



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et discrètes

Thème

*Problème pour les équations aux
dérivées partielles avec des conditions
non Locales*

Par:

GUESMIA AFAF

Dirigé par :

Pr. Benhamidouche Nourddine

Promotion : 2013-2014

PROBLÈME NON LOCAL POUR UNE ÉQUATION ELLIPTIQUE	29
1.1 Problème non local pour une équation elliptique avec des conditions homogènes	29
1.1.1 Cas particulière	31
1.2 Problème non local pour une équation elliptique avec des conditions non homogènes	32
1.2.1 Application	33

Table des matières

Conclusion	37
------------	----

Introduction	2
--------------	---

1 PROBLÈME NON LOCAL POUR UNE ÉQUATION PARABOLIQUE	3
1.1 Problème non local pour une équation parabolique avec des conditions homogènes	3
1.1.1 Cas particulière	6
1.2 Problème non local pour une équation parabolique avec des conditions non homogènes	8
1.2.1 Introduction	8
1.2.2 Cas d'une équation linéaire	9
1.2.3 Cas d'une équation non linéaire	12
1.2.4 Application	15
2 PROBLÈME NON LOCAL POUR UNE ÉQUATION HYPERBOLIQUE	18
2.1 Problème non local pour une équation hyperbolique avec des conditions homogènes	18
2.1.1 Cas particulière	20
2.2 Problème non local pour une équation hyperbolique avec des conditions non homogènes	22
2.2.1 Cas d'une équation linéaire	22
2.2.2 Cas d'une équation non linéaire	25
2.2.3 Application	27

3 PROBLÈME NON LOCAL POUR UNE ÉQUATION ELLIPTIQUE	29
3.1 Problème non local pour une équation elliptique avec des conditions homogènes	29
3.1.1 Cas particulière	31
3.2 Problème non local pour une équation elliptique avec des conditions non homogènes	32
3.2.1 Application	35
Conclusion	37
Bibliographie	37

Introduction

Les équations aux dérivées partielles sont un outil essentiel de modélisation et leur étude occupe les mathématiciens depuis le dix-huitième siècle avec les travaux d'Euler, d'Alembert, Lagrange et de Laplace. Au fil de ces trente dernières années beaucoup de problèmes physiques, mécaniques et biologiques ont été modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP), paraboliques, hyperboliques et elliptiques, mais avec des conditions aux bords intégrales. Ces conditions apparaissent principalement lorsque les données sur la frontière ne peuvent pas être mesurées directement, mais seulement leurs valeurs moyennes sont connues.

Les conditions aux limites de ce type sont appelées des conditions aux limites non locales, et le problème de la détermination d'une solution de l'équation aux dérivée partielle pour toutes les données initiales est appelée le problème non local. Ainsi, les EDPs avec des conditions aux bords intégrales, ont bénéficié d'une très grande attention.

Différents problèmes rencontrés en génie chimique, la transmission de chaleur, la physique des plasmas, thermoélasticité. Voir à ce sujet les articles Cahlon et Kulkarni et Shi [1], Cannon [2], Choi et Chau [4], Kamayn [3], Shi [5]. Pour certains problèmes paraboliques non locaux, la consécration de l'équation différentiel partiel du second ordre avec condition non local de type intégrale par la méthode de potentiel dans Cannon [2], Kaymin [3] et Batten [7]. En 1986, Yurchuk [8] a utilisé la condition intégrale $\int_0^1 u(t, x) dx = \varphi(t)$, Pour certains équations paraboliques. En utilisant la méthode de Fourier, Belin [9] a obtenu des résultats d'existences et d'unicités de la solution. Concernant la méthode d'analyse fonctionnelle. Nous citons les travaux de Bouziani [12]. Pour le cas hyperbolique, en transformant l'équation linéaire du second ordre avec contraintes pour résoudre le problème hyperbolique et en utilisant le théorème de la représentation de Riesz et le théorème de Schauder point

fixe dans Pulkina [10]. l'existence et l'unicité des solutions générales ont étudié par Bougoffa [11], Benouar [13], Bouziani [14].

Le présent mémoire est composé de trois chapitres.

Le premier chapitre concerne l'étude d'un problème local pour l'équation parabolique. Nous allons présenter une approche similaire pour résoudre les problèmes non locaux de la chaleur. Nous transformons d'abord les problèmes non locaux à un problème de Dirichlet local, en utilisant la méthode de séparation des variables pour l'équation de chaleur avec des conditions homogènes, et la méthode de décomposition Adomian pour l'équation parabolique avec des conditions non homogènes.

Le deuxième chapitre, est consacré à l'étude d'un problème non local pour l'équation hyperbolique, les méthodes utilisées sont celle dans le chapitre précédent.

Enfin, dans le chapitre trois, on étudie d'un problème non local de type elliptique.

1.1 Problème non local pour une équation parabolique avec des conditions homogènes

Nous allons utiliser dans ce paragraphe la méthode de séparation de variables qui consiste à chercher la solution du problème sous forme d'une série. On considère le problème (P_1) pour l'équation de la chaleur linéaire

$$u_t - k u_{xx} = 0, \quad k \geq 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

avec la condition initiale

$$u(0, x) = \alpha(x), \quad (1.2)$$

et des conditions aux limites non locales homogènes de type intégrale

$$\int_0^b \varphi_1(x) u(t, x) dx = 0 \quad \text{ou} \quad \int_0^b \varphi_2(x) u(t, x) dx = 0 \quad (1.3)$$

où $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2$ et φ_1, φ_2 sont spécifiés comme des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$.

Dans un premier temps nous transformons notre problème non local (1.1) - (1.3) à un

CONCLUSION

Nous avons présenté une étude sur les problèmes de type paraboliques, hyperboliques et elliptiques avec des conditions non locales. Ces problèmes sont difficiles à traiter, nous avons transformé ces problèmes à partir des changements des variables à des problèmes locaux de type Dirichlet ou Neumann.

Ensuite, nous avons utilisé la méthode classique de séparation des variables pour résoudre ces problèmes.

Enfin, plusieurs exemples ont été donnés pour illustrer notre travail.

Bibliographie

- [1] BATTEN, G.W. JR.: Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of the mixed boundary problem for parabolic equations. *Math. Comput.* 17, 405–413 (1963)
- [2] BELIN, S.A.: Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions. *Electron. J. Differ. Equ.* 76, 1–8 (2001)
- [3] BENOUAR, N.E., YURCHUK, N.I.: Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator. *Differ. Uravn.* 27, 2094–2098 (1991)
- [4] BOUZIANI, A.: Problème aux limites pour certaines equations de type non classique du troisième ordre. *Bull. Cl. Sci., Acad. R. Belg.* 6, 215–221 (1995)
- [5] BOUZIANI, A.: On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition. *Int. J. Math. Math. Sci.* 31, 201–213 (2002)
- [6] BOUGOFFA, L.: Weak solution for hyperbolic equations with a nonlocal condition. *Aust. J. Math. Anal. Appl.* 2, 1–7 (2005)
- [7] BOUGOFFA, L.: Adomian method for a class of hyperbolic equations with an integral condition. *Appl. Math. Comput.* 177, 545–552 (2006)
- [8] L. BOUGOFFA, R. RACH, A. MENNOUNI, A convenient technique for solving linear and nonlinear Abel integral equations by the Adomian decomposition method, *Appl. Math. Comput.* 218 (2011) 1785–1793.

- [9] L. BOUGOFFA, M. AL-HAQBANI, R. RACH, A convenient technique for solving integral equations of the first kind by the Adomian decomposition method, *Kybernetes* 41 (2012) 145–156.
- [10] CAHLON, B., KULKARNI, D.M., SHI, P.: Stepwise stability for the heat equation with a nonlocal constraint. *SIAM J. Numer. Anal.* 32, 571–593 (1995)
- [11] CANNON, J.R.: The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Q. Appl. Math.* 21, 155–160 (1963)
- [12] CHOI, Y.S., CHAN, K.Y.: A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry. *Nonlinear Anal.* 18, 317–331 (1992)
- [13] CHOUIER F., Problèmes mixtes avec conditions aux limites du type non classique, Mémoire de Magister, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Exactes, Université Mentouri Constantine, mars (2001).
- [14] DEHGHAN, M.: Application of the Adomian decomposition method for two-dimensional parabolic equation subject to nonstandard boundary specifications. *Appl. Math. Comput.* 157, 549–560 (2004)
- [15] KAMYNIN, N.I.: A boundary value problem in the theory of the heat conduction with non-classical boundary condition. *USSR Comput. Math. Math. Phys.* 4, 33–59 (1964)
- [16] PULKINA, L.S.: A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations. *Electron. J. Differ. Equ.* 45, 1–6 (1999)
- [17] SAMARSKI, A.A.: Some problems in the modern theory of differential equations. *Differ. Uravn.* 16, 1221–1228 (1980)
- [18] SHI, P.: Weak solution to evolution problem with a nonlocal constraint. *SIAM J. Math. Anal.* 24, 46–58 (1993)
- [19] YURCHUK, N.I.: Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations. *Differ. Equ.* 22, 1457–1463 (1986).