} F_\emptyset = F_G &= \{x \in T : x \geq \inf G\} \\ &= \{x \in T : x \geq 1_T\} \\ &= \{1\} \\ &= F_1. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.1 *[15]*

Tout filtre possédant un générateur fini est un filtre principal.

Preuve. :

Considérons F_G où G est un ensemble fini.

- Si $G = \emptyset$, alors $F_G = \{1\} = F_1$.

- Si $G = \{a_1, ..., a_n\}$, posons $a = a_1 \wedge .... \wedge a_n$, alors $F_G = F_a$.

Car : ▶ Si $x \in F_a$, $x \geq a = a_1 \wedge .... \wedge a_n$, donc $x \in F_G$ (i.e., $F_a \subseteq F_G$)......(1)

▶ Si $x \in F_G$, $x \geq a_1 \wedge .... \wedge a_n \geq a$, donc $x \in F_a$ (i.e., $F_G \subseteq F_a$)...... (2)

Finalement de 1) et 2) $F_G = F_a$. ■

Remarque 2.2.3 *[2]*

Dans un treillis fini tous les filtres propres sont principaux, c'est-à-dire engendré par un seul élément, donc le nombre des filtres propres d'un treillis fini est égale le cardinale de T moins un ($|T| - 1$).

Exemple 2.2.3 *:*

$T = \{0, a, b, 1\}$, *le nombre des filtres propres de T égale à* $|T| - 1 = 4 - 1 = 3$.

Définition 2.2.3 *[2, 15]*

- Une partie G de T est dite $\wedge$**-incompatible**, si F_G est impropre, c'est-à-dire il existe une suite finie d'éléments de G, $a_1, ..., a_n$ tels que : $a_1 \wedge .... \wedge a_n = 0_T$.

- Une partie G de T est dite $\wedge$**-compatible**, si F_G est un filtre propre ($F_G \neq T$), c'est-à-dire il n'existe aucune suite d'éléments de G, tels que : $a_1 \wedge .... \wedge a_n = 0_T$.

2.2.4 Filtre premier et filtre irréductible

Soit F un filtre propre

Définition 2.2.4 *(Filtre premier) [7, 14, 16]*

Un filtre F de T est dit filtre ***premier*** *si pour tout $x, y \in T$*

$x \vee y \in F \Rightarrow x \in F$ *ou* $y \in F$.

L'ensemble des filtres premiers de T notée par $Fp(T)$.

Corollaire 2.2.1 *[7]*

Soit T un treillis distributifs finie et soit $x \nleq y$ pour tout $x, y \in T$, alors il existe $F \in Fp(T)$ tels que $x \notin F$ et $y \in F$.

Définition 2.2.5 *(Filtre irréductible)[2]*

Un filtre F de T est dit filtre ***irréductible****, s'il n'existe pas deux filtres propres F_1 et F_2 tels que : $F = F_1 \cap F_2$ avec $F \neq F_1$ et $F \neq F_2$.*

Proposition 2.2.2 *[2, 7]*

Dans un treillis quelconque tout filtre premier est irréductible.

Preuve. *Soit F un filtre premier*

On suppose qu'il existe deux filtres propres F_1 et F_2 tels que

$F = F_1 \cap F_2$ avec $F \neq F_1$ et $F \neq F_2$

$F \neq F_1$, alors il existe $x \in F_1$ et $x \notin F$

$F \neq F_2$, alors il existe $y \in F_2$ et $y \notin F$

$$\begin{cases} x \leq x \vee y \text{ et } x \in F_1 \Rightarrow x \vee y \in F_1 \\ y \leq x \vee y \text{ et } y \in F_2 \Rightarrow x \vee y \in F_2 \end{cases} \Rightarrow x \vee y \in F_1 \cap F_2 = F$$

On a donc $x \vee y \in F$ avec $x \notin F$ et $y \notin F$. Ce qui contredit le fait que F soit premier.

Alors F est donc irréductible. ■

Proposition 2.2.3 *[2, 7]*

Dans un treillis distributif T tout filtre irréductible est premier.

Preuve. *Supposons le contraire i.e., F n' est pas premier.*

Ceci équivaut l'existance de $a, b \in E$, tel que $a \vee b \in F$ et $a \notin F, b \notin F$.

On pose :

$F_1 = \{x \in T \ / \ \exists y \in F \text{ tel que } a \wedge y \leq x\}$

et

$F_2 = \{x \in T \ / \ \exists\, y \in F \text{ tel que } b \wedge y \leq x\}$.

On va montrer que F_1, F_2 sont des filtres, de plus $F_1 \cap F_2 = F$ et $F_1 \neq F$, $F_2 \neq F$

1. *$F_1 \neq \emptyset$, car $a \vee b \in F$ et $a \wedge (a \vee b) = a \leq a \Longrightarrow a \in F_1$.*

2. *$F_2 \neq \emptyset$, car $a \vee b \in F$ et $b \wedge (a \vee b) = b \leq b \Longrightarrow b \in F_2$.*

3. Montrons que F_1 est un filtre propre

F_1 est un filtre? on a $F_1 = \{x \in T/\ \exists y \in F;\ a \wedge y \leq x\}$

$$\begin{array}{lll} si\ x \in F_1\ et\ z \geq x, & alors & \exists y \in F : a \wedge y \leq x \leq z, \\ & donc & a \wedge y \leq z, \\ & par\ suite & z \in F_1. \end{array}$$

$$si\ x_1 \in F_1\ et\ x_2 \in F_1, \quad alors \quad \begin{cases} \exists y_1 \in F\ tel\ que\ a \wedge y_1 \leq x_1 \\ \exists y_2 \in F\ tel\ que\ a \wedge y_2 \leq x_2 \end{cases},$$

$$\begin{array}{ll} d'où & a \wedge (y_1 \wedge y_2) \leq (x_1 \wedge x_2), \\ ainsi & (x_1 \wedge x_2) \in F_1. \end{array}$$

De façon analogue on montre que F_2 et un filtre.

Montrons que F_1 est propre.

On a $b \notin F_1$, sinon :

$$\begin{array}{lll} b \in F_1, & alors & \exists y \in F\ :\ a \wedge y \leq b, \\ & d'où & b \vee (a \wedge y) = b, \\ & donc & (a \vee b) \wedge (y \vee b) = b. \end{array}$$

on a :

$$\begin{cases} a \vee b \in F_1 \\ y \vee b \geq b \in F_1 \end{cases}, \quad alors \quad \begin{cases} a \vee b \in F_1 \\ y \vee b \in F_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} donc & (a \vee b) \wedge (y \vee b) \in F_1 \\ ainsi & contradiction. \end{array}$$

Montrons que F_2 est propre.

On a $a \notin F_2$ sinon

$$\begin{array}{lll} a \in F_2, & alors & \exists y \in F\ :\ b \wedge y \leq a, \\ & d'où & a \vee (b \wedge y) = a, \\ & donc & (a \vee b) \wedge (y \vee a) = a. \end{array}$$

on a

$$\begin{cases} a \vee b \in F_2 \\ y \vee a \geq y \in F_2 \end{cases}, \quad alors \quad \begin{cases} a \vee b \in F_2 \\ y \vee a \in F_2 \end{cases},$$

$$\begin{array}{ll} donc & (a \vee b) \wedge (y \vee a) \in F_2, \\ ainsi & contradiction. \end{array}$$

Alors on a

$$\begin{cases} b \notin F_1 \\ a \notin F_2 \end{cases}, \text{ alors } \begin{cases} F_1 \neq F \\ F_2 \neq F \end{cases}, \text{ donc } F_1, F_2 \text{ sont des filtres propres.}$$

4. *Reste on montre l'égalité* $F_1 \cap F_2 = F$.

- $\forall y \in F : \begin{cases} a \wedge b \leq y \\ y \wedge b \leq y \end{cases}$, *alors* $\begin{cases} y \in F_1 \\ y \in F_2 \end{cases}$, *d'où* $y \in F_1 \cap F_2$,

donc $F \subseteq F_1 \cap F_2$...............*(1).*

- *Soit* $x \in F_1 \cap F_2$ *i.e.*, $\begin{cases} x \in F_1 \\ \quad et \\ x \in F_2 \end{cases}$, *alors* $\begin{cases} \exists y_1 \in F : a \wedge y_1 \leq x \\ \quad\quad et \\ \exists y_2 \in F : b \wedge y_2 \leq x \end{cases}$,

donc $(a \wedge y_1) \vee (b \wedge y_2)$, *c'est-à-dire* $(a \vee b) \wedge (a \vee y_2) \wedge (b \vee y_2) \wedge (y_1 \vee y_2) \leq x$, *et on a* $(a \vee b) \wedge (a \vee y_2) \wedge (b \vee y_2) \wedge (y_1 \vee y_2) \in F$ *d'où* $x \in F$,

donc $F_1 \cap F_2 \subseteq F$.................*(2).*

De (1) et (2) on a $F_1 \cap F_2 = F$ *avec* $F \neq F_2$ *et* $F \neq F_2$.

Ce qui contredit l'irréductibilité de F.

Donc F *est premier.* ■

2.2.5 Ultrafiltre

Définition 2.2.6 *[9, 16]*

Un filtre propre F *d'un inf.demi-treillis* T *est dit* ***maximal*** *(ou bien* ***ultrafiltre****) si pour tout filtre* X *de* T, $F \subseteq X \subseteq T \Rightarrow X = F$ *ou* $X = T$.

Exemple 2.2.4 *Dans* $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ *les ultrafiltres sont :*

$F_2 = \{x \in D(30)/x \geq 2\} = \{2, 6, 10, 30\}$.

$F_3 = \{x \in D(30)/x \geq 3\} = \{3, 6, 15, 30\}$.

$F_5 = \{x \in D(30)/x \geq 5\} = \{5, 10, 15, 30\}$.

Car, $F_6 \subset F_2, F_3$; $F_{10} \subset F_2, F_5$; $F_{30} \subset F_2, F_3, F_5, F_6, F_{10}$.

Proposition 2.2.4 *[15]*

Tout filtre propre est contenu dans un ultrafiltre.

Proposition 2.2.5 *[15]*

Soit F un filtre propre, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *F est un ultrafiltre.*

2. *Pour tout $x \notin F$, il existe $y \in F$ tel que $x \wedge y = 0$.*

Preuve. :

$\Rightarrow$)

Si F est un ultrafiltre, supposons qu'il existe $x \notin F$ tel que pour tout $y \in F, x \wedge y \neq 0$.

Posons $G = F \cup \{x\}$, G est une partie $\wedge$-compatible, car soient a_1, ..., a_n des éléments de G et posons $a = a_1 \wedge ... \wedge a_n$.

- Si tous les $a_i \in_{i=1,...,n} F$, alors $a \in F$ donc $a \neq 0$ (car F propre).

- Si par exemple $a_1 = x$, donc $a = x \wedge y$ avec $y = a_1 \wedge ... \wedge a_n$, $y \in F$ donc $a \neq 0$.

Par suite G engendre un filtre propre F_G, tel que $F \subsetneq G \subset F_G$ ce qui contredit la maximalité de$F$.

$\Leftarrow$)

Soit F un filtre propre vérifiant (2), supposons que F n'est pas un ultrafiltre, alors il existe un filtre propre F' tel que $F \subsetneq F'$ donc $\exists x \in F'$ et $x \notin F$, d'après (2) $\exists y \in F$: $x \wedge y = 0$, on a $x \in F'$ et $y \in F \subseteq F'$ donc $y \in F'$ et $x \wedge y = 0$ ce qui contredit le fait que F' soit propre. ■

Exemple 2.2.5 $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

1. *Les filtres propres sont* $\{2, 6, 10, 30\}, \{10, 30\}, \{6, 30\}, \{5, 10, 15, 30\}, \{15, 30\}, \{3, 6, 15, 30\}, \{30\}$.

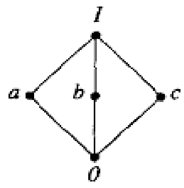
2. *Les ultrafiltres sont* $\{2, 6, 10, 30\}, \{5, 10, 15, 30\}, \{3, 6, 15, 30\}$ *on constate que tout les filtre propres sont inclus dans des ultrafiltres.*

Définition 2.2.7 *(Les atomes) [15]*

Les atomes dans un treillis sont des élément qui couvre 0_T .

x un atome $\Longleftrightarrow 0_T < 0$ (x couvre 0_T), i.e., $]0, x[= \emptyset$ et $[0, x[= \{0\}$.

Exemple 2.2.6 *Soit $T = \{0, a, b, c, 1\}$, les atomes dans T sont a, b et c.*



T

Proposition 2.2.6 *Dans un treillis, un filtre engendré par un atome est un ultrafiltre (maximal).*

Preuve. :

F ultrafiltre $\Longleftrightarrow$pour tout$x \notin F : \exists y \in F, x \wedge y = 0_T$.

Soit a un atome $(0 < a)$, F_a filtre propre, on suppose que F_a n'est pas maximal donc :$\exists x \notin F_a$ pour tout$y \in F_a$, $x \wedge y \neq 0_T$........(1)

$x \notin F_a$ on a deux cas :

1^{er}cas : $(x < a$)et a couvre 0 $(0 < a)$, donc le seule élément qui inferieur strictement à a est $0_T \Longrightarrow x = 0$, de (1) on a $x \wedge a \neq 0$ mais $x = 0 : x \wedge a = 0 \wedge a = 0$ (contradiction).

$2^{\text{ème}}$ cas : $x \parallel a$, donc $x < a = m$, tels que $m < a \Rightarrow m = 0$, donc F_a est ultrafiltre . ■

2.3 Idéal dans un sup.demi-treillis

2.3.1 Définitions et Propriétés

La notion d'idéal est la même que celle de filtre mais en considérant l'ordre réciproque.

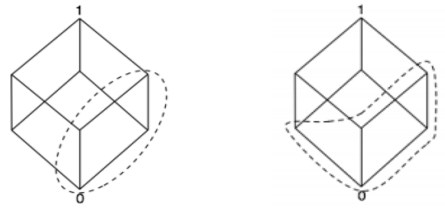
Définition 2.3.1 *(Idéal) [7]*

On appelle idéal d'un sup.demi-treillis T toute partie non vide I de T vérifiant :

1. *Si $x \in I$ et $y \leq x$, alors $y \in I$;*

2. *Si $x \in I$ et $y \in I$, alors $x \vee y \in I$.*

Exemple 2.3.1



Un idéal *N'est pas idéal*

Remarque 2.3.1 *[8, 15]*

Tout ce qui a été dit pour les filtres peut être transcrit immédiatement pour les idéaux, nous indiquons brièvement,

1. Un idéal est un sous-sup.demi-treillis.

2. 0 appartient à tous les idéaux de T, donc $\{0\}$ est le plus petit idéal de T.

3. Un idéal I est dit propre si $I \neq T \Leftrightarrow 1 \notin I$. En effet;

$\Rightarrow$) On suppose que pour tout$x \in T : x \leq 1 \in I \Rightarrow x \in I$, donc $T = I$ contradiction.
$\Leftarrow$) $1 \notin I$ et I idéal de $T \Rightarrow I$ propre, $I \neq T$.

2.4 Génération d'idéal

2.4.1 Idéal principal

Définition 2.4.1 *[6, 7, 16]*

*Soit $a \in T$, l'ensemble $I_a = \{x \in T/x \leq a\}$ est un idéal engendré par a (**idéal principal)**.*

Exemple 2.4.1 *:*

Dans le treillis $(D(30), |)$ on a : l'idéal principal $I_6 = \{1, 2, 3, 6\}$.

Remarque 2.4.1 *:*

Tout idéal principal I_a est un idéal de T.

En effet,

- $I_a \neq \emptyset$, car $a \leq a$:pour tout $a \in T \Rightarrow a \in I_a$.

- *Soit* $x \in I_a$ *et* $y \leq x$: $x \in T \Rightarrow x \leq a$, *donc* $y \leq x \leq a \Rightarrow y \leq a \Rightarrow y \in I_a$.

- *Soient* $x, y \in I_a$,

$$\begin{cases} x \leq a \\ y \leq a \end{cases} \Rightarrow x \vee y \leq a \Rightarrow x \vee y \in I_a.$$

2.4.2 Idéal engendré par une partie

Définition 2.4.2 *[6]*

Soit G *une partie quelconque de* T, *l'idéal engendré par* G *noté par* I_G *est l'intersection de tous les idéaux de* T *que contient* G, *et le plus petit idéal de* T *contenant* G. *On peut caractériser* I_G *par :*

$$I_G = \{x \in T \mid \exists a_1, ..., a_n \in G, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* : x \leq a_1 \vee .... \vee a_n\}.$$

2.4.3 Caractérisation des idéaux engendrés par une partie

Nous allons voir une construction pratique d'idéal I_G engendré par une partie G .

Soit $I'_G = \{x \in T \mid \exists a_1, ..., a_n \in G, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* : x \leq a_1 \vee .... \vee a_n\}$, on montre que I'_G est le plus petit idéal de T contenant G.

1: I'_G idéal;

i) Soit $x \in I'_G$ et $y \leq x$, alors $\exists a_1, ..., a_n \in G$, donc $y \leq x \leq a_1 \vee .... \vee a_n$, d'où $y \leq a_1 \vee .... \vee a_n$, ainsi $y \in I'_G$.

ii) Soient $x, y \in I'_G \Rightarrow \exists a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_m$ de G :

$$\begin{cases} x \leq a_1 \vee .... \vee a_n \\ y \leq b_1 \vee .... \vee b_m \end{cases}, \text{ alors } x \vee y \leq a_1 \vee .... \vee a_n \vee b_1 \vee .... \vee b_m, \text{ donc } x \vee y \in I'_G.$$

iii) $I'_G \neq \emptyset$, car on a au moins $G \subset I'_G$ (si $a \in G : a \leq a$) .

2: $G \subset I'_G$: pour tout $a \in G, a \leq a \Longrightarrow a \in I'_G$.

3: I'_G est le plus petit :

Soit J un autre idéal de T contenant G :

si $x \in I'_G : \exists a_1, ..., a_n \in G$, donc $x \leq a_1 \vee .... \vee a_n = y$, alors $y \in J$, car $a_i \in G \subseteq J$ et J idéal, donc $a_1 \vee .... \vee a_n = y \in J$, alors $x \leq y \in J \Rightarrow x \in J$.

Ainsi $I'_G \subset J$, donc I'_G est le plus petit filtre contenant G et par suite $I'_G = I_G$.

Exemple 2.4.2 *Soit le treillis $D(60)$, on prend $G = \{2, 3\}$. Alors l'idéal engendré par G est $I_G = \{x \in T : x \leq 2 \vee 3\} = \{x \in T : x \leq 6\} = \{6, 2, 3, 1\}$.*

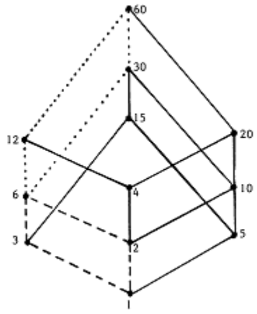


FIG.2.1- $D(60)$

Proposition 2.4.1 *[15]*

- Tout idéal possédant un générateur fini est principal .

En particulier dans un sup.demi-treillis fini, tous les idéaux sont principaux .

Preuve. .

Soit G une partie de T

► Si $C = \emptyset$, $I_G = \{0\} = I_0 \Rightarrow I_G$ principal.

► Si $G = \{a_1, ..., a_n\}$, posons $a = a_1 \vee .... \vee a_n$, alors $I_G = I_a$ car;

- $x \in I_G \Rightarrow \exists a_1, ..., a_n \in G : x \leq a_1 \vee .... \vee a_n \leq a$, donc $x \in I_a$ (i.e., $I_G \subseteq I_a$).

- $x \in I_a \Rightarrow x \leq a = a_1 \vee .... \vee a_n$, donc $x \in I_G$ (i.e., $I_a \subseteq I_G$).

Finalement $I_G = I_a$. ■

Définition 2.4.3 *[15]*

- Une partie G est dite $\vee$**-incompatible** si elle engendre l'idéal impropre T, c'est-à-dire il existe une suite finie d'élément de G, $a_1, ..., a_n$ tels que : $a_1 \vee .... \vee a_n = 1$.

- Une partie G de T est dite $\vee$**-compatible**, si I_G est un idéal propre ($I_G \neq T$), c'est-à-dire il n'existe pas aucune suite d'élement de G, tels que : $a_1 \vee .... \vee a_n = 1$.

2.4.4 Idéal premier

Soit I un idéal propre

Définition 2.4.4 *[7, 8, 14]*

Un idéal I de T est appelé **idéal premier** *si : pour tout $x, y \in T$*

$x \wedge y \in I \Rightarrow x \in I$ *ou* $y \in I$.

L'ensemble des idéaux premiers de T notée par $Ip(T)$.

Corollaire 2.4.1 *[7]*

Soit T un treillis distributifs finie et soit $x \nleq y$ pour tout $x, y \in T$, alors il existe $I \in Ip(T)$ tels que $x \notin I$ et $y \in I$.

2.4.5 Idéal maximal

Définition 2.4.5 *[16]*

Un idéal propre I de T est dit maximal si pour tout idéal J, $I \subseteq J \subseteq T \Rightarrow J = I$ ou $J = T$.

Proposition 2.4.2 *[15]*

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *I est un idéal maximal.*

2. *Pour tout $x \notin I$, il existe $y \in I$ tel que $x \vee y = 1$.*

Preuve. $\Rightarrow$)

Si I est maximal, supposons qu'il existe $x \notin I$ tel que pour tout $y \in I, x \vee y \neq 1$......(1)

Soit $G = I \cup \{x\}$, G est une parties $\vee$**-compatible,** car soient a_1, ..., a_n des éléments de G :

- Si tous les $a_i \in_{i=1,\ldots,n} I$, alors $a_1 \vee \ldots. \vee a_n \neq 1$(car I propre).

- Si $a_1 = x \notin I$ et $y = a_2 \vee \ldots. \vee a_n$, $y \in I$, donc d'après (1), $a_1 \vee a_2 \vee \ldots. \vee a_n = x \vee y \neq 1$,donc I_G est un idéal propre et $I \subsetneq G \subset I_G$ ce qui contredit la maximalité de I .

$\Leftarrow$)

On suppose que I idéal propre mais pas maximal et pour tout $x \notin I$, $\exists y \in I$ tel que $x \vee y = 1$......(1).

Alors il existe un idéal J tel que $I \subsetneq J$ (propre), alors $\exists x \in J$ et $x \notin J \Rightarrow \exists y \in I$ (d'après 1), on a $x \in J$ et $y \in I \subseteq J$, donc $y \in J$ et $x \vee y = 1$ ce qui contredit le fait que J soit propre. ■

Théorème 2.4.1 *[7]*

Soit T un treillis distributif avec un plus grand élément "1". Alors tout idéal maximal dans T est premier. Dualment, dans un treillis distributif avec plus petit élément "0", tout ultrafiltre est un filtre premier.

Preuve. :

1. I idéal maximal $\Rightarrow I$ premier?

On va montrer que : $x \wedge y \in I \Rightarrow x \in I$ ou $y \in I$.

On pose que $x \wedge y \in I$;

-Si $x \notin I \Rightarrow \exists m \in I$, $x \vee m = 1$(car I maximal)

on a $x \wedge y \in I$ et $m \in I \Rightarrow (x \wedge y) \vee m \in I$

$(x \wedge y) \vee m = (x \vee m) \wedge (y \vee m) = 1 \wedge (y \vee m) \in I$ et comme $y \leq (y \vee m) \in I \Rightarrow y \in I$.

-Si $y \notin I$ de même méthode.

Donc I et premier.

2. F ultrafiltre $\Rightarrow F$ premier?

On va montrer que : $x \vee y \in F \Rightarrow x \in F$ ou $y \in F$.

On suppose que $x \vee y \in F$;

-Si $x \notin F$ et comme F ultrafiltre $\Rightarrow \exists m \in F$, $x \wedge m = 0$.

On a $x \vee y \in F$ et $m \in F \Rightarrow (x \vee y) \wedge m = (x \wedge m) \vee (y \wedge m) = 0 \vee y \wedge m = (y \wedge m) \in F$.

On a $y \geq (y \wedge m) \in F \Rightarrow y \in F$.

-Si $y \notin F$ de même méthode.

Donc F et premier. ■

2.5 Cas d'un treillis

Dans un treillis nous aurons à la fois les notions de filtre et d'idéal, donc tout filtre (resp. tout idéal) est un sous-treillis.

En effet, soit F un filtre, nous savons déjà que c'est un sous-inf.demi-treillis, mais c'est aussi un sous-sup.demi-treillis : si $x \in F$ et $y \in F, x \vee y \geq x$ donc $x \vee y \in F$.

Exemple 2.5.1 *:*

1 : Soit T un ensemble infini, l'ensemble des parties cofinies de T est un filtre de $P(T)$ (nous appellerons partie cofinie de T toute partie dont le complémentaire est fini). L'ensemble des parties finies de T est un idéal de $P(T)$.

2 : Dans le treillis $D(60)$ tous les filtres et les idéaux sont principaux, sur **la figure 2.1** nous avons représenté le filtre principal $F_6 = \{6, 12, 30, 60\}$ (en pointillés), et l'idéal principal $I_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ (en tirets).

Chapitre 3

Treillis de Heyting

Dans ce chapitre nous allons donner quelques notions très importantes : Algèbre implicative positive et étude des systèmes déductifs dans les algèbres implicatives positives.

3.1 Algèbre implicative positive

Définition 3.1.1 *(Algèbre implicative positive)[2, 3]*

Une algèbre implicative positive est une structure $(A, \rightarrow, 1)$ *du type* $(2, 0)$ *vérifiant les axiomes suivants pour tout* $x, y, z \in A$;

P$_1$. $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$,

P$_2$. $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$,

P$_3$. $x \rightarrow y = 1, y \rightarrow x = 1$, *alors* $x = y$,

P$_4$. $x \rightarrow 1 = 1$.

Proposition 3.1.1 *(Règle de Modus Ponens)[2, 3]*

Si $x = 1$ *et* $x \rightarrow y = 1$, *alors* $y = 1$.

Preuve. *En effet, si*

$$\begin{cases} x \rightarrow y = 1 \\ \quad \text{et} \\ x = 1 \end{cases}$$

, alors d' aprés (P_4) *on a* $x \rightarrow 1 = 1$ *et par conséquent, en utilisant* (P_3) *et on trouvé* $x = 1$. ■

3.2 Treillis de Heyting

Définition 3.2.1 *(Treillis de Heyting) [2, 3]*

C'est un treillis $(E, \leq, \wedge, \vee)$ *vérifiant* (P) *quels que soient* x *et* y *dans* E *l'ensemble* $\{a \in E \ a \wedge x \leq y\}$ *possède un plus grand élément noté* $x \to y$.

$$\begin{cases} x \wedge (x \to y) \leq y, \\ x \wedge a \leq y \Leftrightarrow a \leq x \to y. \end{cases}$$

Proposition 3.2.1 *Tout treillis de Heyting est une Algèbre implicative positive.*

Preuve. *Pour démontrer proposition on va montrer la propriété suivante:*

$$a \leq b \Longleftrightarrow a \to b = 1$$

$\Rightarrow$)*Si* $a \leq b$, *alors pour tout* x, $a \wedge x \leq a \leq b$, *donc* $E = \{x : a \wedge x \leq b\}$, *donc* $a \to b = 1$.

$\Leftarrow$)*Si* $a \to b = 1$, *alors pour tout* x,

$x \leq a \to b \quad \Rightarrow \quad \forall x, a \wedge x \leq b$ *(Car* E *est un treillis de Heyting)*

On prend $x = 1 \quad \Rightarrow \quad a \leq b$.

(P_1): *Soit* $E = \{x : b \wedge x \leq a\}$, *le plus grand élément de* E *et* $b \to a$.

On a $b \wedge a \leq a$, *alors* $a \in E$, *donc* $a \leq b \to a$. *Consequence* $a \to (b \to a) = 1$.

(p₂): On pose $x = a \to b$, $y = a \to c$ *et* $z = b \to c$.

$$\begin{cases} a \wedge x = a \wedge (a \to b) \leq b \\ \quad a \wedge (a \to z) \leq z \end{cases} \Rightarrow a \wedge x \wedge (a \to z) \leq b \wedge z = b \wedge (b \to c) \leq c;$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad a \wedge x \wedge (a \to z) \leq c, \\
&\Rightarrow \quad x \wedge (a \to z) \leq a \to c, \\
&\Rightarrow \quad x \wedge (a \to z) \leq y, \\
&\Rightarrow \quad a \to z \leq x \to y, \\
&\Rightarrow \quad a \to (b \to c) \leq (a \to b) \to (a \to c), \\
&\Rightarrow \quad a \to (b \to c) \to (a \to b) \to (a \to c) = 1.
\end{aligned}$$

(P_3): $\begin{cases} a \to b = 1 \\ b \to a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq b \\ b \leq a \end{cases} \Rightarrow a = b.$

(P_4) On a $a \leq b \Leftrightarrow a \rightarrow b = 1$*, alors on remplace* b *par* 1*, donc* $a \leq 1$ *d'ou* $a \rightarrow 1 = 1$.

■

3.3 Systèmes déductifs dans un treillis de Heyting

Dans toute cette partie on considère un Treillis de Heyting A

Définition 3.3.1 *Un système déductif est toute partie* D *de* A *vérifiant les conditions :*

$$\begin{cases} 1 \in D; \\ \text{Si } x \in D \text{ et } x \rightarrow y \in D, \text{alors } y \in D, (\text{règle de modus ponens}). \end{cases}$$

1. *Un système déductif est dit propre si* $D \neq A$.

2. *Un système déductif est dit irréductible si* D *est propre et s'il n'existe pas de systèmes déductifs propres* D_1 *et* D_2 *,tel que* $D = D_1 \cap D_2$*, avec* $D \neq D_1$ *et* $D \neq D$ *.*

Proposition 3.3.1 *[2]*

Soit D *un système déductif propre, pour tout* $x \in D$ *il existe un système déductif irréductible* D^* *tel que* $D \subset D^*$ *et* $x \notin D^*$.

Preuve. Soit D la famille des systèmes déductifs propres D' tels que $D \subseteq D'$ et $x \notin D'$

$D \neq \emptyset$ car $D \in A$.

Soit $(D'_i)_{i \in I}$ une chaine. posons $D' = \underset{i \in I}{\cup} D'_i$

D' est un système déductif propre. En effet :

$1 \in D'_i$ pour tout $i \Rightarrow 1 \in \cup D'_i = D'$

$y \in D'$ et $y \rightarrow z \in D' \Rightarrow$ il existe i, j tels que $y \in D'_i$ et $y \rightarrow z \in D'_j$

Comme $(D'_i)_i$ est une chaine, D'_i et D'_j sont comparables. supposons $D'_i \subseteq D'_j$ on a donc

:

$y \in D'_j$ et $y \rightarrow z \in D'_j \Rightarrow z \in D'_j$ (modus ponens) $\Rightarrow z \in \underset{i \in I}{\cup} D'_i = D'$

$x \notin D'_i$ pour tout $i \Rightarrow x \notin D' = \underset{i \in I}{\cup} D'_i$

D' est un système déductif propre

D' est donc un majorant de $(D'_i)_i$, D est donc un ensemble inductif. Il est donc un élément maximal D^*

Tel que $D \subset D^*$ et $x \notin D^*$.

La maximalité de D^* montre que D^* est irréductible. ■

Proposition 3.3.2 *[2]*

Soient $a \in A$ et D un système déductif, l'ensemble noté $\langle D, a\rangle$ défini par

$\langle D, a\rangle = \{x \in A \ / a \to x \in A\}$*est le plus petit système déductif contenant D et a.*

Preuve.

1. $a \to a = 1 \in D \Rightarrow a \in \langle D, a\rangle$

Pour tout $x \in D$ on a :

$x \to (a \to x) = 1 \in D$

$x \to (a \to x) \in D$ et $x \in D \Rightarrow a \to x \in D \Rightarrow x \in \langle D, a\rangle \Rightarrow \langle D, a\rangle \supseteq D$.

2. $\langle D, a\rangle$ est un système déductif.

En effet :

$a \to 1 = 1 \in D \Rightarrow 1 \in \langle D, a\rangle$

$b \in \langle D, a\rangle$ et $b \to c \in \langle D, a\rangle \Rightarrow a \to b \in D$ et $a \to (b \to c) \in D$

de (P_2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \in D$

mp $(a \to b) \to (a \to c) \in D$

Comme $a \to b \in D$ il vient que $a \to c \in D$.

D'ou $c \in \langle D, a\rangle$.

$\langle D, a\rangle$ est donc un système déductif contenant D et a.

3. Soit D_1 un autre système déductif contenant D et a

$x \in \langle D, a\rangle \Rightarrow a \to x \in D \subset D_1 \Rightarrow a \to x \in D_1$.

$a \in D_1$et $a \to x \in D_1 \Rightarrow x \in D_1$ D'ou $\langle D, a\rangle \subseteq D_1$.

$\langle D, a\rangle$ est par conséquent le plus petit système déductif contenant D et a. ■

Proposition 3.3.3 *:*

1. *Pour tout $a \in A$, l'ensemble $D(a) = \{x \in A/a \leq x\}$ est le plus petit système déductif contenant a.*

2. *Si a et b sont deux éléments de A tels que $a \nleq b$ il existe un système déductif irréductible D tel que $a \in D$ et $b \notin D$.*

Proposition 3.3.4 *[2]*

Dans un treillis de Heyting , on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} D \text{ est un système déductif.} \\ D \text{ est un filtre.} \end{cases}$$

Preuve. :

1. Soit D un système déductif, montrons que D est un filtre

(i) $a \in D$ et $a \leq b \Rightarrow b \in D$? on'a $a \in D$ et $a \to b = 1 \in D \overset{\text{cf mp}}{\Rightarrow} b \in D$

(ii) Soit $a \in D$ et $b \in D$

D'aprés une propriétie des treillis de Heyting, on a:

$(a \to b) \wedge (a \to a) \leq a \to (b \wedge a)$

$(a \to b) \wedge 1 \leq a \to (a \wedge b)$

$a \to b \leq a \to (a \wedge b)$

$a \leq (a \to b) \to (a \wedge b)$

$a \to ((a \to b) \to a \wedge b) = 1 \in D$

$(a \to b) \to a \wedge b \in D \quad \text{cf mp } (a \in D) \ldots (1)$

$b \to (a \to b) = 1 \in D$ et $b \in D \Rightarrow a \to b \in D ...(2)$

De (1) et (2) : $a \wedge b \in D$

D est donc un filte

2. Soit D un filtre de D, on a: $1 \in D$

$a \in D$ et $a \to b \in D \Rightarrow a \wedge (a \to b) \in D$

Comme $a \wedge (a \to b) \leq b$, on a: $b \in D$

D est donc un système déductif

D'ou D est un système déductif $\Leftrightarrow$ D est un filtre. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons traité quelque concepts de treillis et quelques classes de treillis, ensuite nous avons étudié quelques caractérisations de filtres, idéaux, filtres principaux, idéaux principaux, filtres premiers, idéaux premiers, filtres maximaux, idéaux maximaux et filtres implicatifs dans un treillis de Heyting.

Bibliographie

[1] A. AMROUNE, **Cours théorie des relations, Master 1**, Université de M'sila, Septembre 2020.

[2] A. AMROUNE et M. YETTOU, **Cours ordres treillis, Master I, S2 Algèbre et Mathématiques Discrètes**, Université de M'sila, 30 mars 2020.

[3] A. AMROUNE, **Cour logique algébrique et mathématique floue, Master II**, Université de M'sila, Septembre 2020.

[4] A. AMROUNE, and B. DAVVAZ. "**Fuzzy ordered sets and duality for finite fuzzy distributive lattices.**" Iranian Journal of Fuzzy Systems 8.5 (2011): 1-12.

[5] A. AMROUNE, and B. ZIANE. "**More on Intuitionistic Fuzzy sublattices and their ideals.**" Facta Universitatis, Series: Mathematics and informatics 5 (2019): 871-888.

[6] A. AMROUNE, A. OUMHANI, and B. DAVVAZ. "**Kinds of t-fuzzy Filters of Fuzzy Lattices.**" Fuzzy Information and Engineering 9.3 (2017): 325-343.

[7] B. A. DAVEY et H. A. PRIESTLEY, **Introduction to lattices and order**, Second edition, Cambridge University Press, Combridge, 2002.

[8] G. Grätzer, **Lattice Theory**: first concepts and distributive lattices. Freeman, San Francisco, 1971.

[9] JEAN-LOUIS KRIVINE, **Logique Mathématique**, Masson Paris, 1993.

[10] B. KOLMAN, R. C. BUSBY and S. C. ROSS, **Discrete Mathematical Structures**, Fourth edition, Pearson education, 2001.

[11] S. LIPSCHUTZ, **Discrete Mathematics**, Third edition, Mcgra-Whill, 2007.

[12] MICHEL MARCHAND, **Outils Mathématiques pour l'informatique**, 2ème édition, DBS Sciences.

[13] Caspard, Nathalie, Bruno Leclerc, and Bernard Monjardet. Ensembles ordonnés finis: concepts, résultats et usages. Vol. 60. Berlin: Springer, 2007.

[14] A. OUMHANI, and A. AMROUNE. "**More on fuzzy lattices and their filters.**" An. Univ. Oradea Fasc. Mat 25 (2018): 143-155.

[15] D. PONASSE et J. C. CARREGA, **Algèbre et topologie booléennes**, MASSON, Paris, 1979.

[16] S. ROMAN, **Lattices and Ordred Sets**, Springer, 2008.

[17] B. ZIANE and A. AMROUNE. "**REPRESENTATION AND CONSTRUCTION OF 4 INTUITIONISTIC FUZZY T-PREORDERS AND FUZZY 5 WEAK T-ORDERS 6.**" Discussiones Mathematicae: General Algebra & Applications 41.1 (2021).

تم بحمد الله

خلاصة

في هذه المذكرة، سنقوم بدراسة بعض المفاهيم الأساسية في نظرية الشبكات.

كما سندرس بعض مفاهيم و خصائص المرشحات والمثاليات، المرشحات الرئيسية، المثاليات الرئيسية، والمرشحات الأولية، المثاليات الأولية، مرشحات القصوى ، المثاليات العليا و المرشحات الضمنية لشبكة هايتي .

كلمات مفتاحية : شبكة، مرشح، مثالي، مرشح رئيسي، مرشح أولي، مثالي أولي، شبكة هايتي .

Abstract

In this memory, we will study some basic notions of lattice theory.

We will recall the notion and characterizations of filters, ideals, prime filters, prime ideals, principle filters, principle ideals, maximal filter, maximal ideals and implicative filter of the lattice.

Key words : Lattice, filter, ideal, prime filter, prime ideal, maximal filter, maximal ideal, Heyting of lattice.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudierons quelques notion de base de la théorie des treillis.

Nous avons étudié les notions et caractérisations de filtres, idéaux, filtres principaux, idéaux principaux, filtres premiers, idéaux premiers , filtres maximal, idéaux maximaux et filtres implicatif dans un treillis de Heyting.

Mots-clés : Treillis, filtre, idéal, filtre premier, idéal premier, filtre maximal, idéal maximal, treillis de Heyting.