REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématiques et Numérique

Thème

Polynômes de Lagrange pour les équations intégrales

Présentée par:
SEDDIKI Feriel

Soutenu publiquement le: 10/06/2024

Devant le jury composé de:

GAGUI Bachir	*MCA*	*Université de M'sila*	***Président***
NADIR Mostefa	*Prof*	*Université de M'sila*	***Encadreur***
LAKHAL Aissa	*MAA*	*Université de M'sila*	***Examinateur***

Année universitaire 2023/2024

Remerciements

Je remercie $\boxed{\textbf{ALLAH}}$*, qui m'a donné la force , la santé et la volonté de commencer et de terminer ce mémoire.*

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de professeur ***NADIR MOSTEFA*** *je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant mon préparation de ce mémoire.*

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieurs les professeurs **GAGUI Bachir** *et* **LAKHAL Aissa** *qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce mémoire.*

et J'adresse mes sincères remerciements Dr. **Mohamed Nasseh NADIR** *Qui m'a aidé dans ce travail*

Enfin, je remercie tous mes amis de prés ou de loin, et je voudrais mentionner mes collègues et les étudiants de ma promotion de spécialité

Analyse Mathématique et Numérique

Dédicace

Je dédie ce travail à la mémoire à mes chers parents

SEDDIKI ABD ELKADER &BOUAICHA REBIHA*., je ne saurais trop vous dire merci pour vos conseils, votre soutien et vos encouragements.*

et pour vos prières qui m'ont accompagné tout le long de mes études. Ce travail est le fruit de tous vos sacrifices mieux que des mots. Il reflète tout l'amour que je ressens pour vous

A ma chère soeur : **BEN ABDALAZIZ MANEL.**

A toutes mes deux familles **SEDDIKI &BOUAICHA.**

&

La promotion de mathématiques 2024

A toutes les personnes que j'aime.

Table des matières

0.1 Introduction

Dans ce mémoire,nous traitons l'un des sujet les plus important de l'analyse mathématique et numérique ,qui est la solution

numérique de les équations intégrales de Volterra-Fredhom .

ces équations apparaissent dans de nombreuses applications en physique et en ingénierie.

Comme la résolution analytique de ce type des équations est souvent n'est pas évidente et sont difficile à trouver

les gens sont plus intéressés par la résolution numérique

les méthode des résoudre numériquement des équations intégrales jouent un rôle très important des domaine scientifique

Ainsi notre mémoire se compose de trois chapitres:

Le Premier chapitre

est une introduction à l'analyse numérique on a utilisé les notions

de base de l'analyse fonctionnelle, et la théorie des opérateurs bornés, compacts et intégraux.

Le Deuxième chapitre

est une introduction à la terminologie et à la classification

des équations intégrales, qui a pour objectif, de familiariser le lecteur de ce travail avec le concept d'équation intégrale. On trouve aussi une étude sur l'existence et l'unicité des équations intégrales du types Volterra-Fredholm .il y a également une étude sur les polynôme

de Lagrange .

Le Troisième chapitre

est destiné à l'étude de la résolution numérique des équations

intégrales type Volterra-Fredholm en utilisant les méthodes collocation avec les polynômes de Lagrange tout

en montrant l'efficacité de cette méthode par des exemples illustrés.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle et numérique

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Linéarité des opérateurs

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

- *Condition additive*

$$\forall \varphi_1,\ \varphi_2 \in E,\ \text{on a}\ \ A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

- *Condition homogène*

$$\forall \varphi \in E,\ \lambda \in K = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \text{on a}\ \ A(\lambda \varphi) = \lambda A(\varphi).$$

Continuité des opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la propriété suivante

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = A(x_0).$$

L'opérateur linéaire A est dit continu sur G, s'il est continu en chaque point de l'ensemble G

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F, est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G.

Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \ \ \forall\, x \in E.$$

La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.

Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné. La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \|\ \|_1)$ et $(E, \|\ \|_2)$, ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β, telles que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \ \forall\, x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés $(E, \|\ \|_1)$ et $(E, \|\ \|_2)$.

1.1.2 Opérateurs compact :

Définition 1.1.1 *Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F. Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.*

Ensembles relativement compacts

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G, il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F.

Théorème 1.1.1 *(critère de compacité)*

Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E, la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente dans F.

Preuve. Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact. ■

Théorème 1.1.2 *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Théorème 1.1.3 *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Preuve. Soit $\{\varphi_n\}$ un suite bornée de E, alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact. ■

D'autres part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact.

Théorème 1.1.4 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F, convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors A et compact.

Corollaire 1.1.1 *La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

Théorème 1.1.5 *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.*

Théorème 1.1.6 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Noyau faiblement singulier

Définition 1.1.2 *On appelle noyau faiblement singulier la fonction K continue sur*

$G \times G \subset R^n \times R^n$ sauf peut être aux points $x = y$ et telle que,

Définition 1.1.3

$$\forall x, y \in G,\ x \neq y,\ \exists M > 0,\ |K(x,y)| < \frac{M}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq n$$

Théorème 1.1.7 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

1.1.3 Equations aux Opérateurs compacts:

Equations de second espèce

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ défini l'équation de second espèce donné par

$$\varphi - A\varphi = f\ ;\ \varphi,\ f \in X$$

où f est un fonction donnée et φ la fonction inconnue

Théorème 1.1.8 *Le noyau de l'opérateur T défini par*

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X \ ; \ T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

est un sous espace fermé et de dimension finie

Théorème 1.1.9 *La suite d'ensemble des noyaux*

$$N(T), N\left(T^2\right), ..., N(T^n), ...$$

est une suite croissante stationnaire. Autrement dit,elle ne contient qu'un nombre fini d'ensemble distincts , c'est à dire il existe un entier $p \in N$ *tel que*

$$\{0\} \subset N(T), N\left(T^2\right) \subset .... \subset N(T^p) = N\left(T^{p+1}\right) = ...$$

Le nombre p est appelé le nombre de Riez de l'opérateur compact A pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$

Théorème 1.1.10 *L'image de l'opérateur* T *défini par ,*

$$\operatorname{Im} T = T(X) = R(T) = \{\psi = T\varphi; \text{ telle que } \varphi \in X\}$$

est un sous espace fermé

Le nombre de Riez p pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$ et le nombre de Riez q pour l'ensemble des images $\{R(T^n)\}$ sont égaux. Autrement dit

$$p = q$$

Théorème 1.1.11 *Les sous espaces* $N(T^n)$ *et* $R(T^n)$ *sont supplémentaires. Autrement dit*

$$X = \ker T^n \oplus \operatorname{Im} T^r \equiv N(T^n) \oplus R(T^n)$$

où $r = p = q$ est le nombre de Riesz

Lemme 1.1.1 *L'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si,T^r est injectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

Lemme 1.1.2 *L'opérateur $T = I - A$ est surjectif si et seulement si T^r est surjectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

Théorème 1.1.12 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur$T = I - A$ est injectif si et seulement si il est surjectif, de plus l'opérateur admet un inverse $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ borné*

Théorème 1.1.13 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors, pour que l'équation non homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f$$

admette une solution unique $\varphi \in X$, pour tout $f \in X$, il faut et il suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0$$

admette la solution triviale $\varphi = 0$.

Chapitre 2

Equations intégrales et leurs classification:

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints ,apparaît dans une équation intégrale

2.1 Equations intégrales de Volterra:

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est tel que $k(x,t) = 0 pour x < t$

Définition 2.1.1 *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce une*

équation à une inconnue$\varphi(x)$, de la forme :

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

Définition 2.1.2 *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une*

équation à inconnueφ(x) de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

2.2 Equations intégrales de Fredholm:

Définition 2.2.1 *On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme:*

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où φ est la fonction inconnue, f et k sont des fonctions connues,les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équations de Fredholm .

Définition 2.2.2 *On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation*

de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

où φ(x) est la fonctions inconnue ,k(x, y) et f(x)des fonctions donnés, λest un facteur inconnu

2.3 Equations intégrales de Volterra -Fredholm :

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints,apparaît dans une équation intégrale .

Définition 2.3.1 *On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la*

forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt, x \in [a,b]$$

On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme 2 :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s,t)\varphi(t)dtds$$

où les fonctionsk_1, k_2 et f sont connues et$\varphi(x)$la fonction inconnue.

Exemple 2.3.1

$$\varphi(x) = exp(x) + x + 1 + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + \int_0^1 exp(x-t)\varphi(t)dt, x \in [0;1]$$

$$\varphi(x) = \frac{17}{2}x_2 + 11x + \int_a^x \int_a^b (s-t)\varphi(t)dtds$$

$$\varphi(x) = \frac{17}{2}x_2 + 11x + \int_a^x \int_a^b (s-t)\varphi(t)dtds$$

2.4 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utilisées pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solutions de l'équation (2.1.1)

Définition 2.4.1 *Soit Xun espace normé et$T : X \to X$ un opérateur, T est dit un*

opérateur de Picard s'il existe $\varphi_0 \in X$ unique tel que $\mathrm{T}(\varphi_0) = \varphi_0$; et $\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}^n(\varphi_0) = \varphi_0$, pour tout φ de X

Théorème 2.4.1 *(principe de contraction).Soit Xun espace normé. Si $T : X \to X$ un opérateur de contraction admis un point fixe unique φ , alors T est un opérateur de Picard*

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi_0)\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|\varphi - T^n(\varphi)\|$$

pour tout n $\in$N

2.4.1 Théorèmes d'existence et d'unicité :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \lambda \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt, x \in [a,b](2.2.1)$$

ou

1. $f \in C[a,b], k_1(x,t) \in C(D_1)$,avec$D_1 = \{(x,t) \in R^2 \ telque \ a \leq t \leq x \leq b\}$.

2. $\varphi \in C[a,b]$,$k_2(x,t) \in C(D_2), avecD_2 = [a,b] \times [a,b]$.

3. $M_1 = max_{(x,t) \in D1} \mid k_1(x,t) \mid$, *et* $M_2 = max_{(x,t) \in D_2} \mid k_2(x,t) \mid$.

Théorème 2.4.2 *Dans les conditions de continuité ci-dessus, supposons qu'il existe une*

constante$c > 0$ tel que:

$$\frac{1}{c}[M_1 + M_2 exp(c(b-a))] < 1$$

Alors l'équation (2.4.1) a une solution unique $\varphi \in C[a,b]$,et cette solution peut être obtenir par la méthode d'approximation successive, à partir de $\varphi_0 \in$ C [a, b].

Preuve. Soit l'opérateur intégral T : C [a, b] $\to$ C [a, b] ; défini par ■

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt$$

On a

$$\begin{aligned}
\mid \quad & T\varphi(x) - T\psi(x) \mid = \mid \int_a^x k_1(x,t)(\varphi(t) - \psi(t))dt + \int_a^b k_2(x,t)(\varphi(t) - \psi(t))dt \mid \\
\leq \quad & \int_a^x \mid k_1(x,t) \mid\mid (\varphi(t) - \psi(t)) \mid dt + \int_a^b \mid k_2(x,t) \mid\mid (\varphi(t) - \psi(t)) \mid dt \\
\leq \quad & M_1 \int_a^x \mid (\varphi(t) - \psi(t)) \mid exp(-c(t-a))exp(c(t-a))dt \\
\to \quad & +M_2 \int_a^b (\varphi(t) - \psi(t)) \mid exp(-c(t-a))exp(c(t-a))dt \\
\leq \quad & [\frac{M_1}{c}\exp(c(x-a) + \frac{M_2}{c}\exp(c(x-a+b-x)] \parallel \varphi - \psi \parallel \\
\leq \quad & \frac{\exp(c(x-a)}{c}(M_1 + M_2)\exp(c(b-a)) \parallel \varphi - \psi \parallel
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\mid A\varphi(x) - A\psi(x) \mid exp(-c(x-a)) \leq \frac{1}{c}(M_1 + M_2 exp(c(b-a)) \parallel \varphi - \psi \parallel$$

pour tout x $\in$ [a, b],

$$Alors, \| A\varphi - A\psi \| \leq \frac{1}{c}(M_1 + M_2 exp(c(b-a)) \| \varphi - \psi \|$$

On déduit que l'opérateur A est Lipschitzien de constante$k = \frac{1}{c}(M_1 + M_2 exp(c(b-a))$La condition supposée garantit que$A$ est une contraction. Alors on applique principe de contraction.

2.5 Polynômes de Lagrange

Définition 2.5.1 *On définit les polynômes de Lagrange associés aux points* $(x_0, ..., x_n)$ *par:*

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})...(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})...(x_i-x_{i+1})(x_i-x_n)} 0 \leq i \leq n$$

$$= \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

On a$l_i(x_j) = \delta_{ij} \forall (i,j) \in (0, ..., n)$où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, et degré$(l_i) = n$.

Preuve. Cette famille est évidemment génératrice. Le point clé est de savoir si elle est libre. Soit$(a_0, ..., a_n) \in R^{n+1}$ et$x \in R$. Alors, si $\sum_{i=0}^{n} a_i l_i(x)$ ■

pour tout x, on a pour tout j,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i l_i(x_j) = 0$$

. Comme $l_i(x_j) = \delta ij$, cela implique $a_j = 0$ pour tout j.

Ainsi, la famille est libre et génératrice et c'est donc une base.

Théorème 2.5.1 *Le problème : trouver* $p \in P_n$*tel que* $p(x_i) = f(x_i), \forall 0 \leq i \leq n$ *admet une unique solution donnée par*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

p s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange, noté p_n.

Preuve. Remarquons d'abord que $Li \in P_n(R)$ pour tout $i = 0,\cdots,n$ (produit de n polynômes de degré 1), de sorte que$P_n$est aussi un polynôme de degré au plus n. ■

La démonstration du théorème repose sur le fait que:

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \{^{1\text{si } i=j}_{0\text{si } i\neq j}$$

pour tout $i = 0,\cdots,n$. Le symbole ij est appelé symbole de Kronecker. Une fois ceci établi, on a:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\delta_{ij} = f(x_j)$$

pour tout $j = 0,\cdots,n$, de sorte queP_n est bien le polynôme interpolateur de Lagrange de$f$ aux noeuds $x0,\cdots,xn$.

Chapitre 3

Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm

3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredhlolm :

Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équation intégrales de Fredholm de second espèce en utilisant les polynômes de Lagrange.

3.2 Exemples Numériques

Dans cette section on va traité quelques exemples pour résoudre les équations intégrales linéaire de Fredholm de second espèce par les polynômes de Lagrange

Exemple 1. Considérons l'équation intégrale de Fredholm de second espèce.

$$\varphi(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin x \varphi(t) dt = \cos x,$$

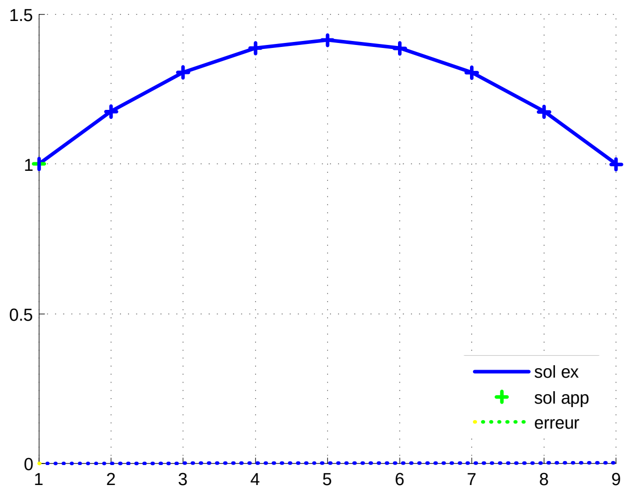
où $0 \leq x, t \leq \frac{\pi}{2}$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \sin x + \cos x. \tag{3.2.1}$$

Table 1. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par les polynômes de Lagrange , l'erreur est calculée pour $N = 9$.

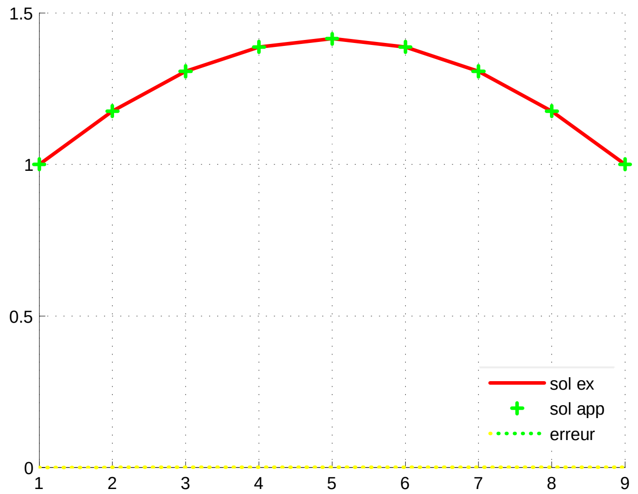
p(1):

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app φ_{app}	Erreur
0.000000e+000	1.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000
1.963495e-001	1.175876e+000	1.175562e+000	3.131881e-004
3.926991e-001	1.306563e+000	1.305949e+000	6.143406e-004
5.890486e-001	1.387040e+000	1.386148e+000	8.918844e-004
7.853982e-001	1.414214e+000	1.413078e+000	1.135153e-003
9.817477e-001	1.387040e+000	1.385705e+000	1.334799e-003
1.178097e+000	1.306563e+000	1.305080e+000	1.483149e-003
1.374447e+000	1.175876e+000	1.174301e+000	1.574503e-003
1.570796e+000	1.000000e+000	9.983947e-001	1.605349e-003



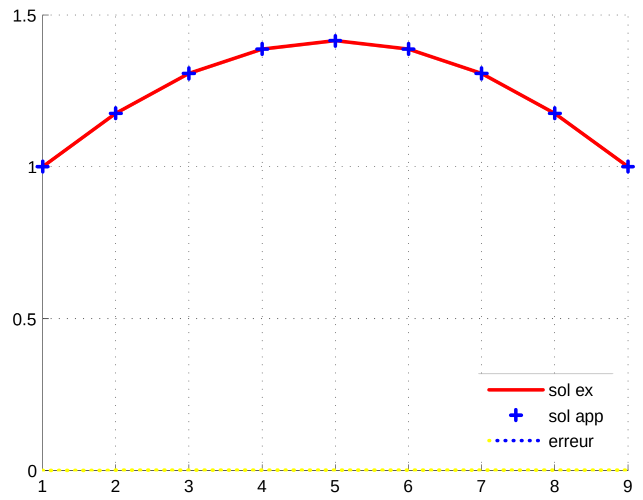
p(2):

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app φ_{app}	Erreur
0.000000e+000	1.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000
1.963495e-001	1.175876e+000	1.175876e+000	2.016005e-007
3.926991e-001	1.306563e+000	1.306563e+000	3.954536e-007
5.890486e-001	1.387040e+000	1.387040e+000	5.741096e-007
7.853982e-001	1.414214e+000	1.414214e+000	7.307029e-007
9.817477e-001	1.387040e+000	1.387041e+000	8.592157e-007
1.178097e+000	1.306563e+000	1.306564e+000	9.547093e-007
1.374447e+000	1.175876e+000	1.175877e+000	1.013514e-006
1.570796e+000	1.000000e+000	1.000001e+000	1.033370e-006



p(3):

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app φ_{app}	Erreur
0.000000e+000	1.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000
1.963495e-001	1.175876e+000	1.175876e+000	7.431291e-010
3.926991e-001	1.306563e+000	1.306563e+000	1.457700e-009
5.890486e-001	1.387040e+000	1.387040e+000	2.116253e-009
7.853982e-001	1.414214e+000	1.414214e+000	2.693479e-009
9.817477e-001	1.387040e+000	1.387040e+000	3.167197e-009
1.178097e+000	1.306563e+000	1.306563e+000	3.519200e-009
1.374447e+000	1.175876e+000	1.175876e+000	3.735963e-009
1.570796e+000	1.000000e+000	1.000000e+000	3.809155e-009



Exemple 2. Considérons l'équation intégrale de Fredholm de second espèce.

$$\varphi(x) - \int_{-1}^{1} (x^4 - t^4)\varphi(t)dt = x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

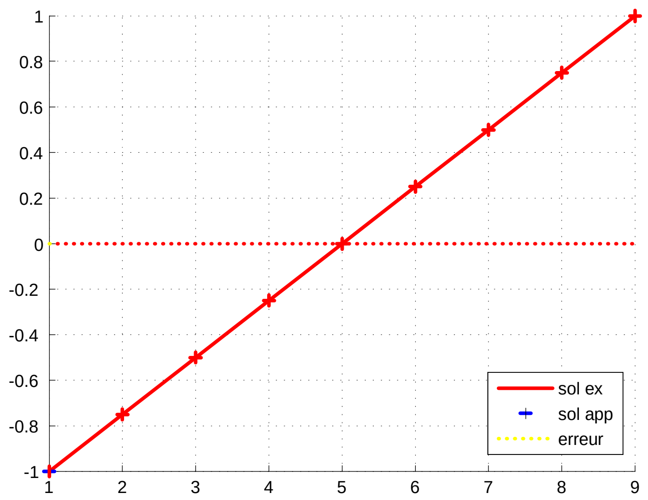
où $-1 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = x$$

Table 2. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues parles polynômes de Lagrange l'erreur est calculée pour $n = 9$

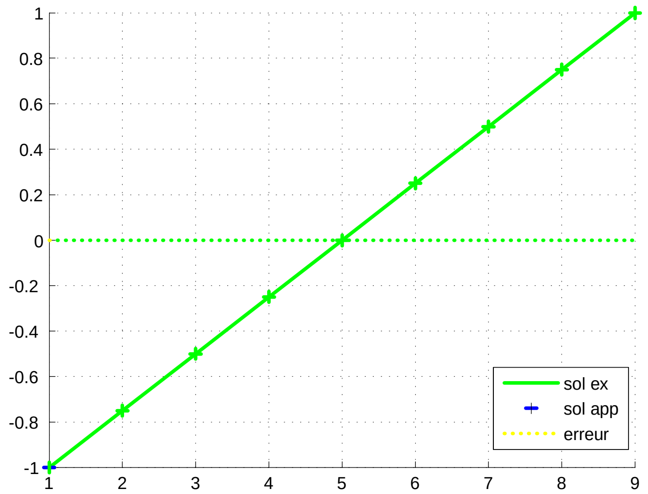
p(1):

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app φ_{app}	Erreur
-1.000000e+000	-1.000000e+000	-1.000000e+000	0.000000e+000
-7.500000e-001	-7.500000e-001	-7.500000e-001	1.110223e-016
-5.000000e-001	-5.000000e-001	-5.000000e-001	1.110223e-016
-2.500000e-001	-2.500000e-001	-2.500000e-001	0.000000e+000
0.000000e+000	0.000000e+000	5.559127e-018	5.559127e-018
2.500000e-001	2.500000e-001	2.500000e-001	0.000000e+000
5.000000e-001	5.000000e-001	5.000000e-001	1.110223e-016
7.500000e-001	7.500000e-001	7.500000e-001	1.110223e-016
1.000000e+000	1.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000



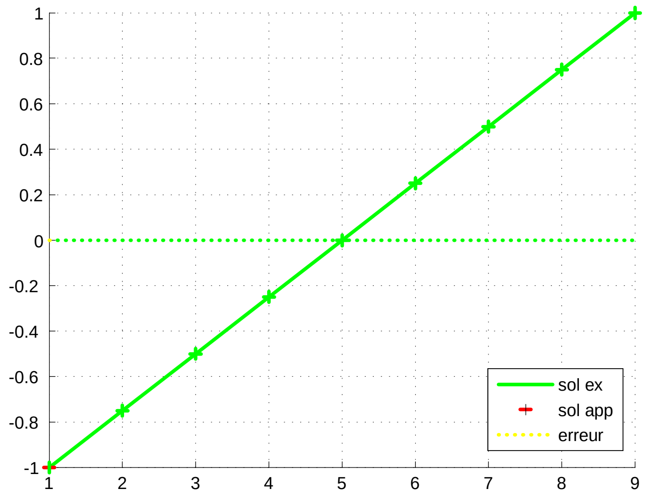
p(2):

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app φ_{app}	Erreur
-1.000000e+000	-1.000000e+000	-1.000000e+000	0.000000e+000
-7.500000e-001	-7.500000e-001	-7.500000e-001	0.000000e+000
-5.000000e-001	-5.000000e-001	-5.000000e-001	1.110223e-016
-2.500000e-001	-2.500000e-001	-2.500000e-001	5.551115e-017
0.000000e+000	0.000000e+000	4.514316e-017	4.514316e-017
2.500000e-001	2.500000e-001	2.500000e-001	5.551115e-017
5.000000e-001	5.000000e-001	5.000000e-001	1.110223e-016
7.500000e-001	7.500000e-001	7.500000e-001	3.330669e-016
1.000000e+000	1.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000



p(3):

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app φ_{app}	Erreur
-1.000000e+000	-1.000000e+000	-1.000000e+000	1.110223e-016
-7.500000e-001	-7.500000e-001	-7.500000e-001	0.000000e+000
-5.000000e-001	-5.000000e-001	-5.000000e-001	1.110223e-016
-2.500000e-001	-2.500000e-001	-2.500000e-001	5.551115e-017
0.000000e+000	0.000000e+000	4.215906e-017	4.215906e-017
2.500000e-001	2.500000e-001	2.500000e-001	5.551115e-017
5.000000e-001	5.000000e-001	5.000000e-001	1.110223e-016
7.500000e-001	7.500000e-001	7.500000e-001	1.110223e-016
1.000000e+000	1.000000e+000	1.000000e+000	4.440892e-016



Exemple3. Considérons l'équation intégrale de Fredholm de second espèce.

$$\varphi(x) - \int_0^1 x^2 e^{t(x-1)} \varphi(t) dt = x + (1-x)e^x,$$

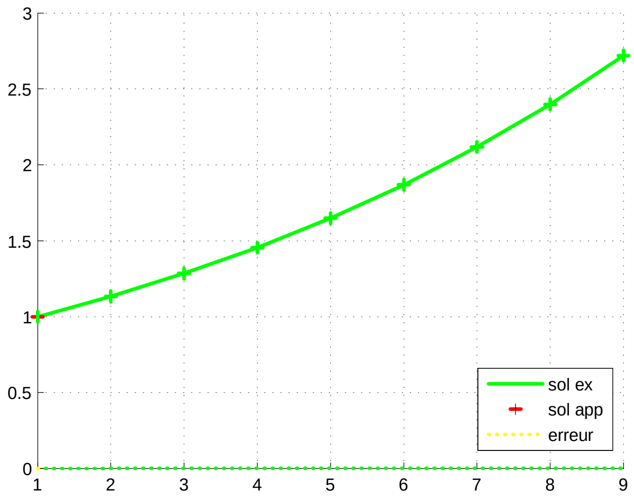
où $0 \leq x,t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = e^x$$

Table 3. Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$, de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues parles es polynômes de Lagrange l'erreur est calculée pour $n = 9$

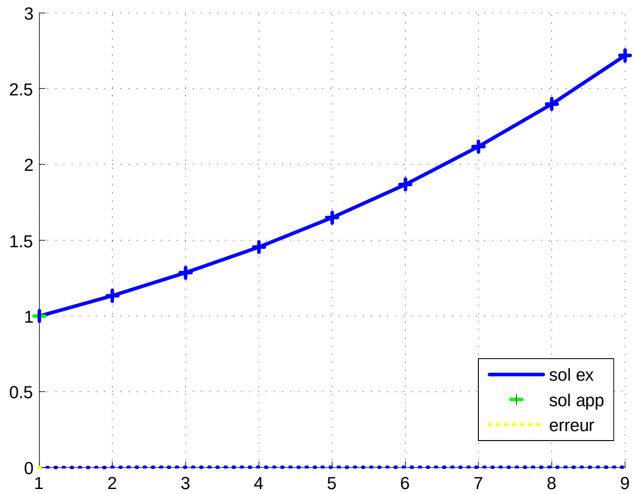
p(1):

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app φ_{app}	Erreur
0.000000e+000	1.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000
1.250000e-001	1.133148e+000	1.133150e+000	1.169163e-006
2.500000e-001	1.284025e+000	1.284032e+000	6.243740e-006
3.750000e-001	1.454991e+000	1.455011e+000	1.976114e-005
5.000000e-001	1.648721e+000	1.648771e+000	4.991975e-005
6.250000e-001	1.868246e+000	1.868356e+000	1.097131e-004
7.500000e-001	2.117000e+000	2.117218e+000	2.183548e-004
8.750000e-001	2.398875e+000	2.399278e+000	4.030614e-004
1.000000e+000	2.718282e+000	2.718983e+000	7.012720e-004



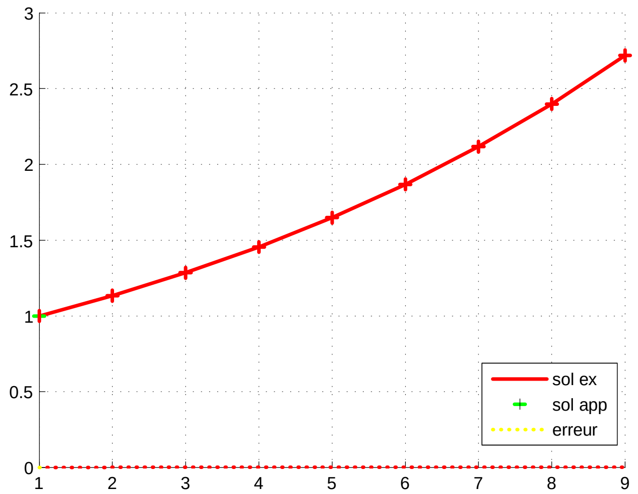
p(2):

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app φ_{app}	Erreur
0.000000e+000	1.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000
1.250000e-001	1.133148e+000	1.133148e+000	1.994449e-010
2.500000e-001	1.284025e+000	1.284025e+000	9.077326e-010
3.750000e-001	1.454991e+000	1.454991e+000	2.495665e-009
5.000000e-001	1.648721e+000	1.648721e+000	6.082804e-009
6.250000e-001	1.868246e+000	1.868246e+000	1.459724e-008
7.500000e-001	2.117000e+000	2.117000e+000	3.459836e-008
8.750000e-001	2.398875e+000	2.398875e+000	7.916873e-008
1.000000e+000	2.718282e+000	2.718282e+000	1.722810e-007



p(3):

Val de x	Sol ex φ_{ex}	Sol app φ_{app}	Erreur
0.000000e+000	1.000000e+000	1.000000e+000	0.000000e+000
1.250000e-001	1.133148e+000	1.133148e+000	2.298162e-013
2.500000e-001	1.284025e+000	1.284025e+000	1.023182e-012
3.750000e-001	1.454991e+000	1.454991e+000	2.617018e-012
5.000000e-001	1.648721e+000	1.648721e+000	5.701439e-012
6.250000e-001	1.868246e+000	1.868246e+000	1.288725e-011
7.500000e-001	2.117000e+000	2.117000e+000	3.292211e-011
8.750000e-001	2.398875e+000	2.398875e+000	9.063017e-011
1.000000e+000	2.718282e+000	2.718282e+000	2.475349e-010



CONCLUSION :

Dans ce mémoire,quelques méthodes analytique ont été présentées pour résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredhom de seconde espèce .Numériquement,la méthode de Lagrange a été utilisée pour approximer ces équations.où l'on cherche à approcher la solution exact par le polynôme de Lagrange. Quelques exemples ont égalment été donnés pour montrer l'applicabilité de cette méthode.

Les résultats numériques obtenus à partir de ces exemples démontrent l'efficacité et la précision de cette méthode .Lorsque n (le nombre de noeuds) augment.le terme d'erreur diminue.

Bibliographie

[1] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004

[2] M.NASSEH NADIR .Sur la solution numérique des equations intégrales de Volterra-Fredholm en utilisant les polynômes de Chebyshev, Mémoire de master 2022

[3] CHRISTOPHE BESSE . Résolution numérique des équations différentielles ordinaires L3 Mapi^3

[4] A.M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications,Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA

الملخص :

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول تقريبية لمعادلة فريدولم التكاملية من النوع الثاني وذلك باستخدام كثير حدود لقرونج على ذلك تم تقديم أمثلة مختلفة لتوضيح دقة الطريقة المقترحة

الكلمات المفتاحية :

كثير حدود لقرونج- المعادلات التكاملية لفردهولم- الطرق التربيعية

Résumé :

Le but de ce mémoire est la résolution numérique de l'équation intégrale de Fredholm du second type, en utilisant les polynômes de Lagrange. De nombreux exemples sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la méthode proposée

Mots clés :

Polynôme de Lagrange, Equation intégrale de Fredholm de second type, Méthodes de quadratures.

Abstract :

The goal of this memory is consecrated to the use of the Lagrange polynomials in oeder to approximate the solution of the Fredholm integral equation of the second kind, many examples are presented to illustrate the accuracy and efficiency of the method

Keywords:

Lagrange polynomials, Fredholm integral equation Quadrature methods.