UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse mathématique et numérique

Par

GHARBI LATIFA

Sujet

Sur les opérateurs n-normaux

Devant le jury :

Mr. Mostefa Nadir	Prof. Univ de M'sila	Président
Dr. Abdellatif Smati	M.C.B. ENS Bousaada	Rapporteur
M.r Bachir Gagui	M.C.A Univ de M'sila	Examinateur

Promotion :2019/2020

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout premiérement ALLAH le tout puissant pour la volonté, la santé et la partience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

Aincsi, je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur Mr. SMATI Abdellatif pour suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire, ses conseils, ses encouragement.

Ma sincére reconnaissance à tous les membres du jury Mostefa Nadir, Gagui Bachir pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de prés ou loin à réaliser ce travail, surtout mes collégues de promotion 2020 pour les pons moments qui nous avons passé ensemble.

Table des matières

Notation

$L(E,F)$ L'ensemble des applications linéaire de E dans F.

H Espace de Hilbert complexe linéaires définies sur H.

$B(H)$ L'espace d'opérateurs linéaire bornés définies sur H.

$\mathcal{L}(E,F)$ L'ensemble des application linéaires continus de E dans F.

$C([a,b])$ L'espace des fonction continus sur $[a,b]$.

$C^1([a,b)]$ L'espace des fonctions continûment dérivables n-fois, sur $[a,b]$.

$L^2([a,b])$ L'espace des fonctons de careés intégrables sur $[a,b]$, $i.e \int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty$.

$l^2(\mathbb{R})$ L'espaces des suits réelles $(x_n)_n$ de carrés sommables, i.e vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$.

A^{-1} L'inverse de l'opérateur A.

A^* L'adjoint de l'opérateurs A.

$\mathrm{Im}(A)$ L'image de l'opérateur A.

$\ker(A)$ Le noyau de l'opérateurs A.

$D(A)$ Le domaine de l'opérateur A.

$K(E)$, $K(E,F)$ Lespace des opérateurs compacts de E,ou de E dans F.

$\overline{A}$ La fermeture de l'opérateur A.

$\rho(A)$ L'ensemble résolvante de l'opérateur A.

$W(A)$ Le range numérique de A, i.e $W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}$.

$\sigma(A)$ Le spectre de l'opérateur A.

$\sigma_p(A)$ Le spectre ponctuel de l'opérateur A.

Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre de théorie des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert. Pour bien préciser spécificités un rappel historique sur le développement de l'analyse fonctionnelle n'est pas inutile.

La théorie des opérateurs linéaires trouve ses origines d'une part dans l'étude des systémes finis déquations linéaires différentielles et intégrales.

Notons H l'espace complexe de Hilbert et B(H) l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés définis dans l'espace de Hilbert H.

Soit A un opérateurs dans B(H). l'opérateurs A est dit normal s'il satisfait à la condition suivante : $A^*A = AA^*$, si A est opérateurs normal alors : $\ker A = \ker A^*$.est on dit A un opérateurs n-normal si : $A^*A^n = A^nA^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,et (n-m)-normal si : $A^{*m}A^n = A^nA^{*m}$ pour $n, m \in \mathbb{N}$.

L'objectif de ce travail est comparaison entre les opérateurs normaux et les opérateurs n-normaux.

Ce mémoire est décomposé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre on va donner les elements de base de l'analyse fonctionnelle (espace de Banach et espace de Hilbert) et nous avons parl sur les opérateurs linéaires bornés (compacts , adjoint , auto-adjoints , positifs et isométriques).

Dans le deuxiéme chapitre on s'intéresse la théorie des opérateurs normaux, Ainsi on presente quelques classes d'opérateurs (hyponormal , normaloide , paranormal).

Dans le troisiéme chapitre on presente la définition et des propréités, trés importants pour les opérateurs n-normaux et comparaison entre les opérateurs normaux et les opérateurs n-normaux. et on y trouvera aussi la définition et des propriétés pour les opérateurs (n-m)-normaux.

Chapitre 1

Opérateurs bornés

L'opjectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Ce chapitre est composé de trois sections, la première section, nous rappelons quelques définition et résultats sur les espaces de Banach et les espaces de Hilbert, la deuxième section, contient un aperçu sur les opérateurs linéaires continus. La derniére section, nous donnons quelques définitions et résultats sur les opérateurs bornés.

1.1 Rappels et notions fondamentales

Définition 1.1.1 *(Espace de Banach)*

On appele espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduit de sa norme $d(x,y) = \|x-y\|$.

Lemme 1.1.1 *Tout espace normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie est complet.*

Définition 1.1.2 *(L'espace normé $L(E,F)$)*

Si $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ sont deux espace vectoriels normés. On not $L(E,F)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les applications linéaires continues de E dans F. Lorsque $E = F$,on écrit $L(E)$ au lie de $L(E,F)$.

Théorème 1.1.1 *Soit E et F deux espace vectoroiel normé. On suppose que l'espace F est complet. Alors l'espace $L(E, F)$ est complet.*

Corollaire 1.1.1 *Si E est un espace vectoriel normé, alors $L(E, F)$ est un espace de Banach.*

Théorème 1.1.2 *Soit E un espace normé et F un espace de Banac, alors $L(E, F)$ est un espace de Banach.*

Définition 1.1.3 *(Espace Euclidien(préhilbertien))*

Un espace vectoriel H sur $\Bbbk$ muni d'un produit scalaire est dit espace Euclidien ou préhilbertien.

Proposition 1.1.1 *Tout espace préhilbertien est un espace vectoriel normé, la norme est donnée par :*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}\,.$$

Définition 1.1.4 *(Identité du parallélogramme)*

Soient x et $y \in E$ avec F est un espace préhilbert alors :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,.$$

Remarque 1.1.1 *Un espace vectoriel normé est un espace préhilbertien si et seulement si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.*

Définition 1.1.5 *(Espace de Hilbert)*

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle x, y \rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle x, x \rangle^{1/2}$.

Définition 1.1.6 *Un espace de Hilbert est un espace de Banach (donc complet) dont la norme découle d'un produit scalaire ou hermitien par le signe $\langle , \rangle$. C'est la généralisation en dimension quelconque d'un espace Euclidien ou hermitien.*

Remarque 1.1.2 *Un espace de Banach est un espace de Hilbert si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme.*

1.2 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.2.1 (Opérateur linéaire)

Soit E et F deux espaces vectoriel sur le corps $\Bbbk$, et $A : E \longrightarrow F$. On dit que l'opérateur A est linéaire si :

1) $\forall\ x, y \in E, \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$

2)$\forall \lambda \in \Bbbk, \quad A(\lambda x) = \lambda A(x)$

Définition 1.2.2 (Opérateur continu) *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble $S \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de S si on a la propriété suivante :*

Pour toute suite x_n de S converge vers x_0, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} A(x_n) = A(\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n) = A(x_{{}_0}).$$

Remarque 1.2.1

L'opérateur linéaire A est dit continu sur S, s'il est continu en chaque point de l'ensemble S.

Théorème 1.2.1

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $S \subset E$ dans F est dit continu partout sur S s'il est continu en point x_0 de S.

Preuve. Voir [26] ∎

Définition 1.2.3 (Opérateur borné) *Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que :*

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E.$$

Exemple 1.2.1 ***1.*** *Soit* $H = L^2(]0;1[)$ *et* $Tf(x) = xf(x)$. *Alors :*

$$\|Tf\|_2^2 = \int_0^1 |Tf(x)|^2 \, dx = \int_0^1 x^2 |f(x)|^2 \, dx \leq \|f\|_2^2$$

Donc T *est borné sur* H *:*

2. *Soit* H *un Hilbert. L'opérateur* I *est borné car*

$$\forall x \in H : \|I(x)\| = \|x\| \, .$$

3. $H = l^2$, *l'opérateur* S *(shift à droite) défini par :*

$$S : H \to H$$

$$x \to S(x) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$$

est borné.

4. *Soit* $H = l^2$, *l'opérateur :*

$$A : H \to H$$

$$x \to A(x) = (x_1, 3x_2, x_3, 3x_4, ...)$$

est borné car

$$\|A(x)\|^2 = |x_1|^2 + 9|x_2|^2 + |x_3|^2 ... + 9|x_n|^2 + ...$$

Donc

$$\|A(x)\|^2 \leq 9|x_1|^2 + 9|x_2|^2 + 9|x_3|^2 ... + 9|x_n|^2 + ...$$

par conséquent

$$\|A(x)\|^2 \leq 9\|x\|^2$$

D'où $\exists C = 3 \geq 0$ *tel que* $\|A(x)\| \leq C\|x\|$.

Théorème 1.2.2

Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

Preuve. Voir [26, p4] $\blacksquare$

Remarque 1.2.2

- Soit E et F deux espaces normés, l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de E dans F est notée $\mathcal{L}(E, F)$.

- L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$est un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$, de plus $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme $\|A\|$est un espace normé.

1.3 Opérateurs compacts

Parmi tous les opérateurs bornés, on peut distinguer une classe importante d'opérateurs, dont les propriétés sont le plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie. C'est la classe des opérateurs compacts.

Rappel et notations

Nous commençons d'abord par rappeler la définition et quelques propriétés des opérateurs compacts. Soint E et F deux espaces de Banach. On désigne par $K(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $K(E) = K(E, F)$.

Définition 1.3.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans E à un ensemble relativement compact dans F.*

Définition 1.3.2 *L'opérateur A est compact, si et seulement si pour tout suit bornées $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E$,la suite $\{Ax_n\}_{n\geq 1}$admet que sous suite convergente dans F. Dans le cas particulierou $F = C([a, b])$, le théoéme suivant d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de A.*

Théorème 1.3.1 [17]*(Arzela-Ascoli)*

A ensemble, $A \subset C(G)$ dans $C(G)$ ànoyau continu est un relativement compact si et seulement si

(i) bornée i.e s'il existe une constante M telle que :

$$|\varphi(x)| \leq M \ \forall x \in G, \ \forall \varphi \in A$$

(ii) équicontinu i.e : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que $\forall \varphi \in A$, nous avons

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon \forall x, y \in G \text{ et } |x - y| < \delta$$

Exemple 1.3.1 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ ànoyau continu est un opérateur compact*

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, y)\varphi(y)dy$$

En effet, soit E un ensemble borné de $C(G)$ alors, on a

$$\|\varphi\| \leq M \text{ pour tout } \varphi \in E$$

de plus

$$|A\varphi(x)| \leq M\,|G| \max_{x,y \in G} |K(x, y)|$$

Cela veut dire que $A(E)$ est borné. (1)

L'opérateur K est uniformément continu sur le compact $G \times G$, dou $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, z \in G$

$$|x - y| < \delta \implies |K(x, z) - K(y, z)| < \frac{\varepsilon}{M\,|G|}$$

d'ou

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon \text{ pour tout } \varphi \in E \text{ et } x, y \in G, \text{ avec } |x - y| < \delta$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu (2)

D'aprés (1) et (2) est le théoréme d'Arzela-Ascoli, $A(E)$ est relativement compact, donc A est compact.

Théorème 1.3.2 *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

Preuve. En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

.

Alors,$A(B(0,1))$ est relativement compact d'ou $\|A(x)\| \leq C, \forall x \in B(0,1)$. Alors T est borné.

Réciproquement, l'opérateur indentique I de E dans E est borné, mais il n'est pas compact car $I(B(0,1)) = B(0,1)$, n'est pas relativement compacte sauf si E est de dimension finie. ■

Proposition 1.3.1 [2]*Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateur compact est un opérateur compact, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.*

Proposition 1.3.2 *Le produit AB de deux opérateur borné A et B est compact si l'un des opérateur A et B est compact.*

Théorème 1.3.3 [17]*Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suit d'opérateur compacts de E dans F si :*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

alors, A est compact.

Théorème 1.3.4 ([2]) *Soit $A \in K(E)$, alors l'image par A de tout suite de E faible-ment convergent est une suit fortement convergente.*

Corollaire 1.3.1 *Soit* $(e_k)_{K\in\mathbb{N}}$ *une suit orthonormée dans* H. *Si* $T \in K(H)$, *alors*

$$\lim_{K\to\infty} \|Te_k\| = 0.$$

Preuve. Pour tout $x \in H$ la série $\sum_K |\langle x, e_k\rangle|^2$ est convergente et terme général $\langle x, e_k\rangle$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. Cela traduit le fait que la suite$(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est faiblement convergente vers 0, le théoréme précédent permet de conclure. Un exemple important d'opérateurs compacts est donée par le théoreme qui suit. ■

Théorème 1.3.5 [17]

Soint H *un espace de Hilbert séparable et* (e_n) *une base hilberti-enne de* H. *Soit* $\lambda = (\lambda_n)$ *une suit bornée dans* $\mathbb{C}$. *Alors, l'opérateur de multiplication par* λ *défini par :*

$$T_\lambda e_n = \lambda_n e_n$$

est compact si, et seulement si :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda_n = 0$$

Définition 1.3.3 *On dit qu'un opérateur* $A \in B(E, F)$ *est de rang fini si* $\dim \Re(A) < \infty$.

Remarque 1.3.1 *Il est clair qu'un opérateur borné de range fini est compact.*

Corollaire 1.3.2 *soit* (A_n) *une suit d'opérateurs bornés de rang finis de* E *dans* F *et soit* $A \in \mathcal{L}(E, F)$ *tels que :*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|A_n - A\| = 0$$

Alors, T *est compact.*

Théorème 1.3.6 [2] *Soit* $T \in \mathcal{L}(E, F)$,*les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *L'opérateur* T *est compact .*

2. *L'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$ est compact.*

3. *L'opérateur T est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

1.4 Opérateur Positif

Définition 1.4.1 [17]*On dit qu'un opérateur A sur un Hilbert H est positif s'il vérifie $(x, Ax) \geq 0$ pour tout $x \in H$.On écrit AB si $A \geq B$ est positif. En utilisant l'identité de polarisation on voit qu'un opérateur positif est nécessairement auto-adjoint.*

Théorème 1.4.1 *Tout opérateur positif A admet un unique opérateur positif B tell que $A = B^2$.De plus, B commut avec tout opérateur qui commut avec A. On appelle B la racine carré de A et on not par$\sqrt{A}$.*

Définition 1.4.2 *Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$ on not $|A| = \sqrt{A^*A}$.*

Définition 1.4.3 *Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est appelé isométrie partielle si $\|U(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \ker(U)^\perp$. Remarquons que l'image d'un isométrie partielle $U \in \mathcal{L}(H)$ est un fermé de H.*

Proposition 1.4.1 *Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est une isométrie partielle si et seulement si U^*U est une projection orthogonale.*

Preuve. Supposon que U est un isométrie partiele. On alors

$$(U^*U)^* = U^*U \text{ et } (UU^*)^* = UU^*.$$

Il reste donc à prouver que

$$(U^*U)^2 = U^*U \quad \text{et } (U^*U)^2 = UU^*.$$

Comme $H = \ker(U)^\perp \oplus \ker(U)$, on apour tout $x \in H$

$$U^*Ux = U^*Ux_1 \in \ker(U)^\perp,$$

ou $x_1 \in \ker(U)^\perp$ vérifaint $(x - x_1) \in \ker(U)$.

Il réste de $\|Ux_1\| = \|x_1\|$ que $(U^*Ux_1, x_1) = (x_1, x_1)$, puis de l'identité de polarisation que $U^*Ux_1 = x_{1.}$ On a donc $(U^*U)^2x = U^*Ux$.

Montrons la réciproque. comme U^*U est une projection orthogonale, on a

$$\|U^*Ux\|^2 = (U^*Ux, x) = \|Ux\|^2$$

On en déduit alors que $\ker(U^*U) = \ker(U)$ et donc U^*U est une projection orthogonale sur $\ker(U)^\perp$. D'ou, pour tout $x \in \ker(U)^\perp$

$$\|Ux\|^2 = (U^*Ux, x) = \|x\|^2 .$$

■

Proposition 1.4.2 *U est une isométrie partielle si et seulement si U^*est aussi.*

Preuve. Il suffit de montrez que si U est une isométrie partielle alors U^*U est une projection orthogonale. En effet, pour tout $x \in H$ on a$U^*x \in \overline{Ran(U^*)} = \ker(U)^\perp$. En utilisant la proposition (1.4.1),on a donc

$$(UU^*)x = U(U^*U)U^*x = UU^*x.$$

■

Théorème 1.4.2 [17]*(Décomposition polaire)*

pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$ il existeune isométrie partielle U tel que $A = U|A|$. En outre, U est unique si on impose la condition

$$\ker(U) = \ker(A).$$

Preuve. Remarquons qu'on a

$$\|Ax\|^2 = \||A|x\|^2, \forall x \in H.$$

En particulier, on en deduit que $\ker(|A|) = \ker(A)$ et que

$$|A|\, x = |A|\, y \Longrightarrow Ax = Ay.$$

On déduit alors l'application

$$\begin{aligned} V \quad : \quad & Ran(|A|) \to Ran(A) \\ & |Ax \to Ax.| \end{aligned}$$

V est isométrique grâce à (1.4). Elle s'étend donc par continuité à une isométrie de $\overline{Ran(|A|)}$ vers $\overline{Ran(A)}$,qu'on note encore par V. En posant $U = VP$ avec P. La projection orthogonale sur $\ker(A)^{\perp}$, obtient une isométrie partielle sur H vérifaint la propriété énoncée.

-Unicité : si U_1, U_2 sont deux isométries partielles vérifaint $U_1\, |A| = U\, |A|$ alors

$$U_1 = U_2 \text{ sur } \overline{Ran(|A|)}.$$

De plus comme $Ran(|A|)^{\perp} = \ker(A)$, la condition $\ker(U_1) = \ker(U_2) = \ker(A)$ implique que $U_1 = U_2$ sur H. ■

1.5 Opérateur adjoint

Théorème 1.5.1 *(Représentation de Riesz)*

Soit H un espace de Hilbert. Alors.

$$\forall f \in \mathcal{L}(H, \Bbbk), \exists y \in H : f(x) = \langle y, x \rangle\,, \forall x \in H.$$

Proposition 1.5.1 *Soit H_1et H_2 deux espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe* *un unique $T^* \in \mathcal{L}(H_2,H_1)$ tel que, pour tout $x \in H_1$et tout $y \in H_2$,on dit :*

$$\langle Ax, y\rangle_{H_2} = \langle x, A^* y\rangle_{H_1}$$

est appelée l'adjoint de A.

Exemple 1.5.1 *On considére l'opérateur shift $S : l^2(\mathbb{C}) \longrightarrow l^2(\mathbb{C})$ défini par :*

$$S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$$

soint (x_n) et (y_n) dans $l^2(\mathbb{C})$, alors :

$$\begin{aligned}
\langle S^* x_n, y_n\rangle &= \langle x_n, Sy_n\rangle \\
&= \langle (x_1, x_2, ...), (0, y_1, y_2, ...)\rangle \\
&= x_2\overline{y_1} + x_3\overline{y_2} + ... \\
&= \langle (x_{2,}x_3, ...), (y_{1,}y_2, ...)\rangle
\end{aligned}$$

donc S^* est defini par :

$$S^*(x_{1,}x_{2,}.....) = (x_{2,}x_3, ...).$$

Exemple 1.5.2 *L'opérateur de l'identité : soit $x, y \in H$. C'est clair que :*

$$\langle Ix, y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, I^* y\rangle$$

d'ou $I^* = I$.

Exemple 1.5.3 *soit*

$$M = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$$

alors

$$M^* = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Dans le cas géneral soit la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

alors son adjoint est :

$$\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

Proposition 1.5.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$.Alors,on a :*

1. $\ker(A) = (\mathrm{Im}(A^*))^{\perp}$.

2. $\overline{\mathrm{Im}(A)} = \ker(A)^{\perp}$

Preuve. Voir[7]

Théorème 1.5.2 *Soit $A, S \in \mathcal{L}(H), A^*, S^*$ leur adjoit (respectivement), alors on a les propriétés suivantes :*

1) $(A^*)^* = A$.

2) $(A + S)^* = A^* + S^*$.

3) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^* \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

4) $\|A^*\| = \|A\|$.

5) $(AS)^* = S^* A^*$.

■

Preuve. Voir[7]

Lemme 1.5.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ est inversible, alors A^*est inversible et on a :*

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

■

Preuve. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (A est inversible, alors $A^{*}est$ inversible) d'ou :

$$(AA^{-1})^{*} = (A^{-1}A)^{*} = I = I$$

$$(A^{-1})^{*}A^{*} = A^{*}(A^{-1})^{*} = I$$

alors : A^{*} est inversible et $(A^{*})^{-1} = (A^{-1})^{*}$. ■

1.5.1 Opérateurs isométriques,normaux,unitaires,positifs,auto-adjoints

Définition 1.5.1 *Soit H_1et H_2 deux espaces de Hilbert .*

1. *Un opérateur $S \in \mathcal{L}(H_1)$ est appelé hermitien ou auto-adjoint si :*

$$S = S^{*}$$

2. *Un opérateur $N \in \mathcal{L}(H_1)$ est appelé normal si :*

$$N\ N^{*} = N^{*}N$$

3. *Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est appelé unitaire si :*

$$U^{*}U = Id_{H_1}$$

et

$$U\ U^{*} = Id_{H_2}$$

4. *Un opérateur $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est appelé isométrique si :*

$$\|U(x)\| = \|x\|$$

pour tout $x \in H_1$.

5. Un opérteur $P \in \mathcal{L}(H_1)$ est appelé positif (notation : $P \geq 0$) si P est auto-adjoint et si pour tout $x \in H_1$

$$\langle P(x), x\rangle \geq 0, \forall x \in H_1.$$

Exemple 1.5.4 *L'opérateur shift S sur $l^2(\mathbb{N})$ est isométrique, l'opérateur shift S sur $l^2(\mathbb{Z})$ est unitaire.*

Remarque 1.5.1 *pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $A^*A \in \mathcal{L}(H_1)$ est hermitien car :*

$$(A^*A)^* = A^*(A^*) = A^*A$$

Il est mème positif car :

$$\forall x \in H_{1,} \langle A^*Ax, x\rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$$

Lemme 1.5.2 *Un opérateur borné A est auto-adjoint si et selement si :$\langle Ax, x\rangle$ est réel pour tout x dans H.*

Preuve.

$$\langle A^*x, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle \overline{Ax, x}\rangle = \langle Ax, x\rangle$$

i.e : $A = A^*$.

Lemme 1.5.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, alors :*

$$\ker A = \ker A^*$$

Preuve. *Soit $x \in \ker A. Alors$:*

$$\|A^*x\|^2 = \langle A^*x, A^*x\rangle = \langle AA^*x, x\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = 0$$

en utilisant pour la deuxiéme égalité le fait que A est normal donc :

$$AA^* = A^*A$$

ceci prouve donc que

$$\ker A \subset \ker A^*$$

Maintenant remarquons que si A est normale, alors A^**est normal et en appliquant l'inclusion qu'on vient de démontrer à* A^**, on obtient :*

$$\ker A^* \subset \ker A^{**} = \ker A$$

car

$$A^{**} = A$$

Finalement

$$\ker A = \ker A^*$$

■

■

Chapitre 2

Théorie des opérateurs normaux

Dans cette chapitre on introdut quelques notions de base de la théorie des opérateurs normaux qui joueront un rôle essentiel dans ce travail.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1 *On dit que $A \in B(H)$ est un opérateur normale si A commute avec son adjoint i.e. $A^*A = AA^*$.*

Exemple 2.1.1 *La multiplication A_φ par une fonction mesurable bornée φ est un opérateur normal sur $L^2([0,1])$.*

En effet, on a $(A_\varphi f)(t) = f(t)\varphi(t)$ ou $\varphi \in C([0,1])$, $f \in L^2([0,1])$.

$$\begin{aligned} \langle A_\varphi f, g \rangle &= \langle f(t)\varphi(t), g(t) \rangle \\ &= \left\langle f(t), \overline{\varphi(t)} g(t) \right\rangle \end{aligned}$$

donc $(A_\varphi^* g)(t) = \overline{\varphi(t)} g(t)$, *C'est-à-dire* $A_\varphi^* = A_{\overline{\varphi}}$.

D'où

$$A_\varphi^* A_\varphi = A_\varphi A_\varphi^*$$

L'opérateur A_φ est un hermitien (auto-adjoit) s'il la fonction φ est réelle.

Proposition 2.1.1 [19] *Soit $A \in B(H)$, alors A est normale , si et seulement si :*

$$\|Ax\| = \|A^*x\| \quad \textit{pour tout } x \in H$$

Corollaire 2.1.1 *Si $A \in B(H)$ est normal, on a :*

$$\ker(A) = \ker(A^*)$$

Proposition 2.1.2 [18] *Soit A est normal, on a :*

1. L'opérateur aA est aussi normal pour tout $a \in \mathbb{C}$.

2. L'opérateur A^nest aussi normal pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve. *1) Nous avons $(aA)(aA)^* = aaAA^*$ et $(aA)^*(aA) = aaA^*A$.*

puisque A est normale, d'où il sont égaux.

2) A est normal, d'ou $AA^* = A^*A$.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow (AA^*)^n = (A^*A)^n \\ &\Longrightarrow A^n(A^*)^n = (A^*)^nA^n \\ &\Longrightarrow A^n(A^n)^* = (A^n)^*A^n \end{aligned}$$

C'est-à-dire A^nest normal, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Corollaire 2.1.2 *Soit P est polynôme et A est un opérateur normal. Alors $P(A)$ est aussi normal.*

Remarque 2.1.1 *A^n normal$\nRightarrow$ A normal.*

En effet , soit $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. on a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est normal,mais n'est pas normal.

Proposition 2.1.3 [16]

Soit $A \in B(H)$ est normal, on a

$$\ker(A) \oplus \overline{\operatorname{Im}(A)} = H$$

Preuve. On sait que : $\ker(A^*) = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$,d'ou

$$(\ker(A^*)) = ((\operatorname{Im} A)^{\perp})^{\perp} = \overline{(\operatorname{Im} A)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} H &= \ker(A^*) \oplus (\ker(A^*))^{\perp} \\ &= \ker(A) \oplus \overline{\operatorname{Im}(A)}. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.4 [18] *(Inverse d'un opérateur normal)*

Soit $A \in B(H)$ est normal et inversible d'inverse A^{-1}. Alors A^{-1}est aussi normal.

Preuve. *On a :*

$$\begin{aligned} (A^{-1})^*A^{-1} &= (A^*)^{-1}A^{-1} \\ &= (AA^*)^{-1} = (A^*A)^{-1} \text{ (car } A \text{ normal)} \\ &= A^{-1}(A^*)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^* \end{aligned}$$

Donc A^{-1}est un opérateur normal.

Proposition 2.1.5 [18]

pour tout est unitaire. L'opérateur U^*AU est normal si et seulement si A est normal

.

■

Preuve. *On a :*

$$(U^*AU)^*(U^*AU) = U^*T^*AU$$

et

$$(U^*AU)(U^*AU)^* = U^*AA^*U$$

On remarque que $A^*A = AA^*$ si et seulement si U^*AU est normal.

Proposition 2.1.6 [18]

Soit $A \in B(H)$,les assertions suivantes sont équivalentes

i. *Aest normal.*

ii. *$A^{-1}A^*($ ou $A^*A^{-1})$ est unitaire.*

iii. *Il existe un opérateur U telque : $A^* = UA$.*

■

Preuve. *Montrons que*

1) i $\Longrightarrow$ ***ii*** *on a*

$$\begin{aligned}(A^{-1}A^*)^*(A^{-1}A^*) &= A(A^{-1})^*A^{-1}A^* \\ &= AA^{-1}(A^{-1})^*A^* = I(AA^{-1}) = I\end{aligned}$$

2) ii $\Longrightarrow$ ***iii*** *clair*

3)iii $\Longrightarrow$ ***i*** *pour tout* $x \in H$, *on a*

$$\begin{aligned}\|A^*x\|^2 &= \|UAx\|^2 \\ &= \langle UAx, UAx\rangle = \langle Ax, U^*UAx\rangle = \|Ax\|^2\end{aligned}$$

Donc, A *est normal.* ■

■

2.2 Quelque classes des opérateurs non normaux

Dans ce chapiter, nous étudierons certaines classes d'opérateur non normaux tels que les opérateurs hyponormaux ,et opérateurs normaloides et opérateurs paranormaux.

2.2.1 Opérateur hyponormal

Dans cett section, nous examinerons quelques générales des opérateurs hyponormaux

Définition 2.2.1 *Un opérateur* $A \in B(H)$ *est hyponormal si* $A^*A \geq AA^*$,*qui est équivalent à la condition* $\|A^*x\| \leq \|Ax\|$.*Un opérateur* $A \in B(H)$ *est cohyponormal si son adjoit est hyponormal. Si c'est hyponormal ou cohyponormal, alors on l'appelle seminormal.*

Proposition 2.2.1 [13]

Soit $A \in B(H)$, *alors* A *est un opérateur hyponormal si et seulement si* $A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A > 0$, *pour tous* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in H$ donnés. A est opérateur hyponormal si et seulement si :*

$$
\begin{aligned}
(\|A^*x\| \leq \|Ax\|) &\Longleftrightarrow \|Ax\|^2 + 2\lambda \|A^*x\|^2 + \lambda^2 \|Ax\|^2 \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \langle Ax, Ax\rangle + 2\lambda \langle A^*x, A^*x\rangle + \lambda^2 \langle Ax, Ax\rangle \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \langle A^*Ax, x\rangle + 2\lambda \langle AA^*x, x\rangle + \lambda^2 \langle A^*Ax, x\rangle \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \left\langle (A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A)x, x\right\rangle \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A > 0
\end{aligned}
$$

Remarque 2.2.1 *Si $A \in B(H)$ est hyponormal, alors $(A - \lambda I)$ est hyponormal pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$.*

■

Proposition 2.2.2 [13]

Soit $A \in B(H)$,et $\lambda \in \mathbb{C}$,si A est hyponormal et $(A - \lambda I)^{-1}$exists,alors $(A - \lambda I)^{-1}$ et hyponormal.

Preuve. *Puisque l'hyponormalité est préservée sous la traduction, on peut supposer* $\lambda = 0$.

Ainsi $A^*A - AA^* \geq 0$ et donc

$$0 \leq A^{-1}(A^*A - AA^*)A^{*-1} = A^{-1}A^*AA^{*-1} - I.$$

Maintenant depuis $A \geq I$ implique $A^{-1} \leq I$ nous avons

$$I - A^*A^{-1}A^{*-1}A \geq 0$$

Et donc

$$(T^{*-1}T^{-1} - T^{-1}T^{*-1}) = T^{*-1}(I - T^*T^{-1}T^{*-1}T)T^{-1} \geq 0$$

Qui compléte la preuve. ■

2.2.2 Opérateur normaloide

Définition 2.2.2 *Un opérateur $A \in B(H)$ est normaloide si $r(A) = \|A\|$, où*

$$r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|A^n\|^{1/n}$$

est le rayon spectral de A.

Proposition 2.2.3 [13]

$r(A) = \|A\|$ *si et seulement si* $\|A^n\| = \|A\|^n$.

Théorème 2.2.1 [13]

Tout opérateur hyponormal est normaloide.

Preuve. *Soit* $A \in B(H)$ *un opérateur hyponormal sur un espace de Hilbert* H ■

Revendicatin 01

$$\|A^n\|^2 \leq \|A^{n+1}\| \, \|A^{n-1}\| \text{ pour tout entier positif } n \ .$$

pour chaque $n \geq 1$ et chaque $x \in H$. Maintenant si A est hyponormal, alors

$$\|A^n x\|^2 = (A^n x, A^n x) = (A^* A^n x, A^{n-1} x) \leq \|A^* A^n x\| \, A^{n-1} x$$

et donc pour chaque $n \geq 1$.

$$\|A^n x\|^2 \leq \|A^{n+1}\| \, \|A^{n-1}\| \, \|x\|^2$$

qui assure le résultat revendiqué, complétant ainsi la preuve de la revendication 1.

Revendication 02

$$\|A^n\| = \|A\|^n \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Le résultat ci-dessus est trivial si $A = 0$ et il est également pour $n = 1$.Soit $A \neq 0$ et supposons que le résultat ci-dessus soit valable pou un entier $n \geq 1$:

Sellon la revendication 1, nous obtenons

$$\|A\|^{2n} = (\|A\|^n)^2 = \|A^n\|^2 \leq \|A^{n+1}\| \, \|A^{n-1}\| \leq \|A^{n+1}\| \, \|A\|^{n-1} .$$

Par conséquent, comme $\|A^n\| \leq \|A\|^n$,et puisque $A \neq 0$.

$$\|A\|^{n+1} = \|A\|^{2n} (\|A\|^{n-1}) \leq \|A^{n+1}\| \, \|A\|^{n+1} .$$

Donc $\|A^{n+1}\| = \|A\|^{n+1}$ .Ensuite, le revendiqué est valable pour $n+1$ à chaque fois qu'il est valide pour n,qui conclut la preuve de la revendication 2, et donc A est normaloide.

Depuis $\|A^{*n}\| = \|A^n\|$ pour chaque $n \geq 1$; ils'ensuit que $r(A^*) = r(A)$. donc un opérateur A est normaloide si et seulement si et son adjoit A^* est normaloide, et ainsi chaque opérateur seminormal est normaloide.

Proposition 2.2.4 [13]

Un opérateur A est normaloide si et seulement si

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{|\langle Ax, x\rangle|\}$$

Définition 2.2.3 *Pour un sous-ensemble convexe X du plan , un point $\lambda \in X$ est nu s'il y a un cercle tel qu'aucun point de X ne soit en dehors de cercle.*

Théorème 2.2.2 [18]

Soit A un opérateur tel que $(A - \lambda I)$ est normaloide pour tout numéro complexe λ, alors nous avons

$$\overline{W(A)} = co\ \sigma(A)$$

Où co $\sigma(A)$ désigne la coque convexe de $\sigma(A)$. Pour prouver le théoréme énonce ci-dessus, nous avons besoin du lemme du suivant.

Lemme 2.2.1 [13]

Soit Aun opérateur et $\lambda \in \overline{W(A)}$ un point de $\overline{W(A)}$, alors il existe un nombre complexe λ_0 satisfaisant

$$|\lambda - \lambda_0| = \sup\left\{|\mu - \lambda_0| : \mu \in \overline{W(A)}\right\}.$$

Lemme 2.2.2 [13]

Soit C un sous-ensemble convexe compact non vide du plan et S soit le collection de tous ses point nus. Alors C est la coque convexe fermée de S . Pour plus de commodité, nous énonçons le résultat connu suivant sous la forme d'un lemme.

Lemme 2.2.3 [16]

Pour un opérateur A, et $\lambda \in \overline{W(A)}$, et $\|\lambda\| = \|A\|$ implique $\lambda \in \sigma(A)$.

Corollaire 2.2.1 *Si un opérateur $A \in B(H)$ est compact et normaloide, alors $\sigma_p(A) \neq 0$. Et il existe $\lambda \in \sigma_p(A)$ tel que $\|\lambda\| = \|A\|$.*

Théorème 2.2.3 [20]

chaque opérateur hyponormal compact est normal.

Preuve. *Voir* $[13, p41]$ ■

2.2.3 Opérateur paranormal

Dans cett section, nous discutons d'une classe d'opérateur paranormaux. Dans [19], cela s'appelle un opérateur de classe (N). nous montrons que cette classe contiet les opérateurs hyponormaux et inclus dans la classe des opérateurs normaloids.

Définition 2.2.4 *Un opérateur $A \in B(H)$ est paranormal si $\|A^2x\| \geq \|Ax\|^2$ pour chaque vecteur unitaire x dans H .*

Proposition 2.2.5 *tout opérateur hyponormal est paranormal.*

Preuve. En effet,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \leq \|A^*Ax\| \leq \|A^2x\| \quad ■$$

Théorème 2.2.4 [13]

Soit $A \in B(H)$. si A est paranormal alors

1) *A est normaloid.*

2) *A^{-1} est également paranormal si A est inversible.*

Lemme 2.2.4 *Soit A un opérateur paranormal, alors :*

$$\left\|A^3x\right\| = \left\|A^2x\right\| \|Ax\|$$

Preuve. Pour chaque vecteur unitaire x en H, tel que $Ax \neq 0$.

$$\begin{aligned}\|A^3x\| &= \|Ax\| \left\|A^2\tfrac{Ax}{\|Ax\|}\right\| \geq \|Ax\| \left\|A\tfrac{Ax}{\|Ax\|}\right\|^2 \\ &= \tfrac{\left\|A^2x\right\|^2}{\|Ax\|} \geq \tfrac{\left\|A^2x\right\|\|Ax\|^2}{\|Ax\|} = \|A^2x\| \|Ax\|\end{aligned}$$

Lemme 2.2.5 *Soit A un opérateur paranormal, alors*

$$\left\|A^{k+1}x\right\|^2 \geq \left\|A^k x\right\|^2 \left\|A^2 x\right\|$$

Pour un entier positif $k \geq 1$, et chaque vecteur unité x dans H.

■

Preuve. Pour le cas $k = 1$

$$\left\|A^2 x\right\|^2 = \left\|A^2 x\right\| \left\|A^2 x\right\| \geq \left\|A^2 x\right\| \left\|Ax\right\|^2$$

et (P_1) est clair. maintenant supposons que (P_k) est valide pour k et que nous supposons que $\|Ax\| \neq 0$ alors

$$\begin{aligned}
\left\|A^{k+2}x\right\|^2 &= \|Ax\|^2 \left\|A^{k+1}\frac{Ax}{\|Ax\|}\right\|^2 \\
&\geq \|Ax\|^2 \left\|A^k \frac{Ax}{\|Ax\|}\right\|^2 \left\|A^2 \frac{Ax}{\|Ax\|}\right\| \\
&\geq \left\|A^{k+1}x\right\|^2 \left\|\frac{A^2 x}{\|Ax\|}\right\| \\
&\geq \left\|A^{k+1}x\right\|^2 \left\|A^2 x\right\|
\end{aligned}$$

par de lemme (2.2.4) et (P_k). Donc (P_{k+1}) est valide est la preuve est compléte par le calcul induction mécanique. ■

Théorème 2.2.5 [19]

Si A est un opérateur paranormal, alors A^n est paranormal pour chaque entier $n \geq 1$.

Preuve. Est suffisant pour montrer que si A et A^kest paranormal, alors A^{k+1} est paranormal aussi. Nous pouons supposer $\|A^2x\| \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\left\|A^{2(k+1)}x\right\|^2 &= \left\|A^2x\right\|^2 \left\|A^{2k}\frac{A^2x}{\|Ax\|}\right\|^2 \\
&\geq \left\|A^2x\right\|^2 \left\|A^{k}\frac{A^2x}{\|Ax\|}\right\|^2 \\
&\geq \frac{\left\|A^{k+2}x\right\|^2}{\|A^2x\|} \\
&\geq \frac{\left\|A^{k+1}x\right\|^2 \|A^2x\|}{\|A^2x\|} \\
&= \left\|A^{k+1}x\right\|^2
\end{aligned}$$

par (P_{k+1}) de lemma(2.2.5).Donc A^{k+1} est paranormal. Il existe un opérateur paranormal qui n'est pas hyponormal . c'est-à-dire que la classe des opérateur hyponormaux sont correctement inclus dans la classe des opérateurs paranormaux. Dans[12] Halmos un exemple d'opérateur hyponormal A tel que A^2 n'est pas hyponormal. Par le théoréme (2.2.5), ce A est paranormal. Nous obtenons donc un exemple de non hyponormal, dans le théoréme (2.2.3), nous prouvons que tout opérateur hyponormal compact est nécessairement normal, le théoréme suivant en est une légére généralisation. ■

Théorème 2.2.6 [19]

Soit A un opérateur paranormal tel que $A^{*p_1}A^{q_1}.....A^{*p_m}A^{q_m}$

est compact pour certains entiers non négatifs $p_1, q_1, ...p_m, q_m$. Alors A est nécessairement un opérateur normal.

Chapitre 3

La classe des opérateurs n-normaux

Dans ce chapitre, on présente les notions qui concernent la définition des classes opérateurs n-normaux, avec des exemples dans un espace d'Hilbert et des autres définitions et des résultat que nous avons utilisé dans notre travail avec des preuves détaillées. En plus on parle de la comparaison entre les opérateurs normaux et les opérateurs n-normaux. Enfin nous discuterons les opérateurs (n,m)-normaux.

3.1 Les opérateurs n-normaux

Définition 3.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$. $A \in B(H)$ est appelée opérateurs n-normal si*

$$A^n A^* = A^* A^n.$$

Proposition 3.1.1 *Soit $A \in B(H)$. Alors A est n-normal si est seulement si A^n est un opérateurs normal.*

Preuve. Soit A est un n-normal, $A^n A^* = A^* A^n$.

Alors

$$\begin{aligned} A^n (A^*)^n &= A^* A^n (A^*)^{n-1} \\ &= A^* (A^n A^*)(A^*)^{n-2} \end{aligned}$$

$$= (A^*)^2 A^n (A^*)^{n-2}$$
$$= (A^*)^n A^n$$

donc A^n est normal. Maintenant laissez A^n est un opérateur normal, depuis $A^n A = AA^n$, par le théoréme de fuglede, $A^* A^n = A^n A^*$,ainsi est A est n- normal. Il est qu'un opérateurs normal délimité est n-normal pour tout n, l'inverse n'est pas vrai. En effet

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

alors A est n-normal ce qui n'est pas normal. tous les opérateurs non nuls sont des opérateurs n-normaux, pour $n \geq k$ où K l'indice nilpotance, mais ils ne sont pas normaux. Est si A normal ,alors il est hyponormal . Est si A normal et A^k compact pour certains k. puis A est compact. ■

Exemple 3.1.1 *Soit $H = l^2$et $e_1, e_2, ...$ la base orthogonale standard pour l^2.*

Défini A sur H par :

$$Ae_i = \begin{cases} e_1, & i = 1 \\ e_{i+1}, & i = 2j \qquad , j = 1, 2, ... \\ 0, & i = 2j+1 \end{cases}$$

puis $A^2 = P$ où P est la projection orthogonale de l'éspace par e_1. Donc A est n-normal, mais ni A ni A^* est hyponormal.Maintenant, puisque A^2 est une projection sur un espace uni-dimentionnel, il est néanmois compact. Puisque la gamme de A contient un ensemble orthonormal infini $\{e_i, i = 1, 3, 5...\}$, il n'est pas compact.

Théorème 3.1.1 *L'ensemble de tous les opérateurs n-normal sur H est un sous-ensemble fermé de $B(H)$ qui est fermé sous multiplication scalaire.*

Preuve. Voir [1] ■

Proposition 3.1.2 *Soit $A \in B(H)$ est n-normal , puis le maintien suivant.*

1. *A^* est n-normal.*

2. *si A^{-1}existe,alors (A^{-1}) est n-normal.*

3. *si $S \in B(H)$ est unitaire équivalent à A puis S est n-normal.*

Théorème 3.1.2 *Si A, B sont des opérateurs n-normaux et commutatifs, alors AB est un opérateur n-normal.*

Preuve. Puisque A, B sont deux opérateurs n-normaux et commutatifs, A^n, B^n sont n-normaux et commutatifs. Alors A^n, B^n est un opérateur normal.

Puisque $A^nB^n = (AB)^n$, $(AB)^n$ est normal.

Donc AB est n-normal. ■

L'exemple suivant montre que le théoréme 3.1.1 n'est pas nécessairement vrai si A, B ne sont pas commutatifs.

Exemple 3.1.2 *Soit* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *,et* $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

deux opérateurs sur l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^2$. Alors A et B sont 2-normal, on remarque que

$$BA = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & i \end{pmatrix} = AB$$

mais comme $(BA)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4i \\ 0 & i \end{pmatrix}$ *n'est pas normal, BA n'est pas 2-normal.*

Corollaire 3.1.1 *Si $A \in B(H)$ est n-normal, alors A^m est n-normal pour tout entier positive m.*

Proposition 3.1.3 *On suppose que $A \in B(H)$ est un opérateur k-normal et qu'il est aussi un opérateur (k+1)-normal pour certains entiers positifs K. Alors A est (k+2)-normal, donc A est n-normal pour tous $n \geq k$.*

Preuve. Puisque A est n-normal

$$A^kA^* = A^*A^k \text{ donc } AA^kA^*A = AA^*A^kA$$

depuis $\qquad A^{k+1}A^*A = AA^*A^{k+1}$

puisque A est (k+1)-normal

$$A^*A^{k+2} = A^{k+2}A^*$$

donc A est (k+2)-normal. ■

Corollaire 3.1.2 *Si A est 2-normal est 3-normal, alors A est un opérateurs n-normal pour $n \geq 2$.*

Exemple 3.1.3 *Soit* $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$

être une opérateurs agissant dans l'espace complexe bidimensionnel Hilbert. Donc A est un 2-normal, et 3-normal. alors A est un n-normal pour tous $n \geq 2$ mais A n'est pas normal.

Proposition 3.1.4 *Suppose que $T \in B(H)$ est un opérateurs k-normal pour un entier positif k et qu'l sagit d'une isométrie partielle, puis T est un opérateurs n-normal pour tous $n \geq k$.*

Preuve. -Si A est une isométrie partielle ona : $AA^*A = A$

donc $AA^*A^k = A^k$ est $A^kA^*A = A^k$

-Si A est k-normal : $A^{k+1} = A^k$ est $A^*A^{k+1} = A^k$

donc $A^{k+1}A^* = A^*A^{k+1}$

-Si A est (k+1)-normal est par proposition(3.1.3), alors A est n-normal pour tous $n \geq k$. ■

Corollaire 3.1.3 *Si $A \in B(H)$ est 2-normal est isométrie partielle, alors A est n-normal pour tous les entiers $n \geq 2$.*

nous pas que, dans l'exemple(3.1.2) si un égal a 1. Alors A est un opérateur 2-normal et une isométrie partielle, mais pas normal

Preuve. voir[1]. ■

3.2 Comparaison entre les opérateurs normaux et les opérateurs n-normaux

Notons soigneusement la différence entre les opérateurs normaux et les opérateurs n-normaux.

Proposition 3.2.1 *Supposons que A est un opérateur normal, B est un opérateur linéaire.*

Si A et B commutent, alors A^*et B^* commutent ainsi.

Théorème 3.2.1 *Si A et B sont normaux et commutent entre eux, alors $A + B$ est un opérateur normal.*

Démonstration

Nous avons

$$\begin{aligned}(A+B).(A+B)^* &= (A+B)(A^*+B^*)\\ &= AA^*+AB^*+BA^*+BB^*\end{aligned}$$

et de même,

$$\begin{aligned}(A+B)^*(A+B) &= (A^*+B^*)(A+B)\\ &= A^*A+A^*B+B^*A+B^*B.\end{aligned}$$

Mais, puisque chacun de A, A^*, B, B^* commute avec tous les autre, en conséquence de la proposition précédete, les deux produits sont égaux. D'où $A + B$ est un opérateur normal.

L'eexemple suivant montre que la somme de deux opérateur n-normaux et commutatifs n'a pas besoin d'être n-normal.

Exemple 3.2.1 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *alors A et B sont 2-normal et commutatifs.*

Mais $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(A+B)^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *n'est pas normal.*

Donc $A+B$ *n'est pas 2-normal.*

Proposition 3.2.2 $(A-\lambda)$ *est un pérateur n-normal pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, *si et seulement si* A *est un opérateur normal.*

Preuve. Voir[1] ■

Proposition 3.2.3 *Supposons que* A *est àla fois k-normal et (k+1)-normal pour un entier positif* k. *Alors* A *est (k+2)-normal. Et alors* A *est n-normal pour tous* $n \geq k$.

Preuve. Puisque A est k-normal, $A^kA^* = A^*A^k$.

Alors $AA^kA^*A = AA^*A^kA$, d'où $A^{k+1}A^*A = AA^*A^{k+1}$. Puisque A est (k+1)-normal, $A^*A^{k+2} = A^{k+2}A^*$.

Donc A est (k+2)-normal. ■

Corollaire 3.2.1 *Si* A *2-normal et 3-normal, alors* A *est n-normal pour tous* $n \geq 2$.

L'exemple suivant montre qu'un opérateur 2-normal et 3-normal. Peut ne pas être normal.

Exemple 3.2.2 *Soit* $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ *un opérateur agissant dans un espace de Hilbert complexe bidimensionnel. Alors* A *est 2-normal, 3-normal, et alors* A *est n-normal mais pas normal.*

Proposition 3.2.4 *Supposons que* A *est un opérateur k-normal pour un entier positif k, et c'est une isométrie partielle. Alors* A *est (k+1)-normal.*

Donc A *est n-normal pour tout* $n \geq k$.

Preuve. Puisque A est isométrie partielle, $AA^*A = A$. $[10, \text{p,}250]$.

Alors $AA^*A^k = A^k$ et $A^kA^*A = A^k$. Puisque A est k-normal, $A^{k+1}A^* = A^k$ et $A^*A^{k+1} = A^k$.D'où $A^{k+1}A^* = A^*A^{k+1}$.

Donc A est (k+1)-normal. Et donc d'aprés la proposition précédente A est n-normal pour tout n, k. ■

Corollaire 3.2.2 *Si A est 2-normal et isométrie partielle, alors A est n-normal pour tout entier $n \geq 2$.*

Notons que, dans l'exemple précédent si a est égale à 1.

Alors A est un opérateur 2-normal et une isometrie partielle mais pas normal.

Lemme 3.2.1 *Soit A un opérateur k-normal et (k+1)-normal. Si A ou A^* est injectif, alors A est normal.*

Preuve. Puisque A est (k+1)-normal, $A^{k+1}A^* = A^*A^{k+1}$, et puisque A est k-normal, $A^{k+1}A^* = A^kA^*A$.

Donc $A^*(AA^* - A^*A) = 0$. Puisque A est injectif, $AA^* - A^*A = 0$, Donc A est normal.

Dans le cas A^* est injectif, puisque A^* est k-normal et (k+1)-normal, A^*est normal.

Donc A est normal. ■

Théorème 3.2.2 *Soit A un opérateur hyponormal tel que $A^n = B$ avec n est un entier positif et B un opérateur normal, alors A est normal.*

Preuve. Voir$[20, p14, 57]$ ■

3.3 Les opérateurs (n, m)-normaux

Définition 3.3.1 *pour (n, m) l'opérateur $A \in B(H)$ est dit être (n,m)-normal si :*

$$A^{*m}A^n = A^nA^{*m}$$

par la définition, il est clair que A est (n,m)-normal si et seulment si A^* est (n,m)-normal. De plus, si A^nest (n,m)-normal, alors A est (n,m)-normal pour chaque m. En effet, puis que A^n est normal et $A^m.A^n = A^n.A^m$, il résulte du théoréme de fuglede que $A^{*m}.A^n = A^n.A^{*m}$. Par conséquent A est (n,m)-normal.

Lemme 3.3.1 *1. A^*est (n,m)-normal.*

2. Si A^{-1}existe, alors A^{-1} est (n,m)-normal.

3. Si $S \in B(H)$ est équivalent unitaire à A, alors S est (n,m)-normal.

4. Si M est un sous-espace fermé de H qui réduit A, alors $A_{|_M}$est (n,m)-normal sur M.

5. Si A est (n,m)-normal, alors A^kest normal où k est le multiple le moins commun de n et m.

6. Si A est quasi-nilpotent, alors A est nilpotent.

Preuve. voir [1] ■

Preuve. les preuves des énoncés des points (1),(2),(3) et (4) sont clairement tenues par la définition . (5) pour $k = n.j$ et $k = m.l$. Puis A est (n,m)-normal , il s'ensuit que

$$A^{*k}A^k = \overbrace{A^{*m}......A^{*m}}^{l}.\overbrace{A^n......A^n}^{j} = A^n...A^n.A^{*m}...A^{*m} = A^kA^{*k}$$

que signifie que A^k est normal.

(6) Si A est quasi-nilpotent, i,e $\sigma(\pi) = \{0\}$, alors $\sigma(\pi) = \left\{\pi^k\right\} = \{0\}$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$. Soit k_0 le multiple le moins commun de n et m. Alors A^{k_0} est normale par lemma 3.3 (1). Puisque $A^{k_0} = 0$. ■

Corollaire 3.3.1 *Soit $A \in B(H)$ alors (n,m)-normal, donc A est isoloid est paraloid.*

En outre, que λ soit un point isolé du spectre de A, alors λ est un pôle du résolveur et les instructions suivantes.

1. Si $\lambda = 0$, alors $H_0(A) = E_A(\{0\})_H = \ker(A^{nm}) = \ker(A^{*nm})$, $E_A(\{0\})$ est auto-adjoit et l'ordre de 0 n'est pas supérieur à n.

2. Si $\lambda \neq 0$, alors $H(A - \lambda) = E_A(\{\lambda\})H = \ker(A - \lambda)$ et l'ordre de λ est 1.

Remarque 3.3.1 *Puisque A^{nm} est normal par lemma(4,2), nous disons que le théoréme de weyl's pour A si*

$$\sigma(A) \setminus \pi_{00}(A), \text{ ou équivalent, } \sigma(A) \setminus \sigma_w(A) = \pi_{00}(A)$$

où $\sigma_w(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} = A - \lambda$ *n'est pas bien*$\}$, $\pi_{00}(A) = \{\lambda \in iso(\sigma(A)) = 0 < \dim\ker(A-\lambda) < \infty\}$ *et* $iso(\sigma(A))$ *désigne l'ensemble de tous les points isolés de* $\sigma(A)$.

Théorème 3.3.1 *Soit* $A \in B(H)$ *alors (n,m)-normal, puis les déclarations suivantes :*

1. A est décomposable.

2. Si f est une fonction analytique sur $\sigma(A)$, *lequel n'est pas constante sur chacun des composants de son domaine, alors le théoréme de weyl's pour f(A).*

Preuve. voir[1] ■

Conclusion générale et perspectives

Le présent travail a permit de traiter une nouvelle classe d'opérateurs qui contient les opérateurs A tel que son adjoint commutent avec $A^n (n \in \mathbb{N}^*)$ c'est à dire :

$A^n A^* = A^* A^n$. Clairement tout opérateur normal est n-normal, la réciproque est fausse. Mais si l'opérateur A est n-normal et hyponormal, alors il est normal.

Les opérateurs nilpotents non nuls sont des opérateurs n-normaux pour $n \geq k$ avec k l'indice de la nilpotence, mais il ne sont pas normaux.

Si A est normal et A^k est compact pour quelques k, alors A est compact, cela n'a pas besoin d'être vrai dans le cas des opérateurs n-normaux.

Enfin nous avons donné un aperçu sur les opérateurs (n-m)-normaux.

Les perspectives de recherche dans le domaine traité ici dans ce mémoire sont nombreuses, on peut citer quelques unes.

- Essayer de trouver des conditions suffisantes plus pratique sur les opérateurs n-normaux pour devenir des opérateurs normaux.
- Quelle est la caractérisation du spectre de l'opérateur n-normal ?

Bibliographie

[1] S.A Alzuraiqi, A.B. Patel, *On n-normal operators,* General Mathematics Nots.1/2 (2010),61-73.

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle (théorie et applications)*, 2^{e} tirage, masson paris, 1983

[3] A.Benali, *Sur les opérateurs non-normaux,* Thèse de doctorat, Univ. Oran 1, A. Benbella, 2014/2015

[4] E. Cances, C. Lebris and Y. Maday, *Méthodes mathématiques en chimie quantique. Une introduction*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006

[5] A.Chaban, *Les critéres de commutativité d'opérateurs bornés et non bornés,* thése de doctorat, Univ. Oran 1,A. Benbella.

[6] J. Charles, M. Mbekhta and H. Queffelec, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs,* Dunod, Paris, 2010

[7] S. Chavan, *Spectral theorem for normal operators :application,* Harish-Chandra research institute, Allahabad.

[8] P.R.Chernoff, *A semibounded closed symetric operator whose square has trivial domain,* Proc. Amer. Math. Soc., 1983

[9] J. Chevalier, *Théorie spectrale et applications*, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées,1998

[10] John B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer Verlag, New York-Berlin Heidelberg Tokyo, 1985

[11] L. Debnath, P. Mikusinski, *Hilbert spaces with applications,* Elsevier Academic Press, 2005

[12] J. Derezinski, *Unbounded linear operators*, Hoza 74, 00-682, Warszawa, Poland, 2013

[13] S. Dehimi, *Operators similar to their adjoit,* Thése de doctorat, univ.d'Oran 2017.

[14] M.R.Embry, *Similarities involving normal operators on Hilbert space.* Pacific. J. Math, 1970

[15] E. Fricain, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs (cours et exercices),* Master (mathématiques pures), 2009/2010

[16] I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, *Basic Classes of Linear Operators,* BirkhäuserVerlag, Basel, 2003.

[17] S. Goldberg, *Unbounded linear operators*, Mc Graw-Hill, United States of America, 1966

[18] M. Guesba, *Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts,* thése de doctorat, Univ.Mohamed Boudiaf-M'sila 2017.

[19] V.Istratescu, T. Saito, and T. Yoshino : *On a class of operators.* TShoku. Math. joun, 18,410-413(1966).

[20] V.ISTRATESCU, *On Some hyponormal operators,* Pacific J.Math.22(3)(1967) 413-417.

[21] I. Kaplansky, *Products of normal operators,* Duke Math. J., 20/2 ,1953

[22] T.Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1995

[23] I. Lankham, B.Nachtergaele, A.Schilling, *The spectral theorem for normal linear maps*, University of california, Davis, 2007

[24] D.Li, *Notions de Théorie Spectrale*, Université d'Artois, Faculté des Sciences Jean Perrin, Analyse Fonctionnelle (Master 1 Mathématiques-Informatique).

[25] M.Nadir, *Opérateur positif,* Cours d'analyse fonctionnelle sur le site web (www.mostefanadir.com), 2017

[26] M.Nadir, *Opérateurs continus,* Cours d'analyse fonctionnelle sur le site web (www.mostefanadir.com), 2017

[27] M.Nadir, *Opérateur compact,* Cours d'analyse fonctionnelle sur le site web (www.mostefanadir.com), 2017

[28] A.Smati, *Etude des condition entre les opérateurs compacts, normaux et positifs,* thése de doctorat, Université Mohamed Boudiaf-M'sila, 2018.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة المؤثرات ن-ناظمية من خلال تعريفها وذكر اهم خصائصها ثم مقارنتها بالمؤثرات الناظمية. وفي الاخير اعطينا لمحة حول المؤثرات (ن.م)-ناظمية.

الكلمات المفتاحية

المؤثرات الناظمية . المؤثرات ن.ناظمية.

Résumé

Dans ce mémoire , nous avons fait une étude n-normaux, en le définissante et en mentionnat ses caractéristiques les plus importantes. Ensuite, comparez-le au opérateurs normaux. Enfin, nous avons donné un aperçu sur les opérateurs (n.m)-normaux.

Mots clés :

-opérateurs normaux.

-opérateurs n-normaux.

Abstract :

In this memory, We have studied n-normal operators, by defining it and mentioning its most important characteristics. Then compare it to normal operators. Finaly, we gave a glimpse of it (n-m)-normal operators.

Key words:

Normal operators. n-normal operators.