

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF- M'SILA
FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
D'INGENIEUR D'ÉTAT EN GENIE ELECTROTECHNIQUE
OPTION : COMMANDE ELECTRIQUE

THÈME

Analyse et synthèse des filtres numériques à impulsion infinie -R//-

Proposé et dirigé par :

Monsieur: NOURI HAMOU

Présenté par :

DJENDI Abderachid

HADID Terki

ANNÉE UNIVERSITAIRE: 2007/2008

Remerciements

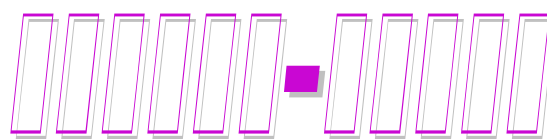
Remerciements à Dieu —le tout puissant — qui nous a aidé à réaliser ce modeste travail.

Nous tenons à remercier notre promoteur monsieur NOURI Hamou d'avoir accepté de nous encadrer et de nous suivre durant toute cette période.

Nos remerciements vont aussi au président du jury et aux membres du jury examinateurs qui nous fait l'honneur de participer au jury de ce travail.

Et enfin nous remercions l'ensemble des enseignants et des collègues de notre promotion, qui nous ont aidé à réaliser ce modeste travail.

Sans oublier tout le personnel du département électrotechnique



SOMMAIRE

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES DIFFÉRENTS FILTRES ÉLECTRIQUES

I.1- Introduction.....	4
I.2- Les différents types de filtres selon le domaine fréquentiel	4
I.2.1- Filtre passe-bas.....	4
I.2.1.1- Filtre passe-bas idéal.....	5
I.2.1.2- Filtre passe-bas du premier ordre.....	5
I. 2.1.3- Filtre passe-bas du second ordre.....	6
I. 2.1.4-Filtre d'ordre supérieur.....	6
I.2.2- Filtre passe-bande.....	7
I.2.2.1- Filtre passe-bande idéal.....	7
I.2.2.2- Filtre passe-bande du second ordre.....	8
I.2.3- Filtre passe-haut.....	9
I.2.3.1- Filtre passe-haut idéal.....	9
I.2.3.2- Filtre passe-haut du premier ordre.....	9
I.2.4- Filtre coupe-bande.....	10
I.3- Classification des Filtres.....	10
I.3.1- Les filtres analogiques.....	10
I. 3.1.1- Fonctions de transfert des filtres.....	10
I.3.1.2- Filtres passifs.....	11
I.3.1.3- Filtres actifs.....	15
I.3.1.4- Avantages du filtrage analogique.....	18
I.3.1.4- Les inconvénients du filtrage analogique.....	18
I.3.2- Les filtres numériques	18
I.3.2.1- Les propriétés principales du filtrage numérique.....	20
I.3.2.2- Avantages du filtrage numérique.....	21
I.3.2.2- Inconvénients du filtrage numérique.....	21
I.3.3- Les filtres piézoélectriques	22
I. 3.4-Filtres SAW(de l'anglais Surface Acoustic Wave).....	22
I.3.5- Filtres atomiques.....	22

I. 4- Gabarits des filtres.....	22
I. 4.1- Centrage des gabarits.....	23
I.5- Conclusion.....	25

CHAPITRE II

LE FILTRAGE NUMÉRIQUE

II.1- Introduction.....	26
II.2- Définition d'un filtre.....	26
II.3- Définition du gabarit d'un filtre	26
II.3.1- Paramètres de spécification.....	27
II.4- Causalité et stabilité d'un filtre.....	27
II.4.1- Causalité.....	27
II.4.1.1- Principe de Causalité.....	27
II.4.2- Stabilité.....	28
II.5- Les filtres numériques.....	29
II.5.1- Introduction et définition.....	29
II.5.2- Filtrage numérique simple - lissage temporel.....	33
II.6- Filtres numériques synthétisés par $H(z)$	34
II.6.1- Structure directe.....	34
II.6.2- Structure canonique.....	34
II.6.3- Structure en composants simples.....	35
II.7- Structure des filtres récurrents.....	37
II.7.1- Opérateurs élémentaires du graphe de fluence.....	38
II.7.2- Optimalité de l'architecture.....	39
II.7.2.1- Formes directes I et II.....	39
II. 7.2.2- Formes transposées I et II.....	40
II.8-Filtrage par FFT.....	41
II.8.1- Filtres numériques basés sur la convolution.....	41
III.9- Filtres numériques avancés	42
II.9.1- Filtres numériques de la valeur médiane.....	42
II.9.2- Filtres numérique multiscadence.....	42
II.10- Comparaison des filtres RIF et RII.....	43
II.11- Conclusion.....	46

CHAPITRE III

SYNTHÈSE DES FILTRES NUMÉRIQUES RII

III.1- Introduction.....	47
III.2- Les Principales caractéristiques des filtres numériques RII.....	47
III.3- Les différentes étapes de la modélisation et de simulation des filtres RII(l'organigramme).....	48
III.4- Réalisation d'un filtre passe-bas d'ordre 2.....	50
III.4.1- Filtre analogique.....	50
III.4.2- Calcul des paramètres de filtre à partir de la fonction de transfert.....	51
III.4.3- Approximation.....	51
III.4.4- Circuit analogique du filtre.....	52
III.4.4.1- Circuits de Sallen -Key à gain fixe.....	52
III.4.4.2- Circuits de Sallen -Key à gain variable.....	52
III.5- Quelques techniques de la synthèse des filtres.....	53
III.6- Transformation d'un filtre analogique en filtre numérique.....	54
III.6.1- Méthode de l'approximation de l'équation différentielle.....	54
III.6.2- Méthode du bloqueur d'ordre zéro.....	56
III.6.3- Transformation bilinéaire.....	57
III.6.4- Méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle.....	62
III.6.5- Etude des filtres récursifs par la méthode des pôles et des zéros.....	62
III.7- Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle infinie RII.....	63
III.7.1- Quelques types de filtres RII.....	64
III.7.2- Les différentes formes de $H(z)$	65
III.8- Application de l'étude aux filtres de Butterworth.....	65
III.8.1- Les caractéristiques principales des filtres de Butterworth.....	65
III.8.2- Fonction de transfert des filtres de Butterworth.....	66
III.8.3- Polynômes de Butterworth.....	68
III.8.4 : Détermination de l'ordre n de butterworth.....	68
III.8.5- Synthèse d'un filtre de Butterworth.....	69
III.9- Conclusion.....	75

CHAPITRE IV

ANALYSE DES FILTRES NUMÉRIQUES RII

IV.1- Introduction.....	76
IV.2-Définition.....	76
IV.3- Analyse des filtres autorégressifs du second ordre (filtre passe-bas).....	77
IV.3.1- le schéma bloc du filtre proposé.....	78
IV.4- Application des techniques d'analyse aux filtres de chebychev.....	79
IV.4.1- Approximation Chebyshev.....	79
IV.4.2-Polynomes de chebychev.....	79
IV.4.3-Dimensionnement du filtre de Tchebychev.....	79
IV.4.4-Analyse d'un filtre de Tchebychev type 1 et 2.....	80
IV.5-analyse d'un filtre numérique RII passe-bas du second ordre a partire de l'équation de récurrence	83
IV.6- Autre technique pour améiores l'analyse des filtres RII.....	87
IV.6.1- Quantification.....	87
IV.6.2- transformée de Fourier rapide(FFT).....	87
IV.7- Conclusion.....	88
Conclusion générale.....	90

Annexe A

A.1- Introduction.....	91
A.3- Quelques transformées usuelles.....	91
A.2- Inversion de la transformée de Laplace.....	92

Annexe B

B.1- Introduction.....	95
B.2- Passage du monde continu au monde discret.....	95
B.3- Ecriture de l'opération d'échantillonnage.....	95
B.4-Théorème d'échantillonnage.....	96
B.5- Commentaires.....	99

Annexe C

C.1- Introduction.....	100
C.2- Convolution.....	100
C.3-Transformée en Z inverse.....	100
C.4-Transformées en Z usuelles.....	101

Introduction

générale

Le traitement du signal est la discipline qui développe et étudie les techniques de traitement (filtrage, amplification...), d'analyse et d'interprétation des signaux. Elle fait donc largement appel aux résultats de la théorie de l'information, des statistiques ainsi qu'à de nombreux autres domaines des mathématiques appliquées.

Traiter un signal, c'est extraire de l'information de mesures effectuées par des capteurs en vue d'atteindre un but donné. Ce but peut aller de la compréhension du monde physique (les physiciens, les météorologues, les géologues, les chimistes ou les biologistes, etc...) à l'action sur ce monde (en robotique, dans les applications militaires, etc...) en passant par la reconstruction d'un message transmis au moyen d'un médium physique, comme une onde, utilisé pour le transporter (c'est le cas des sons, des signaux de télécommunications, des signaux sonar ou radar). Ceci couvre des domaines d'applications extrêmement variés: dès qu'on utilise un capteur pour mesurer une quantité, on est amené à effectuer un traitement. Le phénomène physique qui a fait réagir les capteurs, en général, été émis par une ou plusieurs sources et présente des variations temporelles (comme un signal sonore) ou spatiales (par exemple une scène qu'on photographie ou qu'on filme). Ces sources émettent ou réémettent des signaux qui sont transmis par un milieu par exemple sous la forme d'ondes électromagnétiques, de sons, etc... Ces ondes qui portent l'information sur les sources peuvent être déformées : étalées dans le temps, atténuées ou retardées en fonction de la fréquence, réfléchies par des obstacles, etc... L'analyse et la compensation des déformations de formes très variables apportées par le milieu de transmission est sans doute un des problèmes centraux du traitement du signal.

Le signal mesuré par les capteurs est, la plupart du temps, entaché d'un bruit de mesure. Il présente des fluctuations qui ne sont pas uniquement déterminées par le phénomène étudié et qui peuvent en compliquer considérablement l'analyse. C'est par exemple le cas d'un signal déformé par un canal de transmission, d'un signal acoustique modifié par des échos et pollué par les signaux émis par d'autres sources sonores. La présence de ces perturbations et les tentatives pour en atténuer les effets, en particulier dans le domaine des télécommunications, sont à la base du développement de la théorie du signal. Dans d'autres applications, c'est la grande variabilité du signal émis qui a suscité le développement de techniques de traitement numérique du signal, en particulier les techniques de reconnaissances de formes. Par exemple, il y a tellement de variations entre les formes possibles d'un son élémentaire du langage parlé

(un phonème), qu'on ne sait toujours pas concevoir une machine capable de reconnaître une phrase dite par quelqu'un dont elle n'a pas appris les caractéristiques vocales.

De manière générale, on peut dire que le signal mesuré par un capteur n'est pas parfaitement prévisible (il n'y aurait alors aucune raison de l'étudier.) Cependant, il n'est pas complètement imprévisible, car dans ce cas il ne serait pas possible d'en effectuer un traitement pour en extraire de l'information. Ces caractéristiques, perturbations et absence de prévisibilité, nécessiteront l'utilisation fréquente d'outils développés dans le cadre de la théorie des probabilités. La seconde caractéristique suppose un certain degré de "prédictibilité" du signal. Le concepteur de l'unité de traitement du signal dispose d'une certaine connaissance sur le signal. Il aura donc à l'utiliser pour extraire les informations utiles du signal étudié, ce qui n'est pas toujours simple. Il y a une autre difficulté au traitement des signaux mesurés dans le monde réel: leurs caractéristiques, même en termes de probabilités, ne sont en général pas parfaitement connues et un traitement ne s'avèrera utile que si son efficacité est démontrée sur des données réelles. Cela semble une banalité, mais il est regrettable que de nombreuses méthodes de traitement de signaux ne sont validées et justifiées que par des simulations sur des "cas d'école" abstraits: les signaux générés artificiellement présentent tous les hypothèses requises et les méthodes proposées permettent d'atteindre les objectifs fixés. Pourtant dès qu'on les confronte à des signaux réels, elles s'avèrent décevantes parce que les hypothèses retenues (souvent simplificatrices) pour la simulation ne correspondent pas toujours à la réalité des phénomènes mesurés. La recherche de cette connaissance sur les signaux et la manière dont ils ont été émis ou perturbés est probablement la partie fondamentale de l'étude et de la mise au point d'un système de traitement de signaux. C'est aussi la source d'une grande diversité dans les techniques de traitement. Cette diversité des techniques en fonction des applications permet difficilement de considérer le traitement du signal comme l'application d'une théorie; c'est parfois un regroupement de recettes variées très spécifiques des applications visées.

Le présent travail de fin des études des sciences de l'ingénieur, consiste à étudier, la synthèse, l'analyse et la simulation des filtres numériques R.I.I à phase linéaire. L'introduction d'outils de simulation a rendu possible une méthode de recherche qui combine les approches théorique et pratique. Le langage Matlab, d'une grande simplicité d'emploi, entre dans cette catégorie. De manière plus générale, la simulation est devenue aujourd'hui un outil de validation des algorithmes issue de la recherche. Il existe de multiples façons d'effectuer

l'approximation, l'approche choisie dépendra du temps et des moyens à disposition (programme spécialisé), de la sévérité des exigences du gabarit, surtout lorsqu'il existe des contraintes sur l'ordre maximum du filtre à synthétiser, et en règle générale lorsqu'il n'y a pas de programme spécialisé à disposition, de l'expertise du concepteur en techniques d'optimisation. Ce travail donc, concerne un procédé de traitement de signal utilisant un filtrage numérique au cours duquel la représentation d'un filtre est adaptée selon les caractéristiques du cahier de charges. Lorsqu'il faut effectuer le filtrage réel dans le filtre numérique, un filtre numérique réel est obtenu par développement des coefficients du filtre numérique réduit selon une table de mappage, puis utilisé à la place de celui d'origine.

Cette mémoire contient quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux généralités sur l'étude théorique des différents filtres électriques.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du filtrage numérique. Ce chapitre sera une introduction à l'étude des filtres numériques. On y abordera succinctement les méthodes de conception de ces filtres.

Le troisième chapitre est consacré aux synthèses des filtres numériques RII. Ce chapitre décrit une technique de modélisation des signaux qui présente plusieurs intérêts : utilisation de techniques mathématiques relativement élaborées, bonne adaptation au traitement de signaux réels comme le traitement d'image.

L'analyse des filtres numérique à réponse impulsionnelle infinie fait l'objet du dernier chapitre.

Generalites sur les défferents filtres électrique

I.1- Introduction :

La théorie des signaux est une discipline appartenant à la fois à des bases théoriques fondamentales et à des techniques particulières. Son influence déborde toutefois aussi sur les techniques de l'énergie, dans la mesure où l'on y rencontre de nombreux phénomènes (fluctuations de charge d'un réseau électrique, vibrations d'une machine tournante, variations transitoires du courant d'excitation d'un moteur électrique, perturbations électromagnétiques, ... etc.) qui peuvent être étudiés avec les mêmes outils théoriques ou expérimentaux que ceux utilisés pour les signaux informationnels. En fait, la théorie et le traitement des signaux intéressent tous les secteurs techniques et scientifiques dans lesquels l'information est perçue par l'intermédiaire d'observations expérimentales de grandeurs mesurables.

Ces deux termes-clefs : perception et traitement, indiquent pourquoi cette discipline s'est avant tout développée en relation avec les applications de l'électricité et plus particulièrement celles de la métrologie, responsable de la perception, des télécommunications et de l'informatique, chargés du traitement.

La métrologie fournit les capteurs qui traduisent pratiquement n'importe quel phénomène physique en une grandeur électrique (facilement amplifiée, filtrée, conditionnée, codée...etc.) par des dispositifs électroniques appropriés. Les circuits de télécommunication acheminent le signal électrique ainsi créé vers son destinataire. Grâce à l'énorme puissance de calcul de l'informatique, elle permet d'effectuer des tâches complexes de manipulations et d'interprétation de l'information véhiculée par le signal.

I.2- Les différents types de filtres selon le domaine fréquentiel:

Nous distinguons les types usuels suivants :

I.2.1- Filtre passe-bas:

Un filtre passe-bas est un filtre qui laisse passer les basses fréquences et qui atténue les hautes fréquences, c'est-à-dire les fréquences supérieures à la fréquence de coupure. Il pourrait également être appelé filtre coupe-haut. Le filtre passe-bas est l'inverse du filtre passe-haut. Ces deux filtres combinés forment un filtre passe-bande.

Le concept de filtre passe-bas est une transformation mathématique appliquée à des données (un signal). L'implémentation d'un filtre passe-bas peut se faire numériquement ou avec des composants électroniques. Cette transformation a pour fonction d'atténuer les fréquences supérieures à sa fréquence de coupure f_c , dans le but de conserver uniquement les basses fréquences. La fréquence de coupure du filtre est la fréquence séparant les deux modes de

fonctionnement idéaux du filtre : passant ou bloquant. Nous distinguons un certain ensemble de filtres passe-bas [1] :

I.2.1.1- Filtre passe-bas idéal:

Un filtre passe-bas idéal a un gain constant dans sa bande passante et un gain nul dans la bande coupée. La transition entre les deux états est instantanée. Mathématiquement, il peut être réalisé en multipliant le signal par une fenêtre rectangulaire dans le domaine fréquentiel ou par une convolution avec un sinus cardinal (Sinc) dans le domaine temporel. Ce type de filtre est appelé « mur de brique » dans le jargon des ingénieurs.

Naturellement, un filtre idéal n'est pratiquement pas réalisable, car un sinus cardinal est une fonction infinie. Ainsi, le filtre devrait prédire le futur et avoir une connaissance infinie du passé pour effectuer la convolution et obtenir l'effet désiré. Il est possible d'approximer très fidèlement ce filtre, de manière numérique lorsqu'on dispose d'un signal préenregistré (en ajoutant des zéros aux deux extrémités de la série d'échantillons) ou pour un signal périodique en temps réel. Les filtres numériques peuvent approximer ce filtre en insérant un délai volontaire dans le signal, ce qui permet de « connaître le futur du signal ». Cette opération crée un déphasage entre la sortie et l'entrée et naturellement, plus le délai inséré est long, plus le filtre se rapprochera du filtre idéal.[2]

I.2.1.2- Filtre passe-bas du premier ordre:

Un filtre passe-bas du premier ordre est caractérisé par sa fréquence de coupure f_c . La fonction de transfert du filtre est obtenue en dénormalisant le filtre passe-bas normalisé en substituant ω_n par ω / ω_c , ce qui donne la fonction de transfert suivante :

$$H(j\omega) = \frac{v_0}{v_i} = \frac{K}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad (\text{I.1})$$

Avec : $\omega = 2\pi \cdot f$ et $\omega_c = 2\pi \cdot f_c$.

Le module et la phase de la fonction de transfert sont égales à :

$$|H(\omega)| = \left| \frac{v_0}{v_i} \right| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \quad (\text{I.2})$$

$$\phi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\arg\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_c}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (\text{I.3})$$

Il y a plusieurs méthodes pour implémenter les filtres. À noter que K est le gain du filtre.

I. 2.1.3- Filtre passe-bas du second ordre:

Un filtre passe-bas du second ordre est caractérisé par sa fréquence de résonance f_0 et par le facteur de qualité Q . Il est représenté par la fonction de transfert suivante :

$$H(j\omega) = \frac{v_0}{v_i} = \frac{K}{1 - x^2 - j \frac{x}{Q}} \quad (\text{I.4})$$

Où $\omega = 2\pi f$; $\omega_0 = 2\pi f_0$; $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Le module et la phase de la fonction de transfert sont donc égaux à :

$$|H(\omega)| = \left| \frac{v_0}{v_i} \right| = \frac{K}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + (x/Q)^2}} \quad (\text{I.5})$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{x/Q}{1 - x^2}\right) \quad (\text{I.6})$$

I. 2.1.4-Filtre d'ordre supérieur:

Les filtres d'ordre supérieur sont généralement composés de filtres d'ordre 1 et 2 en cascade. La réalisation d'un filtre d'ordre 5, par exemple, se fait en plaçant deux filtres d'ordre 2 et un filtre d'ordre 1 (Figure I.1) [1].

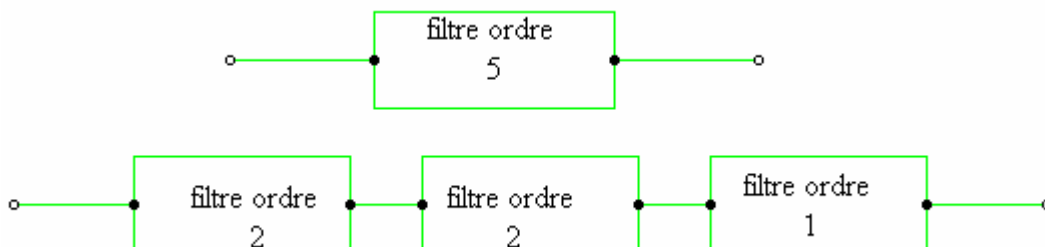


Figure I.1: Réalisation d'un filtre d'ordre 5.

Il serait possible de réaliser directement un filtre d'ordre 5, mais la difficulté de conception en serait grandement augmentée. On peut se poser la question de l'intérêt des filtres d'ordre deux,

en effet il est à priori possible de réaliser un filtre d'ordre deux à partir de deux filtres d'ordre un. La mise en cascade de deux filtres d'ordre un constitue bien un filtre d'ordre deux, elle ne permet pas toutefois de réaliser tous les filtres d'ordre deux, en effet les pôles de $H(p)$ sont dans ce cas toujours réels. En conséquence nombre de filtres d'ordre deux ne sont pas réalisables par la mise en cascade de deux filtres d'ordre un [3].

I.2.2- Filtre passe-bande:

Un filtre passe-bande est un filtre ne laissant passer qu'une bande ou intervalle de fréquences compris entre une fréquence de coupure basse et une fréquence de coupure haute du filtre. Le concept de filtre passe-bande est une transformation mathématique appliquée à des données (Un signal). L'implémentation d'un filtre passe-bande peut se faire numériquement ou avec des composantes électroniques. Cette transformation a pour fonction d'atténuer les fréquences à l'extérieur de la bande passante, l'intervalle de fréquences compris entre les fréquences de coupure. Ainsi, uniquement les fréquences comprises dans cet intervalle sont conservées intact ou avec une faible atténuation [4].

La bande passante BP d'un filtre passe-bande est l'intervalle de pulsations $[w_{c1}, w_{c2}]$ qui correspond aux pulsations telles que le gain soit au plus à 3 décibels en dessous du gain maximum (ici 0 dB) :

$$G(w_{ci}) = G(w_0) - 3 \quad (\text{I.7})$$

$$BP = [w_{c1}, w_{c2}] \quad (\text{I.8})$$

Ces pulsations de coupure sont telles que :

$$|h(jw_{c1})| = |h(jw_{c2})| = \frac{h_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (\text{I.9})$$

$$\text{Notant que : } 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -3 \text{ dB}$$

I.2.2.1- Filtre passe-bande idéal:

Un filtre idéal a un gain constant dans sa bande passante et un gain nul dans la bande coupée (Figure I.2). La transition entre les deux états est instantanée. Dans la réalité, un filtre possède à sa fréquence de coupure un gain ($G_{\max} = -3 \text{ dB}$) et ensuite ce gain décroît de (-20 dB) par décade (soit -6 dB par octave) (filtre de 1^{er} ordre) [5].

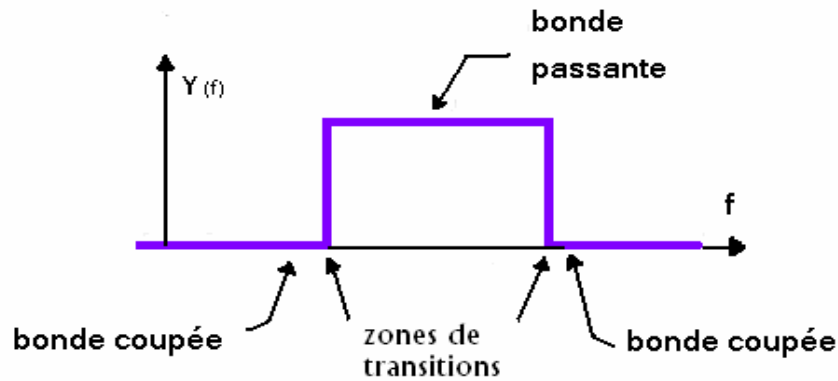


Figure I.2 : Exemple d'un filtre passe-bande idéal

I.2.2.2- Filtre passe-bande du second ordre:

Indépendamment de la méthode utilisée pour déterminer l'ordre d'un filtre, il se peut qu'un filtre passe-bande d'ordre ne soit pas défini (Figure I.3).

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre s'écrit sous la forme :

$$h(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j \cdot Q \cdot (x - 1/x)} \quad (\text{I.10})$$

Avec : H_0 le coefficient de gain ;

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} : \text{Variable réduite.}$$

En acoustique, un filtre passe-bande peut servir à atténuer certains sons désagréables voire néfastes, tout en laissant passer les sons « utiles » (voix, signal d'avertissement).

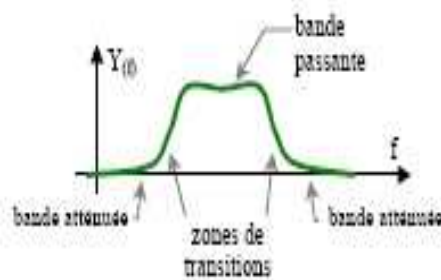


Figure I.3 : Exemple de filtre passe-bande réel.

En mécanique, un filtre passe-bande peut permettre d'atténuer des vibrations ou oscillations perturbatrices voire néfastes, tout en gardant une certaine souplesse du système : le système peut se déformer et donc s'adapter aux conditions. Il a une force de rappel en ramenant vers ses dimensions initiales, mais il est peu sensible à des sollicitations extérieures ayant une fréquence rapide ou lente. Dans le cas d'une mesure (microphone, sismographe, etc.), un tel filtre permet également de sélectionner la gamme d'ondes que l'on veut détecter.

I.2.3- Filtre passe-haut:

Un filtre passe-haut est un filtre qui laisse passer les hautes fréquences et qui atténue les basses fréquences, c'est-à-dire les fréquences inférieures à la fréquence de coupure. Il pourrait également être appelé filtre coupe-bas. Le filtre passe-haut est l'inverse du filtre passe-bas et ces deux filtres combinés forment un filtre passe-bande.

Le concept de filtre passe-haut est une transformation mathématique appliquée à des données (un signal). L'implémentation d'un filtre passe-haut peut se faire numériquement ou avec des composants électroniques. Cette transformation a pour fonction d'atténuer les fréquences inférieures à sa fréquence de coupure f_c et ce, dans le but de conserver uniquement les hautes fréquences. La fréquence de coupure du filtre est la fréquence séparant les deux modes de fonctionnement idéaux du filtre : bloquant ou passant. [1].

I.2.3.1- Filtre passe-haut idéal:

Un filtre idéal serait un filtre capable de couper très nettement à sa fréquence de coupure. Dans la réalité, un filtre possède sa fréquence de coupure au gain $G_{max} -3$ dB et ensuite ce gain décroît de -20 dB par décade (filtre de 1^{er} ordre).

I.2.3.2- Filtre passe-haut du premier ordre:

Un filtre du premier ordre est caractérisé par sa fréquence de coupure f_c . La fonction de transfert du filtre est obtenue en dénormalisant le filtre passe-bas normalisé en substituant ω_n par ω_c / ω ce qui donne la fonction de transfert suivante :

$$H(j\omega) = \frac{v_0}{v_i} = \frac{K j \omega / \omega_c}{1 + j \omega / \omega_c} \quad (\text{I.11})$$

Le module et la phase de la fonction de transfert égalent à :

$$|H(\omega)| = \left| \frac{v_0}{v_i} \right| = \frac{K \omega / \omega_c}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}} \quad (\text{I.12})$$

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \frac{\pi}{2} - \arg\left(1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_c}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (\text{I.13})$$

Il y a plusieurs méthodes pour implémenter ce filtre. Une réalisation active et une réalisation passive sont ici présentées. À noter que K est le gain du filtre.

I.2.4- Filtre coupe-bande:

Un filtre coupe-Bande aussi appelé filtre réjecteur de bande ou filtre cloche est un filtre empêchant le passage d'un intervalle de fréquences. Il est composé d'un filtre passe-haut et d'un filtre passe-bas dont les fréquences de coupure sont souvent proches mais différentes. La fréquence de coupure du filtre passe-bas est systématiquement inférieure à la fréquence de coupure du filtre passe-haut

Les récepteurs radio utilisés par les radioamateurs sont souvent munit d'un *filtre réjecteur* réglable. Il permet d'éliminer le sifflement et certaines perturbations du signal audio, on lui donne le nom de filtre notch (de l'anglais *notch* qui signifie encoche).

I.3- Classification des Filtres :

Nous avons essentiellement les classes suivantes :

- Les filtres analogiques ;
- Les filtres numériques ;
- Les filtres piézoélectriques ;
- ;

I.3.1- Les filtres analogiques:

I. 3.1.1- Fonctions de transfert des filtres:

Un filtre analogique est caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$; le gain complexe $H(jw)$ est obtenu en faisant $p=jw$ dans $H(p)$. D'une manière générale $H(p)$ se présente sous la

forme suivante :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i p^i}{\sum_{j=0}^N b_j p^j} \quad \text{Avec } M \leq N \quad (\text{I.14})$$

L'ordre d'un filtre est donné par le degré du polynôme du dénominateur, c'est à dire N. C'est le degré de l'équation différentielle régissant le fonctionnement du filtre. Il définit le comportement asymptotique quand w tend vers zéro ou à l'infini. L'ordre d'un filtre est donc une caractéristique importante. Les filtres d'ordre deux et d'ordre un occupent une place de toute première importance, en effet un filtre d'ordre N quelconque peut être réalisé à partir d'un ensemble de filtres d'ordre deux et un si nécessaire [6].

I.3.1.2- Filtres passifs :

Un filtre passif se caractérise par l'usage exclusif de composants passifs (résistances, condensateurs, bobines couplées ou non). Par conséquent, leur gain (rapport de puissance entre la sortie et l'entrée) ne peut excéder 1. Autrement dit, ils ne peuvent qu'atténuer en partie des signaux, mais pas les amplifier.

Les réalisations les plus simples sont basées sur des circuits RC, RL, LC ou Circuit RLC. Mais il est bien sûr permis d'augmenter la complexité du filtre (et le nombre de composants). Moins il y aura de composants, plus il sera délicat d'être sélectif : l'atténuation se fera progressivement. Avec plus de composants, on peut espérer couper plus brutalement une fréquence en touchant moins les voisines.

Les filtres passifs sont rarement sujets à des phénomènes de saturation (hormis quelques cas de bobines avec noyau) d'où par exemple leur usage dans les enceintes de haut-parleurs. De plus ils peuvent exister dans toutes les gammes de fréquences (d'où leur usage dans certains circuits haute fréquence comme en radio par exemple). Toutefois, un même circuit peut difficilement couvrir à lui seul une très large gamme de fréquences car le choix d'un type de bobine ou de condensateur dépend de la fréquence. C'est faisable mais plus complexe. Citons l'exemple du condensateur électrochimique : bien adapté aux basses fréquences, il devient assez vite inductif avec l'augmentation de la fréquence (il perd son comportement capacitif).

Une bobine est constituée d'un fil et est donc très conductrice en basse fréquence. Par contre, elle s'oppose au passage des hautes fréquences. Les condensateurs font l'inverse (isolant en basse fréquence, conducteur en haute fréquence). Les résistances ne sélectionnent pas les fréquences à elles seules, mais permettent de définir les constantes de temps d'un circuit en limitant plus ou moins les courants. Donc les résistances déterminent la fréquence à laquelle le filtre agira et son atténuation.

Au-delà de 100 MHz : les inductances sont souvent constituées par un simple fil sinueux ou des bandes de métal, et les condensateurs par des bandes de métal superposées (stubs). Par exemple sur les deux faces opposées d'un circuit imprimé.

Pour les filtres du second ordre, pouvant être décrits par une équation différentielle (linéaire très souvent) du second ordre, il est possible de définir un facteur de qualité, c'est-à-dire le rapport entre leur fréquence centrale et leur bande passante, attention ceci n'est valable que pour un passe-bande. Un filtre ayant une bande très fine par rapport à sa fréquence centrale sera considéré comme très sélectif ou de grande qualité.

Le circuit est soumis à plus ou moins de bruits parasites apparaissant dans les signaux. Cela dépend des composants employés : Bruit thermique très faible dans les résistances, bruit assez

faible dans les condensateurs, mais sensibilité aux champs magnétiques plus important avec les bobines.

La manière la plus simple de réaliser physiquement ce type de filtre est d'utiliser un circuit RLC. Comme son nom l'indique, ce circuit est constitué d'une résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'une inductance L. Ces trois éléments sont placés en série avec la source v_i du signal. Le signal de sortie v_o est récupéré aux bornes du troisième et dernier élément, le condensateur. Pour retrouver la fonction de transfert de ce filtre, il faut travailler dans le domaine de Laplace en utilisant les impédances des éléments. Avec cette technique, le circuit devient un simple diviseur de tension, et on obtient [1] :

$$H(j\omega) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-1/LC}{\omega^2 - j\omega \frac{R}{L} - \frac{1}{LC}} \quad (\text{I.15})$$

Avec :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{L/C}$$

Le module et la phase de ce circuit sont :

$$|H(\omega)| = \left| \frac{v_o}{v_i} \right| = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (1 - LC\omega^2)^2}} \quad (\text{I.16})$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(-\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (\text{I.17})$$

La manière la plus simple de réaliser physiquement ce filtre est d'utiliser un circuit RC (Figure I.4). Comme son nom l'indique, ce circuit est constitué d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C. Ces deux éléments sont placés en série avec la source v_i du signal.

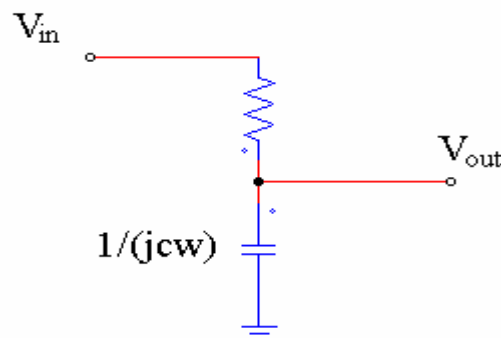


Figure I.4 : Filtre passif RC

Le signal de sortie v_o est récupéré aux bornes du condensateur. Pour retrouver la fonction de transfert de ce filtre, il faut travailler dans le domaine de Laplace en utilisant les impédances des éléments. Avec cette technique, le circuit devient un simple diviseur de tension, et on

obtient :

$$H(j\omega) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad (\text{I.18})$$

Dans cette équation, j est un nombre complexe, la racine carrée de -1 , et ω est la pulsation du circuit ou fréquence radiale, exprimée en rad/s.

Comme la fréquence de coupure d'un circuit RC est : $\omega_c = \frac{1}{RC}$ ou $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

Alors nous avons un filtre passe-bas analogique d'ordre 1 réalisé avec un circuit RC.

Ici ω_c , est la pulsation de coupure, et ω_0 est également la pulsation propre du circuit. Elle est l'inverse de la constante de temps τ du circuit (majorée de la constante 2π). Ainsi, on obtient la fonction de transfert typique du filtre passe-bas du premier ordre. Avec cette fonction de transfert, on peut obtenir les diagrammes de Bode :

- Le gain en décibels : $G_{db} = -20 \cdot \log |H(\omega)| = -10 \cdot \log(1 + (\omega RC)^2)$
- La phase en radians : $\phi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$

On distingue alors deux situations idéales :

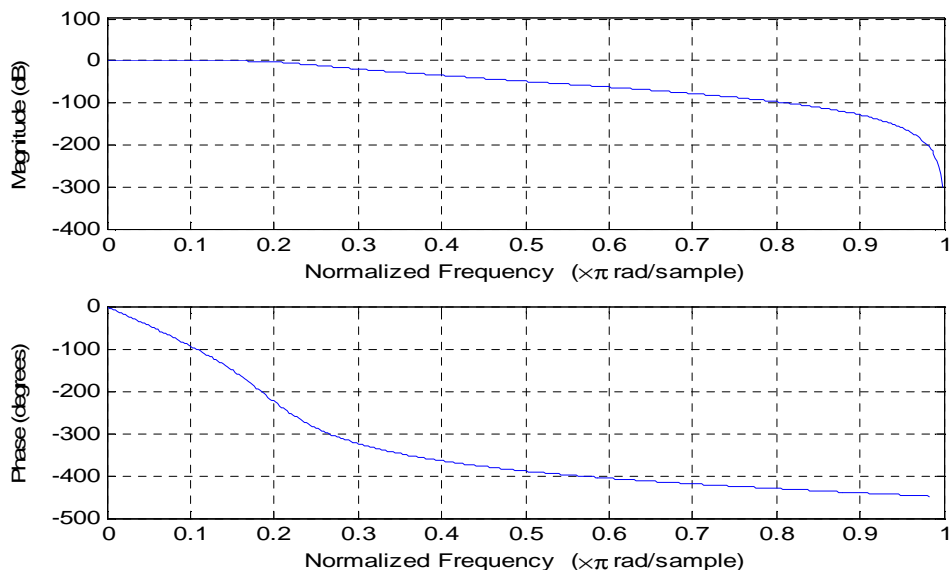


Figure I.5 : Diagramme de Bode du filtre RC

- Lorsque $w \ll w_c$, on a :

$$G_{dB} \approx 0 \text{ et } \varphi \approx 0 \text{ (le filtre est passant)}$$

- Lorsque $w \gg w_c$, on a :

$$G_{dB} \approx -20 \log\left(\frac{w}{w_c}\right) \text{ et } \varphi \approx 90^\circ \text{ (le signal est alors filtré)}$$

On remarque que pour $w = w_c$, on a $G_{dB} = -3 \text{ dB}$.

On peut obtenir un filtre passe-bande passif avec le circuit RLC décrit sur le schéma de la figure (I.6). On trouve alors la fonction de transfert suivante :

$$h(jw) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + j\left(w \cdot \frac{L}{R} - \frac{1}{RCw}\right)} \quad (\text{I.19})$$

$$\text{Avec : } w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On a ainsi :

$$h(jw) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}\right)} \quad (\text{I.20})$$

$$\text{Alors } |h(j)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}\right)^2}} .$$

$$\text{On trouve que : } \arg(h(jw)) = -\arctan\left(Q \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

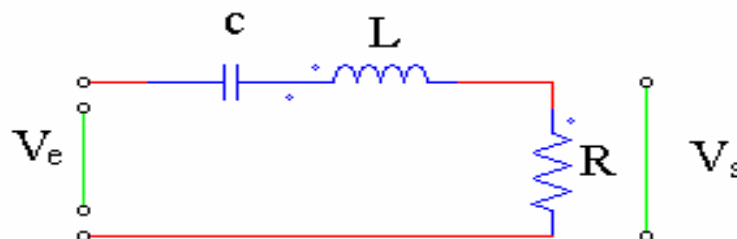


Figure I.6 : Schéma d'un filtre passe-bande RLC

Un filtre passe-haut peut être implémenté de façon analogique avec des composantes électroniques. Par conséquent, ce genre de filtre s'applique sur des signaux continus en temps réel. Les composantes et la configuration du circuit fixeront les différentes caractéristiques du filtre, telles que l'ordre, la fréquence de coupure et son diagramme de Bode. Les filtres analogiques classiques sont du premier ou du second ordre.

Il existe plusieurs familles de filtres analogiques : Butterworth, Tchebychev, Bessel, elliptique, etc. L'implémentation des filtres de même famille se fait généralement en utilisant la même configuration de circuit, et ceux-ci possèdent la même forme de fonction de transfert, mais ce sont les paramètres de celle-ci qui changent, donc la valeur des composantes du circuit électrique

I.3.1.3- Filtres actifs:

Les filtres actifs se caractérisent par l'usage d'au moins d'un composant actif (par exemple transistor, amplificateur opérationnel, ou autre circuit intégré...) (Figure I.7).

Ces filtres ont l'avantage de pouvoir se passer de bobines qui sont chères, difficilement miniaturisables et imparfaites (angles de pertes, résonances propres, sensibilité aux parasites). De plus, ils ont un gain qui peut être supérieur à 1 (ils peuvent amplifier). Ce type de filtre convient bien aux signaux de faible amplitude et de faible puissance. Les filtres actifs sont donc largement utilisés dans les amplificateurs audio et instruments électroniques de toutes sortes.

Côté inconvénients, contrairement aux filtres passifs, ils nécessitent une alimentation électrique et sont limités en amplitude (saturation). Aujourd'hui ils peuvent couvrir de larges bandes de fréquences. Les composants actifs (ainsi que les résistances dans une moindre mesure) peuvent introduire du bruit parasite, ce qui au-delà d'un certain seuil, peut être gênant. Toutefois ce bruit peut souvent être maîtrisé.

Dans cette catégorie de filtres on peut à la rigueur ranger les filtres à capacités commutées, qui sont à mi-chemin entre les filtres passifs et actifs.

Il est également possible de réaliser un filtre passe-bas avec un circuit actif. Cette option permet d'ajouter du gain au signal de sortie, c'est-à-dire d'obtenir une amplitude supérieure à 0 dB dans la bande passante. Plusieurs configurations permettent d'implémenter ce genre de filtre [1]

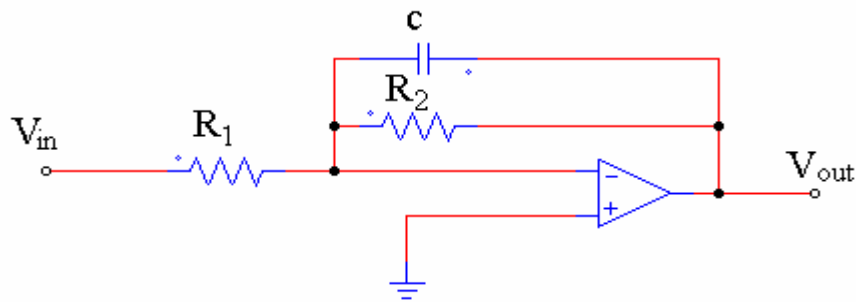


Figure I.7 : Représentation d'un simple filtre actif.

Dans la configuration présentée ici, la fréquence de coupure se définit comme suit :

$$\omega_c = \frac{1}{R_2 C} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C}$$

En utilisant les propriétés des amplificateurs opérationnels, et les impédances des éléments, on obtient la fonction de transfert suivante :

$$H(j\omega) = \frac{v_0}{v_i} = \frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + jR_2 C \omega} \quad (\text{I.21})$$

En basse fréquence, le condensateur agit comme un circuit ouvert, ce qui est confirmé par le fait que le terme de droite de l'équation précédente tend vers 1. La formule simplifiée ainsi obtenue nous donne le gain dans la bande passante :

$$H(\omega)_{\omega \ll \omega_c} = \frac{v_0}{v_i} = \frac{-R_2}{R_1} \quad (\text{I.22})$$

En haute fréquence, le condensateur agit comme un circuit fermé et le terme de droite tend vers 0, ce qui fait tendre la formule vers zéro.

$$H(\omega)_{\omega \gg \omega_c} = \frac{v_0}{v_i} \approx 0$$

Avec la fonction de transfert, on peut démontrer que l'atténuation dans la bande rejetée est de 20 dB/décade ou de 6 dB par octave telle qu'attendu pour un filtre d'ordre 1.

Il est fréquent de voir un circuit d'amplification ou d'atténuation transformé en filtre passe-bas en ajoutant un condensateur C. Ceci diminue la réponse du circuit à haute fréquence et aide à

diminuer les oscillations dans l'amplificateur. Par exemple, un amplificateur audio peut être un filtre passe-bas actif avec une fréquence de coupure de l'ordre de 100 kHz pour réduire le gain à des fréquences qui autrement oscilleraient. Cette modification du signal n'altère pas les informations « utiles » du signal, car la bande audio (bande de fréquence audible par l'humain) s'étend jusqu'à environ 20 kHz, ce qui est largement inclus dans la bande passante du circuit. Nous avons alors :

$$H(j\omega) = \frac{v_0}{v_i} = \frac{-1/LC}{\omega^2 - j\omega \frac{R}{L} - \frac{1}{LC}} \quad (\text{I.23})$$

Avec : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R} \sqrt{L/C}$

Le module et la phase de ce circuit sont :

$$|H(\omega)| = \left| \frac{v_0}{v_i} \right| = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (1-LC\omega^2)^2}}$$

Plusieurs types de filtres existent pour réaliser un filtre actif du deuxième ordre (Figure I.8).

Les plus populaires sont les structures MFB et VCVS $\varphi(\omega) = -\arctan\left(-\frac{RC\omega}{1-LC\omega^2}\right)$

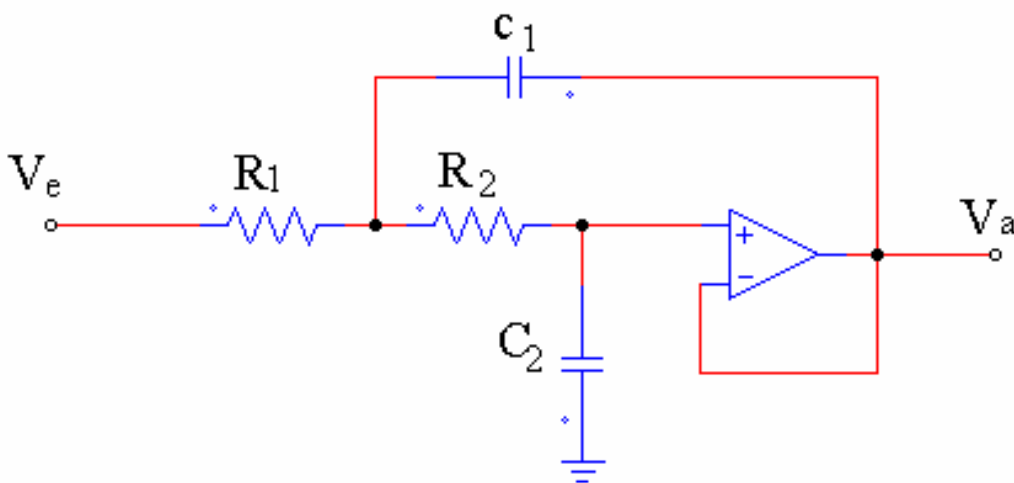


Figure I.8: Un filtre passe-bas actif du second ordre.

Les applications en électronique sont multiples. Un circuit passe-bande peut servir à éliminer le bruit du signal, si l'on sait que le signal a des fréquences comprises dans une gamme de fréquences déterminée. C'est aussi un circuit passe-bande qui permet, en radiocommunication, de sélectionner la fréquence radio écoutée [5].

I.3.1.6- Avantages du filtrage analogique :

*** Filtrage passif :**

- . Réalisable jusqu'à des fréquences élevées (quelques GHz) ;
- . Pas d'alimentation ;
- . Systèmes adaptés aux grandes séries.

*** Filtrage actif :**

- . Fréquence de coupure programmable (filtres à capacité commutée) ;
- . Systèmes intégrables (filtres à capacité commutée).

I.3.1.6- Les inconvénients du filtrage analogique :

*** Filtrage passif :**

- . Faibles tolérances des composants ;
- . Systèmes difficilement intégrables.

*** Filtrage actif :**

- . Filtrage limité à quelques MHz ;
- . Alimentation nécessaire ;
- . Excursion de la tension de sortie limitée ;
- . Nécessite des composants précis.

I.3.2- Les filtres numériques :

Un filtre numérique se caractérise par le traitement entièrement numérique du signal. Au préalable, le signal analogique est filtré par un filtre antirepliement puis il est numérisé par un convertisseur analogique-numérique (CAN) qui généralement intègre un échantillonneur-bloqueur, c'est-à-dire qu'à intervalles réguliers (appelés période d'échantillonnage), l'amplitude instantanée du signal est échantillonné et maintenu puis quantifiée. On n'observe donc pas le signal en permanence et ces filtres réagissent donc assez mal face à des signaux (même parasites) de fréquence plus élevée que celle prévue (en l'absence de filtre anti-repliement).

Un filtre numérique traite un flot continu d'informations (comme par exemple celui d'une caméra vidéo) et calcule en temps réel un nouveau flot de données sortantes, qui correspondent au signal filtré désiré. Les données de sortie peuvent apparaître au même rythme ou à un rythme différent des données entrantes.

En bout de chaîne, le signal analogique est reconstruit par un convertisseur numérique-analogique (CNA) suivi d'un filtre de lissage. Les filtres numériques ont l'avantage de pouvoir être intégrés dans des circuits numériques miniaturisables à l'extrême, tels des processeurs (Digital Signal Processors, DSP en particulier). Les filtres analogiques ne sont pas supprimés pour autant (anti-repliement et lissage).[7]

Les caractéristiques du filtre numérique sont invariables dans le temps, mais cela ne garanti pas que les caractéristiques d'un appareil qui en utilise seront invariables. Les CNA et CAN ne sont jamais parfaits et leurs caractéristiques varient d'un lot de composants à l'autre. Même si l'appareil ne possède pas de convertisseur (il reçoit une information numérique, la filtre puis la transmet en numérique) alors se pose le problème de la gigue d'horloge (les oscillateurs ne sont jamais parfaits) et de la synchronisation des données. Autre fait important, il existe deux types de filtre :

- le filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF),
- le filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Si les premiers sont toujours stables, ce n'est pas le cas pour les seconds

Toutefois, les filtres numériques ont évidemment des limitations (arrondis de calcul, amplitude limitée, repliement de spectre...). Par contre ils offrent l'avantage de pouvoir être reprogrammés (éventuellement à la volée) pour changer de caractéristiques rapidement, sans changer de circuit matériel (sauf si le filtre numérique est réalisé par un ASIC).

Ils permettent d'obtenir des caractéristiques spectrales dont certaines ne peuvent être reproduites par aucun filtre analogique (actif ou non) : par exemple, ils peuvent être très sélectifs ou éliminer toute une série de composantes harmoniques (filtre en peigne). C'est uniquement une question de calcul mathématique Notons que la fréquence maximale du spectre du signal que traite un filtre numérique doit rester bien inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage (Théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon), et que par conséquent le filtre numérique n'est pas adapté pour des signaux étalés sur une trop grande bande de fréquences. Il a fallu attendre la montée en puissance des capacités de calcul des processeurs pour voir apparaître ces filtres à grande échelle. Ils sont dorénavant très utilisés

dans l'électronique moderne où l'analogique cède le pas au numérique. La plupart des signaux étant numériques ils sont traités directement comme tels

Le filtre idéal avec une discontinuité dans sa fonction de transfert n'est pas physiquement réalisable, car sa réponse impulsionnelle nécessiterait que l'évolution du signal de sortie anticipe l'évolution du signal appliqué en entrée (système non causal).

I.3.2.1- Les propriétés principales du filtrage numérique :

- Linéarité

Un filtre linéaire est caractérisé par l'existence d'une fonction $h(t)$ telle que la réponse du filtre à tout signal d'entrée $e(t)$ est:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e(t-\tau) \cdot d\tau$$

Il s'agit bien du produit de convolution des fonctions h et e que l'on peut aussi noter : $s = h * e$

Où h est appelée la réponse impulsionnelle du filtre. La connaître permet de caractériser totalement le filtre

- Stabilité:

Un système est stable si après la fin d'une perturbation appliquée en entrée, la sortie retrouve sa position d'équilibre initiale $h(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Il existe différentes façons de vérifier la stabilité d'un système. Si l'on connaît $h(t)$, il faut s'assurer qu'elle tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. A partir de la fonction de transfert, il faut que tous ses pôles soient à parties réelles négatives. Les pôles de $H(p)$ sont les valeurs de P qui permettent d'annuler le dénominateur de $H(p)$.

Le critère de Routh Hurwitz permet de vérifier la stabilité d'un système dont on connaît la fonction de transfert $H(p)$, sans avoir à calculer ses pôles.

La Figure (4) résume les six cas possibles du comportement de la réponse impulsionnelle en fonction de la position des pôles dans le plan complexe [5].

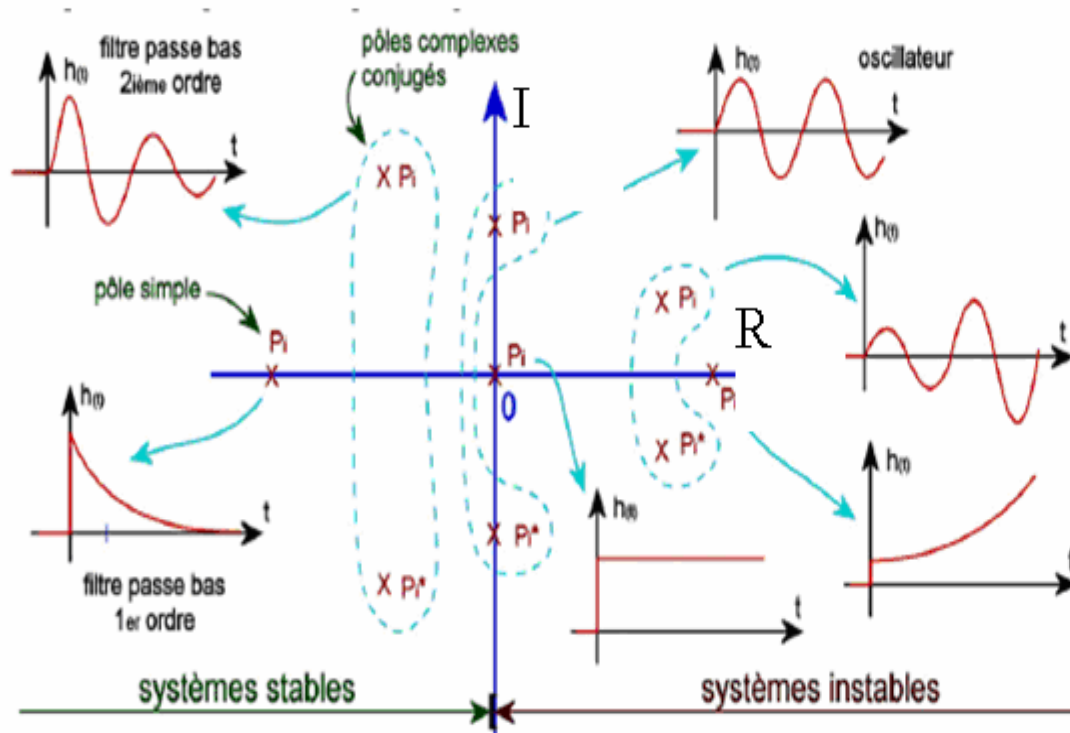


Figure I.9 : Pôles dans le plan complexe et stabilité

I.3.2.2- Avantages du filtrage numérique :

* Filtres RIF:

- Toujours stables ;
- Phase linéaire si symétrie des coefficients d'ou, pas de distorsion de phase ;
- Possibilité de réaliser toutes sortes de filtres en dessinant seulement le gabarit ;

* Filtres RII:

- Beaucoup moins de calculs par rapport à un FIR équivalent au niveau des Performances.

I.3.2.3- Inconvénients du filtrage numérique :

* Filtres RIF:

- Beaucoup de calculs par rapport à un RII équivalent au niveau des performances ;
- Le délai de groupe ou la non-linéarité de phase du filtre peut être important si le nombre d'opérations (coefficient) est élevé.

* Filtres RII:

- Pas toujours stables ;
- Parfois la phase est non linéaire d'où une distorsion de phase ;
- Il n'est pas toujours facile à réaliser.

I.3.3- Les filtres piézoélectriques :

Les qualités piézoélectriques de certains matériaux, comme le quartz, peuvent être utilisées dans la conception de filtres. Les filtres à quartz possèdent un facteur de qualités élevées et une très bonne stabilité en température

I. 3.4-Filtres SAW:

Un filtre SAW (de l'anglais Surface Acoustic Wave, « onde acoustique de surface ») est un système électromécanique utilisé généralement dans des applications utilisant les ondes radio. Les signaux électriques sont convertis en onde mécanique par un cristal piézoélectrique. Cette onde est retardée lors de sa propagation dans le cristal, puis reconvertie en signal électrique. Les sorties retardées sont recombinaées pour produire une implémentation d'un filtre à réponse impulsionnelle finie

I.3.5- Filtres atomiques:

Pour des fréquences et une précision plus élevées, il est possible d'utiliser les modes vibratoires d'atomes. Les horloges atomiques utilisent des lasers à césium comme filtres à très haut facteur de qualité afin de stabiliser leurs oscillateurs primaires. Une autre méthode, utilisée pour des fréquences élevées et fixes sur des signaux radio très faibles, est d'utiliser un laser à rubis

I. 4- Gabarits des filtres:

Les indices p et A sont associés respectivement aux grandeurs définissant les limites de la bande passante et la bande atténuée (ou arrêt ou coupée) (Figure I.10). L'axe des abscisses peut être gradué en fréquences (f) ou en pulsations ($\omega = 2\pi f$). La bande de transition est comme son nom l'indique, la bande située entre la bande passante et la bande atténuée. Plus elle est étroite, et plus le filtre se rapproche du filtre idéal (Sélectivité = 1), mais plus l'ordre du filtre sera élevé. Pour les filtres passe-bande et coupe-bande, la pulsation centrale est définie comme la moyenne géométrique des pulsations de limite de bande passante (ω_{1p} et ω_{2p}) [5].

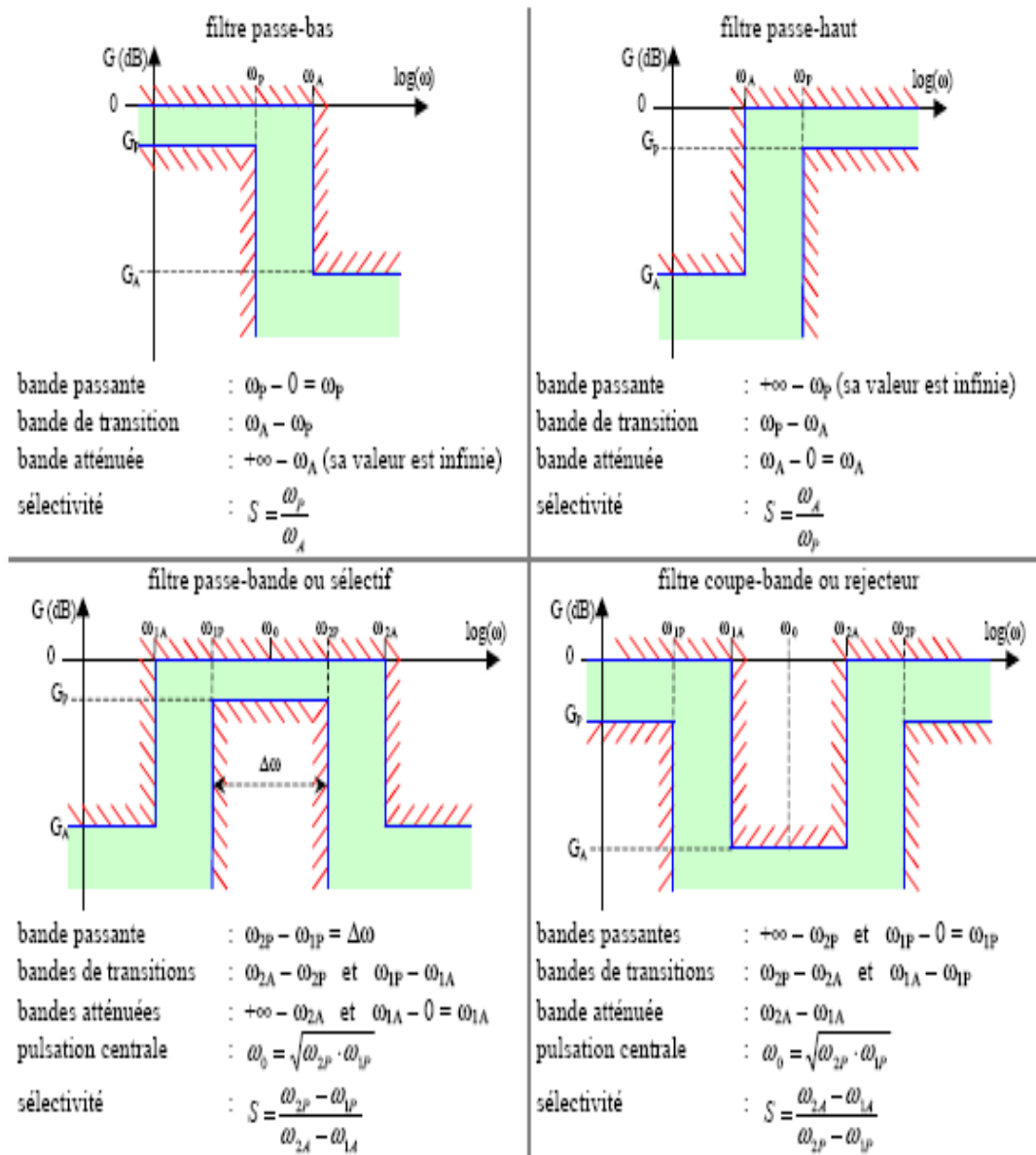


Figure I.10 : Gabarit d'un filtre.

I. 4.1- Centrage des gabarits:

Les filtres passe-bande et coupe-bande doivent être centrés avant toute normalisation ou transposition (Figure I.11).

Un gabarit est centré lorsque les pulsations centrales $w_{0p} = \sqrt{w_{1p} \cdot w_{2p}}$ et $w_{0A} = \sqrt{w_{1A} \cdot w_{2A}}$ sont égales. Dans le cas contraire, il faut centrer le gabarit, en modifiant une ou plusieurs pulsations. Ces modifications vont obligatoirement dans le sens de rendre le gabarit plus contraignant, donc de diminuer la bande de transition la plus large.

Une solution intéressante consiste à réduire la bande de transition la plus large, de façon symétrique, en modifiant les deux pulsations [5].

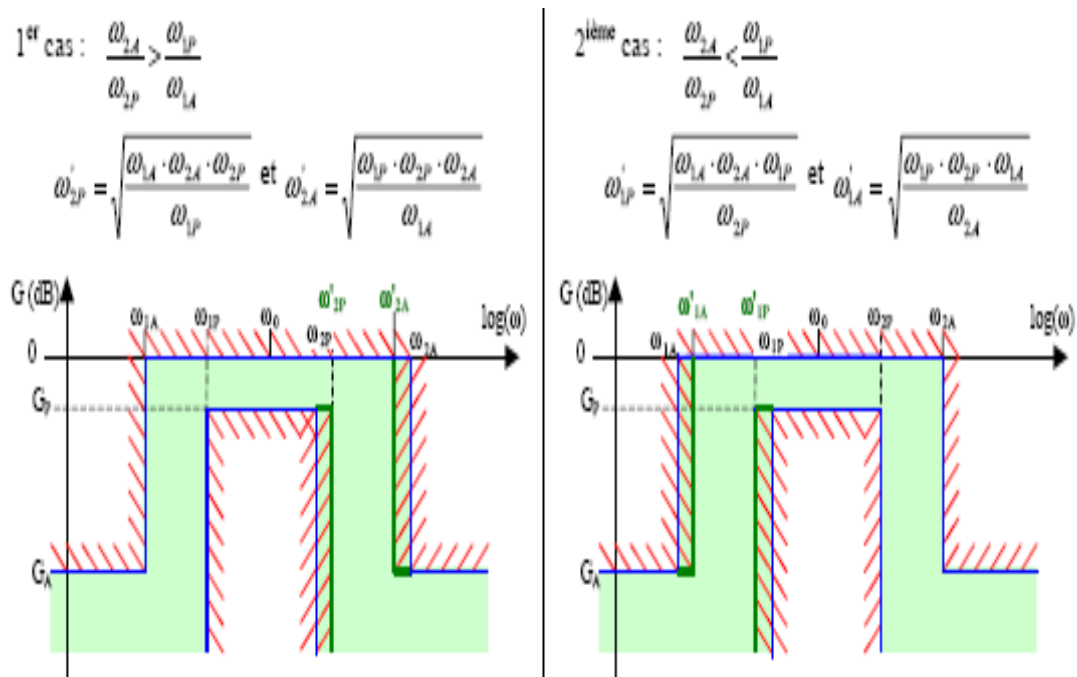


Figure I.11 : Exemple de centrage de gabarit

Le gabarit fixe les limites de la fonction de transfert du filtre réalisé. Le gabarit étant défini pour chaque application, il en existe une infinité.

Afin de faciliter les calculs en vue de la réalisation des filtres, on peut moyennant un changement de variables (transposition) se ramener à un filtre passe-bas, puis par un second changement de variables (normalisation) se ramener à un gabarit dont la fréquence (pulsation) à la limite de la bande passante vaut 1 (sans unité).

La fonction de transfert d'un filtre réel s'écrit sous la forme d'un rapport de polynômes complexes. Il existe de nombreuses fonctions mathématiques, appelées fonctions d'approximations, pouvant répondre à l'exigence du gabarit normalisé. Les principales fonctions d'approximations sont les suivantes :

- 1- Fonction de Bessel ;
- 2- Fonction de Butterworth ;
- 3- Fonction de Tchebychev et Tchebychev inverse ;
- 4- Fonction de Caer.

I.5- Conclusion:

Un filtre modifie certaines parties d'un signal d'entrée dans le domaine temps et dans le domaine fréquence.

D'après la théorie de Fourier, tout signal réel peut être considéré comme composé d'une somme de signaux sinusoïdaux (en nombre infini si nécessaire) à des fréquences différentes. Le rôle du filtre est de modifier la phase et l'amplitude de ces composantes.

Un filtre est un Système Linéaire Invariant dans le Temps permettant de diviser le spectre (espace fréquentiel) afin de conserver une ou plusieurs parties (bande) de ce spectre. Le filtre idéal permet de transmettre sans distorsion une partie du spectre (bande passante) et bloque toutes les autres parties (bande coupée), avec un passage discontinu entre ces deux parties.

L'étude des signaux nécessite un formalisme mathématique ou stochastique qui permet d'une part, la représentation et d'autre l'analyse des caractéristiques : durée utile d'un signal, largeur utile d'un spectre, puissance moyenne d'un signal et la classification du signal et sa représentation. Le signal est physiquement une grandeur mesurable : tension électrique, courant électrique, pression d'un fluide, température d'une enceinte, ...etc.

le filtrage

numérique

II.1- Introduction :

Le filtrage des signaux est une opération essentielle en traitement du signal (filtrage anti-repliement, détection synchrone,...). Cette opération peut être réalisée soit par des systèmes analogiques (filtre RC, composants optiques, acoustiques...), soit par un algorithme informatique à condition que les signaux soient sous forme numérique. La méthode numérique est d'autant plus intéressante que la puissance et la rapidité de calcul des microprocesseurs sont élevées. Elle est particulièrement utile en Physique où les données expérimentales sont souvent sous forme de suites numériques.

Comme pour les signaux à temps continus, le principal traitement opéré sur les signaux à temps discret sont les traitements linéaires invariants dans le temps que nous appellerons également filtrage. Nous ferons ici l'hypothèse que le traitement des signaux discrets se fait avec une précision infinie. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue que l'utilisation de systèmes numérique impose une quantification en nombre fini de bits des signaux et des paramètres du filtre provoquant des effets indésirables tels que le bruit d'arrondi, la saturation et, dans le pire des cas, des instabilités [8].

II.2- Définition d'un filtre:

Un filtre est un circuit électronique qui réalise une opération de traitement du signal. Autrement dit, il atténue certaines composantes d'un signal et en laisse passer d'autres. Un exemple connu du grand public est l'égaliseur audio.

Un filtre modifie certaines parties d'un signal d'entrée dans le domaine temps et dans le domaine fréquence. D'après la théorie de Fourier, tout signal réel peut être considéré comme composé d'une somme de signaux sinusoïdaux (en nombre infini si nécessaire) à des fréquences différentes. Le rôle du filtre est de modifier la phase et l'amplitude de ces composantes [9].

II.3- Définition du gabarit d'un filtre :

C'est une représentation graphique des conditions limites amplitude – fréquence, nécessaire pour réaliser un filtrage donnée. Il délimite la bande de fréquence à l'intérieur de laquelle le gain doit être maintenant quasi constant c'est-à-dire avec une marge tolérable. Il donne les limites entre lesquelles, le gain peut fluctue, ainsi que les fréquences au delà desquelles le signal devra subir une atténuation spécifique Comme montre sur la figure (II.1) [9].

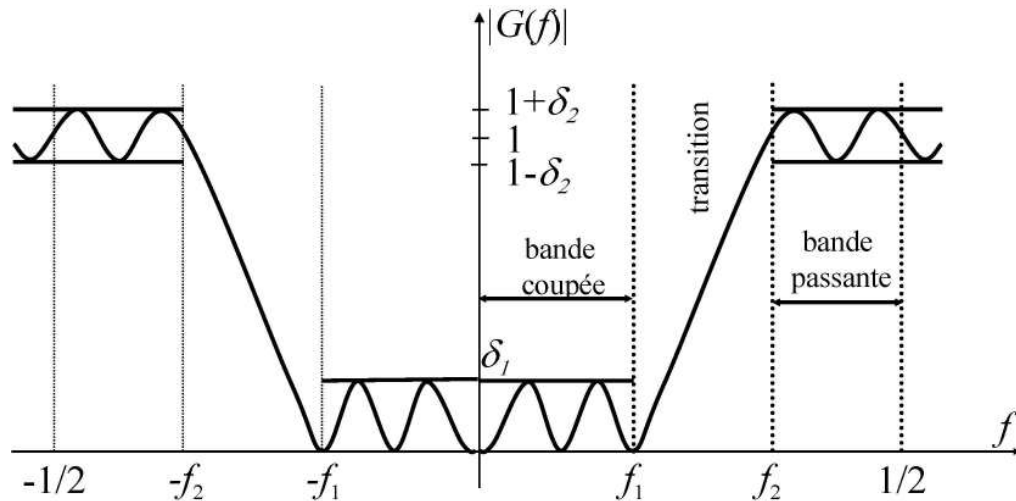


Figure II.1 : Gabarit d'un filtre.

II.3.1- Paramètres de spécification :

- f_1 et f_2 , fréquences de bord (bandes coupée et passante).
- Taux d'ondulation maximum en bande passante, souvent défini par $-20 \log_{10}(1 - \delta_2)$ dB.
- Atténuation minimum en bande coupée, souvent définie par $-20 \log_{10}(\delta_1)$ dB.

II.4- Causalité et stabilité d'un filtre :

Comme pour les filtres à temps continu, nous allons apporter deux restrictions à la relation générale de convolution qui sont la causalité et la stabilité :

$$S(k) = \sum_{n=0}^M x(n) \cdot h(k-n) = \sum_{n=1}^N x(k-n)h(n) \quad (\text{II.1})$$

Celles-ci vont permettre de réaliser physiquement un filtre à temps discret.[10]

II.4.1- Causalité :

Un filtre est dit causale si et seulement si à une entrée e nulle pour $t < 0$ correspond une sortie $s = H(e)$ nulle pour $t < 0$, autrement dit si et seulement si $h(e)$ est nulle pour tout $t < 0$. Une telle réponse impulsionnelle h est dite causale [11].

II.4.1.1- Principe de Causalité :

Le principe de causalité suggère que le fonctionnement d'un filtre s'accomplisse en temps réel. Cette définition n'est pas très rigoureuse, mais nous ne possédons pas tous les outils mathématiques pour le définir plus précisément. Pour comprendre intuitivement le

principe de causalité il est préférable d'analyser ses effets qui sont relativement simples à assimiler sur un exemple pratique. Pour ce faire, revenons sur le filtre passe-bas à moyenne mobile et examinons précisément les indices des échantillons utilisés dans son expression. On note que le calcul de l'échantillon d'indice n fait intervenir les échantillons d'indice $n-1$ et $n+1$. Si l'on considère et c'est toujours le cas, que l'indice n correspond à l'échantillon courant (celui qui vient immédiatement), un problème apparaît inévitablement sur la signification de l'échantillon $n+1$. En effet, puisque n est l'instant courant, le terme $f(n+1)$ de l'équation (II.2) constitue une valeur futur :

$$g(n) = \frac{f(n-1) + f(n) + f(n+1)}{3} \quad (\text{II.2})$$

Cela ne pose pas de problème dans l'exemple sur l'enregistrement. Les données étant sauvegardées, tous les points sont disponibles aux instants n et $n+1$. Pour les applications en temps réel, il n'y a cependant pas de choix, on est contraint d'utiliser uniquement les valeurs courantes et passées. Le filtre basé sur ces valeurs est appelé filtre causal alors que celui nécessitant une ou plusieurs valeurs futures est dit non-causal (c'est le cas du filtre MA).

Notons que les filtres naturels du monde réel sont nécessairement causaux. Cette dernière remarque permet de souligner un autre avantage du TNS qui est de permettre la construction de filtres (non causaux) ne pouvant pas être réalisés par d'autres technique. Reprenons le cas du filtre MA, et remarquons qu'on peut rendre le filtre causale en décalant vers l'avant l'instant d'arrivée du signal de sortie. Ainsi, on obtient :

$$y(n+1) = \frac{f(n+1) + f(n) + f(n-1)}{3} \quad (\text{II.3})$$

En remplaçant n par $n-1$ dans l'équation (II.3), on obtient de façon parfaitement l'équivalence [12].

$$y(n) = \frac{f(n) + f(n-1) + f(n-2)}{3} \quad (\text{II.4})$$

II.4.2- Stabilité :

Un filtre linéaire est dit stable au sens strict (Entrée Bornée – Sortie borée) si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée. Il est dit stable au sens large si :

$$|h(t)| < M \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{II.5})$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre soit stable au sens strict est que sa réponse impulsionnelle vérifie :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty \quad (\text{II.6})$$

Soit h un filtre causal tel que $H_z(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Alors h est stable si et seulement si les zéros de Q sont de modules < 1 .

En effet, si la réponse impulsionnelle vérifie $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty$ et si $x(t)$ est un signal borné tel que $|x(t)| \leq A$, alors la sortie $y(t)$ vérifie :

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)| |x(t - \theta)| d\theta \leq A \int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)| d\theta < \infty \quad (\text{II.7})$$

Réciproquement, comme le signal $x(t) = e^{-jA \text{Arg}(h(-t))}$ est borné, la sortie associée à ce signal vérifie :

$$|y(0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) x(-\theta) d\theta \right| = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)| d\theta < \infty. \quad (\text{II.8})$$

Un filtre stable au sens large peut être instable au sens strict et réciproquement. En effet, si $h(t)$ est égal à l'échelon unité $u(t)$, le filtre est stable au sens large mais instable au sens strict et si $h(t) = \delta(t)$, le filtre est stable au sens strict mais instable au sens large.

Un filtre à temps continu est dit à phase minimale s'il est stable et si tous ses zéros sont à partie réelle négative.

Un filtre est à phase linéaire si l'argument de sa fonction de transfert est une fonction linéaire [9] :

$$A(\theta) = \text{Arg}[H(z)] = a(\theta) \quad [\text{II.9}]$$

II.5- Les filtres numériques :

II.5.1- Introduction et définition :

On appelle «filtre numérique» un système utilisé pour modifier la distribution fréquentielle d'un signal numérique selon des spécifications données. Un filtre numérique peut être vu comme un procédé de calcul permettant de transformer un signal numérique d'entrée (séquence de nombres) en un signal numérique de sortie (seconde séquence de nombres) pour obtenir la modification voulue du signal. Le problème du filtrage numérique consiste donc à déterminer l'équation régissant cette transformation des signaux numériques, qui d'une part doit représenter la réponse fréquentielle spécifiée et d'autre part peut être effectivement réalisée. La transformation peut être implantée sous forme de logiciel (algorithme) ou matériel (circuits électroniques).

Les filtres numériques sont pour les signaux échantillonnés, les équivalents des filtres analogiques pour les signaux continus. En raison du développement des circuits intégrés rapides, les filtres numériques deviennent plus intéressants que les filtres analogiques, en

apportant de nombreux avantages tels que : précision, fiabilité, stabilité, adaptabilité et facilité de commande.

Le problème se pose de la même manière que pour les filtres analogiques. Il consiste à réaliser un filtre donnant une réponse fréquentielle $H(f)$ donnée (prédéfinie à l'aide d'un gabarit : plan de Bode, etc.), une réponse impulsionnelle $h(t)$ fixée ou éventuellement une réponse indicielle voulue. Dans le cas général de ces filtres, la valeur de la sortie numérique $y(kT_e) = y_k$ à l'instant kT_e est fonction de l'entrée $x(kT_e) = x_k$ au même instant kT_e des n entrées numériques précédentes $x(iT_e) = x_k$ pour tout $i \in \{k - 1, \dots, k - N\}$ et de plus, des sorties numériques précédentes $y_i(iT_e) = y_i$ pour tout $i \in \{k - 1, \dots, k - N\}$ figure (II.2)

$$y_k = \text{Fonction}(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-N}, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-N}) \quad (\text{II.10})$$

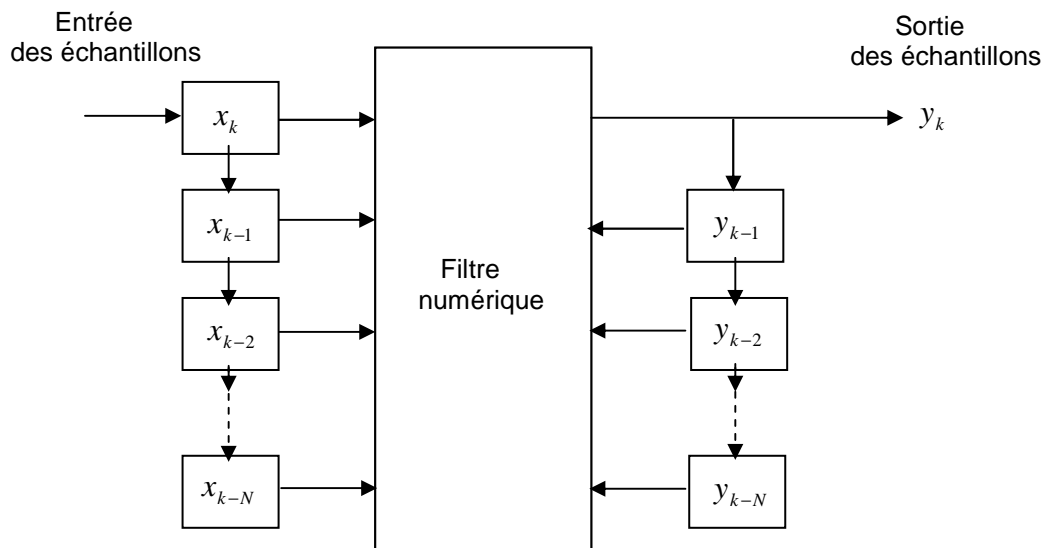


Figure II.2 : Représentation schématique d'un filtre numérique.

Les notions de filtrage numérique abordées concerneront principalement des systèmes linéaires invariants, la sortie d'un tel système est liée à l'entrée par l'opération de convolution. Cela impose que la fonction générale précédente donnant les échantillons de sortie y_k soit une combinaison linéaire de n éléments d'entrée ou de sortie précédents x_i et y_i [7]:

$$y_k = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-j} \quad (\text{II.11})$$

Cette équation générale des filtres numériques est appelée équation aux différences. A partir de cette expression, nous pouvons distinguer deux grandes familles de filtres Figure (II.3) : les filtres non récursifs pour lesquels tous les coefficients b_i sont nuls et les filtres récursifs pour lesquels au moins un coefficient b_i est non nul. Ces derniers sont encore définis comme

des filtres possédant une boucle de contre-réaction. Pour les filtres non récurrents, l'équation est donc limitée à :

$$y_k = \sum_{i=1}^N a_i \cdot x_{k-i} \quad (\text{II.12})$$

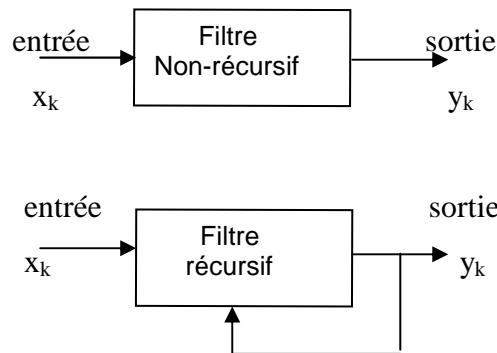


Figure II.3 : Filtrage non-récurrents et récurrents.

Mais dans le cadre des systèmes linéaires invariants, nous pouvons utiliser l'équation de convolution discrète, qui est liée aux échantillons de la réponse impulsionnelle h_i :

$$y_k = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_i \cdot x_{k-i} \quad (\text{II.13})$$

Cette équation de convolution amène à définir deux types de filtres numériques : les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou filtres à moyenne ajustée (MA) pour lesquels il sera possible d'utiliser l'équation (II.13) qui doit être alors limitée au domaine d'existence de la réponse impulsionnelle, soit la forme :

$$y_k = \sum_{i=0}^N h_i \cdot x_{k-i} \quad (\text{II.14})$$

Ainsi les filtres à réponse impulsionnelle finie pourront être réalisés directement à partir des filtres non récurrents. En effet, l'équation (II.14) correspond à l'équation (II.12) pour laquelle les coefficients a_i sont les valeurs échantillonnées h_i de la réponse impulsionnelle $h(t)$. Il est important de noter que ces filtres peuvent aussi être réalisés à partir de filtres récurrents.

L'autre catégorie de filtres numériques est celle des filtres dits à réponse impulsionnelle infinie (RII) ou filtres généraux (ARMA), pour lesquels la relation (II.14) ne sera pas applicable. Il sera nécessaire d'utiliser l'équation générale (II.11). Il est possible de

définir une catégorie particulière des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie, appelés filtres autorégressifs (AR) pour lesquels nous avons la relation suivante :

$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-j} \quad . \text{(II.15)}$$

Enfin, il ne faut pas oublier que, comme pour les filtres analogiques et puisque nous disposons d'une transformée de Fourier discrète (TFD). Il est possible d'appliquer le produit dans l'espace des fréquences discrètes après une TFD et un retour dans l'espace des temps discrets par une transformée de Fourier discrète inverse. Nous avons ainsi le même schéma que celui présenté sur la figure (II.2).

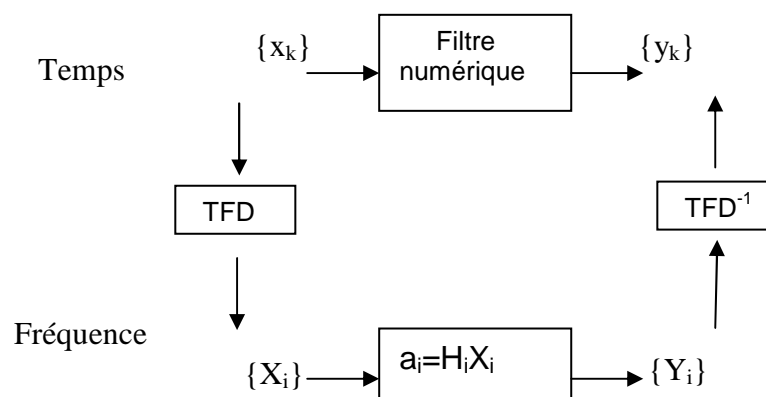


Figure II.4 : Réalisation d'un filtre numérique par transformée de Fourier discrète.

La conception et la réalisation des filtres numériques doivent être abordées selon les trois aspects essentiels suivants :

- Modèle du filtre numérique : modèle obtenu par analogie avec un filtre analogique ou modèle direct dans des cas spécifiques ;
- Synthèse du filtre numérique basée sur l'équation aux différences (cas général), l'équation de convolution pour les filtres à réponse impulsionnelle finie ou la transformée de Fourier discrète ;
- Réalisation du filtre numérique : algorithme ou composants électroniques numériques.

Nous allons introduire un autre outil permettant un traitement plus facile des signaux discrets, en particulier dans le cadre des filtres numériques dont la synthèse est basée sur l'utilisation de l'équation aux différences : la transformée en Z [13].

II.5.2- Filtrage numérique simple - lissage temporel :

Avant d'étudier la mise en place de filtre numérique à partir des relations (II.11) et (II.14), la capacité de calcul qu'offrent les systèmes numériques permet de réaliser des opérations numériques de filtrage linéaire simple comme la moyenne temporelle glissante d'ordre N .

Ce type de traitement numérique va permettre de réaliser un « lissage » du signal d'entrée conduisant par exemple à la suppression d'un bruit résiduel ou à l'atténuation d'un bruit de type impulsif. Par contre ce type de traitement peut modifier fortement le signal informatif. La plus courante de ces techniques est donc la moyenne temporelle glissante d'ordre N , appelé aussi profondeur de lissage, qui s'exprime par :

$$y_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_{k-i} \quad (\text{II.16})$$

Nous pouvons remarquer que cette opération correspond à l'équation aux différences (II.12) des filtres non récurrents pour laquelle les coefficients a_i sont tous égaux à $1/N$. L'utilisation de cette technique de lissage temporel sur un signal de bruit blanc donne de bons résultats. Soit un bruit blanc uniforme d'amplitude variant entre -1 et $+1$ avec une moyenne nulle et un écart type de $0,6$, l'amplitude du bruit peut être diminuée jusqu'à un intervalle $[-0,6, +0,6]$ avec un écart type de $0,18$ dans le cas de 10 valeurs moyennées (Figures (II.5)-(II.6)). Plus le nombre N de valeurs moyennées sera grand, meilleur sera le lissage, par contre le signal informatif est lui aussi moyenné et perd donc de l'information.

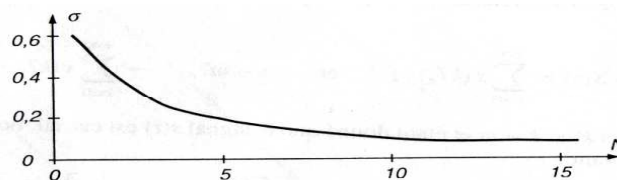


Figure II.5 : Bilan uniforme en fonction du nombre N de valeurs moyennées.

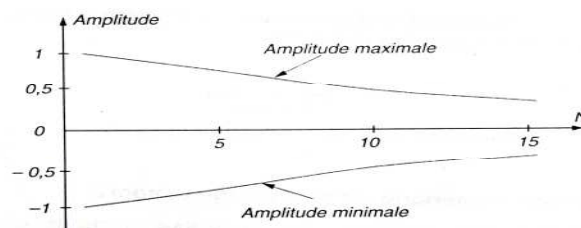


Figure II.6 : Résultat sur l'amplitude d'un traitement par lissage temporel d'un bruit blanc uniforme en fonction du nombre N de valeurs moyennées.

II.6- Filtres numériques synthétisés par $H(z)$:

A partir de la fonction de transfert $H(z)$, obtenue selon les différentes transformations possibles, diverses structures peuvent être utilisées : structure *directe* (implémentation de l'équation aux différences), structure *canonique* (structure directe avec minimisation des composants) et structure *en éléments simples*.

II.6.1- Structure directe :

Cette structure est l'application directe des expressions de la transmittance $H(z)$. Dans le cas d'un filtre non récursif, une des structures possibles est celle représentée sur la figure (II.7) qui traduit l'équation (II.12).

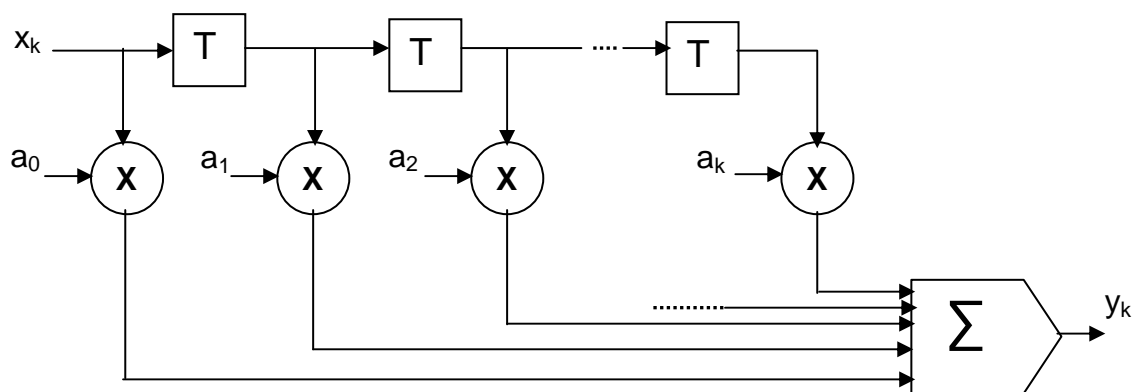


Figure II.7 : Structure directe d'un filtre numérique non-récursif.

De même, l'expression de $H(z)$ pour un filtre récursif dans le schéma de la figure (II.8), traduit directement l'équation générale (II.11).

II.6.2- Structure canonique :

Cette forme permet de minimiser le nombre d'éléments utilisés dans la réalisation du filtre. L'équation générale peut s'écrire sous la forme :

$$\text{Avec : } \left\{ \begin{array}{l} Y(z) = H(z) \cdot X(z) = W(z) \cdot V(z) \\ w(z) = \sum_{j=0}^N a_j \cdot z^{-j} \quad \text{ système non récursif (II.17)} \\ V(z) = \frac{X(z)}{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}} \\ Y(z) = \left[\sum_{j=0}^N a_j \cdot z^{-j} \right] \cdot V(z) \end{array} \right.$$

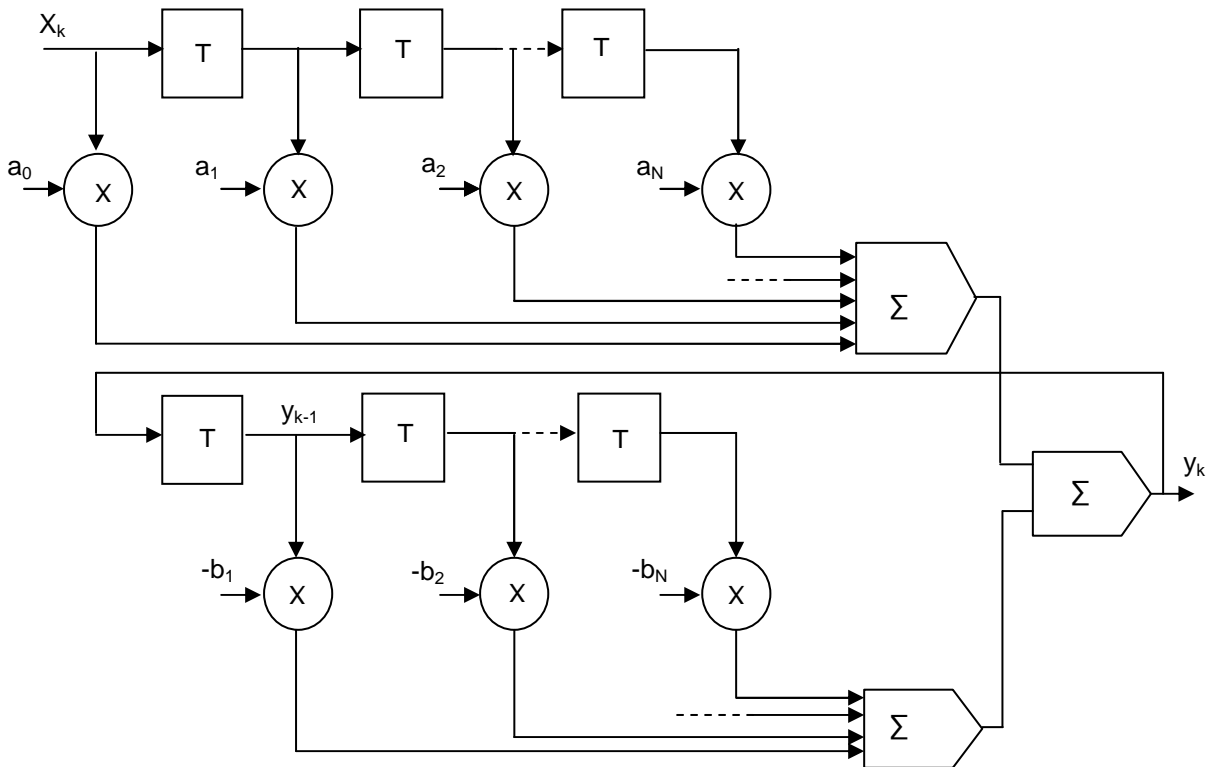


Figure II.8 : Structure directe d'un filtre numérique récursif.

En prenant la transformée en Z inverse, on obtient l'expression de y_k en fonction de la valeur intermédiaire v_k qui est utilisée pour construire la structure de ce filtre dans la figure (II.9) :

$$Y_k = \sum_{j=0}^N a_j \cdot v_{k-j} \quad (\text{II.18})$$

Le résultat montre qu'une seule structure retard est nécessaire pour la réalisation de ce filtre numérique.

II.6.3- Structure en composants simples :

Il est possible d'exprimer $H(z)$ à partir d'éléments de base ou de composants simples du premier ou du second ordre de $H_i(z)$ (Figure II.9) :

Premier ordre :

$$H_i(z) = \frac{\alpha_i}{1 - \beta_i z^{-1}} \quad (\text{II.19})$$

Second ordre :

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{i1} z^{-1} + \alpha_{i0}}{\beta_{i2} z^{-2} + \beta_{i1} z^{-1} + \beta_{i0}} \quad (\text{II.20})$$

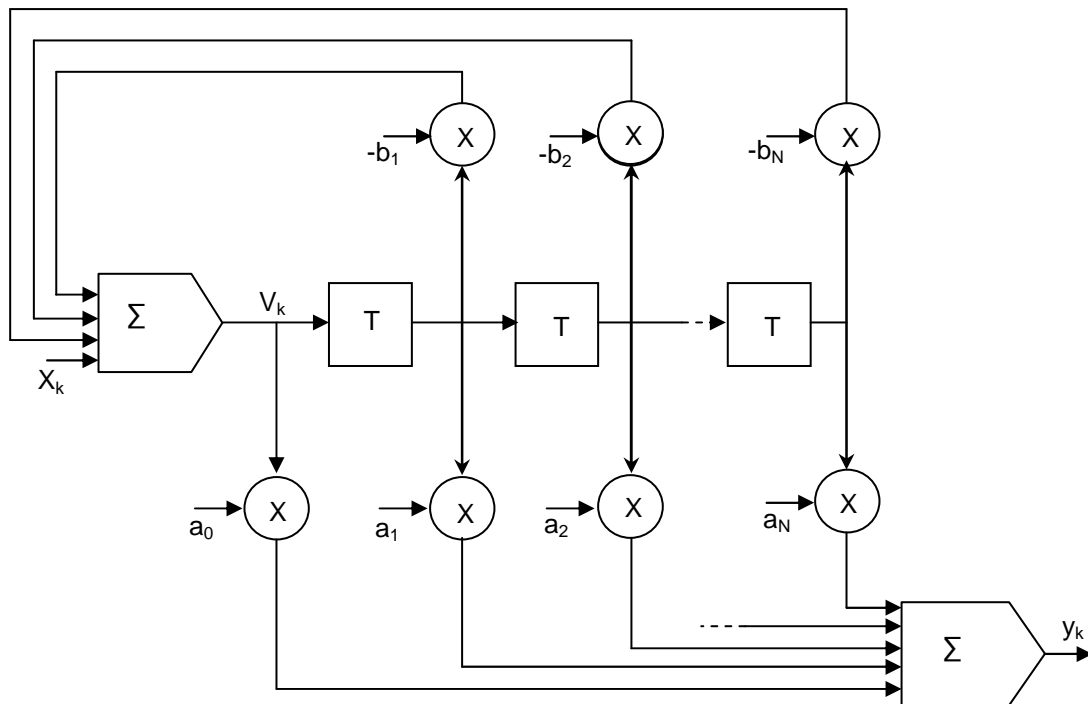


Figure II.9 : Structure canonique d'un filtre numérique récursif.

Ces deux éléments simples peuvent facilement se traduire en structure directe ou canonique. Pour une fonction de transfert quelconque, il suffit de l'exprimer en fonction de ces éléments de base pour réaliser ensuite une composition « produit » ou « somme » de ces éléments. La fonction de transfert $H(z)$ peut s'écrire sous deux formes :

- produit de composants simples :

$$H(z) = k_2 \cdot \prod_{i=1}^r H_i(z) \quad (\text{II.21})$$

- somme de composants simples :

$$H(z) = k_1 + \sum_{i=1}^r H_i(z) \quad \text{II.22}$$

Dans le cas d'une écriture sous forme « produit », nous obtenons une structure série ou dite en cascade (figure (II.10)) et dans le cas d'une formulation « somme », nous obtenons une structure parallèle (figure (II.11)). Comme nous l'avons vu dans le domaine analogique, cette adjonction de composants de base n'est réalisable, aussi directement, uniquement parce que nous sommes dans le domaine numérique où il n'y a pas de problème d'adaptation d'impédance [9].

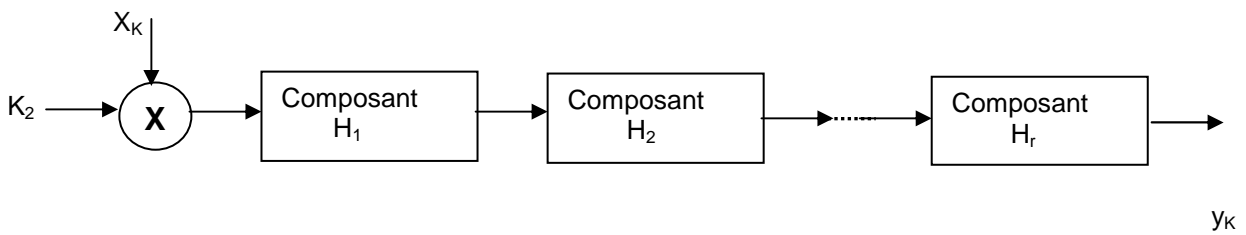


Figure II.10 : Structure série ou en cascade à partir d'éléments de base du premier ou du second ordre.

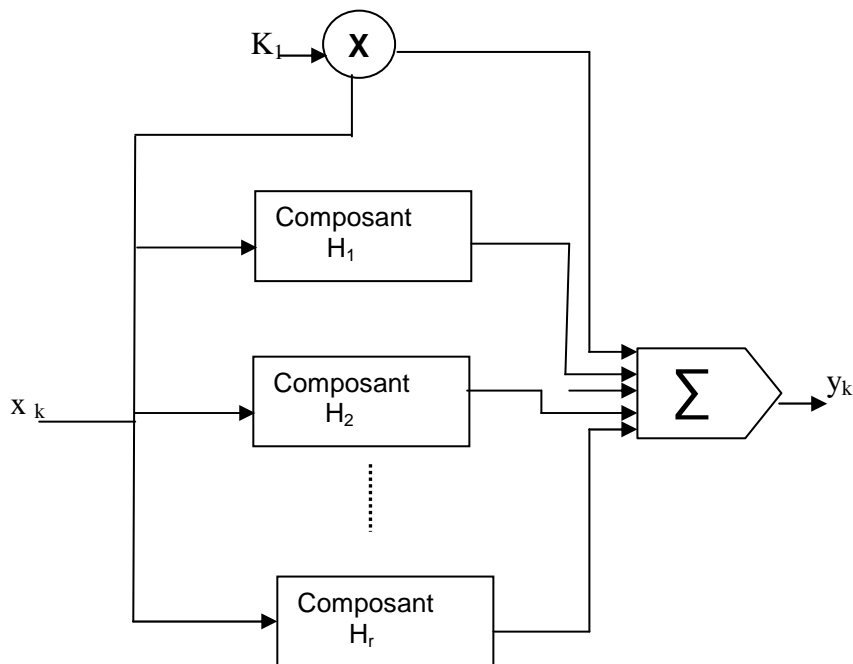


Figure II.11 : Structure parallèle à partir d'éléments de base du premier ou du second ordre.

II.7- Structure des filtres récurrents

Supposons que nous ayons à réaliser un filtre numérique(H) caractérisé par une relation entrée-sortie récurrente du type [13]:

$$y_n = \sum_{k=1}^N a_k y_{n-k} + \sum_{k=0}^M b_k x_{n-k} \tag{II.23}$$

Les coefficients ($a_k ; k=1...N$) correspondent à la partie autorégressive de la relation récurrente, tandis que les ($b_k ; k=0...M$) définissent sa partie transversale. La transformée en z

de la réponse impulsionnelle du filtre (fonction de transfert) est la fraction rationnelle donnée

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad \text{par :} \quad \text{(II.23)}$$

Lorsque le filtre est réalisable, sa zone de convergence est de type $R_h = \{z/|z| > R_{\max}\}, R_{\max} < 1$ qui est le module maximal des pôles de $H(z)$. Il existe une infinité de moyens algorithmiques pour calculer la sortie du filtre par programmation, par exemple d'un processeur spécialisé (DSP, Digital signal processor). Nous représenterons une telle structure par son graphe de fluence.

II.7.1- Opérateurs élémentaires du graphe de fluence

Les opérations élémentaires que l'on suppose savoir effectuer sont les suivantes :

- l'addition de deux séquences ;
- la multiplication d'une séquence par une constante ;
- l'opérateur de retard $(x_n) \rightarrow (x_{n-1})$, que nécessite l'utilisation d'une case mémoire (registre d'un DSP).

Pour représenter un algorithme de calcul d'un filtre, on utilise la notion de graphe de fluence, graphe pour lequel les nœuds représentent les étapes de calcul et pour lequel les branches valuées et orientées symbolisent une des trois opérations élémentaires. Une convergence de plusieurs branches vers un seul nœud représente une addition. La multiplication par une constante a est représentée par la valeur de la branche, tandis que le retard sera figuré par Z^{-1} .

Deux nœuds particuliers existent dans le graphe de fluence, le nœud d'entrée de (x_n) et le nœud de sortie de (y_n) . Á une relation entrée-sortie spécifiée par les coefficients (a_k) et (b_k) peuvent correspondre plusieurs graphes et donc plusieurs implémentations possibles. Suivent le critère de performance recherché, une architecture particulière de graphe pourra se révéler optimale. Dans la suite, pour représenter l'architecture du filtre (H) , on supposera sans perte de généralité, que $N=M$.

II.7.2- Optimalité de l'architecture :

II.7.2.1- Formes directes I et II :

L'implémentation plus simple du filtre (H) est donnée par la figure (II.12). Elle est dénommée forme directe I. elle fait ressortir les deux parties, transverse et autorégressive, du filtre. [14]

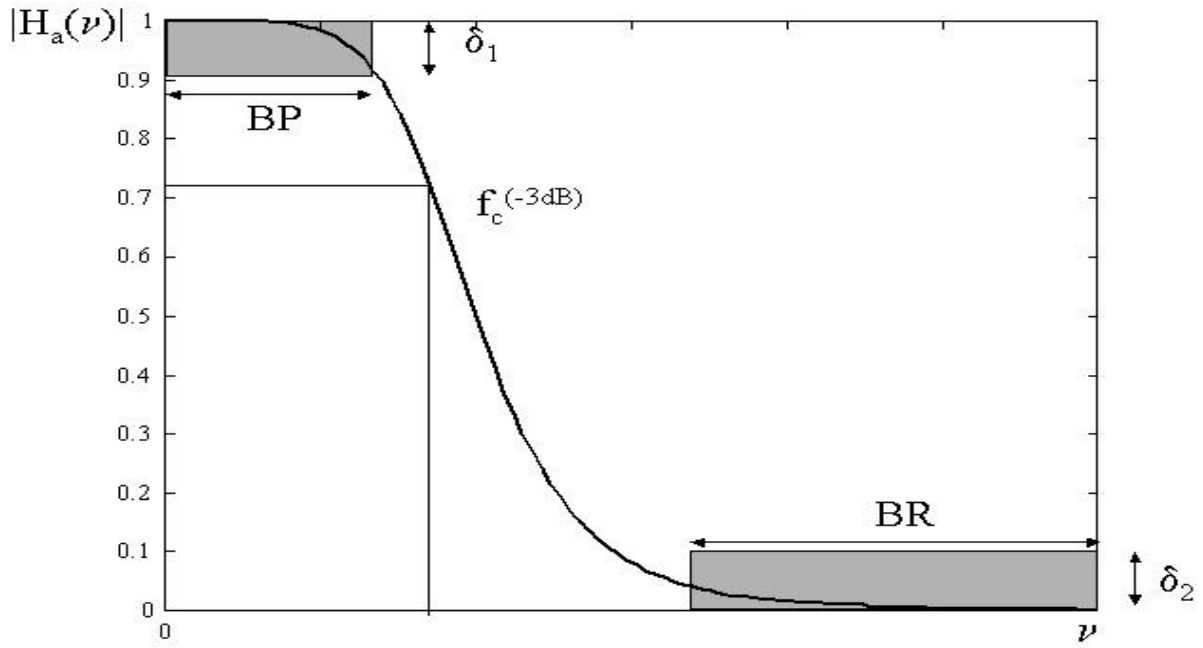


Figure II.12 : Gabarit du spectre d'énergie d'un filtre passe-bas

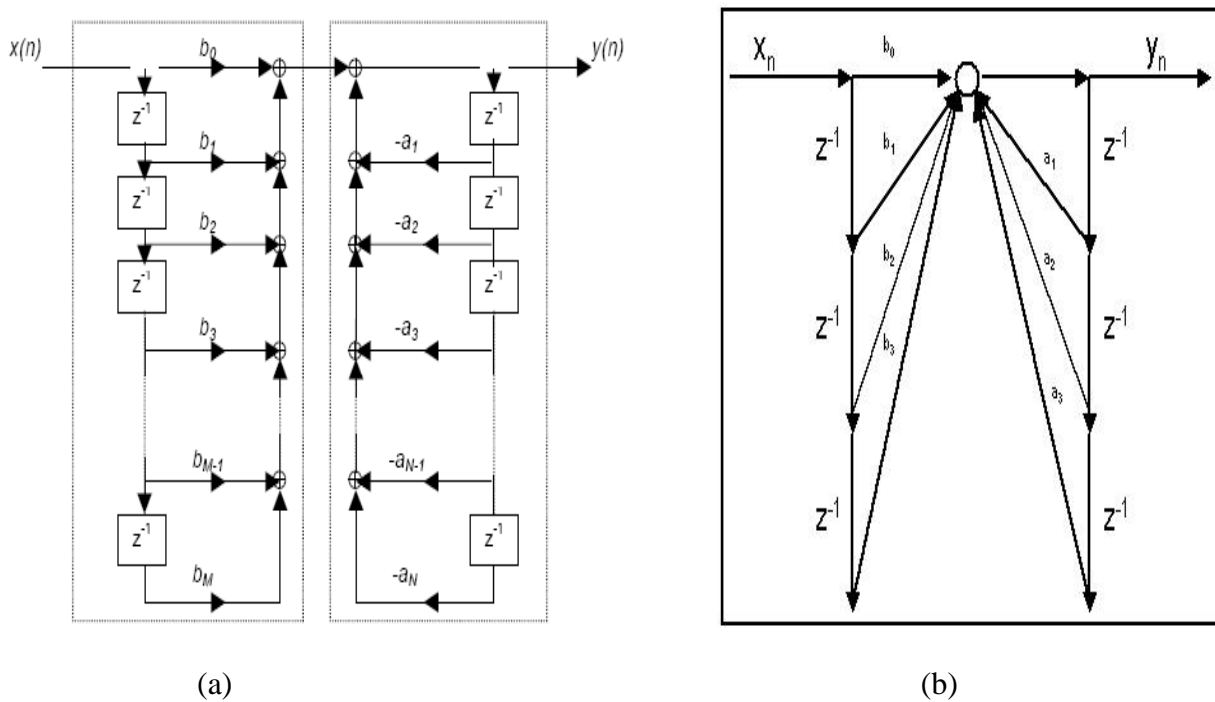


Figure II.13 : Forme directe I du filtre

Cette architecture a plusieurs défauts. En particulier, on peut remarquer qu'elle nécessite l'utilisation de $2M$ délais. La simple constatation que les parties transverse et autorégressive du filtre peuvent être permutées donne la forme directe II qui économise M registres. [15]

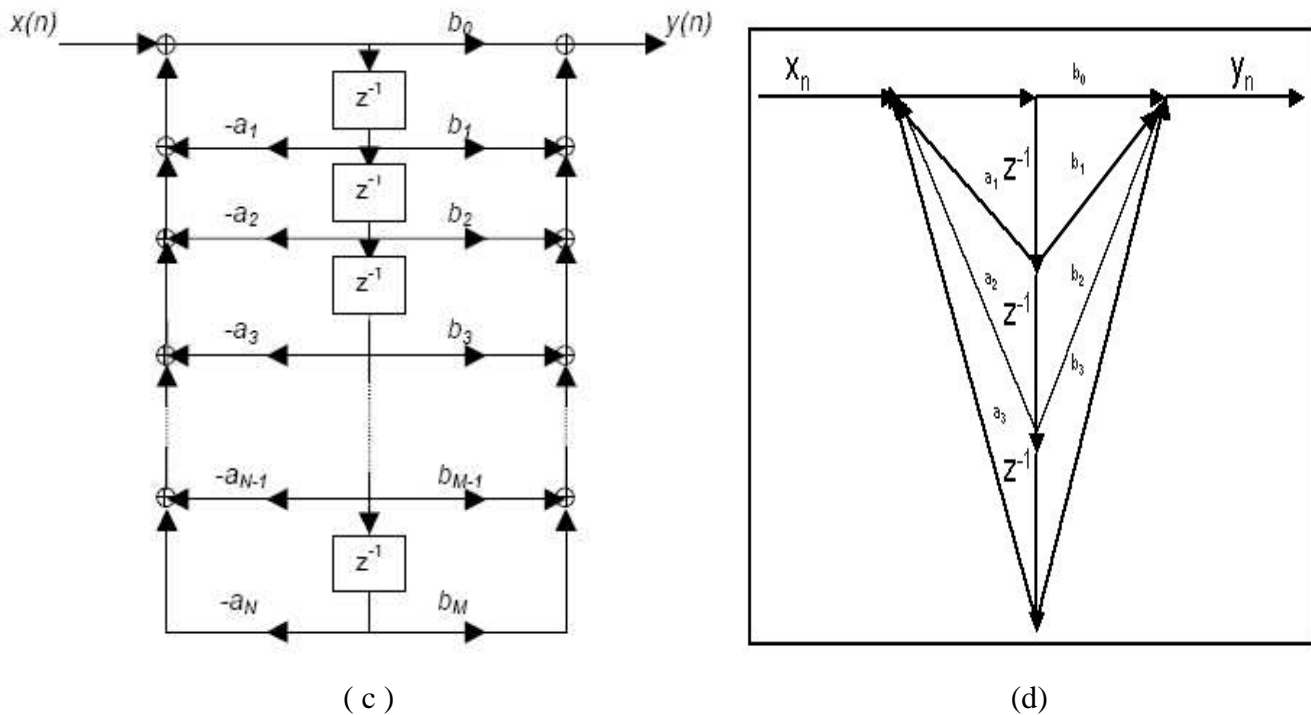


Figure II.14: Forme directe II d'un filtre

II. 7.2.2- Formes transposées I et II :

Un résultat de la théorie des graphes est le théorème de transposition. Ce théorème stipule que si l'on construit le graphe transposé d'une structure de graphe, la fonction de transfert du système ne change pas. On transpose un graphe donné en changeant le sens de ses branches et en intervertissant entrée et sortie du réseau. On peut alors associer aux formes directes I et II les formes transposées I et II (Figure II.15).

Quelle architecture de filtre est alors la plus efficace ? Nous avons vu qu'utiliser les formes I et II permet d'économiser de la mémoire. Un autre aspect du calcul numérique est la quantification des valeurs manipulées : un processeur manipule des nombres avec une précision finie. Il se trouve que la forme transposée occasionne souvent moins d'erreurs arithmétique (exemple : soustraction de très grand nombres qui donne des résultats imprévisibles) et est ainsi plus utilisée que les autres formes d'implémentation (matlab en particulier utilisée cette architecture) [10].

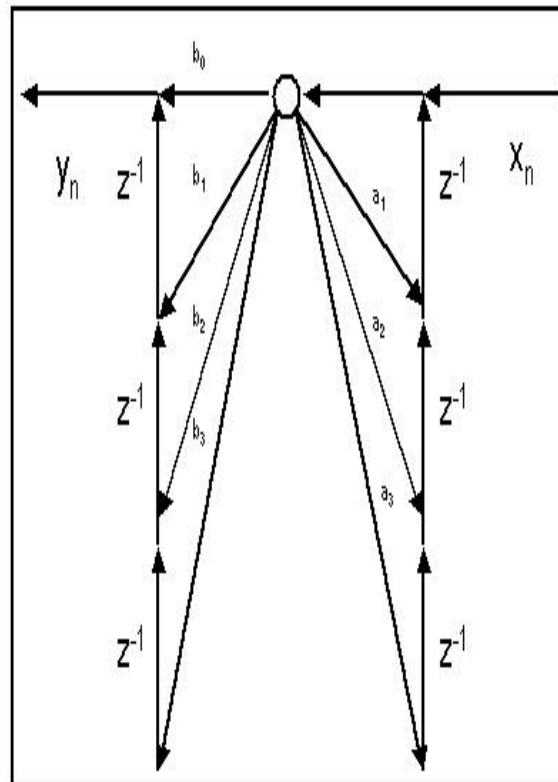


Figure II.15 : Forme transposée I d'un filtre

II.8- Filtrage par FFT :

La rapidité de l'algorithme de FFT et de FFT inverse permet d'envisager d'utiliser l'équivalence convolution et multiplication dans le domaine fréquentiel pour l'implémenter informatiquement

Un filtre. supposons que l'on ait deux séquences à convoluer. Ces algorithmes permettent en fait d'effectuer la convolution circulaire de ces séquences, qui peut différer de la convolution classique, comme nous allons le montrer.[16]

II.8.1- Filtrage numériques basés sur la convolution :

Pour réaliser ces filtres à convolution, les coefficients du filtre, qui sont représentés par les N valeurs de la réponse impulsionnelle discrétisée, sont des constantes dans l'algorithme de calcul ou stockés en mémoire (EPROM) dans le cas d'une réalisation matérielle du filtre. Dans ce dernier cas, deux structures peuvent être adoptées :

- structure directe figure (II.12).
- structure transposée figure (II.13).

II.9- Filtres numériques avancés :

II.9.1- Filtres numériques de la valeur médiane:

Les filtres numériques classiques linéaires ont pour fonction de base d'éliminer certaines composantes fréquentielles qui gênent l'interprétation du signal informatif. Pour cela il est nécessaire que les fréquences à éliminer se situent dans une zone de fréquences hors de la zone occupée par le signal utile. Pour répondre à cette limitation, il est possible de mettre en place des traitements non linéaires, appelés abusivement « filtres » numériques non linéaires. Un de ces traitements non linéaires est le filtre de la valeur médiane : étant donné $2N + 1$ échantillons x_k , la valeur médiane $x_{med,k}$ de cet ensemble est l'échantillon qui se trouve au milieu de l'ensemble ordonné selon un ordre croissant :

$$\{x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-2N}\} \xrightarrow{\text{Ordre croissant}} \{x'_k, x'_{k-1}, \dots, x'_{k-2N} ; \text{avec } x'_i \leq x'_{i+1}\}$$

D'où : $x_{med,k} = x'_{k-N}$

Ce type de filtre numérique non linéaire permet de conserver les transitions rapides mais maintenues d'un signal et d'éliminer complètement des transitions de type impulsion courte. Si nous reprenons les exemples du paragraphe (II.5.2) « lissage temporel », ils mettent parfaitement en évidence cette caractéristique du filtre de la valeur médiane : le signal créneau est conservé sans modification et l'impulsion de durée unité est éliminée. Le traitement du signal du deuxième exemple montre aussi que ce filtre modifie moins fortement le signal informatif en conservant en particulier certaines transitions rapides.

De façon plus générale, le calcul de la valeur médiane s'effectue sur $2N+1$ échantillons, cette technique permettra de sauvegarder toutes transitions rapides suivies par un plateau dont la durée est supérieure ou égale à $N.T_e$ (T_e : période des échantillons). Dans le cas contraire cette transition sera éliminée.

II.9.2- Filtres numérique multicaudence :

Les systèmes étudiés, jusqu'à présent ne mettaient en œuvre qu'une seule fréquence ou cadence d'échantillonnage $1/T_e$. Il est possible de trouver certains applications où le signal d'entrée du filtre et le signal de sortie ne fonctionnent pas à la même cadence (système multicaudence).

Considérons deux exemples :

- *Filtrage passe-bas* : le signal de sortie aura par définition même du traitement effectué

une fréquence plus basse et donc pourra être échantillonné à une cadence plus faible;

- *Modulation* : le signal de sortie qui sera l'onde porteuse du signal informatif va avoir une fréquence plus élevée que le signal informatif d'entrée.

Dans les deux cas, on cherchera à adapter le filtre à la cadence la plus petite afin de minimiser les temps de calcul. Dans le cas où il sera réalisé une réduction de la fréquence d'échantillonnage, l'opération est appelée « *décimation* » et dans le cas où une augmentation de la fréquence d'échantillonnage sera réalisée, l'opération est appelée « *interpolation* ». Les opérations de décimation (enlever un échantillon sur n échantillons) ou d'interpolation (rajouter n échantillons entre 2 échantillons) vont conduire à des déformations spectrales.

Considérons l'exemple inverse de la décimation. Soit un signal $x_k(t)$ échantillonné à la fréquence T_{e1} et le signal de sortie $y_k(t)$ dont nous voulons diminuer la fréquence d'échantillonnage jusqu'à T_{e2} (avec $T_{e2} = T_{e1}/4$). Cette opération ne sera possible que si le spectre du signal initial est limité a priori ou par une opération de filtrage à la fréquence $1/2T_{e2}$, c.à.d. à la fréquence $1/8T_{e1}$. En effet la décimation est équivalente à une opération d'échantillonnage et, si le spectre du signal à échantillonner à cette nouvelle cadence T_{e2} n'a pas son spectre limité à la fréquence $1/2T_{e2}$, le phénomène de repliement va se produire.

II.10- Comparaison des filtres RIF et RII :

La première question qui se pose pour la méthode de réalisation d'un filtre discrète est celles du choix d'un filtre RIF ou d'un filtre RII. Un grand nombre de facteurs entrent en jeu ici, de sorte qu'il n'est pas toujours clair à l'avance de savoir quel sera le choix final.

Pour prendre une décision bien pesée, il peut par fois être utile de considérer les deux solutions: un filtre RIF et un filtre RII. On évalue alors les deux possibilités pour savoir laquelle donnera la meilleure solution pour une application particulière. Ce sont ici des facteurs très pratiques comme la complexité, la consommation d'énergie, la rapidité de calcul, la facilité d'intégration et la disponibilité de certains modules de circuits qui peuvent faire pencher la balance [17].

Filtre RIF	Filtre RII
<p>1. <i>Fonction de transfert</i></p> <p>Possède seulement des zéros</p>	<p>Possède à la fois des pôles et des zéros</p>
<p>2. <i>Réponse en fréquence</i></p> <p>les méthodes de conception normale sont adaptées aux réponses en fréquence arbitraires; par exemple aux filtres avec plusieurs bandes passantes, aux différentiateurs et aux filtres de caractéristique de fréquence spécifique dans la bande de transition</p>	<p>Les méthodes de conception sont en générale adaptées à la réalisation de filtre passe bas, passe haut, passe bande et coup bande</p>
<p>3. <i>Caractéristique de phase</i></p> <p>- Possibilité d'une phase exactement linéaire - Décaleurs de phase (filtres passe tout) impossible</p>	<p>- - On peut seulement approcher une phase linéaire; si on utilise pour cela un égalisateur de phase séparé, la complexité du filtre peut s'en ressentir de façon notable. La spécification du filtre se rapporte exclusivement à la caractéristique d'amplitude. - Possibilité de filtres passe tout</p>
<p>4. <i>Stabilités</i></p> <p>Filtres toujours stables.</p>	<p>Filtre instable s'il y a des pôles à l'extérieur du cercle unité</p>
<p>5. <i>Aide à la conception</i></p> <p>Un ordinateur de taille moyenne est en générale nécessaire pour les procédures itératives de conception de filtres.</p>	<p>Il n'est pas nécessaire d'utiliser un ordinateur plus gros si on utilise les formules de conception "toutes faites" pour les filtres continu, et par exemple la transformation bilinéaire; une calculatrice de poche est alors souvent suffisante</p>
<p>6. <i>Complexité</i></p> <p>Proportionnelles à la longueur de la réponse impulsionnelle.</p>	<p>Pas de la relation directe entre la complexité et la longueur de la réponse impulsionnelle (infini par définition); on peut réaliser des filtres de selectivité élevée avec un hardware de complexité relativement basse.</p>

Filtre RIF		Filtre RII	
7. <i>Structure</i>			
La structure récursive (rare) et la structure non récursive sont possibles toutes les deux; la mieux connu et la structure transversale (non récursive)		Seul la structure récursive et possible; la forme la plus largement utilisée est la connexion en cascade de cellules de premier ordre et du second ordre. La répartition des pôles et des zéros entre et les différentes cellules est une partie importante de la procédure de conception	
8. <i>Sensibilité aux interférences</i>			
L'état initial des cellules mémoire et tout signal interférant de courte durée (par exemple par l'intermédiaire de l'alimentation), peuvent affecter le signal de sortie sur une durée égale à la longueur de la réponse impulsionnelle (ceci ne s'applique que pour des réalisations non récursive).		En principe, l'état initial des cellules mémoire et tout signal interférant de courte durée peuvent affecter le signal de sortie sur une durée infinie.	
9. <i>Quantification</i>			
les effets de la quantification, par exemple dans la réalisation d'un filtre numérique, jouent un rôle secondaire. A l'exception de la structure récursive qui nécessite aussi une compensation exacte des pôles et des zéros après quantification.		A cause de la quantification des coefficients de filtre, un rôle peut en principe passer d'une position de l'intérieure du cercle unité à une position de l'extérieure de ce cercle, et par suite engendré l'instabilité. Les effets de la quantification peuvent aussi conduire à des oscillations indésirables telles que des cycles limites et des oscillations de dépassement	
10. <i>Filtres adaptatifs</i>			
La structure transversale est très bien adaptée à la réalisation de filtre adaptatif		Les filtres adaptatifs sont surtout basés sur des structures en treillis et en échelle.	
11. <i>type de filtre</i>		RII	RIF
Méthode de calcul des coefficients		Fonctions modèles Ex: transformée bilinéaire	Fentetage,(rectangulaire, Hamming...)

Tableau II.1 :La comparaison entre les filtres numérique RII et RIF

II.11- Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié les principales caractéristiques des filtres numériques et leurs applications.

Après les généralités mathématiques, les principales classifications et structures des filtres numériques sont faites selon la durée finie ou infinie de la réponse impulsionnelle d'un filtre. Ceci se justifie par la différence de caractéristiques entre ces deux types de système nécessitant des méthodes de synthèse et de réalisation différentes.

synthèse des filtres numériques

RII

III.1- Introduction :

Nous venons de voir comment analyser le comportement d'un filtre numérique dont la fonction de transfert $H(z)$ (ou l'équation de récurrence) est connue. Nous avons pu déterminer la réponse temporelle à une entrée fixée (impulsion, échelon,) et la réponse fréquentielle au régime sinusoïdal permanent. Tout ceci, suppose que le filtre soit déjà déterminé. Or, en général, le problème qui se pose est l'inverse, on désire déterminer la fonction de transfert $H(z)$ (ou la relation de récurrence) d'un filtre qui doit avoir une réponse temporelle imposée ou une réponse fréquentielle entrant dans un gabarit précis. On dit alors que l'on fait la synthèse du filtre numérique. Il existe de nombreuses méthodes permettant de synthétiser un filtre numérique récursif. Elles s'appuient généralement sur un filtre analogique pris comme modèle :

- Le filtre doit avoir une réponse impulsionnelle ou indicielle imposée : ce sont les méthodes de l'invariance impulsionnelle et de l'invariance indicielle.
- le filtre doit avoir une réponse fréquentielle entrant dans un gabarit donné : C'est la transformation bilinéaire.

III.2- Les Principales caractéristiques des filtres numériques RII:

Le principe de définition du cahier des charges d'un filtre récursif se déroule de la même manière que pour un filtre non récursif [9].

Les filtres à réponse impulsionnelle infinie sont caractérisés par :

- Un **filtre récursif** est un filtre qui se réalise par câblage ou programmation de l'équation aux différences récursive :

$$S_n = b_0 e_n + b_1 e_{n-1} + b_2 e_{n-2} + \dots - a_1 S_{n-1} - a_2 S_{n-2} - \dots \quad (\text{III.1})$$

- La **réponse impulsionnelle** de cet algorithme est de longueur infinie. C'est la raison pour laquelle le filtre numérique (III.1) est dit à **réponse impulsionnelle infinie (RII)**.
- Ce filtre a pour **fonction de transfert** :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots} \quad (\text{III.2})$$

. Les pôles et les zéros :

Il est utile de se souvenir que pour un point $M(f)$ en se déplaçant sur le cercle unité depuis la fréquence $f = 0$ jusqu'à $f = 1/2T$, la proximité d'un zéro coïncidera avec une chute du gain du filtre et que celle des pôles apportera un gain. Vu de loin, un couple pôle-zéro sera neutre.

Un filtre récursif est un filtre qui est réalisé au moyen d'une structure récursive, c'est-à-dire une structure qui boucle sur elle même. Le bruit de calcul numérique étant réintroduit dans la structure, ce type de filtre aura généralement un rapport signal/bruit moins bon que le type RIF

La figure (III.1), montre le principe de filtrage et le passage de l'analogique au numérique. Nous avons un exemple du filtre passe-bas d'ordre 2.

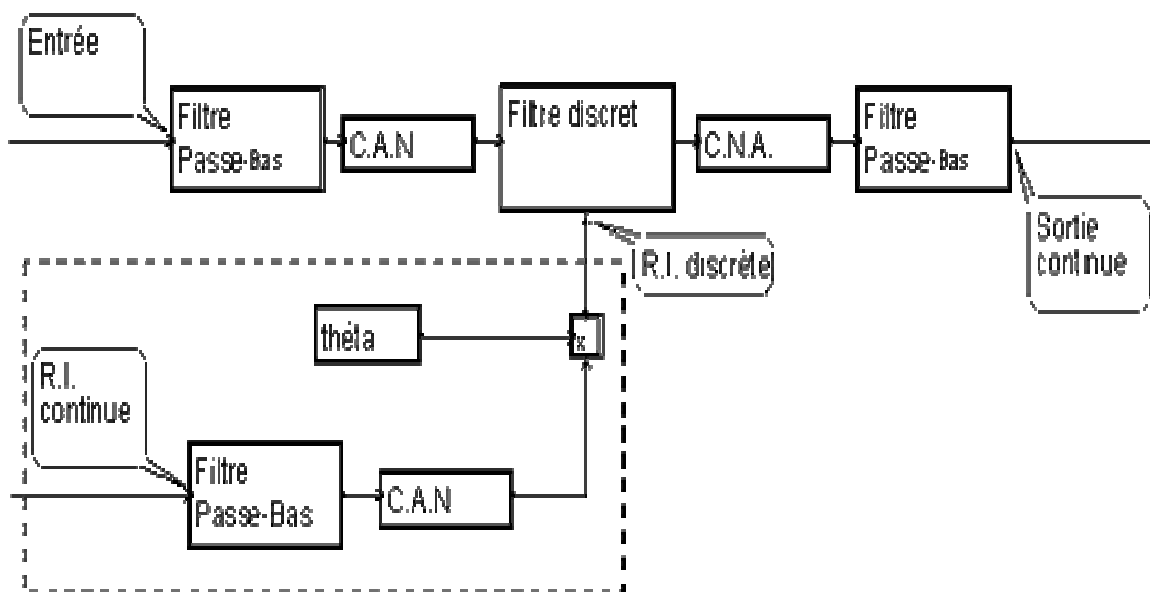


Figure III.1 : Principe du filtrage d'un signal continu par un filtre numérique.

III.3- Les différentes étapes de la modélisation et de simulation des filtres RII

(l'organigramme) :

La procédure de résolution numérique de notre travail de fin d'étude, est résumée dans l'organigramme de la figure (III.2) suivante :

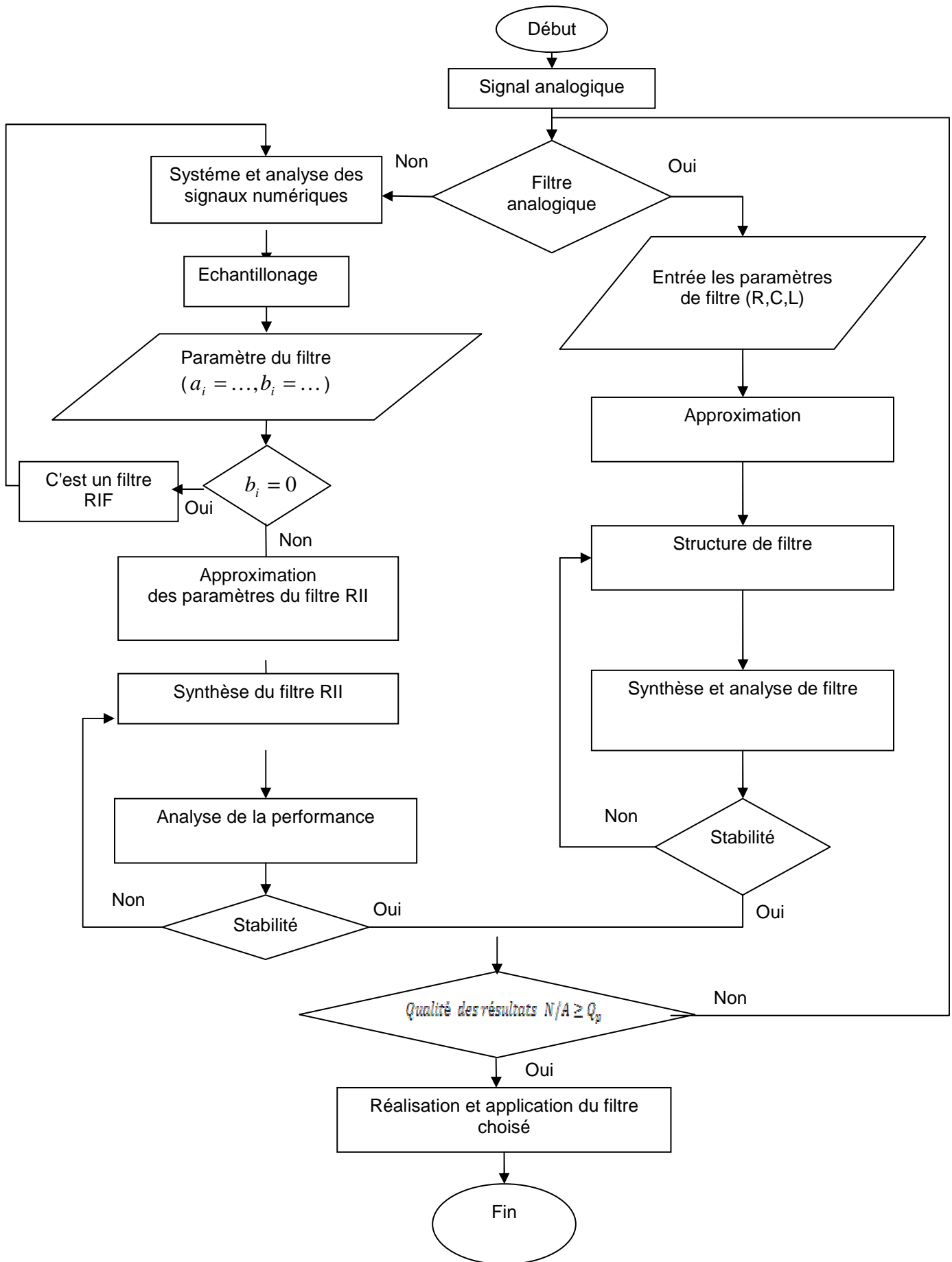


Figure III.2 : Organigramme général de la résolution numérique de RII

III.4- Réalisation d'un filtre passe-bas d'ordre 2 :

III.4.1- Filtre analogique :

La fonction de transfert analogique de la section passe-bas est donné par :

$$H(p) = K \cdot \frac{w_p^2}{P^2 + \left(\frac{W_p}{Q_p}\right) \cdot P + W_p^2} \quad (\text{III.3})$$

Expression dans laquelle Q_p représente le facteur de qualité de la section du second degré.

Les pôles de $H(p)$ sont complexes si $Q_p > 0.5$ (ce qui correspond à $\delta_p < W_p$) (Fig.III.3).

La fonction de transfert dans le domaine fréquentiel est donnée par :

$$H(f) = K \cdot \frac{w_p^2}{-(2 \cdot \Pi \cdot f)^2 + j \left(\frac{W_p}{Q_p}\right) \cdot 2 \cdot \Pi \cdot f + W_p^2} \quad (\text{III.4})$$

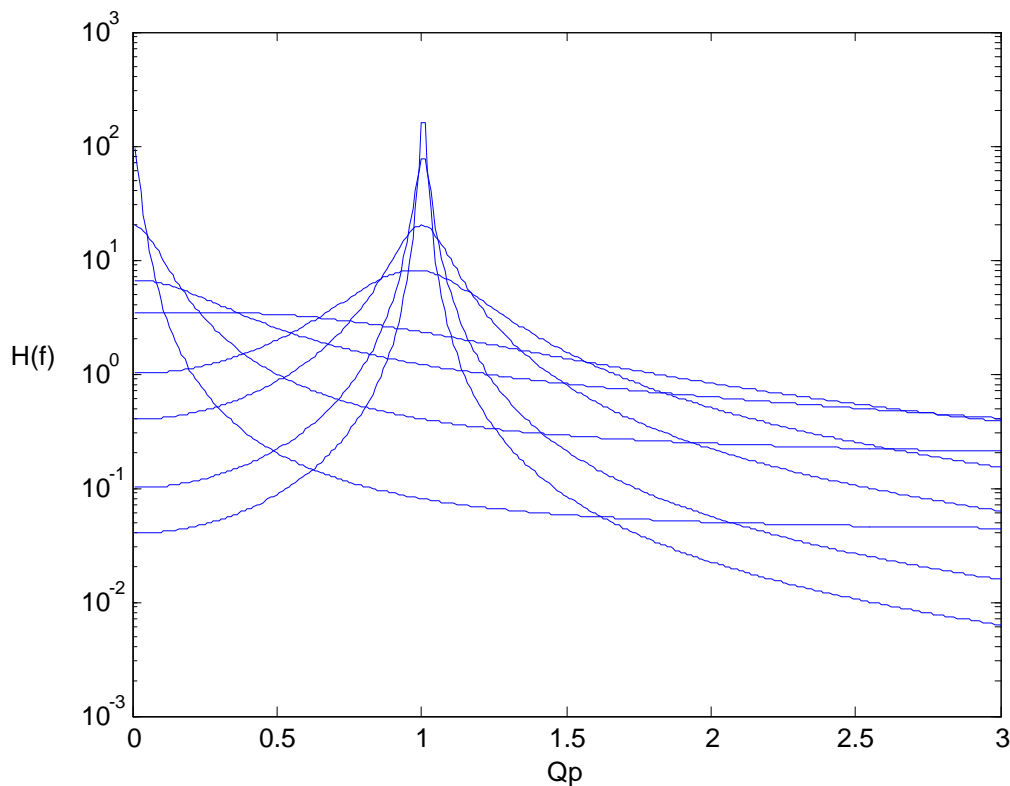


Figure III.3 : Variation de $H(f)$ pour diverses valeurs du facteur de qualité.

III.4.2- Calcul des paramètres de filtre à partir de la fonction de transfert :

Nous avons une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{4.396 \cdot e^{007}}{P^2 + (6912) \cdot P + 4.396 \cdot e^{007}} \quad (\text{III.5})$$

$$H(p) = \frac{1.5776}{P^2 + (6912) \cdot P + 4.396 \cdot e^{007}} \quad (\text{III.6})$$

Alors nous avons calculé les paramètres électriques suivants :

- . **La fréquence utilisée** : $f_0 = 5 \text{ kHz}$;
- . **La première résistance du circuit** : $R_1 = 1000 \Omega$;
- . **La deuxième résistance du circuit** : $R_2 = 1000 \Omega$;
- . **La première capacité du circuit** : $C_1 = 2.8935 \cdot e^{-007} \text{ F}$;
- . **La deuxième capacité du circuit** : $C_2 = 7.8617 \cdot e^{-008} \text{ F}$;
- . **La pulsation naturelle** : $W_0 = 314.1593 \cdot s^{-1}$;
- . **La pulsation de coupure** : $W_p = 6.6302 \cdot e^{003}$;
- . **Le facteur de qualité** : $Q_p = 0.9529$.

III.4.3- Approximation :

Le but de l'approximation est de transformer des spécifications portant sur l'affaiblissement ou le déphasage d'un filtre en une fonction de transfert qui les vérifie. Nous nous intéresserons plus particulièrement ici à l'approximation de l'affaiblissement. Si la phase ou le délai de groupe du filtre doivent également respecter des spécifications précises, il faudra se souvenir de corriger la phase des obtenus, en ajoutant des cellules correctrices de phase [18].

III.4.4- Circuit analogique du filtre :

Nous avons deux types [19] :

III.4.4.1- Circuits de Sallen -Key à gain fixe :

Les circuits sont équivalents au schéma de la figure (III.4) suivante :

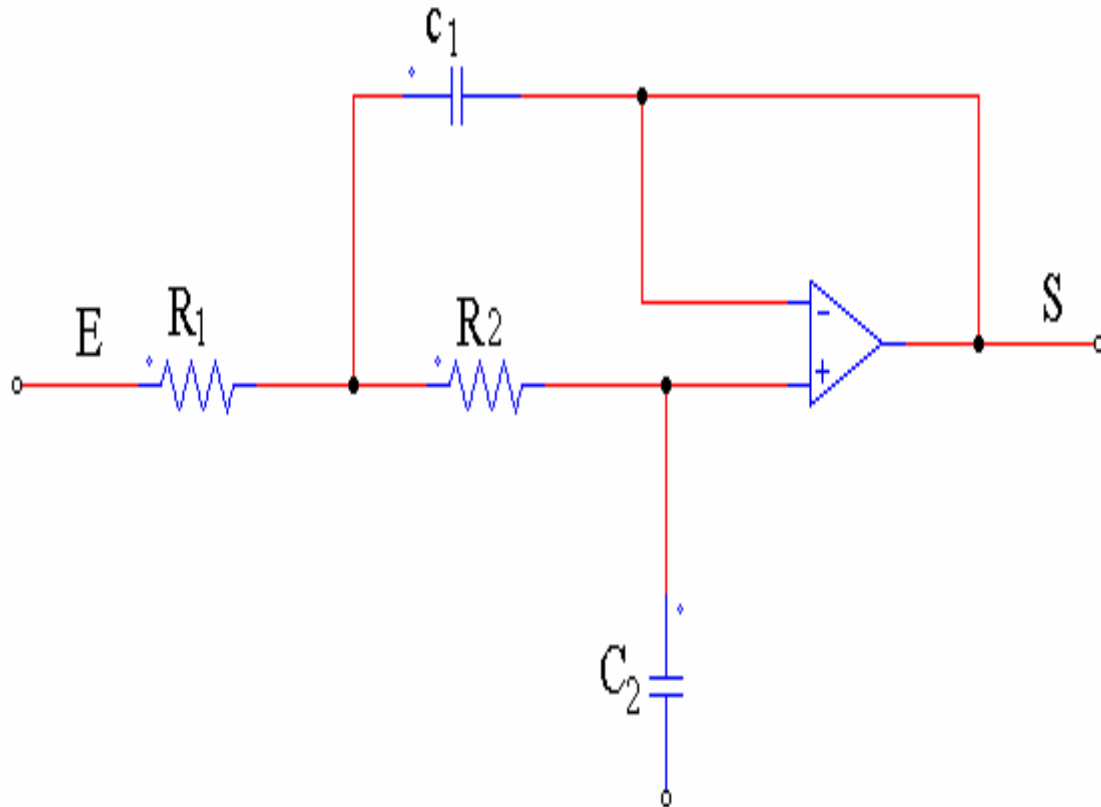


Figure III.4 : Circuit de Sallen et Key à gain fixe d'un filtre passe-bas d'ordre 2

III.4.4.2- Circuits de Sallen -Key à gain variable

Leurs schémas sont présentés dans la figure (III.5). On voit qu'ils ont la même structure que les circuits précédents sauf que l'amplificateur suiveur est remplacé par un amplificateur à gain variable [19].

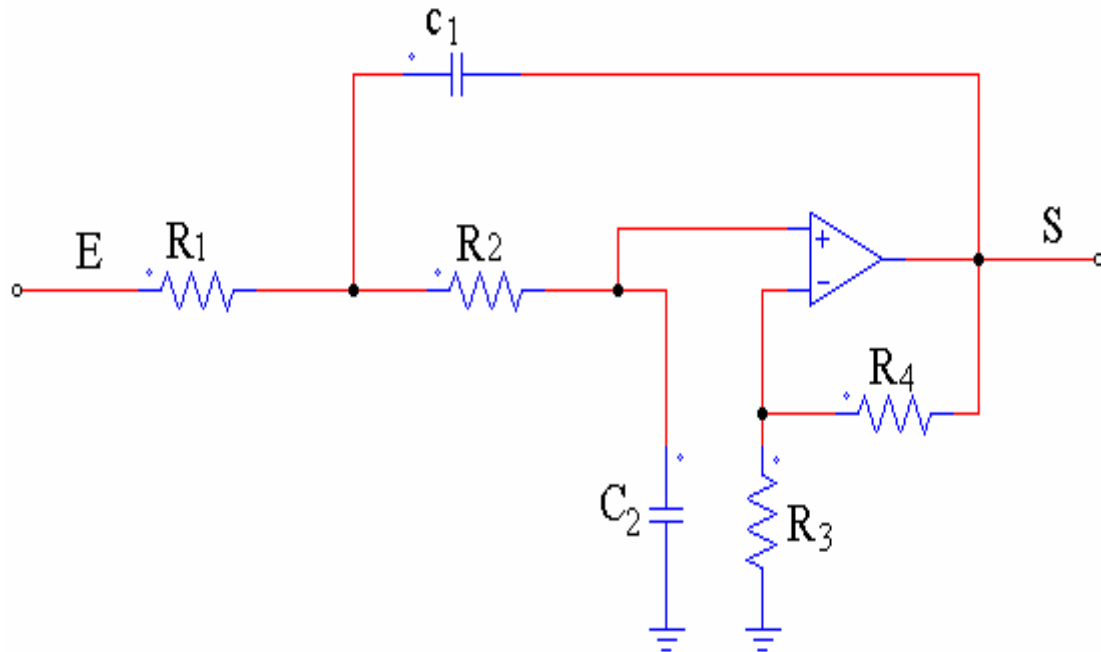


Figure III.5 : Circuit de Sallen et Key à gain variable d'un filtre passe-bas d'ordre 2

III.5- Quelques techniques de la synthèse des filtres :

Nous cherchons à concevoir un filtre qui obéit à un certain cahier des charges: un rejet des fréquences supérieures à une fréquence de coupure donnée, ou d'une bande de fréquence parasite, etc. Il s'agit donc de choisir à partir de ces spécifications, la fonction de transfert $H(z)$ adéquate, que l'on cherche sous forme d'une fraction rationnelle en Z . On supposera que la fréquence d'échantillonnage est de 1 Hz. Les contraintes de stabilité requièrent que les pôles de H soient dans le cercle unité. De nombreuses méthodes existent alors: nous contenterons d'exposer les principes de quelques méthodes classiques.

On spécifie souvent les caractéristiques désirées d'un filtre sous la forme d'un gabarit portant sur son spectre d'énergie. Dans un tel gabarit, nous avons:

- Une bande passante et une tolérance δ_1 pour laquelle $||H(v)| - 1| \leq \delta_1$.
- Une bande de rejet et une tolérance δ_2 pour laquelle $|H(v)| \leq \delta_2$.

L'approche traditionnelle de la synthèse des filtres numériques est de partir d'un filtre analogique à fonction de transfert analogique (transformée de Laplace) connue et d'en déduire, par une méthode à définir, la fonction de transfert $H(z)$ d'un filtre numérique équivalent. Dans un premier temps, nous rappelons les propriétés de trois types de filtres analogiques classiques [14].

III.6- Transformation d'un filtre analogique en filtre numérique:

Disposant désormais d'outils analogiques, nous cherchons à déterminer leurs homologues numériques. Nous exposons la méthode d'invariance à impulsion et la méthode de transformation bilinéaire pour la synthèse des filtres RII.

Nous allons voir quatre méthodes permettant de passer de $H(p)$ à $H(z)$:

- méthode de l'approximation de l'équation différentielle ;
- méthode du bloqueur d'ordre zéro ;
- méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle ;
- méthode de la transformation bilinéaire.

III.6.1- Méthode de l'approximation de l'équation différentielle

Il s'agit d'écrire l'équation différentielle liée à $H(p)$ et de remplacer chaque dérivée par son approximation numérique. On remplace donc chaque différentielle par une différence. Il revient au même de remplacer p par une expression en z . Il est mieux d'utiliser la transformation d'Euler, que utilise l'approximation simple d'une dérivée, soit:

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=nT} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} \approx \frac{s[kT] - s[(k-1)T]}{T} \quad (\text{III.7})$$

Cette méthode revient à faire : $\frac{ds}{dt} = \frac{s_k - s_{k-1}}{T}$.

On obtient $H(z)$ à partir de $H(p)$ en remplaçant p par $\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)$, et p^n par $\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^n$

La transformation inverse est donnée par (Figure III.6) :

$$z = \frac{1}{1-pT} \quad (\text{III.8})$$

Nous pouvons aussi, prendre des approximations centrées des dérivées:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s_{k+1} - s_{k-1}}{2T}, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{s_{k+1} - 2s_k + s_{k-1}}{T^2}, \dots \quad (\text{III.9})$$

Ce qui revient à remplacer p par $\frac{z-z^{-1}}{2T}$, p^2 par $\frac{z-2+z^{-1}}{T^2}$,

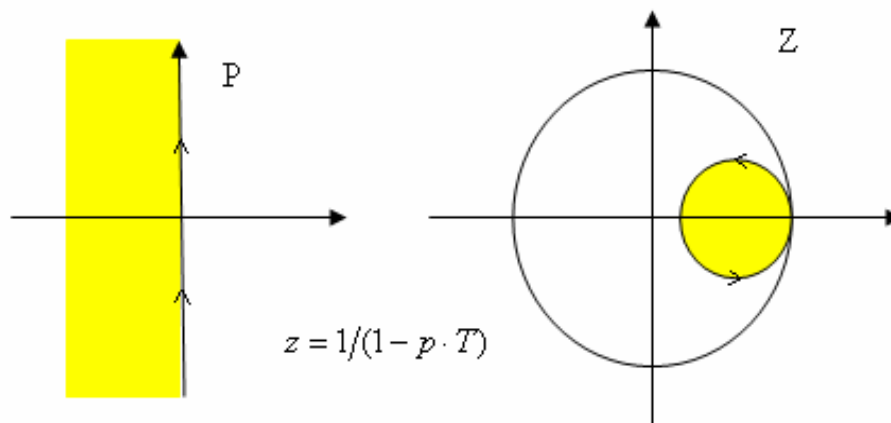


Figure III.6 : Application du plan p sur le plan z

Chaque pôle (ou chaque zéro) en $p = p_k$ est remplacé par un pôle (ou un zéro) en $z_k = \frac{1}{1 - p_k T}$. C'est une application du plan p vers le plan z qui transforme la partie négative du plan p à l'intérieur d'un petit cercle du plan z, de rayon $1/2$ et de centre $(0, 1/2)$. La stabilité est conservée. Il n'y a pas de recouvrement du spectre (application bijective). Cependant, l'analogie plan p- plan z n'est conservée que pour les très basses fréquences, au voisinage du point de tangence des deux cercles. On ne pourra pas synthétiser un filtre numérique réjecteur à partir d'un filtre analogique réjecteur avec cette méthode, sauf aux très basses fréquences (cercles tangents).

Notons que :

$$H(z)_{z=e^{j2\pi fT}} \xrightarrow{T \rightarrow 0} H(p)_{p=j2\pi f} \quad (\text{III.10})$$

Cette méthode, qui est peu utilisée pour la conception des systèmes numériques, elle est largement utilisée pour les systèmes à la base du fonctionnement des filtres à capacités commutées.

III.6.2- Méthode du bloqueur d'ordre zéro :

Dans cette méthode, on suppose que les réponses de $H(p)$ à un signal d'entrée $e(t)$ et à ce même signal d'entrée échantillonné puis bloqué, ne sont pas très différentes (Figure III.7) [20]

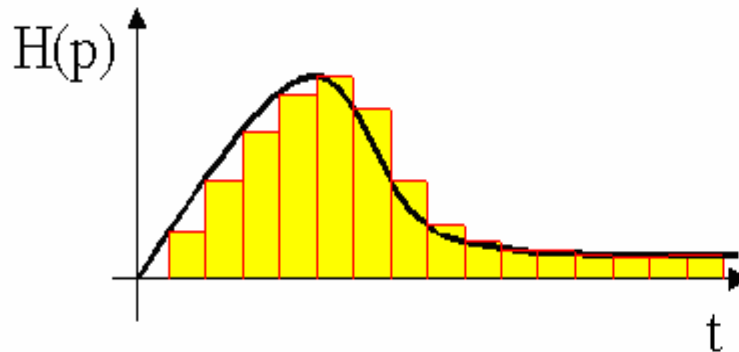
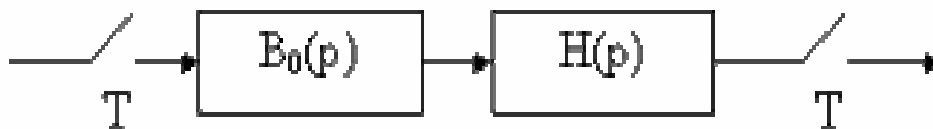


Figure III.7 : Méthode du bloqueur d'ordre zéro.

Cela revient à supposer que $H(p)$ est précédé de l'échantillonneur-bloqueur $B_0(p)$.



Et donc à calculer :

$$H(z) = \mathfrak{Z} [B_0(p) \cdot H(p)] = (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left[\frac{H(p)}{p} \right] \quad (\text{III.11})$$

Pour les mêmes raisons que celles de l'invariance impulsionnelle, cette méthode ne peut être utilisée que pour les filtres analogiques à bande limitée. Afin d'éviter tout phénomène de repliement (recouvrement) de spectre.

Notons que nous retrouvons les caractéristiques du filtre continu quand $T \rightarrow 0$.

III.6.3- Transformation bilinéaire :

La transformation bilinéaire est la méthode la plus couramment utilisée pour réaliser des filtres discrets à partir de filtres continus (Fig. III.8) :[21]

* z étant égal à e^{Tp} ,

* $p = \frac{\log(z)}{T}$ se développe en série sous la forme :

$$p = \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right] \quad (\text{III.12})$$

La transformation bilinéaire en développement limité du premier ordre est donnée par :

$$p = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \quad (\text{III.13})$$

Une autre façon de justifier la transformation bilinéaire, est de la voir comme issue d'un système discret réalisant l'approximation d'une intégrale par la méthode du trapèze:

$$s[n] = s[(n-1)T] + T \frac{e[nT] + e[(n-1)T]}{2} \quad \text{donne la relation :}$$

$$S(z) = z^{-1} S(z) + T \frac{E(z) + z^{-1} E(z)}{2} \quad (\text{III.14})$$

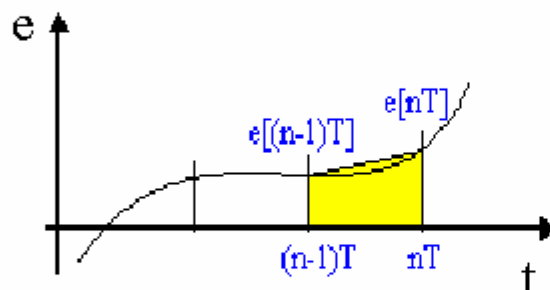


Figure III.8 : La transformation bilinéaire

Par conséquent $\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$ l'équivalent numérique de l'intégrateur analogique $\frac{1}{p}$ est

$$\text{donc } \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}.$$

En inversant cette équivalence, on retrouve la transformation bilinéaire (Fig.III.9) :

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

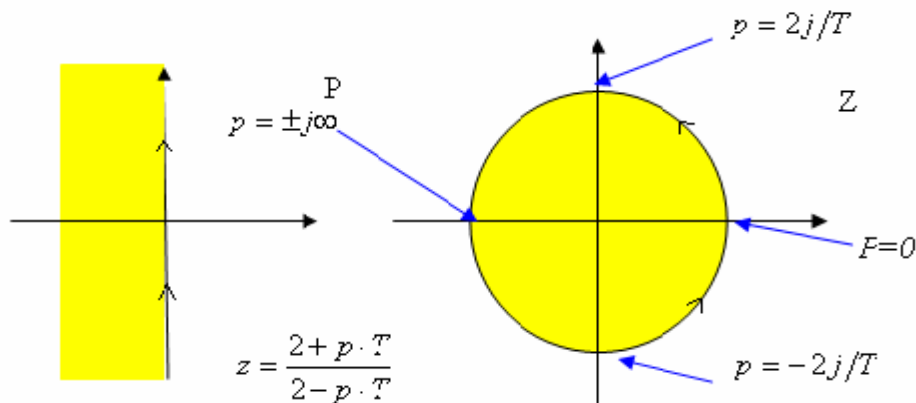


Figure III.9 : La correspondance graphique entre le plan p et le plan z

La correspondance graphique entre le plan p et le plan z est donnée par la relation suivante :

$$z = \frac{2 + pT}{2 - pT} \quad (\text{III.15})$$

Le point $p = 0$ se transforme en $z = 1$, tandis que $p = \pm \infty$ se transforme en $z = -1$. La partie stable et négative du plan p a pour image l'intérieur du cercle unité du plan z . A partir de systèmes continus stables, on obtient donc des systèmes discrets stables.

L'axe imaginaire du plan p se trouvant projeté sur la totalité du cercle unité, cette méthode conduit à une compression de la bande passante du filtre analogique $F(p)$ vers les basses fréquences, et à un gain nul à la fréquence de Shannon (matérialisé par un ou plusieurs zéros en -1).

La transformation $p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ n'étant pas linéaire, il est nécessaire de compenser le décalage vers les basses fréquences pour une fréquence particulière en faisant un prédécalage. C'est à

dire :

$$z = \frac{2 + pT}{2 - pT}$$

Les étapes nécessaires pour la démonstration sont données comme suit :

La transformation $z = \frac{2 + pT}{2 - pT}$ établit une correspondance entre les pulsations numériques w_n du plan z et les pulsations analogiques w_a du plan p .

Dans le domaine fréquentiel, l'équation (III.15) devient :

$$e^{jw_n T} = \frac{2 + jw_a T}{2 - jw_a T} \quad (\text{III.16})$$

\Rightarrow égalité des modules: $1 = 1$

$$\Rightarrow \text{égalité des phases: } w_n T = \arctan\left(\frac{w_a T}{2}\right) - \arctan\left(\frac{-w_a T}{2}\right) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{w_a T}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{w_a T}{2} = \tan\left(\frac{w_n T}{2}\right) \Rightarrow w_a = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{w_n T}{2}\right) \quad (\text{III.17})$$

Deux cas peuvent se présenter pour toute transformation bilinéaire induit ce "gauchissement" ou déformation en fréquence (*frequency warping*) (Figure III.10):

- Soit les caractéristiques du filtre se situent dans les basses fréquences et cette distorsion est tolérable ;

- Dans le cas contraire, il faut la compenser par un pré-décalage des caractéristiques du filtre analogique.

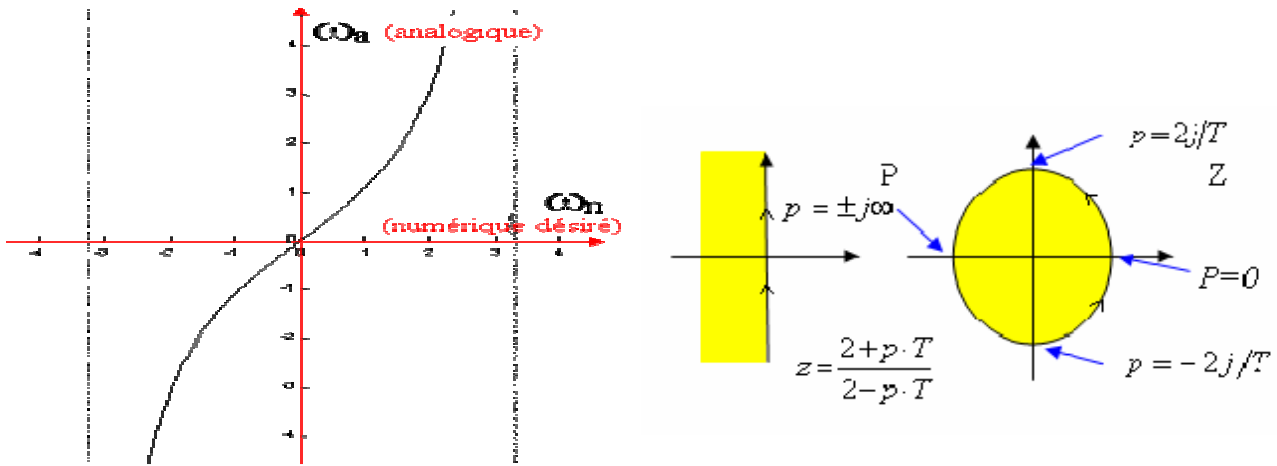


Figure III.10 : Présentation des deux cas de la transformation bilinéaire.

L'équation de pré-compensation du gauchissement (III.16) montre que le domaine fréquentiel analogique (p, ω_a) qui s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ sur l'axe imaginaire, se trouve intégralement projeté sur le domaine fini compris entre -180° et $+180^\circ$ du cercle unité (Figure III.11).[17]

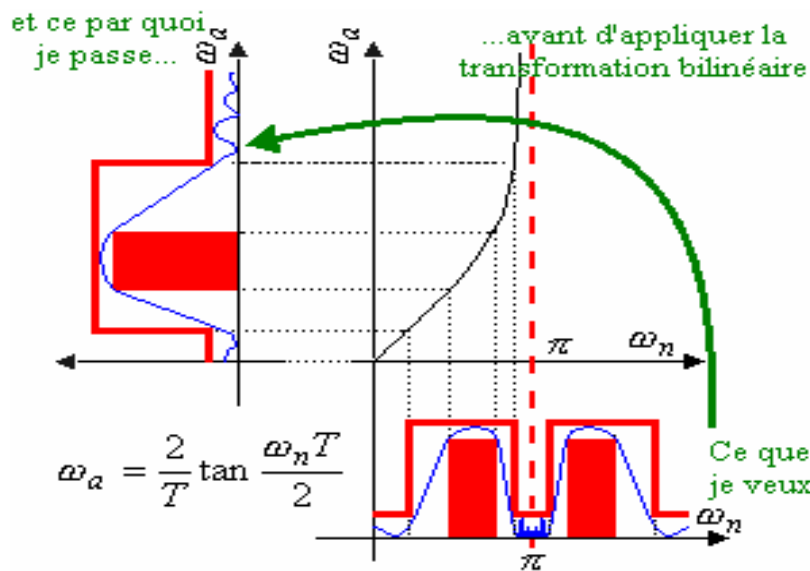


Figure III.11: Pré-compensation du gauchissement lié à la transformation bilinéaire

On souhaite que le filtre numérique suive un certain gabarit numérique caractérisé par des fréquences ou pulsations W_n . Pour obtenir ce gabarit numérique, il faut pré-compenser les effets du gauchissement et calculer la fonction de transfert du filtre analogique $H(p)$ sur la base d'un gabarit analogique caractérisé par les fréquences $f_a = \frac{1}{\pi T} \tan(\pi f_n T)$ ou les pulsations $w_a = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{w_n T}{2}\right)$.

La fonction de transfert numérique $H(z)$ qui sera obtenue par application de la transformée bilinéaire correspondra, en amplitude et en fréquence, aux spécificités du gabarit numérique recherché.

Comme pour les autres méthodes, on retrouve les caractéristiques du filtre continu si $T \rightarrow 0$

(Figure III.12): $H(z)_{z=e^{j2\pi f T}} \xrightarrow{T \rightarrow 0} H(p)_{p=j2\pi f}$.

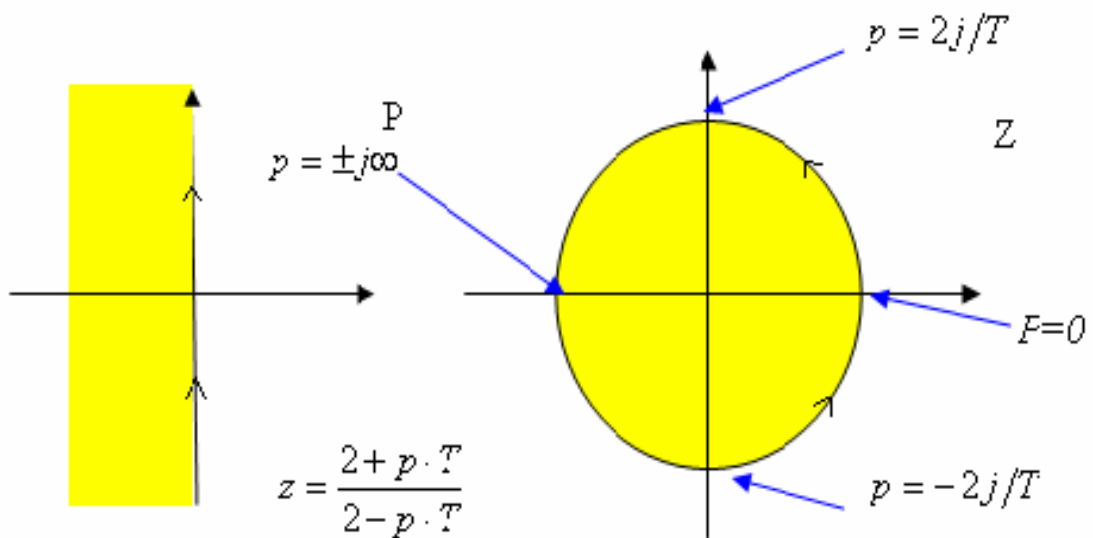


Figure III.12 : Calcul de la fonction de transfert du filtre analogique à partir du filtre numérique.

III.6.4- Méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle :

Le principe de cette méthode est le suivant:

- * on détermine la réponse impulsionnelle désirée $h(t)$
- * on échantillonne cette réponse impulsionnelle à la fréquence f_e et on en déduit la suite $\{h_k\}$
- * on recherche la fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique qui a pour réponse impulsionnelle la suite $\{h_k\}$.

III.6.5- Etude des filtres numériques récurrents par la méthode des pôles et des zéros :

Afin de faciliter l'étude des filtres récurrents, et d'améliorer leur stabilité numérique, il est commode de représenter respectivement le numérateur, et le dénominateur des filtres récurrents comme étant le produit de filtres du premier ordre (un pôle ou un zéro) et du second ordre (paire de pôles, ou de zéros, complexes conjugués). On factorisera donc la fonction de transfert sous la forme suivante [21] :

$$H(z) = \frac{K(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_q)} \quad (\text{III.18})$$

Lorsqu'un zéro est placé sur un point donné du plan en z , la réponse fréquentielle sera de 0 au point considéré. Un pôle quant à lui produira un pic au point correspondant. Sur la figure (III.13), le cercle complet correspond à une fréquence d'échantillonnage (-180° correspondant à $-f_e/2$ et 180° à $f_e/2$). Des pôles proches du cercle unité sont à l'origine de larges pics tandis que des zéros proches ou sur le cercle unité produisent des minima. Il est donc possible, par un placement judicieux des pôles et des zéros, d'obtenir un filtre sélectif simple.

Nous remarquons que :

- * Pour que les coefficients du filtre soient réels, il faut que les pôles et les zéros soient réels (sur l'axe des réels) ou par paires de complexes conjugués.
- * Il existe une relation "empirique" entre la largeur de la zone de transition et la position des

$$\text{pôles sur un rayon éventuellement inférieur à } : r \approx 1 - \left(\frac{\text{largeur}}{F_e} \right) \cdot \pi :$$

valable uniquement si $r > 0,9$.

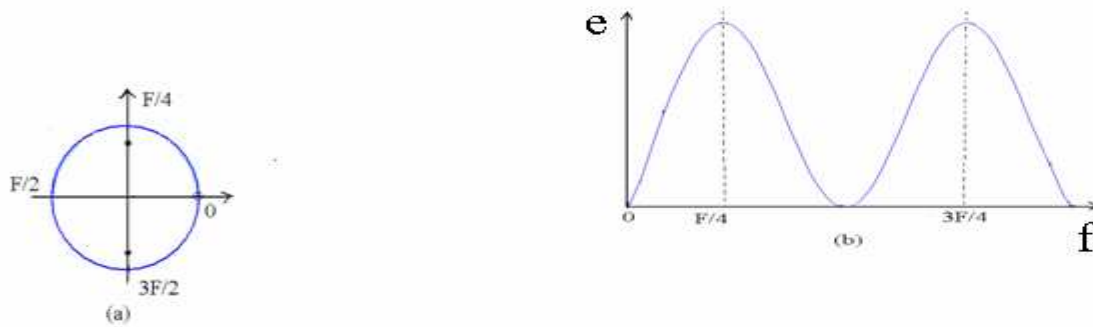


Figure III.13: Etude des filtres récurrents par la méthode des pôles et des zéros.

III.7- Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle infinie RII :

Dans quelques cas particuliers, les filtres RII peuvent être synthétisés directement au moyen du placement de leurs pôles et de leurs zéros. La réalisation d'un filtre numérique passe par la recherche d'une fonction de transfert $H(z)$ dont la bande passante correspond à des spécifications fréquentielles exprimées par un gabarit (Figure III.14) [22].

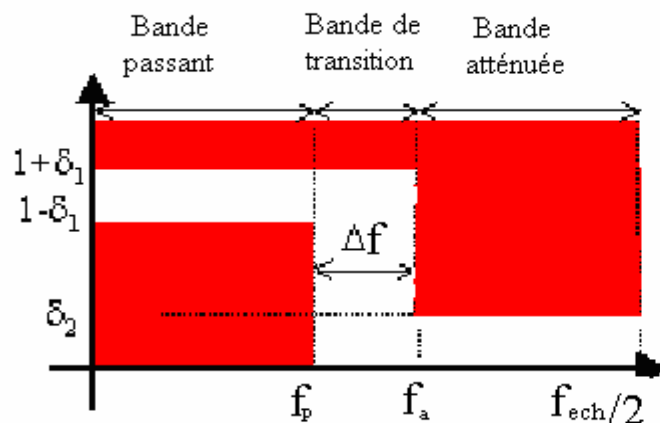


Figure III.14 : Réalisation d'un filtre RII.

La méthode la plus utilisée consiste à déterminer la fonction de transfert d'un filtre analogique $H(p)$ répondant à ce gabarit, puis à lui appliquer une méthode de transformation qui donnera la fonction de transfert du filtre numérique $H(z)$. Il est essentiel que cette méthode de transformation conserve la stabilité du filtre ainsi que ses caractéristiques fréquentielles et/ou temporelles importantes pour le concepteur.

III.7.1- Quelques types de filtres RII:

Les filtres largement utilisées sont regroupés dans le tableau (III.1) suivant :

Caractéristiques	Bande passante	Bande de transition	Bande atténuée	Phase
Butterworth	très plate	large	Régularité de l'atténuation	modérément non linéaire
Tchebychev	ondulations au choix	étroite	atténuation uniforme	non linéaire
Cauer ou elliptiques	ondulations importantes	très étroite	grandes variations	non linéaire
Bessel	plate	très large	excellente régularité	bonne linéarité

Tableau III.1 : Les principaux filtres et leurs caractéristiques

Les réponses en fréquence de ces filtres dans le cas passe-bas d'ordre 5 sont représentées dans la figure (III.15) suivante :

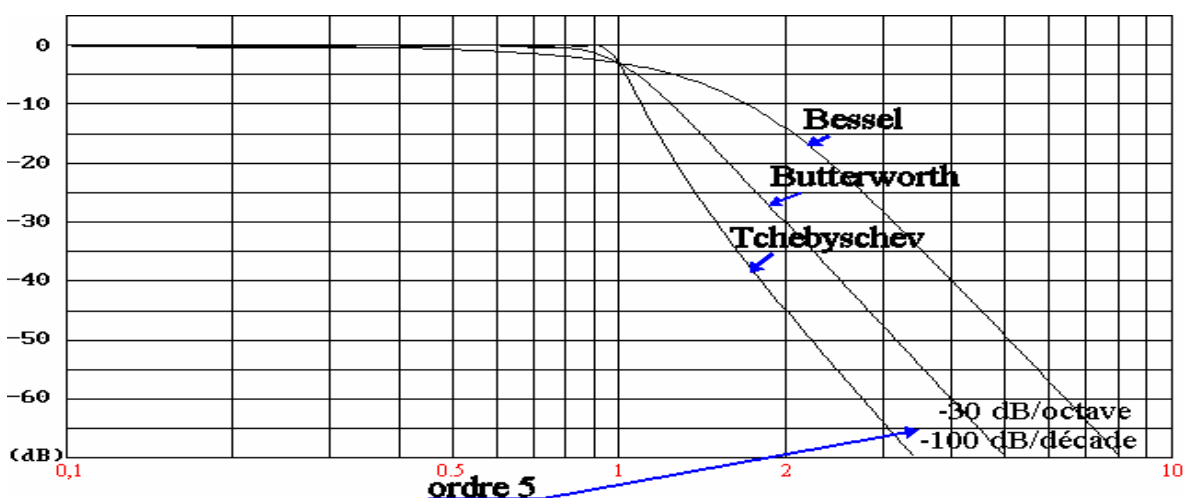


Figure III.15 : Réponses en fréquences de trois filtres usuels.

III.7.2- Les différentes formes de $H(z)$:

Nous avons quatre méthodes permettant de passer de $H(p)$ à $H(z)$. Appliquons ces méthodes pour le cas du filtre passe-bas de second ordre à partir de la fonction transfert analogique (III.5) avec $F_c = 10\text{kHz}$:

- **Méthode impulsional :**

$$H(Z) = \frac{0.0001058 \cdot Z - 1.86 \cdot e^{-0.20}}{Z^2 - 1.195 \cdot Z + 0.501} \quad (\text{III.19})$$

- **Méthode d'Euler :**

$$H(Z) = \frac{6.185 \cdot e^{-0.09} \cdot Z + 4.854 e^{-0.09}}{Z^2 - 1.195 \cdot Z + 0.501} \quad (\text{III.20})$$

- **Méthode des trapèzes :**

$$H(Z) = \frac{2.185 \cdot e^{-0.09} \cdot Z^2 + 7.252 \cdot e^{-0.09} + 2.71 \cdot e^{-0.09}}{Z^2 - 1.195 \cdot Z + 0.501} \quad (\text{III.21})$$

- **Méthode bilinéaire :**

$$H(Z) = \frac{0.0986(Z+1)^2}{Z^2 - 1.223 \cdot Z + 0.5251} \quad (\text{III.22})$$

III.8- Application de l'étude aux filtres de Butterworth :

Un filtre de Butterworth est un type de modèle de filtre linéaire, conçu pour posséder un gain aussi constant que possible dans sa bande passante

Les filtres de Butterworth furent décrits pour la première fois par l'ingénieur britannique Stephen Butterworth [17].

III.8.1- Les caractéristiques principales des filtres de Butterworth :

Le gain d'un filtre de Butterworth est le plus constant possible dans la bande passante et tend vers 0 dans la bande de coupure. Sur un diagramme de Bode logarithmique (Fig. III.16), cette réponse décroît linéairement vers $-\infty$, de -6 dB/octave :

- * (-20dB/décade) pour un filtre de premier ordre,
- * -12dB/octave soit -40dB/décade pour un filtre de second ordre,
- * -18dB/octave soit -60dB/décade pour un filtre de troisième ordre, etc.

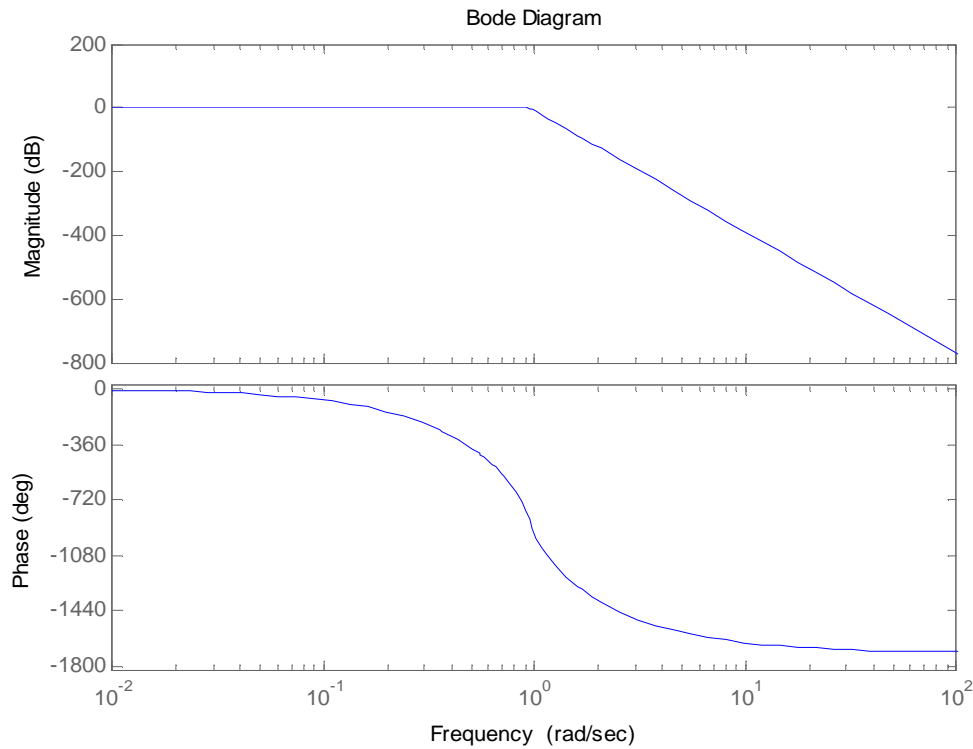


Figure III.16 : Diagramme de Bode d'un filtre de Butterworth

III.8.2-Fonction de transfert des filtres de Butterworth :

Comme pour tous les filtres linéaires, le prototype étudié est le filtre passe-bas, qui peut être facilement modifié en filtre passe-haut ou placé en série pour former des filtres passe-bande ou coupe-bande.

Le gain d'un filtre de Butterworth passe-bas d'ordre n est :

$$G_n(w) = |H_n(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{w}{w_c}\right)^{2n}}} \quad (\text{III.23})$$

Où G_n : est le gain du filtre,

H_n : la fonction de transfert,

j : l'unité complexe,

w : la fréquence (angulaire) du signal en (rad / s) ,

w_c : la fréquence de coupure (angulaire) du filtre (à -3 dB).

En normalisant l'expression (III.23), c'est-à-dire en spécifiant $w_c = 1$, nous aurons :

$$G_n(w) = |H_n(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1+w^{2n}}} \quad (\text{III.24})$$

Les $(2n-1)$ premières dérivées de G_n sont nulles pour $w = 0$, impliquant une constance maximale du gain dans la bande passante [18]. Aux hautes fréquences :

$$|H(jw)|_{dB}^2 = 20 \cdot n \cdot \log_{10}(w) \quad (\text{III.25})$$

Alors la pente du carré du gain dans un diagramme de Bode est de $20n$ dB/décade (Fig.III.17).

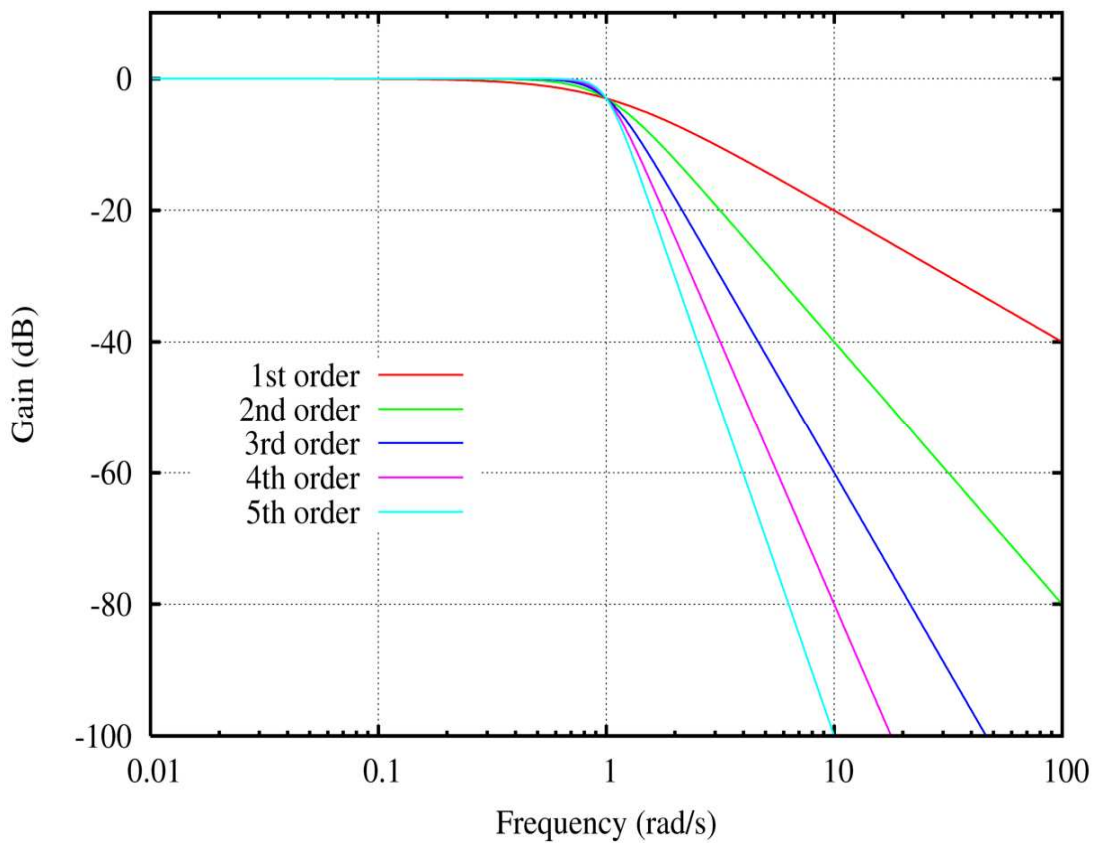


Figure III.17 : Variation du gain en fonction de la fréquence pour différents ordres du polynôme de Butterworth

III.8.3- Polynômes de Butterworth:

La fonction de transfert normalisée d'un filtre de Butterworth peut être écrite sous la forme suivante [19] :

$$H_n(s) = \frac{1}{B_n(s)} \quad (\text{III.26})$$

Où $B_n(s)$ est un polynôme de degré n .

La table suivante donne les premières valeurs de ces polynômes :

n	$B_n(s)$
1	$s+1$
2	$s^2+1,414s+1$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0,7654s+1)(s^2+1,8478s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0,6180s+1)(s^2+1,6180s+1)$
6	$(s^2+0,5176s+1)(s^2+1,414s+1)(s^2+1,9318s+1)$
7	$(s+1)(s^2+0,4450s+1)(s^2+1,247s+1)(s^2+1,8022s+1)$
8	$(s^2+0,3986s+1)(s^2+1,111s+1)(s^2+1,6630s+1)(s^2+1,9622s+1)$

Tableau III.2 : Table de Butterworth.

III.8.4 : Détermination de l'ordre n de Butterworth

On pose [2] :

$$A_p = \frac{1}{R_p} ;$$

$$A_a = \frac{1}{R_a} ;$$

Le choix de N est donné par l'expression (III.27) suivante :

$$N \geq \frac{1}{2} \frac{\log \left[\frac{(A_p^2 - 1)}{(A_a^2 - 1)} \right]}{\log \left(\frac{W_p}{W_a} \right)} \quad (\text{III.27})$$

III.8.5- Synthèse d'un filtre de Butterworth :

Nous cherchons à réaliser un filtre passe-bas de gain unité qui ne comportant pas d'oscillations dans la bande passante et satisfaisant au gabarit suivant :

$$R_p = -1 \text{ dB} ; \quad F_p = 700 \text{ HZ} ;$$

$$R_a = -200 \text{ dB} ; \quad F_s = 300 \text{ HZ} ;$$

A partir de l'équation (III.27), nous avons : $N \approx 28$ qui est l'ordre du filtre de Butterworth.

Le Filtre analogique de Butterworth de l'ordre $N=28$ est caractérisé par :

- $W_n = 4.2899 \cdot e^{+j0.03} \text{ rad / s} ;$
- $F_0 = F_p = 700 \text{ Hz} ;$
- $F_{3dB} = \frac{W_n}{2} * \pi$

Le diagramme de Bode normalisé dans le cas analogique de cette ordre est représenté dans la figure (III.18) suivante :

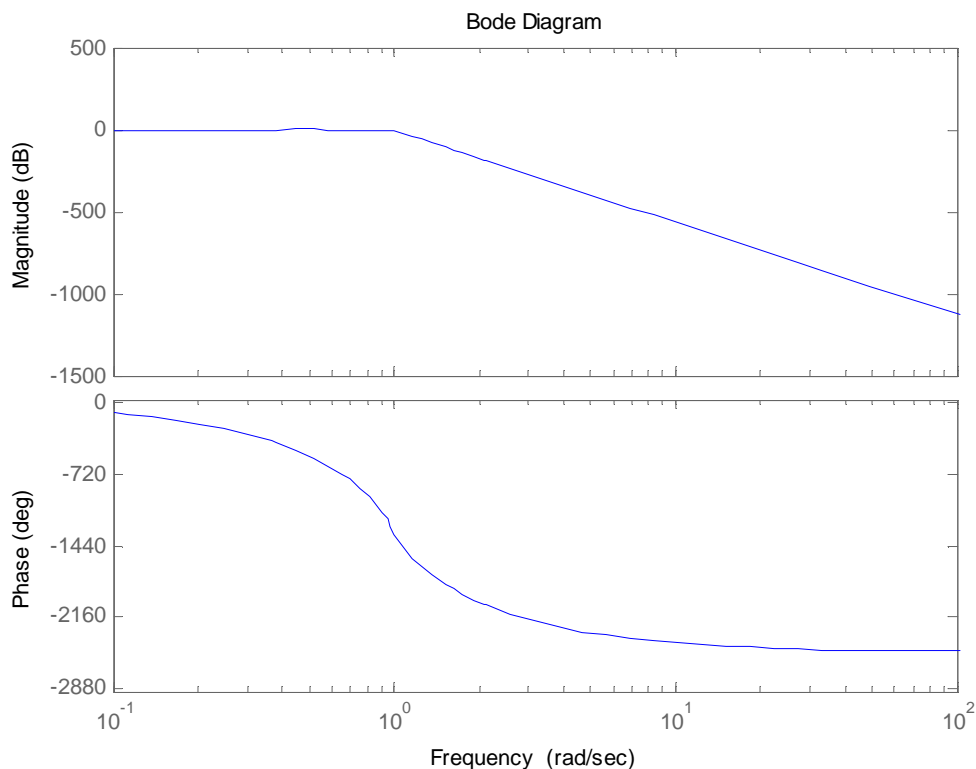


Figure III.18 : Diagramme de Bode normalisé dans le cas analogique.

Nous constatons que la méthode transformation bilinéaire, est la meilleure méthode pour trouver l'équivalence entre les filtres analogique et les filtres numériques, lorsqu'il 'agit des filtres d'ordres supérieurs.

Pour le domaine numérique, la caractéristique des pôles est représenté dans la figure (III.19) suivantes :

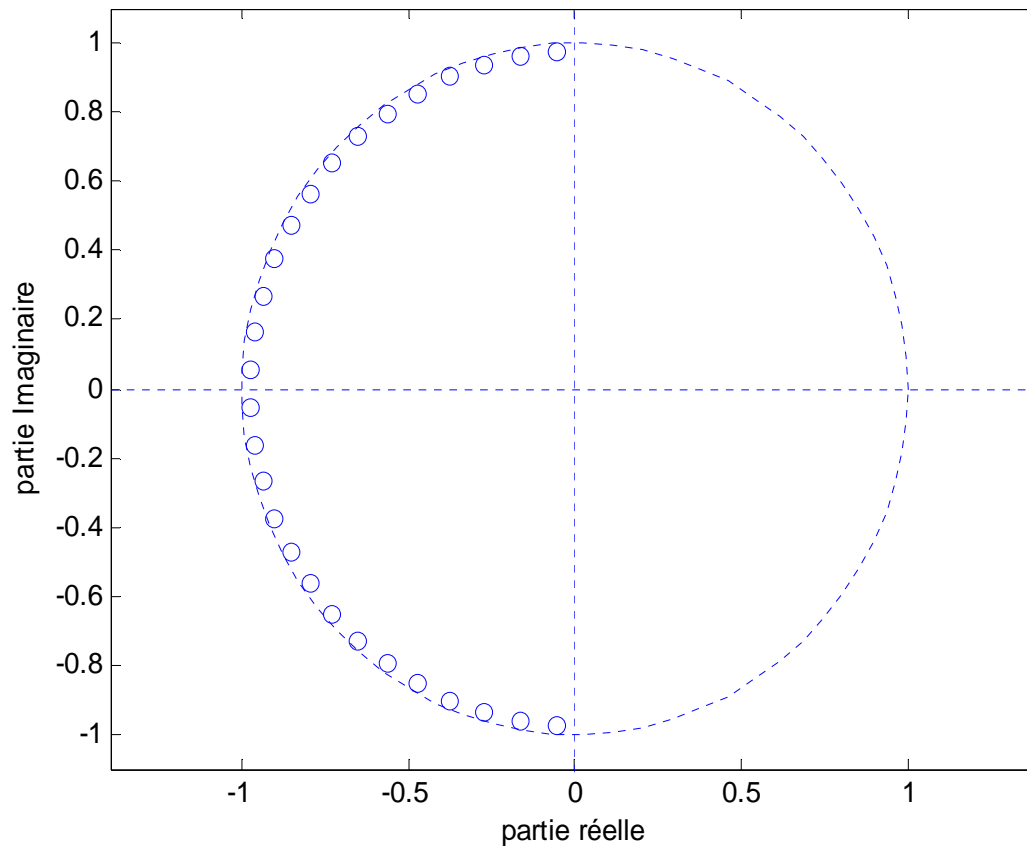


Figure III.19 : Position des pôles dans le plan complexe (cercle de rayon 1).

Les autres caractéristiques avec leurs variations sont représentées dans les figures (III.20, III.21, III.22, III.23, III.24, III.25 et III.26) pour $L=256$.

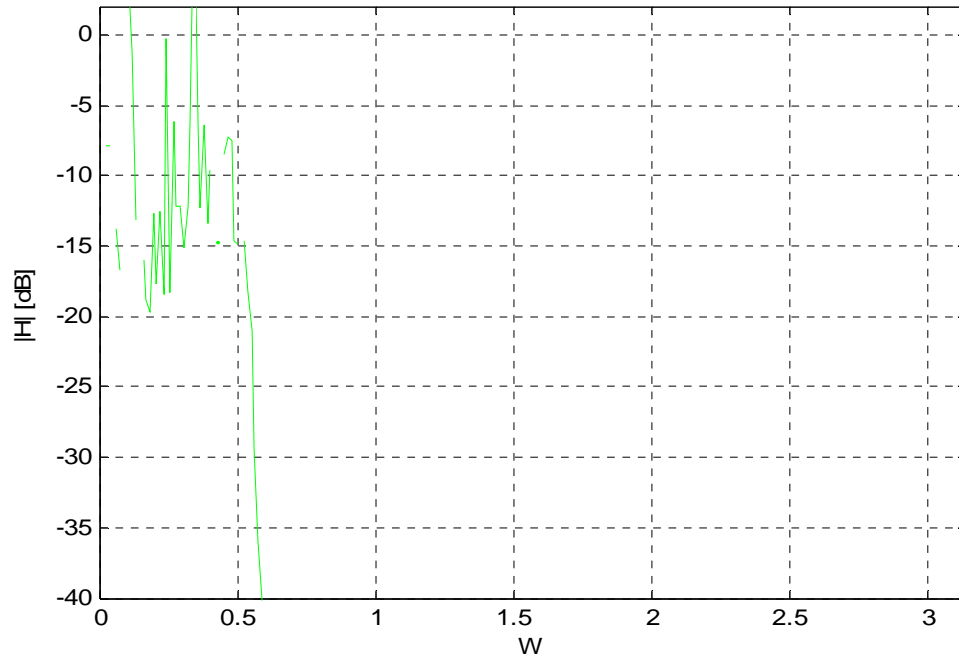


Figure III.20 : Réponse impulsionnelle de la transformation bilinéaire sans prédistorsion

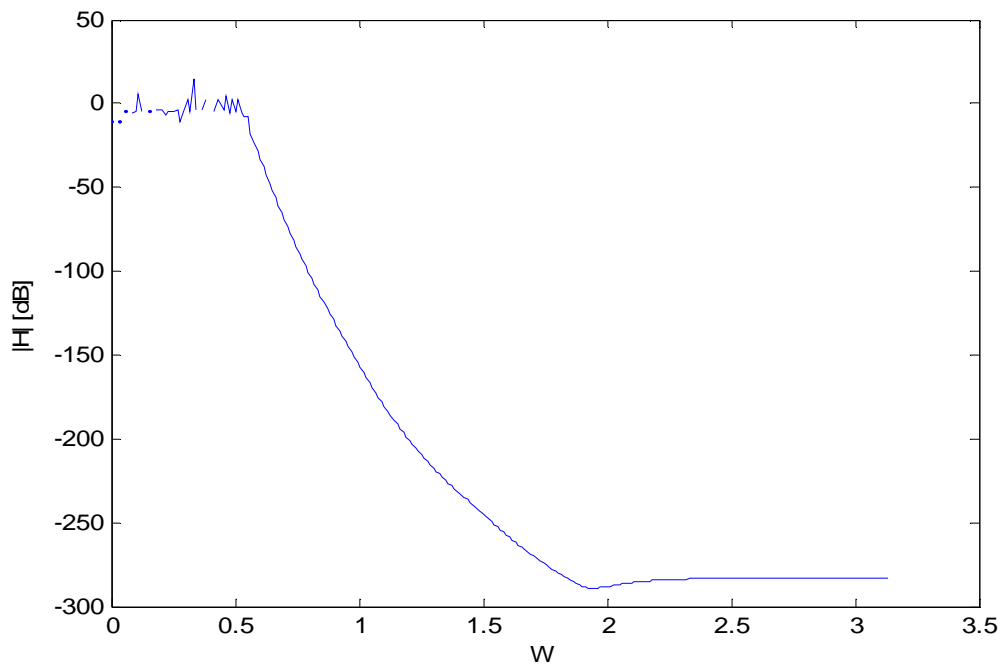


Figure III.21 : Réponse fréquentielle de la transformation bilinéaire avec prédistorsion

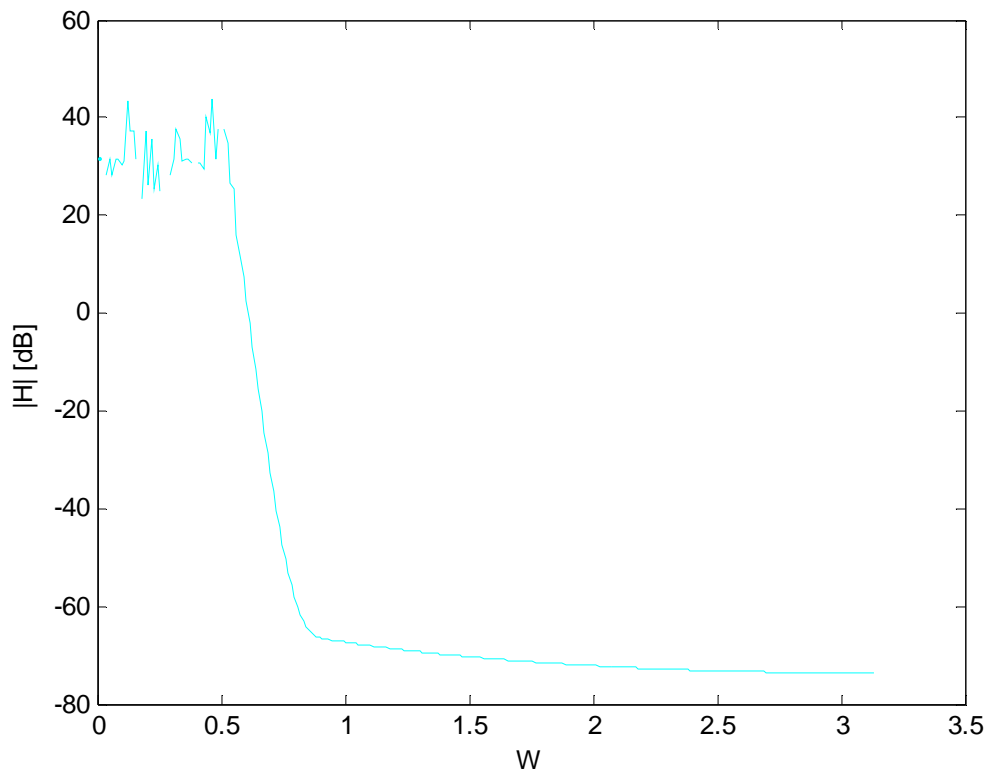


Figure III.22 : Variation de la réponse fréquentielle.

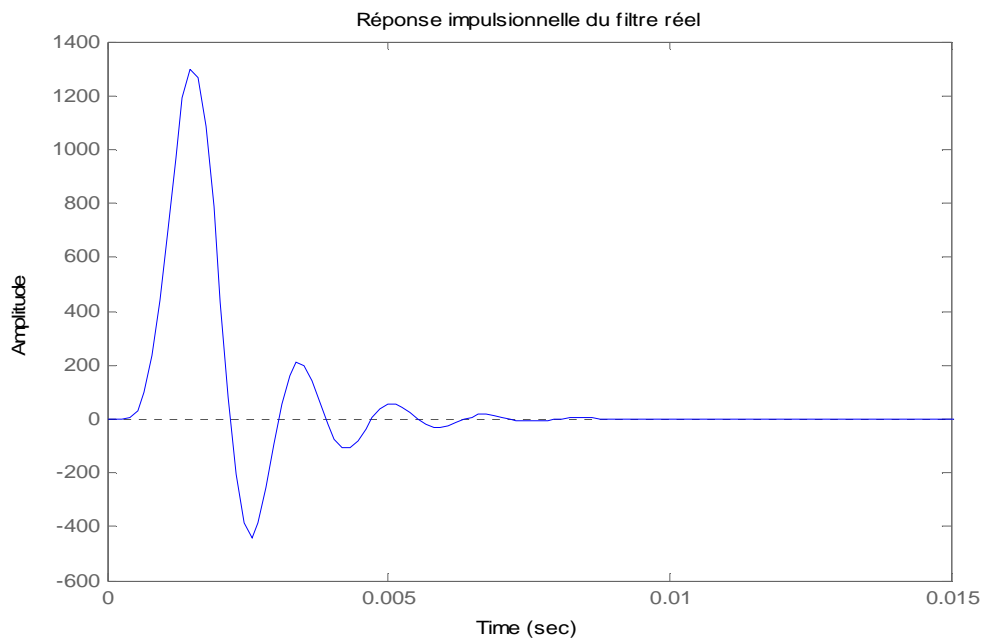


Figure III.23 : Réponse impulsionnelle du filtre réel.

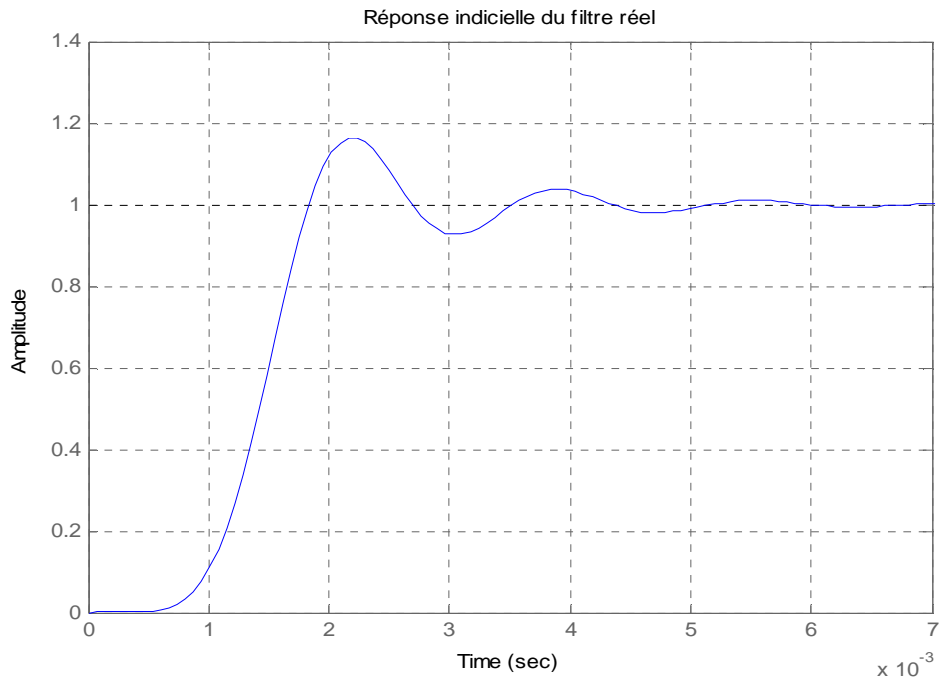


Figure III.24 : Réponse indicielle du filtre réel.

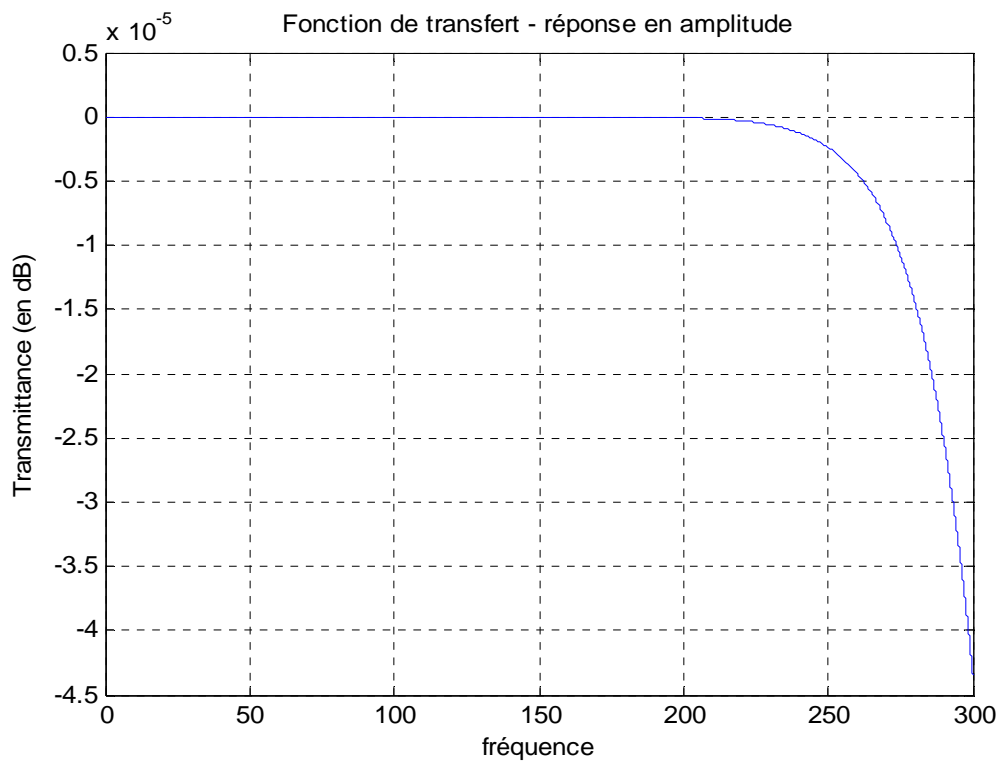


Figure III.25 : Réponse en amplitude de la fonction de transfert.

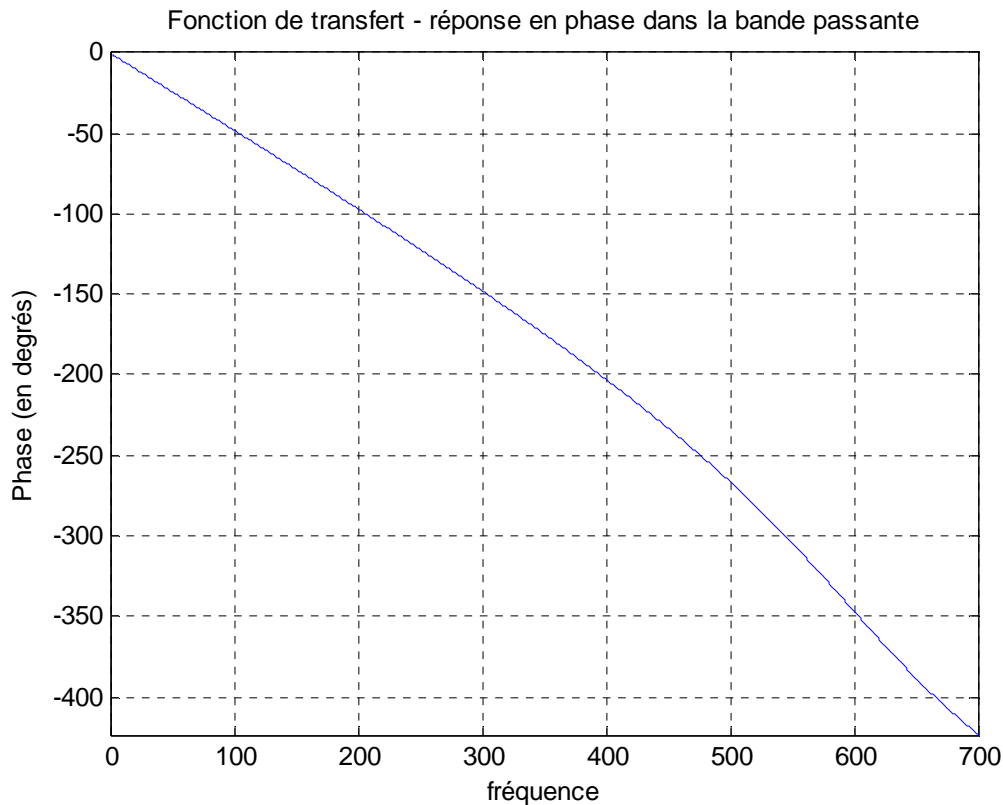


Figure III.26 : Réponse en phase de la fonction de transfert.

Le filtre passe bas de Butterworth présente un spectre bien monotone, sans ondulation. Pour un ordre élevé, la réponse de ce filtre se rapproche de celle d'un passe-bas analogique idéal. Pour le gabarit spécifié, ce filtre reste encore stable. Cependant, nous remarquons que ces pôles sont assez proche du cercle unité ce qui peut présenter un risque d'instabilité.

Pour cette partie de notre travail nous remarquons aussi que :

- Les filtres RII possèdent des pôles et des zéros.
- La réponse impulsionnelle des filtres RII peut être lente si un ou plusieurs pôles sont à proximité du cercle unité, ces pôles sont à l'origine du TPG (temps de propagation de groupe).
- Les filtres RII sont stables si tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité.
- Les filtres RII sont sensibles à la quantification des coefficients et aux erreurs d'arrondi.

- Les filtres RII peuvent être **obtenus par analogie avec les filtres continus**. Les méthodes sont plutôt limitées à la réalisation de filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande et réjecteur.
- La réponse en phase ne peut être linéaire que de manière approchée.
- Le **gain en continu** est donné en faisant $z = 1$ dans la fonction de transfert $H(z)$. Ce gain ne peut être nul pour un filtre passe-bas !
- Le **gain en hautes fréquences** (i.e. à la fréquence de Shannon $1/2T$) est donné en faisant $z = -1$ dans la fonction de transfert $H(z)$. Ce gain ne peut être nul pour un filtre passe-haut !

III.9- Conclusion :

L'objectif de cette manipulation est de synthétiser et de mettre en oeuvre un filtre numérique dans le but d'extraire un signal moyen dans un bruit. Le signal à traiter est un signal basse-fréquence, issu d'un capteur dont le faible rendement ne permet pas d'obtenir un bon rapport signal sur bruit. La fréquence d'échantillonnage est $F_e = 8 \text{ kHz}$. On sait que l'acquisition est fortement perturbée par un bruit de type haute-fréquence.

La synthèse qui correspond à la réalisation d'un système (électrique, électromécanique, Microinformatique, ...) laquelle réalise la fonction de transfert. Diverses approches ont été proposées pour l'approximation du filtre. Les plus modernes font usage de programmes informatiques qui se chargent généralement de la synthèse du filtre, ceci sur un mode itératif. Ces solutions permettent de garantir une synthèse optimale au niveau de l'ordre du filtre et de sa sensibilité face à la dispersion des éléments au face aux imprécisions de calcul. Cette façon de procéder se justifie surtout pour des filtres d'ordre élevé (supérieur à 10 environ). D'autres approches, de type analytique, ont été proposées. Elles sont relativement faciles à mettre en oeuvre face aux méthodes itératives, par contre, pour des ordres élevés, les solutions obtenues sont plus onéreuses et plus sensibles que les filtres obtenus avec les méthodes itératives.

Analyse des filtres numériques

RII

IV.1- Introduction :

La conception, l'analyse et la synthèse d'un filtre commence par la définition de son gabarit. Qui fixe les spécifications et les contraintes de conception à respecter en fonction des signaux à filtrer [24,25].

Du fait que les signaux dans le processus de synthèse et d'analyse sont discrets, leurs réponse en fréquence en bandes de base est périodique et se répète donc autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage.

L'analyse en traitement de signal offre de nombreux avantages, elle permet d'obtenir différentes valeurs très précises sur les systèmes (comme leur forme, taille, ...), d'évaluer et de quantifier les différents types de propriétés.

Pour ce chapitre, nous avons utilisé comme application, les filtres de Chebychev.

IV.2- Définition :

Les filtres récursifs sont décrits par une équation de récurrence de la forme [26] :

$$y_k = \sum_{i=0}^p b_i \cdot x_{k-i} - \sum_{j=1}^q a_j \cdot y_{k-j} \quad (\text{IV.1})$$

Si on applique la transformation en Z à cette équation, on obtient :

$$Y(Z) = \left(\sum_{i=0}^p b_i \cdot Z^{-i} \right) \cdot X(Z) - \left(\sum_{j=1}^q a_j \cdot Z^{-j} \right) \cdot Y(Z) \quad (\text{IV.2})$$

$$\text{Ou} \quad \left(1 + \sum_{j=1}^q a_j \cdot Z^{-j} \right) \cdot Y(Z) = \left(\sum_{i=0}^p b_i \cdot Z^{-i} \right) \cdot X(Z)$$

La fonction transfert d'un filtre récursif a donc la forme générale suivante [23]:

$$H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^p b_i \cdot Z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^q a_j \cdot Z^{-j}} \quad (\text{IV.3})$$

IV.3- Analyse des filtres autorégressifs du second ordre (filtre passe-bas) :

A Partir du chapitre III, l'équation (III.24) multiplié et divisé par (Z^{-2}) , nous pouvons écrire :

$$H(Z) = \frac{0.0986 + (2 * 0.986 * Z^{-1}) + 0.0986 * Z^{-2}}{1 - 1.223 * Z^{-1} + 0.5251 * Z^{-2}} = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \quad (\text{IV.4})$$

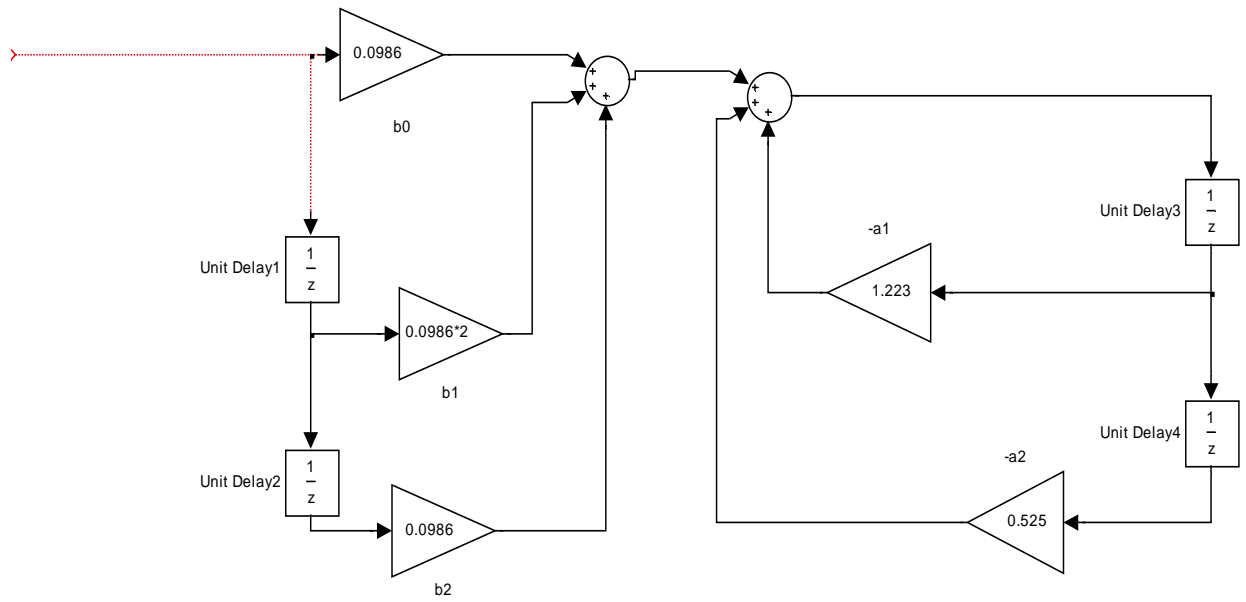


Figure IV.2: Schéma direct I

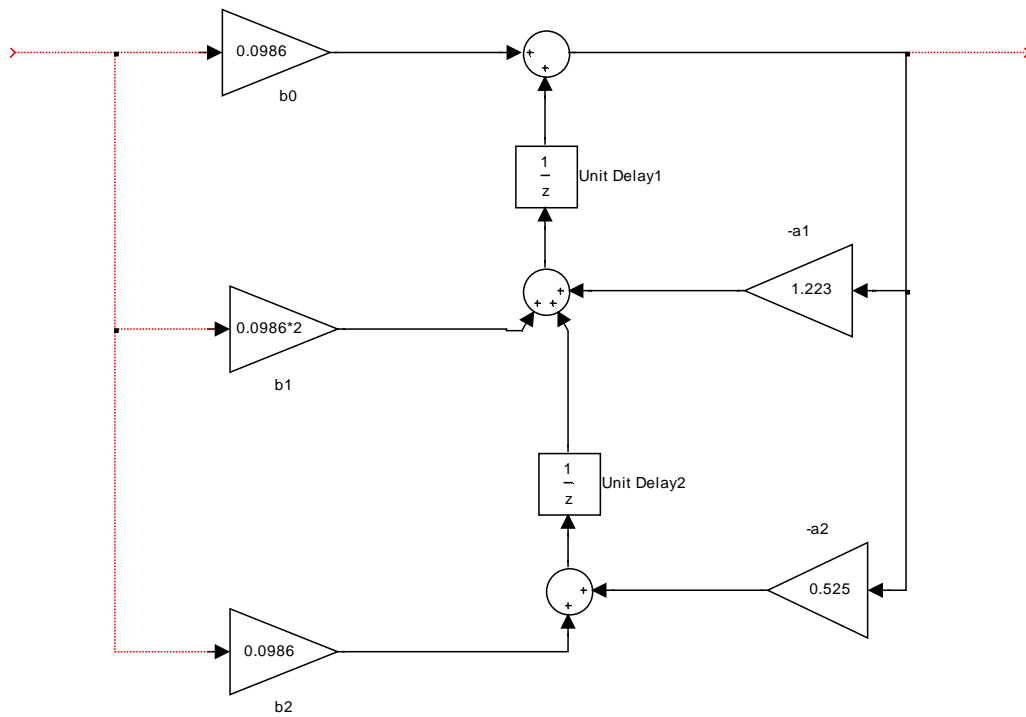


Figure IV.3 : Schéma direct II.

IV.4- Application des techniques d'analyse aux filtres de Chebychev :

Pour un degré fixé, la pente de leur gain à la fréquence de coupure est beaucoup plus grande que celle des filtres de Butterworth. Mais le prix à payer est une ondulation du gain dans la bande passante [23].

IV.4.1- Approximation de Chebyshev :

Nous définissons l'atténuation de filtres de la manière suivante :

$$A^2(w_n) = \frac{1}{|H(w_n)|^2} = 1 + \varepsilon^2 \cdot C_n^2(w_n) \quad (\text{IV.6})$$

$$\text{Avec : } |H(w_n)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot C_n^2(w_n)} ;$$

ε : Constante donnée : Facteur compris entre 0 et 1 ;

C_n : Polynômes de Chebychev.

IV.4.2- Polynômes de Chebychev :

Ce type de polynôme est donné sous la forme générale suivante:

$$C_n(x) = 2 \cdot C_{n-1}(x) - C_{n-2}(x)$$

Avec : $C_0(x) = 1$; $C_1(x) = x$.

Pour $x = w_n$, nous avons :

$$C_0(w_n) = 1 ; \quad C_2(w_n) = 2 \cdot w_n^2 - 1 ;$$

$$C_1(w_n) = w_n ; \quad C_3(w_n) = 4 \cdot w_n^3 - 3 \cdot w_n .$$

IV.4.3- Dimensionnement du filtre de Chebychev :

Cherchons les paramètres du filtre par rapport aux conditions A_{\max} , A_{\min} et ω_r . L'affaiblissement maximal A_{\max} dans la bande passante est atteint lorsque $C_n(w_n) = 1$, c'est-à-dire :

$$10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2) = A_{\max} = \text{delta}_1 = R_p$$

Donc :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1} \quad (\text{IV.8})$$

L'affaiblissement minimal A_{\min} dans la bande bloquante est atteint lorsque $w_n = w_r$. Alors nous avons [17]:

$$10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2 \cdot C_n^2(w_r)) = A_{\min} = \Delta_2 = Ra$$

Où $w_r = \frac{F_p}{F_s}$ est une constante donnée égale au rapport $\frac{W_p}{W_s}$ qui représente la pulsation normée de réjection.

L'ordre N du filtre est choisi selon la condition suivante :

$$N = \text{entier} \geq \frac{\log\left(10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1\right) - 2 \cdot \log(\varepsilon)}{2 \cdot \log(w_r)} \quad (\text{IV.9})$$

IV.4.4- Analyse d'un filtre de Tchebychev de type 1 et 2 :

Pour le même exemple du chapitre III, nous souhaitons réaliser un filtre passe-bas dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$R_p = -1 \text{ dB} ; \quad F_p = 700 \text{ HZ} ;$$

$$R_a = -200 \text{ dB} ; \quad F_s = 300 \text{ HZ} ;$$

A partir de l'équation (III.10), Nous avons calculé l'ordre du filtre de Chebychev et les différentes fréquences (pulsations):

$$N = 17 ;$$

$$W_{n1} = 4.3982 \cdot e^{+003} \text{ rad / s} ;$$

$$W_{n2} = 1.9822 \cdot e^{+003} \text{ rad / s} ;$$

Les variations des différentes caractéristiques de ce type de filtres sont représentées sur les figures (IV.4, IV.5, IV.6 et IV.7).

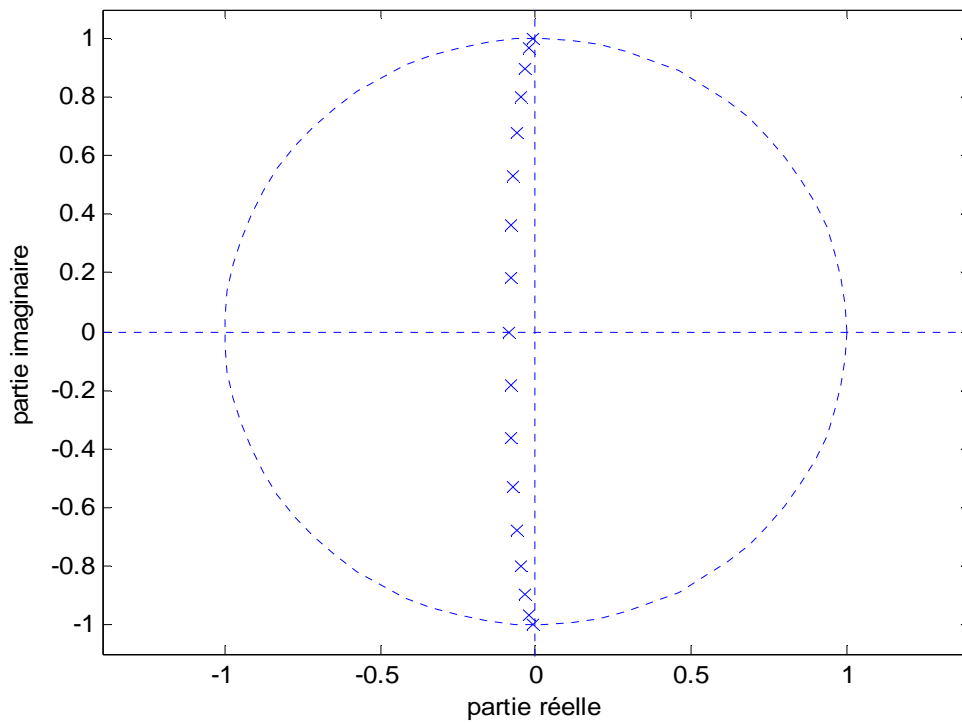


Figure IV.4 : Pôles et zéros de l'approximation de Chebychev d'un passe-bas normalisé.
-Chebychev I-

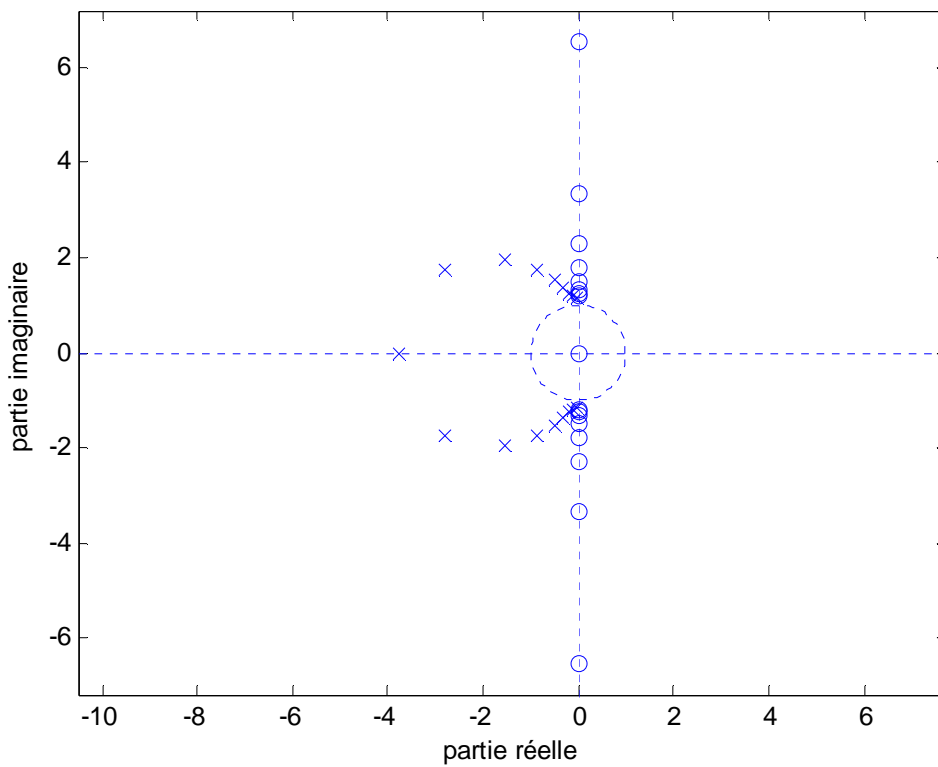


Figure IV.5 : Pôles et zéros de l'approximation de Chebychev d'un passe-bas normalisé.
- Chebychev II-

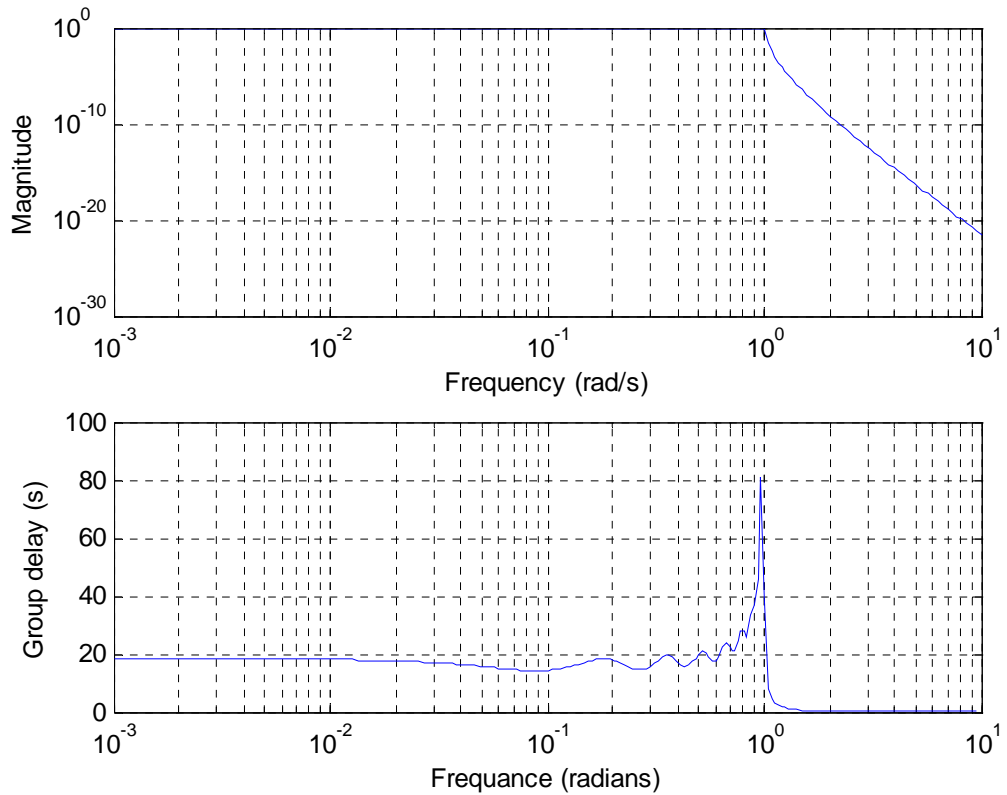


Figure IV.6 : Gain et délai de groupe de l'approximation de Chebychev d'un passe-bas normalisé - Chebychev I -

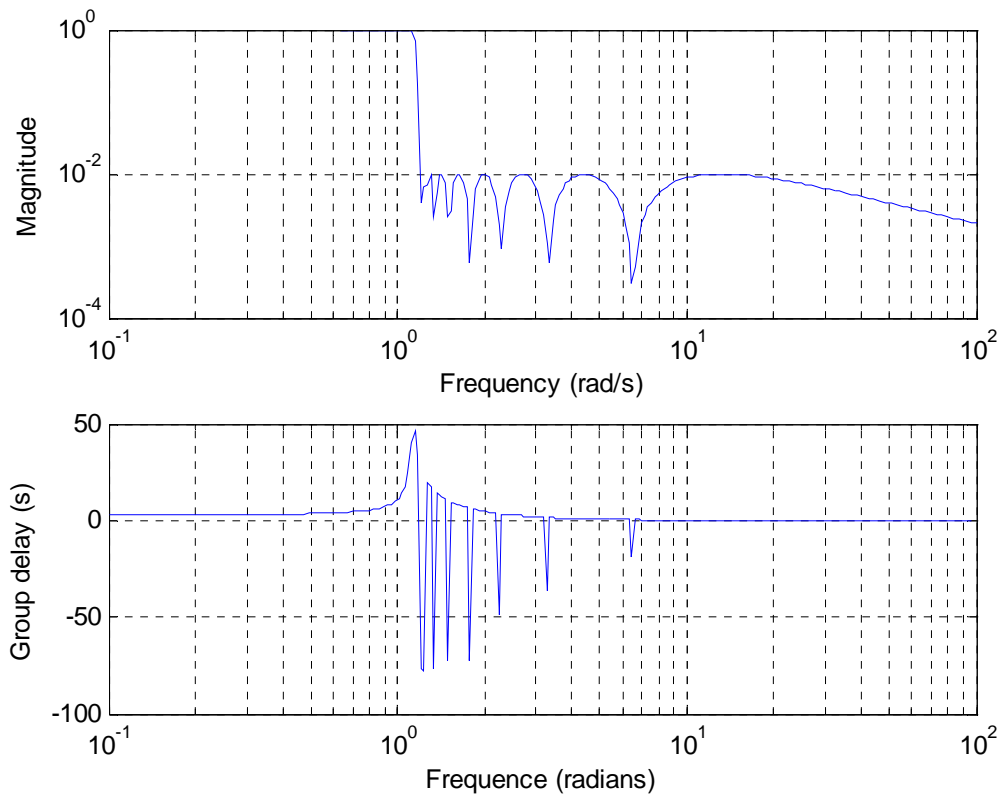


Figure IV.7 : Gain et délai de groupe de l'approximation de Chebychev d'un passe-bas normalisé - Chebychev II -

Nous remarquons bien une ondulation de la courbe de gain dans la bande passante pour Chebychev I, au contraire de Chebychev II. La courbe de délai de groupe de Chebychev I ressemble assez à celle de Butterworth (à spécifications inchangées). Celle de Chebychev II est beaucoup plus plate, si l'on fait abstraction des changements de signe brutaux de la phase dus à la présence de zéros sur l'axe imaginaire. Nous la préférons donc à l'approximation de Chebychev I pour les signaux sensibles à un décalage de phase non linéaire (signaux vidéo, Signaux informatiques). Nous constatons que ce filtre respecte bien le gabarit fixé. Il ne présente presque pas d'ondulation hors bande et pas d'ondulation du tout dans la bande passante. Bien qu'il possède des pôles proches du cercle unité. Sa réponse impulsionnelle nous indique qu'il se stabilise très vite au bout de 0.03 second. Nous remarquons aussi que la phase de ce filtre, est presque linéaire dans la bande passante.

IV.5- Analyse d'un filtre passe-bas à partir de l'équation de récurrence :

Pour cette partie du chapitre, nous avons utilisé une impulsion comme signal d'entrée. Les différentes caractéristiques sont présentées sur les figures (IV.8, IV.9, IV.10, IV.11, IV.12 et IV.13).

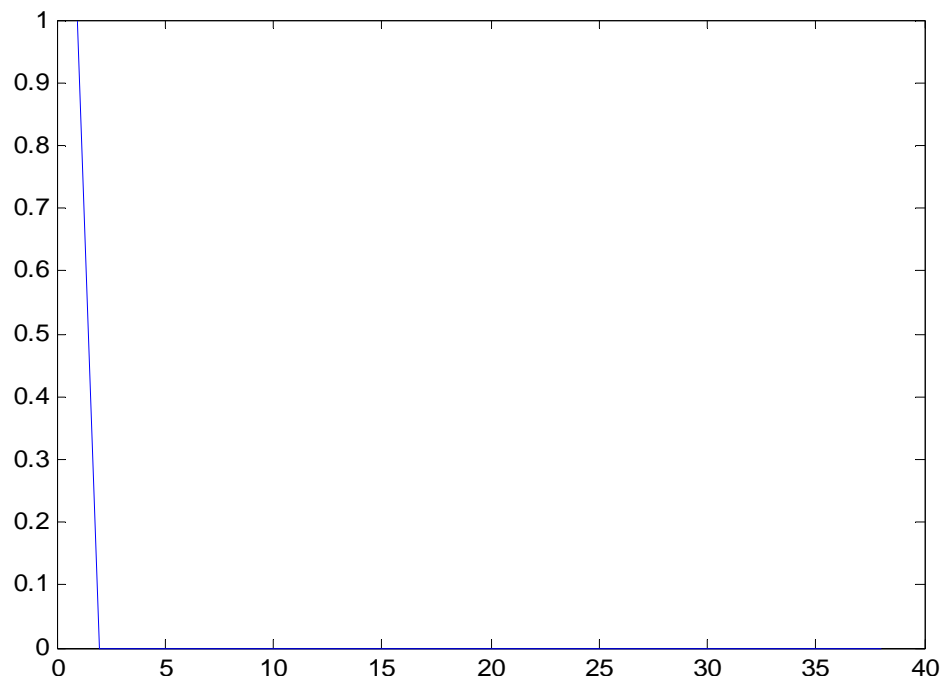


Figure IV.8: Forme du signal d'entrée.

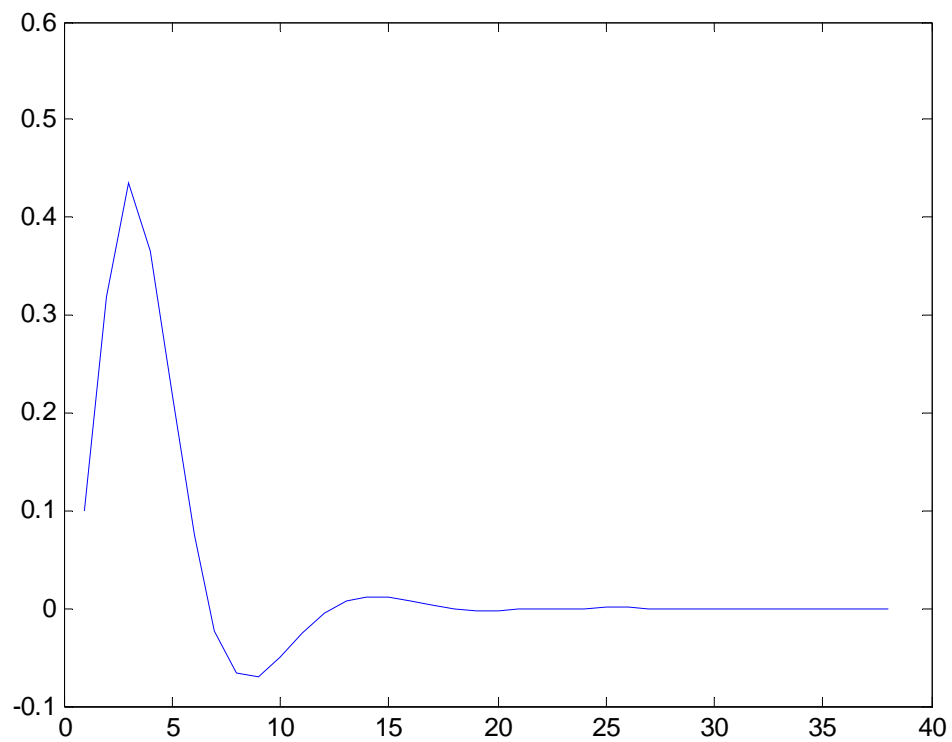


Figure IV.9 : Variation du signal de sortie.

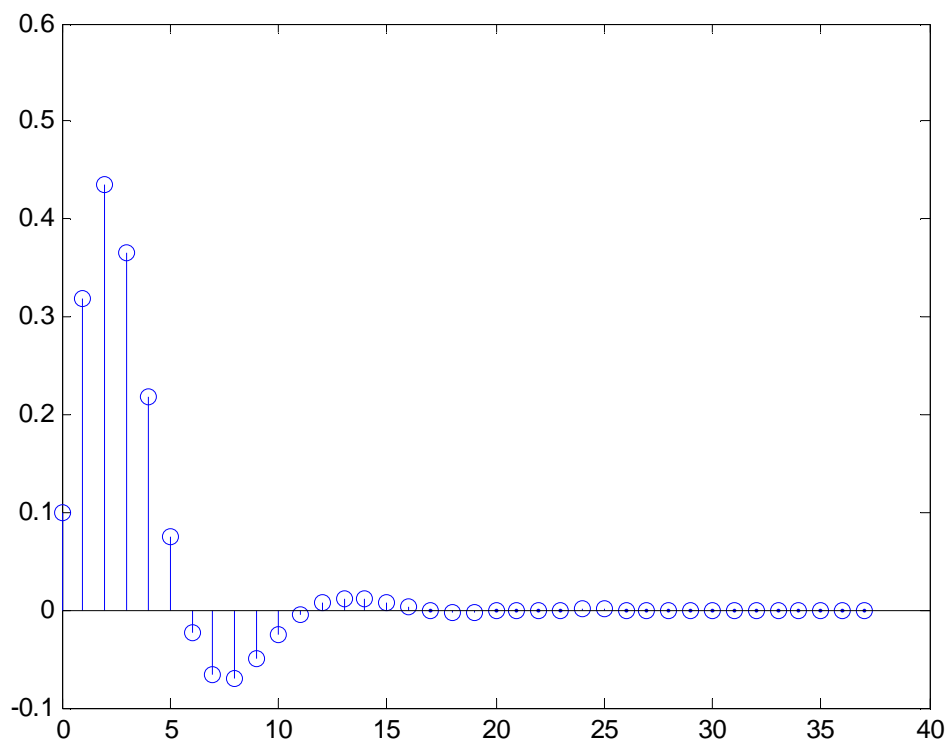


Figure IV.10 : réponse impulsionnelle du filtre pour N=38.

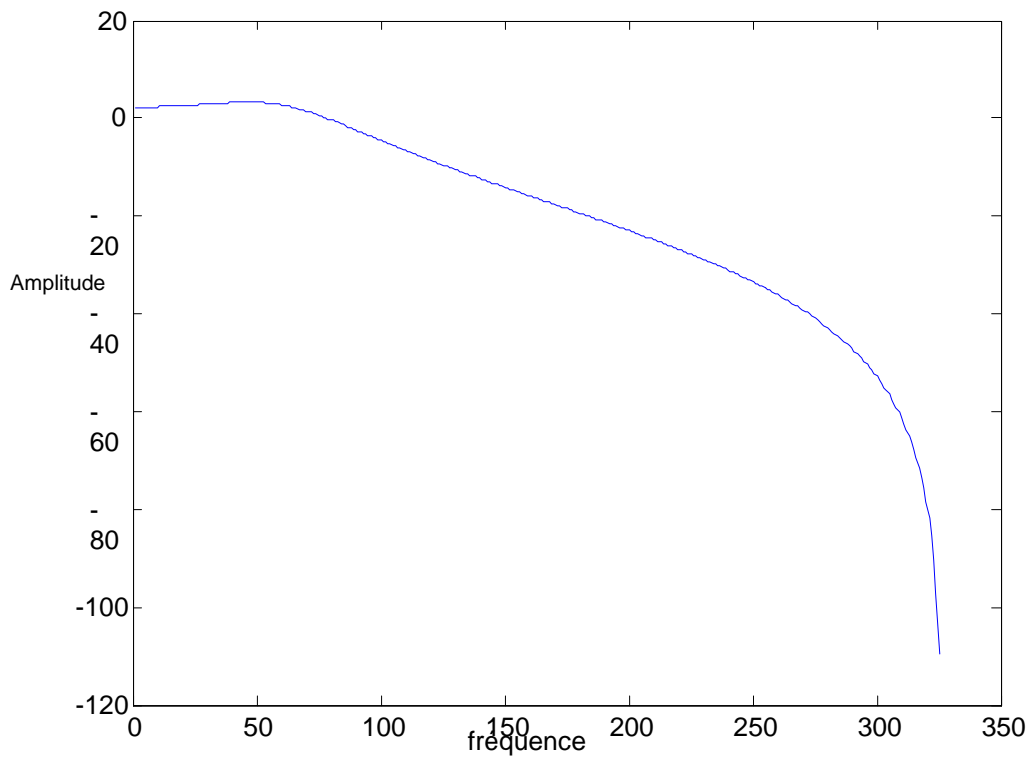


Figure IV.11: Diagramme de Bode pour l'amplitude.

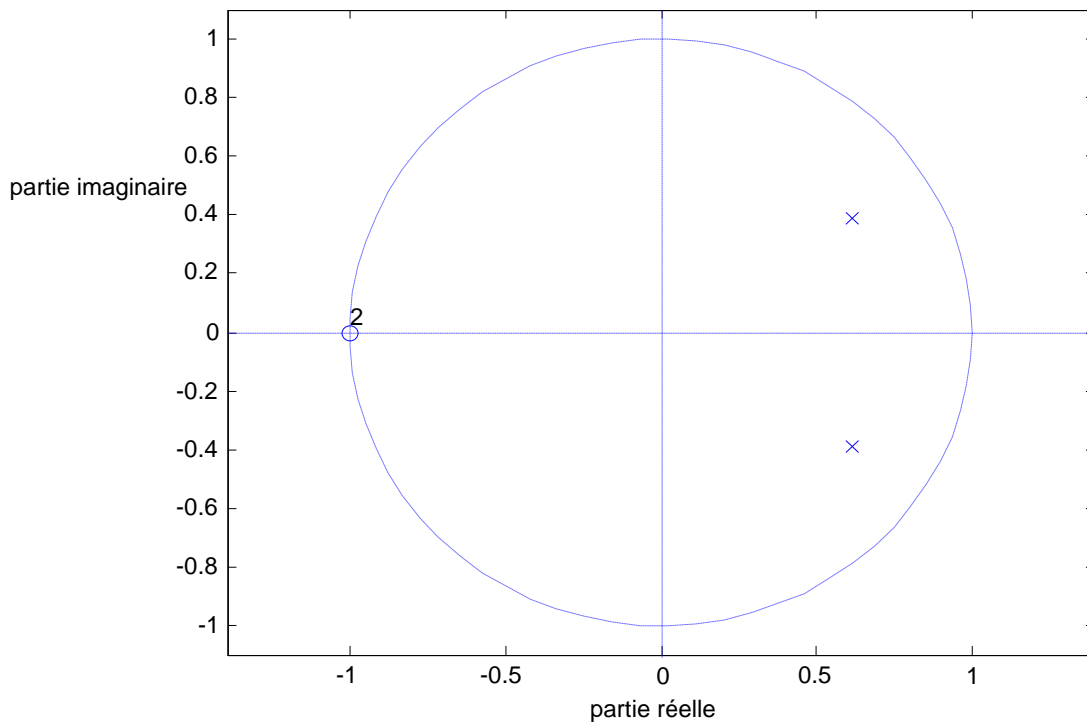


Figure IV.12: Positions des Pôles et des zéros de la fonction du filtre.

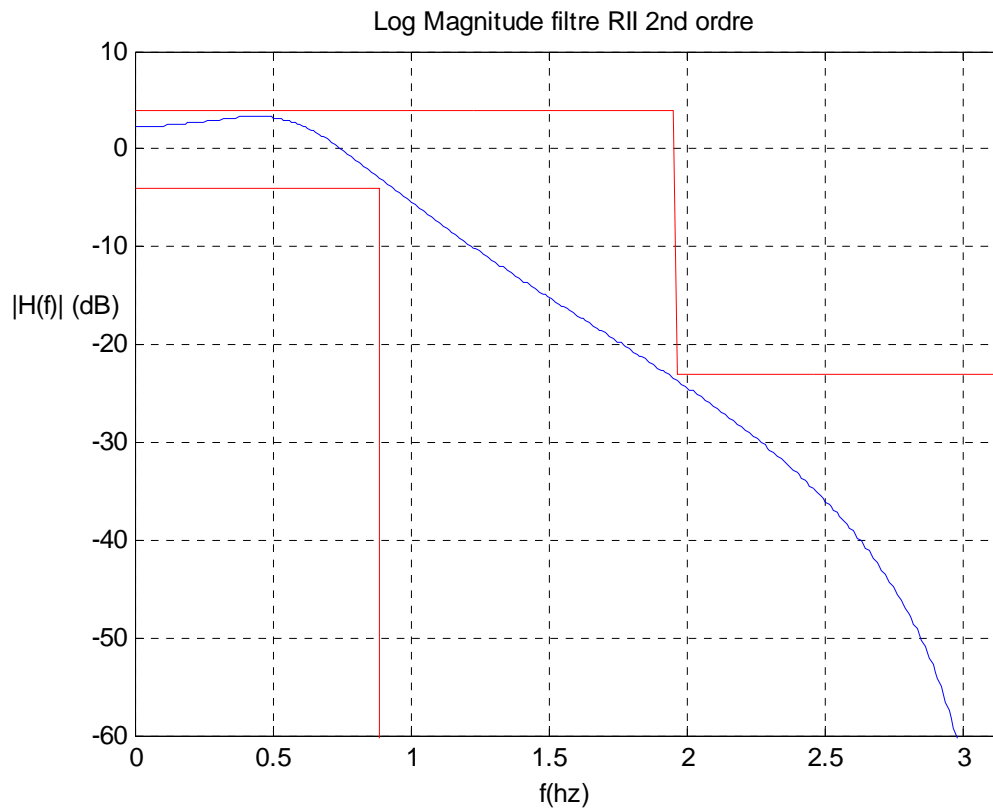


Figure IV.13: Variation de l'amplitude du filtre à l'intérieur du Gabarit prototype.

D'après ces différents résultats de simulation numérique des filtres de Chebychev, nous avons remarqué les points essentiels suivants :

- $|h(w_n)|^2$ oscille n fois entre 1 et $(1 + \varepsilon^2)$ dans la bande passante pour $w_n = 0, \dots, 1$;
- Les ondulations sont constantes ;
- A $w_n = 1$, l'atténuation ne vaut pas forcément -3dB comme pour les filtres de Butterworth ;
- Les filtres de Chebychev ont une coupure plus rapide que les filtres de Butterworth, mais ils ondulent dans la bande passante ;
- Leurs phase est moins linéaire que les filtres de Butterworth dans la bande passante, et donc que les signaux sont plus déformés avec ces filtres qu'avec les filtres de Butterworth.

IV.6- Autre technique pour améliorer l'analyse des filtres RII :

Dans le domaine du traitement du signal, et surtout dans la partie du traitement d'image, nous avons plusieurs techniques pour améliorer la qualité de la résolution des phénomènes réels [27].

IV.6.1- La quantification :

En traitement du signal, la quantification est le procédé qui permet d'approximer un signal continu (ou à valeurs dans un ensemble discret de grande taille) par des valeurs d'un ensemble discret d'assez petite taille. L'application la plus courante de la quantification est la conversion analogique-numérique mais elle doit le développement de sa théorie aux problèmes de quantification pour la compression de signaux audio ou image.

La quantification est l'opération qui discrétise les amplitudes du signal d'entrée. Elle amène à définir pratiquement une amplitude élémentaire, ou pas de quantification q , dont les différentes amplitudes discrètes sont des multiples entiers. La valeur de q définit la résolution de l'opération de quantification (borne inférieure des amplitudes quantifiées) [21].

IV.6.1- transformée de Fourier rapide(FFT) :

La FFT, ou transformée de Fourier rapide, est l'un des quelques algorithmes dont la publication a provoqué une véritable révolution dans le champ technique. Généralement, on désire voir différents effets de la TFD en termes de précision d'analyse et de résolution fréquentielle. Un algorithme de transformée de Fourier rapide est réalisé par la fonction **fft**. Cet algorithme est particulièrement rapide lorsque la taille des signaux analysés est une puissance de 2 (64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ...). On prendra donc soin de travailler sur des signaux dont la longueur est une puissance de 2.

IV.7- Conclusion :

Les filtres numériques représentent une grande souplesse au niveau de la manipulation des paramètres caractérisant les filtres. Ils sont de plus en plus utilisés dans les domaines de la reconnaissance de parole, dans la compression du son, ainsi dans la récupération des trames effacées en diffusion audio sur Internet. Des recherches se font actuellement pour la réduction du temps de calcul de ses filtres en se basant sur la physique des composants pour mettre au point des dispositifs ultrarapides. Cela concerne le hardware. Pour le software, les travaux sont poussés vers l'amélioration des algorithmes d'une complexité de plus en plus faible afin

de diminuer le temps de calcul.

Les filtres numériques présentent par rapport aux filtres analogiques [28,29] les avantages et les inconvénients suivants :

*** Avantages :**

- Les filtres numériques sont insensibles aux conditions extérieures (chaleur, humidité, etc.)
- Certains filtres numériques sont impossibles, très difficiles ou très chères à réaliser de manière analogique (exemple: les filtres FIR).
- Les filtres numériques ne sont pas sensibles aux non idéalités d'un amplificateur opérationnel. Ainsi, un filtre RII du 10ème ordre est tout à fait envisageable.
- La problématique du bruit change d'aspect: dans le filtrage numérique on parle de 'bruit de quantification' et de 'bruit de calcul'. Le premier est lié au nombre de bits employés pour la quantification (8 bits, 16 bits, etc.). Le second est négligeable si l'unité de calcul est de type 'floating point'. De toute manière, le bruit numérique est localisé: on sait d'où il vient et il reste stable.

*** Inconvénients :**

- Les filtres numériques nécessitent un filtrage analogique anti-repliement à l'échantillonnage et à la restitution.
- Les performances d'un filtre sont directement proportionnelles à la puissance de l'unité de calcul (processeur ou DSP).
- Beaucoup de problèmes peuvent apparaître si l'unité de calcul est de type 'fixed point'. Les paramètres d'un filtre nécessitent parfois une double précision pour être opérationnels, ce qui ralentit les performances.

Nous constatons après cette étude, que la meilleure manière de caractériser un filtre est d'identifier sa réponse impulsionnelle dans le domaine temporel ou bien son gain complexe dans le domaine fréquentiel.

Conclusion

générale

Le traitement des signaux et des images a connu ces dernières années un développement important tant sur le plan théorique que sur le plan des applications. Les télécommunications et les domaines connexes tels qu'image et parole constituent un réservoir inépuisable de sujets de recherche et de développement.

Nous pouvons citer comme domaines d'application l'émission et la réception des signaux de communication sur câbles électriques, sur fibres optiques ou par ondes hertziennes, l'analyse, la synthèse et la compréhension du signal vocal ou des signaux musicaux, l'analyse des signaux biomédicaux (électrocardiogramme, électroencéphalogramme, ...), des signaux sonar en acoustique sous-marine. Un autre domaine important est celui des signaux radar où le signal émis est déformé par une cible ou un obstacle avant d'être mesuré par le capteur. C'est la déformation du signal par l'obstacle qui donnera une information utile sur cet obstacle. Dans certains domaines d'applications, il est nécessaire de disposer de plusieurs capteurs, dont la géométrie constitue une antenne (sons stéréophoniques, localisation de sources de bruits, mesure de signaux en géophysique ou en sismique). Dans d'autres applications, nous avons d'autres variables que le temps, comme en traitement d'images photographiées par satellites, les images mesurées en radiologie (scanner, résonance magnétique nucléaire, ...).

Le filtrage numérique est couramment utilisé dans les systèmes temps réels embarqués (par exemple dans l'automobile, l'aéronautique ou l'aérospatiale). Il permet de modéliser au niveau logiciel des comportements (comme la recherche d'équilibre) qui étaient autrefois assurés par des filtres mécaniques (hydrauliques par exemple), puis par des filtres analogiques. Cependant, la modélisation de ces filtres au niveau logiciel peut poser des problèmes, comme par exemple la stabilité du flux de sortie en présence d'arrondis. Notre but est alors de prouver l'absence d'erreurs à l'exécution (essentiellement des débordements de nombres à virgule flottante) dans un programme comprenant du filtrage numérique.

Nous utilisons l'interprétation abstraite pour construire des domaines adaptés au filtrage. Nous pouvons ainsi raffiner des analyses existantes pour tenir compte de ces filtres. Nous associons à chaque famille de filtres, un domaine abstrait. Ce domaine est essentiellement une boîte noire, qui associe à l'approximation du flux d'entrée du filtre une approximation du flux de sortie. Le domaine se charge alors de repérer toutes les instances des filtres de cette

famille, et d'utiliser les contraintes que l'analyseur découvre sur les entrées, pour inférer les contraintes sur les sorties de ces filtres.

En pratique, nous ne connaissons pas la nature du système observé, nous sommes juste en mesure de produire la sortie correspondant à une entrée donnée. Toutefois, nous allons ici nous placer dans la phase dite de « simulation », c'est –à-dire dans la phase de validation de l'algorithme : Nous choisissons un filtre dont on connaît la réponse impulsionnelle ainsi que le gain complexe, nous sommes alors en mesure de créer à partir d'une entrée, la sortie correspondante, de ce fait on va estimer le gain complexe du filtre en appliquant l'algorithme.

Dans ce travail notre intérêt s'est porté sur l'étude des filtres numériques à impulsion infinie, ainsi que leurs applications en commande électrique des systèmes non linéaires. Nous avons utilisé différentes techniques de simulation sous Matlab, pour calculer les différents paramètres du filtre numérique et nous avons établi une comparaison de leurs performances au moyen des méthodes de synthèse.

Lors de cette étude nous avons appliquée les méthodes de synthèse pour des filtres RII de Butterworth. Pour obtenir un bon filtre il faut pouvoir réduire les bandes de transition et augmenter l'atténuation en bandes d'affaiblissement simultanément

Une fois la synthèse effectuée en précision infinie, nous avons procédé à une analyse. Nous avons choisi les filtres de Chebychev comme application numérique.

Et comme perspective, il est mieux de compléter cette étude par des travaux expérimentaux et de comparer des résultats pour valider notre modèle.

Annexe

A.1- Introduction

La transformation de Laplace est très utilisée par les ingénieurs pour résoudre les équations différentielles et déterminer la fonction de transfert d'un système linéaire. Par exemple, en électronique, contrairement à la décomposition de Fourier, davantage utilisée par les universitaires et qui est utilisée pour la détermination du spectre d'un signal périodique ou même quelconque, elle tient compte de l'existence d'un régime transitoire précédant le régime permanent (exemple : la prise en compte de l'allure du signal avant et après la mise en marche d'un générateur de fréquence) [5].

Il suffit en effet de transposer l'équation différentielle dans le domaine de Laplace pour obtenir une équation beaucoup plus simple à manipuler.

Par exemple, lors de l'étude d'une machine à courant continu : dans le domaine temporel devient :

$$e(t) = R \cdot i(p) + L \frac{di(t)}{dt} \quad [\text{A.1}]$$

Dans le domaine de Laplace devient :

$$E(p) = R \cdot I(p) + p \cdot L \cdot I(p) \quad [\text{A.2}]$$

Ceci n'est valable dans ce cas que si les conditions initiales du signal $i(t)$ sont nulles.

En mathématiques et en particulier en analyse fonctionnelle, la transformée de Laplace d'une fonction f définie pour tout nombre réel $p \geq 0$ est la fonction F définie par :

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \quad [\text{A.3}]$$

A.2- Inversion de la transformée de Laplace

L'inversion de la transformation de Laplace s'effectue à l'aide d'une intégrale dans le plan complexe. Pour t positif, elle est donnée par la relation suivant :

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) \cdot e^{pt} \cdot dp \quad [\text{A.4}]$$

Où γ est choisi pour que l'intégrale soit convergente, ce qui implique que γ soit supérieur à la partie réelle de toute singularité de $F(p)$.

A.3- Quelques transformées usuelles

La transformée de Laplace n'est valide que pour des t supérieurs à 0^- c'est pour cela que toutes les fonctions qui suivent dans cette table (tableau A.1), sont multiples ou composées de $u(t)$ (fonction échelon unité) [17].

	Fonction	Domaine temporel $x(t) = L^{-1}\{X(p)\}$	Transformée de Laplace $X(p) = L\{x(t)\}$	Région de convergence
1	délai idéal	$\delta(t - \tau)$	$e^{-\tau p}$	
1-a	impulsion unité	$\delta(t)$	1	$\forall p$
2	retard à la nième puissance avec décalage fréquentiel	$\frac{(t - \tau)^n}{n!} e^{-\alpha(t - \tau)} \cdot u(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau p}}{(p + \alpha)^{n+1}}$	$\text{Re}(p) > 0$
2-a	Puissance nième	$\frac{t^n}{n!} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	$\text{Re}(p) > 0$
2-a.1	puissance qième	$\frac{t^q}{\Gamma(q + 1)} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^{q+1}}$	$\text{Re}(p) > 0$
2-a.2	échelon unité	$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\text{Re}(p) > 0$
2-b	échelon retardé	$u(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau p}}{p}$	$\text{Re}(p) > 0$
2-c	rampe	$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\text{Re}(p) > 0$

2-d	retard avec décalage fréquentiel	$\frac{t^n}{n!} \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(p + \alpha)^{n+1}}$	$\text{Re}(p) > -\alpha$
2-d.1	décroissance exponentielle	$e^{-\alpha t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p + \alpha}$	$\text{Re}(p) > -\alpha$
3	approche exponentielle	$(1 - e^{-\alpha t}) \cdot u(t)$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$	$\text{Re}(p) > 0$
4	sinus	$\sin(w t) \cdot u(t)$	$\frac{w}{p^2 + w^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
5	cosinus	$\cos(w t) \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2 + w^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
6	sinus hyperbolique	$\sinh(\alpha t) \cdot u(t)$	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$	$\text{Re}(p) > \alpha $
7	cosinus hyperbolique	$\cosh(\alpha t) \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$	$\text{Re}(p) > \alpha $
8	Décroissance exponentielle d'une onde	$e^{-\alpha t} \cdot \sin(w t) \cdot u(t)$	$\frac{w}{(p + \alpha)^2 + w^2}$	$\text{Re}(p) > -\alpha$
9	Décroissance exponentielle d'une onde cosinusoidale	$e^{-\alpha t} \cdot \cos(w t) \cdot u(t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + w^2}$	$\text{Re}(p) > -\alpha$
10	nième racine	$\sqrt[n]{t} \cdot u(t)$	$p^{-(n+1)/n} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$\text{Re}(p) > 0$
11	logarithme	$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \cdot u(t)$	$-\frac{t_0}{p} [\ln(t_0 p) + \gamma]$	$\text{Re}(p) > 0$

12	Fonction de Bessel du premier type d'ordre n	$J_n(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega^n (p + \sqrt{p^2 + \omega^2})^{-n}}{\sqrt{p^2 + \omega^2}}$	$\text{Re}(p) > 0$ ($n > -1$)
13	Fonction de Bessel modifiée du premier type d'ordre n	$I_n(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega^n (p + \sqrt{p^2 - \omega^2})^{-n}}{\sqrt{p^2 - \omega^2}}$	$\text{Re}(p) > \omega $
14	Fonction d'erreur	$\text{erf}(t) \cdot u(t)$	$\frac{e^{p^2/4} \text{erfc}(p/2)}{p}$	$\text{Re}(p) > 0$

Tableaux A.1: les transformées de Laplace

Avec :

- $u(t)$ représente la fonction de Heaviside.
- $\delta(t)$ représente la Fonction de Dirac.
- $\Gamma(t)$ est la Fonction gamma.
- Γ est la constante d'Euler-Mascheroni.
- t est un nombre réel, il représente typiquement le temps, mais peut désigner n'importe quelle autre quantité.
- P est un nombre complexe.
- α, β, τ , et ω sont des nombres réels.
- n est un entier.

B.1- Introduction

Dans cette partie on décrit la manière d'obtenir une représentation discrète du monde continu, et on tente d'expliquer la correspondance entre les représentations discrètes et continues, leurs équivalences approximatives et conditionnelle (problèmes de bruit généré, pertes d'information) [7].

B.2- Passage du monde continu au monde discret

Comme décrit dans l'introduction, l'opération de discrétisation est double, dans le temps, et en amplitude. La discrétisation du temps va d'abord être décrite, nous aborderons ensuite celle des amplitudes.

B.3- Ecriture de l'opération d'échantillonnage

Soit un signal continu $s(t)$. L'échantillonnage revient à prendre des valeurs de ce signal, mais uniquement à des instants discrets : $t_k = k.T_e$ (fig. B.1). Ces instants étant définis par une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$, ou encore un pas d'échantillonnage T_e (Fig. B.2) :

$$S^*(t) = s(t) \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT_e) = \{s_K\}_{K \in \mathbb{Z}} \quad [\text{B.1}]$$

$\delta(t)$ est appelée impulsion (ou distribution) de Dirac. Sa répétition à des intervalles réguliers est appelée peigne de Dirac (ou encore "Cha"), elle est notée [10]:

$$\sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT_e) = \psi_{T_e}(t) \quad [\text{B.2}]$$

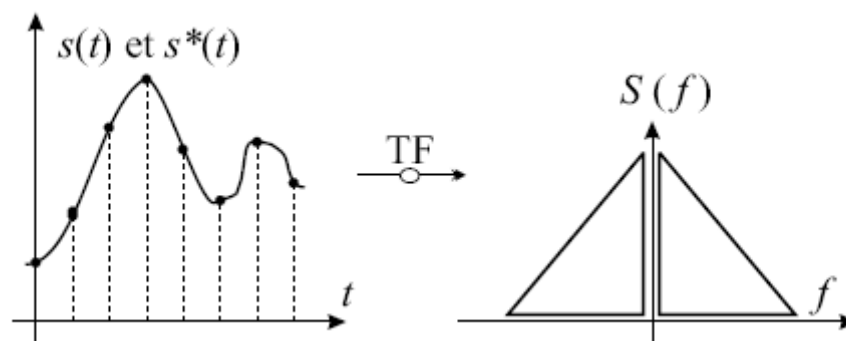


Fig. B. 1: Signal temporel et son spectre.

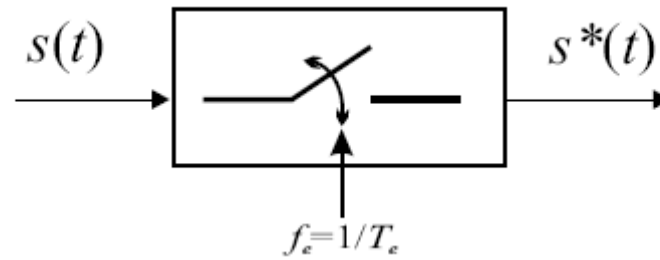


Fig. B.2 : Schéma bloc de l'échantillonneur.

L'échantillonnage transforme le signal de départ continu dans le temps, en un signal discret dans le temps. Le théorème d'échantillonnage a pour objet la résolution de ce problème, en raisonnant dans le domaine spectral. Si nous pouvons à partir de la transformation sur $S^*(f) = TF[s^*(t)]$ de retrouver le spectre de départ $S(f) = TF[s(t)]$. Il y a donc conservation de l'information de départ.

B.4-Théorème d'échantillonnage:

Il s'agit d'exprimer $S^*(f)$ en fonction de $S(f)$. Nous avons les cas suivants :

. Premier cas :

$$s^*(t) = s(t) \cdot \Psi_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) \quad [\text{B.3}]$$

$$S^*(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k TF[\delta(t - kT_e)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \cdot e^{-2j\pi kT_e f} \quad [\text{B.4}]$$

La dernière égalité indique que $S^*(f)$ est une fonction périodique de f , de périodicité $f_e = 1/T_e$, et on reconnaît dans cette écriture un développement en série de Fourier dont les coefficients sont explicitement $s(kT_e) = s_k$, les échantillonnages dans le temps de $s(t)$.

Ceci permettrait d'écrire (fig.B.3):

$$s_k = s(kT_e) = T_e \int_{-f_e/2}^{f_e/2} S^*(f) \cdot \exp[2j\pi k f / f_e] \cdot df \quad [\text{B.5}]$$

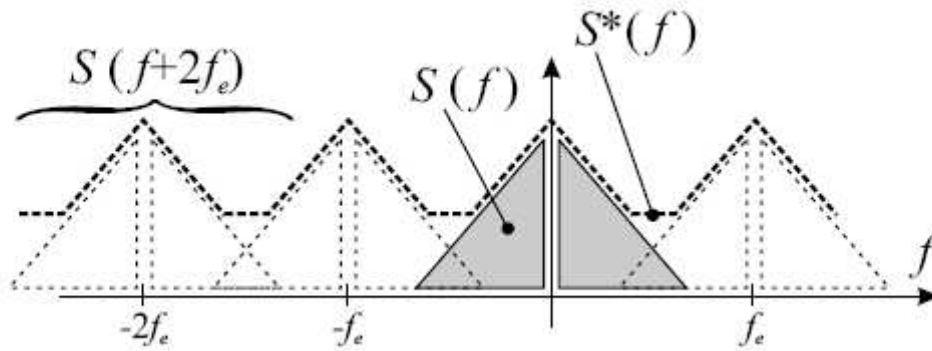


Fig. B.3 : Spectre périodisé du signal échantillonné avec repliement des spectres voisins dédoublés

. Deuxième cas:

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac possède une propriété particulière. Puisqu'on obtient encore un peigne de Dirac :

$$TF[\Psi_{T_e}(t)] = \frac{1}{T_e} \Psi_{f_e}(f) \quad [\text{B.6}]$$

Cette propriété peut être justifiée intuitivement en traduisant la périodicité du peigne, c'est-à-dire qu'il possède un développement en série de Fourier. En calculant les coefficients p_l de Fourier de la série, nous trouvons qu'ils sont tous égaux à $1/T_e$, et on obtient l'identité de Poisson, à partir de laquelle on trouve aisément la TF d'un peigne.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2j\pi kt/T_e} = \Psi_{T_e}(t) \quad [\text{B.7}]$$

En utilisant le résultat sur la TF d'un peigne, on obtient une autre expression du spectre de $s^*(t)$:

$$\begin{aligned} TF[s^*(t)] &= TF[s(t)] * TF[\Psi_{T_e}(t)] \\ &= \frac{1}{T_e} [S(f) * \Psi_{f_e}(f)] \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [S(f) * \delta(f - kf_e)] \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kf_e) \end{aligned} \quad [\text{B.8}]$$

La dernière égalité permet de définir les conditions dans lesquelles le signal échantillonné contient l'information du signal de départ. En effet, on voit que dans la bande $[-f_e/2; f_e/2]$, $S^*(f)$ est le spectre de départ $S(f)$, auquel on ajoute la réponse du même spectre dans les bandes de fréquence décalées de $k f_e$, $[-f_e/2 + k f_e; f_e/2 + k f_e]$, pour tous les entiers k .

- Théorème d'échantillonnage

Si un signal $s(t)$ est échantillonné dans les conditions suivantes:

- Le spectre $S(f)$ de $s(t)$ est à support borné, c'est-à-dire que $S(f)=0$ si $f > f_{\max}$,
- La fréquence d'échantillonnage est choisie telle que $f_e/2 > f_{\max}$.

Alors les échantillons $\{s_k = s(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ contiennent toute l'information initiale de $s(t)$.

Dans ces conditions, les contributions à $S^*(f)$ des bandes décalées de $S(f)$ sont nulles, on dit qu'il n'y a pas de repliement (aliasing en anglais), et le motif périodique de $S^*(f)$ correspond exactement au spectre borné de $S(f)$ (fig. B.4) [16].

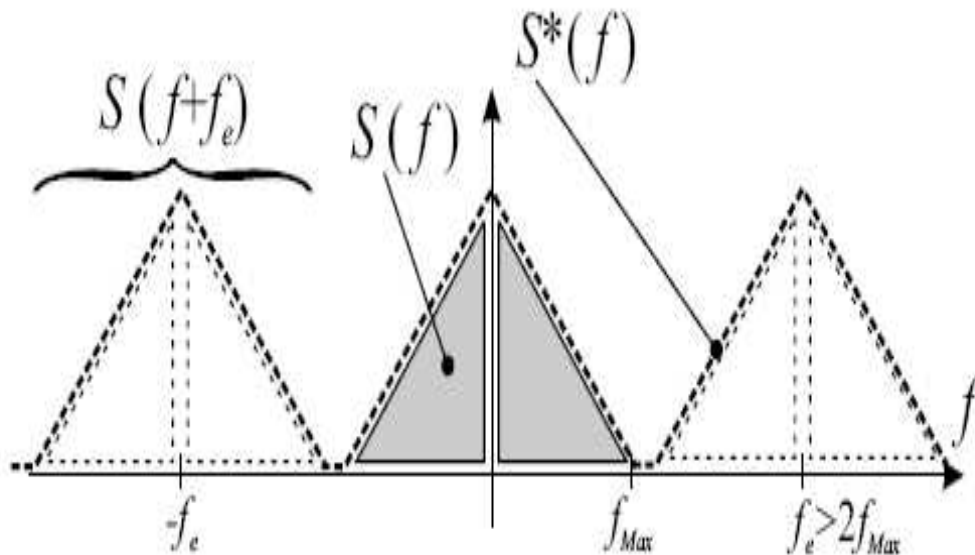


Fig. B.4: Spectre du signal échantillonné sans repliement

B.5- Commentaires:

Restitution à partir des échantillons pour réobtenir $S(f)$ à partir de $S^*(f)$, il suffit d'effectuer un filtrage d'une des bandes $[-f_e/2 + kf_e; f_e/2 + kf_e]$ pour $k=0$, cela correspond :

$$\begin{aligned}
 s(t) &= TF^{-1} \left[S^*(f) \cdot \text{rect}_{f_e/2}(f) \right] \\
 &= s^*(t) * TF^{-1} \left[\text{rect}_{f_e/2}(f) \right] \\
 &= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \cdot \delta(t - kT_e) \right] * \left[\frac{1}{T_e} \text{sinc}(\pi t / T_e) \right] \quad \text{[B.9]} \\
 &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \left[\delta(t - kT_e) \right] * \left[\text{sinc}(\pi t / T_e) \right] \\
 &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \text{sinc} \left[\pi(t - kT_e) / T_e \right]
 \end{aligned}$$

Cette écriture fait penser à un développement en série de Fourier, mais au lieu d'utiliser les fonctions $\exp \left[2 \cdot j \cdot K \cdot t / T_e \right]$ comme dans le cas des $s(t)$ périodiques, nous trouvons les fonctions $\text{sinc} \left[\pi \cdot (t - kT_e) / T_e \right]$ (et $s(t)$ n'est pas périodique !, mais son spectre doit être à support borné). Ces dernières fonctions constituent ainsi une base pour le développement en une série de $\{s(t)\}$, ensemble des fonctions dont le spectre est à support borné. On vérifie aisément que le développement est valide aux instants d'échantillonnage ($s(t) = kT_e = s_k$). Pour les autres instants, il faut y croire, ou les vérifier numériquement sur un exemple. Cette opération de restitution où le signal d'origine est exprimé en fonction de ses échantillons modulant des fonctions "sinc", est appelée interpolation de Shannon.

C.1- Introduction

La transformée en Z est un outil mathématique de traitement du signal, qui est l'équivalent discret de la transformée de Laplace. Elle est utilisée entre autres pour le calcul de filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie et en automatique pour modéliser des systèmes dynamiques de manière discrète [16].

La transformée de Fourier discrète est un cas particulier de la transformée en Z. Sa définition mathématique est la suivante : la transformation en Z est une application qui transforme une suite s (définie sur les entiers) en une fonction S d'une variable complexe nommée z , telle que :

$$S(z) = \mathcal{Z}\{s(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \cdot z^{-n}, \quad z \in \left\{ z \in \mathbb{C} \ \& \ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \cdot z^{-n} \text{ converge} \right\} \quad [\text{C.1}]$$

La variable n représente en général le temps discrétisé, la variable complexe z ne représente rien de particulier, il s'agit d'une création purement abstraite. Lorsqu'on travaille sur $s(n)$ on dit que l'on est dans le domaine temporel. Lorsqu'on travaille sur $S(z)$ le domaine est appelé fréquentiel par analogie avec la transformée de Fourier, mais strictement parlant on est dans un domaine parfaitement abstrait. La causalité est déterminée selon la valeur de n :

- . Si $\forall n < 0, s(n) = 0$, on parle de signal causal.
- . Si $\forall n > 0, s(n) = 0$, on parle de signal anti-causal.

C.2- Convolution

La transformée en Z d'un produit de convolution est le produit des transformées en Z :

$$\mathcal{Z}\{x(n) * y(n)\} = \mathcal{Z}\{x(n)\} \cdot \mathcal{Z}\{y(n)\} \quad [\text{C.2}]$$

C.3- Transformée en Z inverse

La transformée en Z inverse est donnée par :

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) \cdot z^{n-1} \cdot dz \quad [\text{C.3}]$$

Où C est un chemin fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et appartenant entièrement au domaine de convergence.

En pratique, ce calcul s'effectue souvent à l'aide du théorème des résidus et la formule devient dans le cas d'un signal causal :

$$x(n) = \sum_{z_i = \text{poles de } z^{n-1} X(z)} \text{Re s} \left\{ z^{n-1} X(z) \right\}_{z=z_i} \quad [\text{C.4}]$$

C.4-Transformées en Z usuelles

Les transformations largement utilisées en électrotechnique, sont résumées dans le tableau (C.1). Tel que $\delta[n]$ représente l'impulsion de Dirac et $u[n]$ la fonction de Heaviside appelée aussi échelon unitaire [17].

	Signal $x(n)$	Transformée en Z $X(z)$	Domaine de convergence
1	$\delta[n]$	1	\mathbb{C}
2	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3	$a^n \cdot u[n]$	$\frac{1}{1-a z^{-1}}$	$ z > a $
4	$n a^n \cdot u[n]$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^2}$	$ z > a $
5	$-a^n \cdot u[-n-1]$	$\frac{1}{1-a z^{-1}}$	$ z < a $
6	$-n \cdot a^n \cdot u[-n-1]$	$\frac{a z^{-1}}{(1-a z^{-1})^2}$	$ z < a $
7	$\cos(w_0 n) \cdot u[n]$	$\frac{1-z^{-1} \cdot \cos(w_0)}{1-2 \cdot z^{-1} \cdot \cos(w_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$

8	$\sin(w_0 n) \cdot u[n]$	$\frac{z^{-1} \cdot \sin(w_0)}{1 - 2 \cdot z^{-1} \cdot \cos(w_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
9	$a^n \cdot \cos(w_0 n) \cdot u[n]$	$\frac{1 - a \cdot z^{-1} \cdot \cos(w_0)}{1 - 2a \cdot z^{-1} \cdot \cos(w_0) + a^2 \cdot z^{-2}}$	$ z > a $
10	$a^n \cdot \sin(w_0 n) \cdot u[n]$	$\frac{a \cdot z^{-1} \cdot \sin(w_0)}{1 - 2a \cdot z^{-1} \cdot \cos(w_0) + a^2 \cdot z^{-2}}$	$ z > a $

Tableaux C.1: les Transformées en Z

Bibliographie

- [1] Artech House, I. Les Thede, Practical Analog and Digital Filter Design, 2004, pp.1-160.
- [2] F. SAGNARD, Master Electronique et Télécommunications, / Synthèse de filtres / Université de Marne-La-Vallée ,2006-2007.
- [3] G. Couturier, Dept GEII IUT Bordeaux I, Filtrage analogique et numérique, 2004.
- [4] L.Theodore, Deliyannis, Continuous-Time Active Filter Design, Boca Raton: CRC Press LLC, 1999, pp. 1- 35.
- [5] Sylvain LARRIBE, Traitement analogique du signal, Le filtrage analogique, CNAM Saclay 2005.
- [6] Brian A. Jackson, Digital Filter Design And Synthesis Using High-Level Modeling Tools, Masters of Science, Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, December 1, 1999 pp.40-200.
- [7] Y. Gagou, Cours de Traitement du Signal, Université de Picardie Jules Verne, Master-II de Physique, 2007-2008.
- [8] T. Belkhier, A. Berrabah, A. Bouguerra, Modélisation du filtre RIF par la transformée de fourier discret, mémoire de pdf, 2007, Université de M'sila.
- [9] John L.SEMMLOW, Biomedical Image processing, Basel, New York, 2004, pp. 87-123.
- [10] James Broesch, Comprendre le traitement numérique de signal, Publitronic pour l'édition française, 1999, pp. 53-66.
- [11] Nasser Kehtarnavaz, Digital Signal Processing System-Level Design Using LabVIEW, Copyright © 2005, pp.55-95.
- [12] J. Auvray, Filtering in practice – digital filtering – transverse filters Techniques de l'ingénieur, Vol. RE1, n° R1105, 2003, pp. R1105.1_R1105.19.
- [13] W.P. Salaman, M.S.Solotreff, le filtrage numérique, Eyrolles, 1982, pp. 69-110.
- [14] David Savéry, Ecole Polytechnique de Montréal, Département de génie électrique Cours, Filtres numériques, Version du 10 avril 2002
- [15] DOUGLAS F. ELLIOTT, handbook of Digital Signal Processing Engineering Applications, 1987, pp.290-350.
- [16] J. MAX, J. LACOUME, Méthodes et technique de traitement du signal et application aux mesures physiques, 5 édition, masson, 1996, pp. 133-146.

- [17] A JOHN WILEY, B. A. Shenoi, Introduction to Digital Processing and filtre Design, 2006, chapitre 6, pp 303-350.
- [18] VIJAYk.MADISETTI, Digital Processing Hand book, CRC net base, 1999, pp.11.1-11.5.
- [19] L.Theodore ; Deliyannis, Realization of First-and Second-Order Functions Using Opamps, Boca Raton: CRC Press LLC, 1999, pp. 4.1- 4.10.
- [20] Y. Bonnassieux, Ecole polytechnique Majeure MNO, OptionPHY569A, cour, Filtrage & Introduction au traitement du signal, mars 2006.
- [21]Hwei P. Hsu, Ph.D, Theory and Problems of Signals and Systems, Copyright © 1995, pp. 165-209.
- [22] G. Richard,ecole nationale supérieure des télécommunications, Paris, Traitement du signal : méthodes et études de cas, mars 2008.
- [23] D.Thierry, Faculté Polytechnique de Mons, Introduction à la synthèse des filtres actifs, Première édition ,2000.
- [24]Baudoi S D,serviére C et silavent A,soustraction de bruit, analyse et Bibliographique, traitement de signal, 1989, vol. 6, n°5, pp. 391-497.
- [25]Carter G.C,coherence and time delay estimation signal processing Ed ,coles de physique théorique north holland, 1985.
- [26]Auvray J, Pratique de filtrage, techniques de l'ingénieur, Paris,France 1966 (revue).
- [27]Hurd H. L, An Invesingation of Peruodicolleg correlated stochastic processes, Ph. D. Dissirtation, 1969, Duke university.
- [28]Capdessus C, Aide au diagnostic de machines tournantes par tratement du signal, thèse INPG, 1992.
- [29]Glan geaud, F. and Latombec. Multi. Componet filtering of magnitic signals, signal processing, 1986, vol. 11, pp. 133-143.