

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA
FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET
DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES



MEMOIRE de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques discrètes

Par

DALI Ouemelkheir

SUJET

**Application de séparation et évaluation pour résoudre un
problème d'optimisation combinatoire**

Soutenu publiquement le : 04/06/2016 devant le jury composé de :

Mr. Lamiche Chaabane
Mr. Belouadah Hocine
Dr. Bounab Noura

MCA. Université de M'sila
Prof. Université de M'sila
MCB. Université de M'sila

Président
Rapporteur
Examinatrice

Promotion : 2015 /2016

Table des matières

Introduction générale	1
1 Problème d'optimisation combinatoire et méthode de résolution exacte	2
1.1 Introduction	2
1.2 Le problème d'optimisation	2
1.2.1 Problème d'optimisation discrète	3
1.2.2 Problème d'optimisation combinatoire (POC)	3
1.3 Complexité théorique d'un problème	4
1.3.1 Problème facile et difficile.	5
1.4 Quelques problèmes d'optimisation combinatoire	6
1.4.1 Problème linéaire en nombres entiers (PLNE)	6
1.4.2 Le problème de sac à dos (P.S.À.D)	7
1.4.3 Le problème d'ordonnancement à une seule machine	8
1.4.4 Le problème du voyageur de commerce (P.V.C)	8
1.5 Résolution d'un problème d'optimisation combinatoire	9
1.5.1 Les méthodes exactes de résolution d'optimisation combinatoire	10
1.6 Quelques notions de base	11
1.6.1 Relaxation et relaxation linéaire (RL)	11
1.6.2 Une solution réalisable	12
1.6.3 Une solution réalisable optimale	12
1.6.4 Un graphe	12
1.7 Conclusion	13

2	La méthode de séparation et évaluation et l'algorithme du simplexe	14
2.1	Introduction	14
2.2	La méthode de séparation et évaluation (B&B)	14
2.2.1	Trois principes fondamentaux	15
2.2.2	Organigramme de l'algorithme de Branch & Bound	20
2.2.3	L'algorithme	20
2.3	La méthode du simplexe	20
2.3.1	Principe de la méthode du simplexe :	21
2.3.2	Organigramme de l'algorithme du simplexe	23
2.4	Conclusion	23
3	Application de la méthode de séparation et évaluation sur quelques problèmes	24
3.1	Introduction	24
3.2	Le problème linéaire en nombres entiers	24
3.2.1	Méthode algébrique (La méthode du simplexe)	28
3.3	Le problème du sac à dos	33
3.4	Le problème d'ordonnancement sur une seule machine	37
3.5	Le problème de voyageur de commerce (L'algorithme de Little)	39
3.5.1	L'algorithme de Little	39
3.5.2	Le problème de voyageur de commerce	39
3.6	Conclusion	49
	Conclusion générale	50

Introduction générale

- Les méthodes arborescentes (La séparation et évaluation (nommée Branch and Bound en anglais) est notée (B&B)) sont des méthodes exactes d'optimisation qui pratiquent une énumération intelligente de l'espace des solutions. Il s'agit d'énumération complète améliorée. Elles partagent l'espace des solutions en sous ensembles de plus en plus petits, la plupart étant éliminés par des calculs de borne savant d'être construits explicitement. Appliquées à des problèmes NP-difficiles, ces méthodes restent bien sur exponentielles, mais leur complexité en moyenne est bien plus faible que pour une énumération complète. Elles peuvent pallier le manque d'algorithmes polynomiaux pour des problèmes de taille moyenne. Pour des problèmes difficiles de grande taille, leur durée d'exécution est très grande et il faut se retourner vers des heuristiques ou solutions approchées.

Pour un problèmes d'optimisation combinatoire, on peut inventer plusieurs méthodes arborescentes. Cependant elles auront trois composantes communes :

- * Une règle de séparation de l'ensemble des solutions.
- * Une fonction d'évaluation des ensembles de solutions.
- * Une stratégie d'exploration.

Le premier exemple développé de procédure par séparation est l'algorithme proposé en 1960 par LAND et DOIG pour les programmes mixtes.

En 1963, Little et al. Utilisent une PS pour résoudre le problème du voyageur de commerce et eut un grand retentissement. Il sera exposé dans la suite, dans le paragraphe des exemples.

On explore l'ensemble des solutions réalisables $\mathcal{D}$ en de sous ensembles de plus en plus petits de façon à isoler une solution optimale dans l'un de ses sous ensembles.

Pour représenter cette exploration, on construit une arborescence dont le sommet de base correspond à l'ensemble $\mathcal{D}$ et dont les autres sommets correspondent à des sous ensembles de $\mathcal{D}$. Pour définir l'exploration, nous devons définir une règle de séparation et une règle pour se déplacer dans l'arborescence. Il faut définir pour chaque sous ensemble, un minorant appelé "évaluation par défaut". Cela impose de savoir calculer rapidement une "bonne" évaluation par défaut. Une itération consiste à choisir une feuille de l'arborescence, nœuds ou sommets non encore séparés. Quand un sommet ne peut fournir de meilleures solutions, il est dit tué ou élagué. La recherche se termine quand tous les nœuds ont été tués. Les sommets sont numérotés dans l'ordre de leur création.

Toute technique de séparation est valable, à condition qu'aucune solution ne soit perdue. La fonction d'évaluation empêche en pratique que l'arborescence soit construite en entier.[1]

- C'est en fait de montrer la flexibilité de la méthode de branch and bound pour son application : C'est comment elle est appliqué au problème linéaire à valeurs entières, le problème de sac à dos, le problème d'ordonnancement sur une machine et enfin le problème de voyageur de commerce.
- On s'intéresse dans ce mémoire au méthode d'optimisation combinatoire et à l'une des méthodes les plus puissantes pour déterminer une solution optimale. En fait on considère quatre problèmes d'optimisation combinatoire à savoir : la programmation linéaire à valeur entières, le problème de sac à dos, le problème d'ordonnancement et le problème de voyageur de commerce. Le plan de ce mémoire est constitué de trois chapitres :

Le premier chapitre : Concerne la définition des problèmes combinatoires et leurs classifications selon leurs difficultés. Ainsi que la méthode de séparation et évaluation.

Le deuxième chapitre : est consacré à l'étude de la méthode de séparation et évaluation et une autre méthode de solution d'un programme linéaire à savoir la méthode de simplexe.

Le troisième chapitre : montre comment on adapte l'utilisation de la méthode de séparation et évaluation aux problèmes d'optimisation cités avant.

Enfin, On conclut le manuscrit par une conclusion générale.

Problème d'optimisation combinatoire et méthode de résolution exacte

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier le problème d'optimisation combinatoire et les méthodes exactes de solution à savoir la programmation dynamique et la méthode de séparation et évaluation. On va essayer de définir le problème d'optimisation combinatoire et d'établir la théorie de complexité afin de pouvoir les classer selon leurs degrés de difficulté. Ensuite on va donner quelques exemples de problèmes d'optimisation combinatoire. Après on va présenter les deux méthodes exactes de solution.

1.2 Le problème d'optimisation

L'optimisation est une branche des mathématiques et de l'informatique en tant que discipline, cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à déterminer quelle sont les solutions satisfaisant un objectif quantitatif tout en respectant d'éventuelles contraintes.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on s'est concentré à l'étude de quelques problèmes d'optimisation combinatoire dans la classe des NP-difficiles où un algorithme polynomial de résolution est introuvable. Ces problèmes sont les plus célèbres : le problème linéaire en nombres entiers (PLNE), le problème de sac à dos, et le problème d'ordonnancement sur une seule machine et le problème de voyageur de commerce (PVC). C'est via des exemples numériques qu'on va montrer comment chacun pourrait être résolu par ce qu'on appelle la méthode de séparation et évaluation. C'est une méthode très performante dans le cas où le problème sous considération est de taille modérée. Cette méthode qui est aussi connu sous le nom de "branch and bound" (en Anglais) est basée sur trois aspects : l'évaluation par défaut (ou excès), la séparation et la stratégie de recherche.

Pour la stratégie du parcours dans l'arbre de recherche correspondant à la méthode de séparation évaluation on considère dans les trois cas stratégie "meilleur d'abord" vu son efficacité et son supériorité sur les autres stratégies à savoir : largeur d'abord, profondeur d'abord.

Bibliographie

- [1] A.DERBALA : *Programmation dynamique et métaheuristiques*, universite saad dahlab, Blida.
- [2] Bellman, Richard (1957) : *Dynamic Programming*, Princeton University Press. Dover paperback edition (2003), ISBN 0-486-42809-5.
- [3] M. AIDER : *Optimisation combinatoire*, El Alia, Bab Ezzouar 16111 Algiers, Algeria, 1 October 2014.
- [4] S.M. DOUIRI, S. ELBERNOUSSI, H.LAKHBAB : *Cours des Méthodes de Résolution Exactes Heuristiques et Métaheuristiques*. Laboratoire de recherche mathématiques.
- [5] Cours sur internet. NP - Complétude. <http://pedrov.kwain.net/utbm/AG51/Cours>.
- [6] Cours sur internet. Méthodes de résolution par séparation et évaluation. <http://sebastien-viardot.imag.fr/Enseignements/DocumentsAlgoWiki/bb.pdf>
- [7] Imen Harbaoui Dridi. Optimisation heuristique pour la résolution du m-PDPTW statique et dynamique. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Centrale de Lille; Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (Tunisie), 2010. Français. <NNT : 2010ECLI0031>. <tel-00590443>.
- [8] Jacques : Optimisation Combinatoire, CARLIER RECHERCHE OPERATIONNELLE .
- [9] J.-F. Scheid. Méthode du Simplexe, Graphes et RO-TELECOM Nancy 2A.
- [10] K. GHEDIRA et C. SOLNON : *Optimisation multi-objectif par colonies de fourmis : cas des problèmes de sac à dos*, Inès Alaya.

- [11] Du cours de maîtrise de Christine Solnon disponible à l'url <http://www710.univ-lyon1.fr/~csolnon>.
- [12] Lyes Belhoul. Résolution de problèmes d'optimisation combinatoire mono et multi-objectifs par énumération ordonnée. Autre [cs.OH]. Université Paris Dauphine - Paris IX, 2014. Français. <NNT : 2014PA090060>. <tel-01127114>.
- [13] Little, J. D; Murty, K. G; Sweeney, D. W; & Karel, C : *An algorithm for the traveling salesman problem*. Operations research, ISEN école d'ingénieurs, 1993.
- [14] Ana.busic@inria.fr, Conception d'algorithmes et applications (LI325), Cours 7 et 8: Algorithmes Gloutons.
- [15] INFOB321-Théorie des graphes : JP Leclercq, Cours de Théorie des Graphes et réseaux de Petri (Septembre 2008).

ملخص

في عملنا هذا تناولنا طريقة الفصل و التقييم لحل بعض المسائل الصعبة .
هدفنا هو توضيح مختلف استراتيجيات الفصل و التقييم من مسألة لأخرى .

الكلمات المفتاحية:

التوفيق المثلّي , المسألة الصعبة , الفصل , التقييم , الحل المحقق , الحل الامثل

RÉSUMÉ

Dans notre travail, on a abordé la méthode de la séparation et l'évaluation pour résoudre certains problèmes NP-difficile.

Notre objectif c'est : déterminer les différentes stratégies de la séparation et l'évaluation d'un problème à l'autre.

Mots clés : *L'optimisation combinatoire, problème d'optimisation discrète, la méthode exacte, problèmes difficiles, la séparation, l'évaluation, solution réalisable. Solution optimal*

ABSTRACT

In this memory, use talks about branch and bound to resolve some of difficult problems.

Our goal is to determine the different strategies of Branch and Bound from Problem to other.

Words key:

Combinatory optimizations, problem of optimization, the exact method, difficult problems, realizable solution, optimal solution.