



République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de L'informatique
Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématique

Spécialité : Equations aux dérivées partielles et applications

Par:
Adjimi Lobna

SUJET

**Traitement numériques des équations
différentielles d'ordre fractionnelle**

Date de soutenance : 11 /06/2018

Devant le jury:

Mr. Arioua Yacine	MCA. Univ de M'sila	Président
Mr. Merzougui Abdelkrim	MCA. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. Mihoubi Farid	MAA. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2017 / 2018

Remerciements

Après avoir remercié ALLAH le tout puissant, je voudrais adresser toute ma gratitude et mes sincères remerciements

à mon encadreur : Mr. Merzougui Abdelkrim qui m'a proposé le sujet.

Je le remercie pour son aide, sa patience, son soutien, ses conseils et pour toute l'attention qu'il a portée à ce travail.

Je tiens à remercier aussi les membres de jury de m'avoir accepté d'évaluer ce travail.

Je clos enfin ces remerciements en dédiant ce travail à mes parents, spécialement à l'âme de ma mère à qui je dois tout, que

Dieu la bénisse et l'accueille dans son vaste paradis, à mon mari, à mon cher frère et mes sœurs.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à l'âme de ma mère à qui je dois tout, que dieu
la bénisse et l'accueille dans son

vaste paradis,

A mon cher père, mon cher frère et mes chères sœurs,

A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur
persévérance.

A toute ma famille.

A tous les amis.

A tous les étudiants d'université de M'sila.

A tous.

Table des matières

Remerciements	i
Dédicaces	ii
Table des matières	iv
notatios	v
Table des figures	vi
List des Tableaux	vii
Introduction	1
1 Bases mathématiques du calcul fractionnaires	2
1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire	2
1.1.1 La fonction Gamma	2
1.1.2 La fonction Bêta	3
1.1.3 La fonction Mittag-Leffler	3
1.2 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$	4
1.3 Dérivées fractionnaires	6
1.3.1 Approche de Riemann-Liouville	6
1.3.2 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo	8
1.4 Propriétés des opérateurs fractionnaires	9

2 Equations Différentielles Fractionnaires	13
2.1 Quelques résultats d'existence et d'unicité	13
2.1.1 Existence et unicité pour l'équation de type Caputo	14
2.2 Quelques méthodes pour la résolution des EDO	17
2.2.1 La méthode ADM	17
2.2.2 la transformée de laplace	23
2.3 Résolution des EDFs par la méthode d'Adomian	25
2.4 Résolution des EDFs par la transformée de Laplace	27
3 Résolution numérique des équations différentielles fractionnaires	31
3.1 Méthode d'Euler	31
3.2 Méthode d'Eulers améliorée	33
3.3 Méthode de Taylor	35
3.4 Méthode de Runge-kutta 2	37
3.5 Méthode de Runge-kutta 4	38
3.6	38
4 résultats numériques	39
Conclusion	44

NOTATIONS

- $C^n([a, b])$: L'ensemble des fonctions n fois continuellement dérivables sur $[a, b]$.
- \mathbb{R} : Ensemble des réels.
- \mathbb{N} : Ensemble des nombres naturels.
- \simeq : Approximation.
- A : Opérateur différentiel contenant des termes linéaires et des termes non linéaires.
- N : le terme non linéaire.
- L : opérateur linéaire.
- R :Le reste.
- $f(x)$: Fonction donnée.
- λ : Un paramètre réel .
- $A_n(x)$: les polynômes d'Adomian.
- D^α : la dérivée fractionnaire d'ordre α .
- ${}^cD^\alpha$: la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de caputo.
- I^α :L'intégrale fractionnaire de Riemann_Liouville d'ordre α .

Table des figures

- Fig 4.1.1** :Comparaison entre la solution approchée(Euler) et la solution exacte
pour $n = 20$page 43
- Fig 4.1.2** :Comparaison entre la solution approchée(Euler améliorée) et la solution exacte
pour $n = 20$page 43
- Fig 4.1.3** :Comparaison entre la solution approchée (Taylor)et la solution exacte
pour $n = 20$page 44
- Fig 4.1.4** :Comparaison entre la solution approchée (Runde_kuta 2)et la solution exacte
pour $n = 20$page 44
- Fig 4.1.5** :Comparaison entre la solution approchée (Runde_kuta 4)et la solution exacte
pour $n = 20$page 45

Liste des Tableaux

Tab 4.1.1 : Comparaison entre les solutions approchées (Euler, Euler améliorée, Taylor, Runge_Kutta 2 et Runge_Kutta 4) et la solution exacte pour $m = 10$ page 45

Tab 4.1.2 : Comparaison entre les erreurs des ((Euler ,Euler améliorée, Taylor, Runge_Kutta 2 et Runge_Kutta 4) pour $m = 10$ page 46

Introduction

La théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique que nous le connaissons aujourd'hui. Ces origines remontent à la fin du 17^{ième} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral.

Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à L'Hospital en 1695, L'Hospital a répondu. Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que L'Hospital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction, a en fait donné lieu au nom de ce domaine des mathématiques.

Maintenant, nous citons une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20-^{ième} siècle :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent(1884), P.A. Nekrassov(1888), A. Krug (1890), J. Hadamard(1892), O. Heaviside(1892-1912), S. Pincherle(1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood(1917-1928), H. Weyl(1917), P. Levy(1923), A. Marchaud(1927), H.T. Davis(1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Amour (1938-1996), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de 30 ans, elle a été l'objet de quelques conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en

juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968.

Ce mémoire se compose de quatre chapitres partagés de la manière suivante:

Premier chapitre: Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions des fonctions de base utiles tout au long de ce mémoire à savoir (la fonction Gamma, la fonction Bêta et La fonction Mittag-Leffler), nous introduisant aussi la transformé de Laplace et les définitions de quelques opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires et leurs propriétés.

Le deuxième chapitre de ce mémoire étudie l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire de type Caputo, suivi de la méthode ADM et la la méthode de la transformé de laplace pour la résolution des équations différentielles ordinaires et les équations différentielles fractionnaires.

Troisième chapitre : de ce mémoire est consacré aux méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles fractionnaires. On citera par exemple les méthodes, Méthode d'Euler, la Méthode d'Euler améliorée, la Méthode de Taylor, la Méthode de Runge_kuta 2 et la Méthode de Runge_kuta 4.

Quatrième chapitre: Dans ce chapitre, nous donnons quelques exemples numérique d'équations différentielles fractionnaires où nous comparons la solution exacte avec la solution approchée.

Chapitre 1

Bases mathématiques du calcul fractionnaires

1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous introduisons la fonctions Gamma , la fonction Bêta et Mittag-Leffler, qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces application.

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale, elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (excepté en certains points)

Définition 1.1.1 pour $z \in \mathbb{C}$ telque $\text{Re}(z) > 0$, la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt .$$

Propriétés :

1. La propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est donnée par la relation de récurrence suivante :

$\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$, qu'on peut la démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z).$$

2. $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, et aussi $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
3. $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$
4. Si $n \in \mathbb{N}$ alors $\Gamma(z + 1) = n!$ et aussi si $n \in \mathbb{N}$ alors: $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

1.1.2 La fonction Bêta

Définition 1.1.2 La fonction Bêta est une fonction définie par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad \text{Re}(p) > 0; \text{Re}(q) > 0. \quad (1.2)$$

La fonction Gamma et la fonction Bêta sont liées par la relation suivante:

$\forall p, q > 0$, on a :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.1.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, e^z , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (1.3)$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres elle joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

Cette dernière a été introduite par Agarwal [13] et elle est définie par le développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (1.4)$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la relation (1.3). A partir de la relation (1.4) on a :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle. la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres pour différentes valeurs de α et β .

1.2 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$. On considère l'intégrale :

$$\begin{aligned} I^{(1)}f(x) &= \int_a^x f(t)dt \\ I^{(2)}f(x) &= \int_a^x I^{(1)}f(u)du \\ &= \int_a^x \left(\int_a^u f(t)dt \right) du \\ &= \int_a^x \left(\int_t^x du \right) f(t)dt \\ &= \int_a^x (x-t)f(t)dt. \end{aligned}$$

En général la $n^{\text{ième}}$ itération de l'opérateur I peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I^{(n)}f(x) &= \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt. \end{aligned} \quad (1.5)$$

pour tout entier n .

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n - 1)!$

Riemann rendu compte que le second membre de (1.5) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il a défini l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 1.2.1 si $f \in C[a; b]$; $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

$$I_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt \text{ telle que } a \in]-\infty; +\infty[\quad (1.6)$$

est appelée l'intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α , et l'intégrale :

$$I_{b^-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt \text{ telle que } b \in]-\infty; +\infty[\quad (1.7)$$

est appelée l'intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α .

Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).

Théorème 1.2.1 [6] Pour $f \in C[a; b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :

$$I_{a^+}^{(\alpha)} [I_{a^+}^{(\beta)} f(x)] = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x) \quad \text{pour } \alpha > 0, \beta > 0.$$

preuve . La preuve découle directement de la définition suivant:

$$I_{a^+}^{(\alpha)} [I_{a^+}^{(\beta)} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-1}} \int_a^t \frac{f(u)}{(t-\mu)^{1-\beta}} du.$$

Or $f \in C [a, b]$, d'après le théorème de Fubini et par le changement de variable $t = u + (x - u)$

on obtient:

$$I_{a^+}^{(\alpha)} [I_{a^+}^{(\beta)} f(x)] = \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-t)^{1-\alpha-\beta}} du = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x).$$

Où $B(\alpha, \beta)$ désigne la fonction Bêta.

Propriétés

1. Transformé de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville pour $a = 0$ d'une fonction f qui possède la transformé de Laplace $F(s)$ dans le demi plan $Re(s) > 0$ est :

$$L(I^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} F(s).$$

2.

$$I^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + \gamma + 1)} t^{\alpha+\gamma}.$$

1.3 Dérivées fractionnaires

Dans la littérature il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications Riemann-Liouville et Caputo.

1.3.1 Approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a, t]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n - 1 < p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par:

$$\begin{aligned} {}^R D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-\alpha} f(t)) \end{aligned} \tag{1.8}$$

1. La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$${}^R D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^p$ au sens de Riemann-Liouville

Soit p non entier et $0 < n-1 < \alpha < n$ et $p > -1$, alors on a:

$${}^R D^\alpha (t-a)^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^p d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned} {}^R D^\alpha (t-a)^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\alpha-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^p ds \\ &= \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1)\beta(n-\alpha, p+1)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(n+p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha} \end{aligned}$$

A titre d'exemple :

$${}^R D^{0.5} t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5)$$

Propriété Composition avec l'intégrale fractionnaire :

– L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire :

$${}^R D^\alpha (I^p f(t)) = f(t),$$

– on a

$${}^R D^\alpha (I^q f(t)) = {}^R D^{\alpha-q} f(t)$$

– La dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas.

pour $m - 1 < q < m$

$${}^R D^{-\alpha} ({}^R D_t^q f(t)) = {}^R D^{q-\alpha} f(t) - \sum_{k=1}^m [{}^R D^{q-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \quad (1.9)$$

1.3.2 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

On va introduire une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 1.3.1 Soit $\alpha > 0$ avec $n - 1 < \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$) et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a; b]$. La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est définie par :

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Propriétés :

1. Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville :

Soit $\alpha > 0$ avec $n - 1 < \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$), supposons que f est une fonction telle que ${}^C D_t^\alpha(f(t))$ et ${}^R D_t^q(f(t))$ existent alors :

$${}^C D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha [f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}] \quad (1.11)$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, on aura :

$${}^C D^P f(t) = {}^R D^P f(t)$$

2. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :

Si f est une fonction continue on a :

$${}^C D^P I_a^p f = f \quad \text{et} \quad I_a^{pC} D^P f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!} \quad (1.12)$$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo :

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$${}^C D^\alpha C = 0$$

2. La dérivée de $f(t) = (t - a)^p$ au sens de Caputo :

Soit α un entier et $0 \leq n - 1 < \alpha < n$, avec $\alpha > n - 1$, alors on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(p - n + 1)} (\tau - a)^{p-n},$$

$${}^C D^\alpha (t - a)^p = \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} (\tau - a)^{p-n} d\tau,$$

En effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$ on obtient :

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha (t - a)^p &= \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} (\tau - a)^{p-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)} (t - a)^\alpha \int_0^1 (1 - s)^{n-\alpha-1} s^{p-n} ds. \\ &= \frac{\Gamma(p + 1)\beta(n - \alpha, p - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)} (t - a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)\Gamma(p - \alpha + 1)} (t - a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(p - \alpha + 1)} (t - a)^{p-\alpha} \end{aligned}$$

1.4 Propriétés des opérateurs fractionnaires

Linéarité

La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérateurs linéaires :

$$D^\alpha(\gamma f(t) + \sigma g(t)) = \gamma D^\alpha f(t) + \sigma D^\alpha g(t)$$

Composition entre les opérateurs

La propriété de composition des dérivées usuelles

$$\frac{d^m}{dt^m} \frac{d^n}{dt^n} = \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}},$$

Ne s'étend au cas fractionnaire que pour des fonctions dont les dérivées successives sont nulles au bord (sauf si $m + n < 1$).

- soit $\alpha > 0, \beta > 0$ et $f \in L^1([a; b])$. Alors

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t).$$

- soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a; b])$. Alors

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t).$$

- soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et $f \in C^n([a; b])$. Alors

$$I_a^{\alpha C} D_a^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Remarquons que des formules pour $I_a^\alpha D_a^\alpha f$ et $D_a^\alpha I_a^\alpha f$ existent, mais elles font apparaître des termes de bords plus complexes et les conditions sur f sont plus délicates.

- soit $0 < \alpha < 1$ et $f \in C([a; b])$. Alors

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f = D_a^\alpha I_a^\alpha f = f.$$

- soit $0 < \alpha < \beta$ et $f \in L^1([a; b])$. Alors

$$D_a^\alpha I_a^\beta f = I_a^{\beta-\alpha} f.$$

- soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $m = [\alpha] + 1$; $n = [\beta] + 1$ et $p = [\alpha + \beta] + 1$

si $f \in C_+^P([a, b])$, alors

$$D_a^\alpha D_a^\beta f = D_a^{\alpha+\beta} f.$$

Le résultat reste valable si l'on remplace un nombre quelconque de dérivées de Riemann par des dérivées de Caputo. Par exemple,

$${}^c D_a^{\alpha c} D_a^\beta f = {}^c D_a^{\alpha+\beta} f.$$

- soit $0 < \alpha < 1$ et $f \in C^2([a; b])$. Alors
- si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, ${}^c D_a^\alpha {}^c D_a^\alpha f = {}^c D_a^{2\alpha} f$.
- si $\alpha = \frac{1}{2}$, ${}^c D_a^{\frac{1}{2}} {}^c D_a^{\frac{1}{2}} f = f'$.
- si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; ${}^c D_a^\alpha {}^c D_a^\alpha f(t) = {}^c D_a^{2\alpha} f(t) + \frac{(t-a)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f'(a)$.

Toutes les démonstrations se trouvent dans [10].

Intégration par parties

La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais là encore sous certaines restrictions. C'est ici qu'apparaissent inévitablement les opérateurs à droite. Dans [10] apparaît une formule d'intégration par parties, mais elle requiert plusieurs conditions. Nous préférons donner ici une version simplifiée avec des conditions explicites que nous avons trouvé dans [11].

Corollaire 1.4.1 *soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ telsque $n - 1 < \alpha < n$ soit $f \in C^n([a; b])$ et $g \in C_0^n([a; b])$ Alors*

$$\int_a^b f(t) D_a^\alpha g(t) dt = \int_a^b D_b^\alpha f(t) g(t) dt$$
$$\int_a^b f(t) D_b^\alpha g(t) dt = \int_a^b D_a^\alpha f(t) g(t) dt$$

Nous venons de voir les principales propriétés des opérateurs fractionnaires. Plusieurs des résultats prouvés ici peuvent être retrouvés dans [14]. On remarquera l'absence de généralisation pour la dérivée du produit et de la composition de deux fonctions. Ces caractéristiques de la dérivée classique passent effectivement mal au fractionnaire. Quelle que soit la définition utilisée et même avec des restrictions sur les fonctions :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(f \cdot g) \neq \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(f) \cdot g + f \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(g)$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(f \circ g) \neq \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}f(g) \cdot g'$$

Chapitre 2

Equations Différentielles

Fractionnaires

Le but de ce chapitre est de présenter, les éléments de base sur la théorie des équations différentielles fractionnaires. Nous commençons par considérer la question d'existence et d'unicité de la solution d'un problème à valeurs initiales pour une équation différentielle fractionnaire. Puis nous traitons les questions de résolution d'équations différentielles fractionnaire et nous terminons ce chapitre par la présentation de quelques méthodes de résolution d'équations différentielles fractionnaires.

2.1 Quelques résultats d'existence et d'unicité

Dans cette partie on va discuter les propriétés d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. On va se restreindre à des problèmes aux conditions initiales (problèmes de Cauchy). En plus, on va supposer sans perte de généralité que les dérivées fractionnaires sont développées au point 0. Comme conséquence, on utilisera les symboles ${}^R D^\alpha$, ${}^C D^\alpha$ pour les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville, Caputo développées au point 0. on commence par donner une définition d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire (EDF) :

Définition 2.1.1 [4] soit $\alpha > 0$ et $n \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ et $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Alors

$$D^\alpha y(x) = f(x, y(x)) \quad (2.1)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville. Comme conditions initiales pour ce type d'EDF on utilise :

$$D^{\alpha-k}y(0) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} I^{n-\alpha}y(z) = b_n \quad (2.2)$$

De la même manière

$${}^C D^\alpha y(x) = f(x, y(x)) \quad (2.3)$$

Est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo et dans ce cas on utilise comme conditions initiales :

$$y^k(0) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.4)$$

L'utilisation de conditions initiales de différents types pour les équations différentielles fractionnaires(2.1) et (2.3) nous assure l'unicité des solutions de l'EDF correspondante qu'on va prouver dans les théorèmes suivants [11].

2.1.1 Existence et unicité pour l'équation de type Caputo

Un résultat similaire peut être obtenu pour une équation différentielle fractionnaire de type Caputo :

Théorème 2.1.1 [4] [8] *soit $\alpha > 0$ et $n \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$. De plus, soit $k > 0$, $h^* > 0$, et $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$. on défini*

$$G = [0, h^*] \times [b_0 - k, b_0 + k],$$

et soit la fonction continue $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, il existe un réel $h > 0$ et une fonction $y \in C[0, h]$ solution de l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo (2.3) munie des conditions initiales(2.4). Dans le cas $\alpha \in (0, 1)$ le paramètre h est donné par la relation

$$h = \min\{h^*, (k\Gamma(\alpha + 1)/M)^{1/\alpha}\}, \quad \text{avec } M = \sup_{(x,z) \in G} |f(x, z)|.$$

Si de plus f vérifie la condition de Lipschitz par rapport à la seconde variable, c'est-à-dire

:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L |y_1 - y_2|.$$

avec $L > 0$ une constante indépendante de x, y_1 et y_2 , alors la fonction $y_2 \in C[0, h]$ est unique.

On va suivre le même processus pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème aux conditions initiales de type Caputo (2.3) – (2.4). D'abord énonçons le lemme suivant:

Lemme 2.1.1 [3] [5] *Sous les hypothèses du théorème (2.2) la fonction $y_2 \in C[0, h]$ est une solution de l'EDF de type Caputo (2.3) avec les conditions initiales (2.4) si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale de Volterra du second type :*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t, y(t)) dt. \quad (2.5)$$

Preuve. [1] Premièrement supposons que y est solution de l'équation précédente, on peut écrire cette équation sous la forme réduite : ■

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} y_0^{(k)} + I_0^\alpha f(x, u(x)).$$

En appliquant l'opérateur de différentiation ${}^R D_0^\alpha$ sur les deux cotés de cette relation on aura immédiatement que y est solution de l'équation différentielle.

Appliquons maintenant l'opérateur ${}^R D_0^k$, $0 \leq k \leq n-1$ sur l'équation de Volterra

$${}^R D_0^k u(x) = \sum_{j=0}^{n-1} {}^R D_0^k \frac{(x)^j}{j!} u_0^{(j)} + {}^R D_0^k I_0^k I_0^{\alpha-k} f(x, u(x)).$$

${}^R D_0^k(t)^j = 0$ pour $j < k$ alors si $x = 0$ on a :

$${}^R D_0^k u(0) = {}^R D_0^k \frac{(x)^k}{k!} u_0^{(k)}|_{x=0} + I_0^{\alpha-k} f(x, u(x))|_{x=0}.$$

et comme $\alpha - k > 0$, l'intégrale est nul $I_0^{\alpha-k} f(x, u(x))|_{x=0} = 0$

par suite ${}^R D_0^k u(0) = u_0^{(k)} = b_k$.

D'autre part on définit $z(x) = f(x, u(x))$ alors $z \in C[0, h]$ on récrit l'équation de la forme:

$$\begin{aligned} z(x) = f(x, u(x)) &= {}^C D_0^\alpha u(x) = {}^R D_0^\alpha (u - T_{n-1}[u, 0])(x) \\ &= {}^R D_0^n I_0^{n-\alpha} (u - T_{n-1}[u, 0])(x) \end{aligned}$$

$T_{n-1}[u, 0]$ est le polynôme de Taylor de degré $n - 1$ ($T_{n-1}[u, 0] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x)^k}{k!} u_0^{(k)}$) pour la fonction f autour de 0. En appliquant l'opérateur I_0^n sur les deux termes de cette relation elle devient :

$$I_0^n z(x) = I_0^{n-\alpha}(u - T_{n-1}[u, 0])(t) + q(x).$$

Avec q un polynôme de degré ne dépassant pas $n - 1$ Comme z est continue la fonction I_0^n a un zéro d'ordre au moins n à l'origine.

En outre la différence $y - T_{n-1}[y, 0]$ a la même propriété par construction. Et donc la fonction $I_0^{n-\alpha}(u - T_{n-1}[u, 0])$ doit avoir un zéro

d'ordre n aussi. Par suite le polynôme q a la même propriété mais comme il est de degré ne dépassant pas $n - 1$, il en résulte que $q = 0$ par conséquent

$$I_0^n z(x) = I_0^{n-\alpha}(u - T_{n-1}[u, 0])(x)$$

En appliquant l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}^R D_0^{n-\alpha}$ sur les deux cotés de cette équation elle devient :

$$u(x) = T_{n-1}[u, 0](x) = I_0^\alpha z(x).$$

En substituant $z(x)$ et $T_{n-1}[u, 0](x)$ on retrouve l'équation de Volterra :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t, y(t)) dt.$$

2.2 Quelques méthodes pour la résolution des EDO

2.2.1 La méthode ADM

La méthode de décomposition d'Adomian permet de résoudre des problèmes fonctionnelles de différents types : équations algébriques, équations différentielles, équations intégrales, équations intégro-différentielles et équations aux dérivées partielles (EDP). La méthode

s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires qu'aux problèmes non linéaires. Il suffit qu'on puisse écrire l'équation sous la forme $AU = f$ qui est appelée forme canonique d'Adomian.

Considérons l'équation fonctionnelle :

$$AU = f \quad (2.6)$$

où A est un opérateur différentiel contenant des termes linéaires et des termes non linéaires et f est une fonction connue.

Le terme linéaire de l'opérateur A est décomposé en $L + R$ où L est inversible et R est le reste de (2.6).

On note N le terme non linéaire de A par suite $A = L + R + N$, alors (2.6) s'écrit comme :

$$LU + RU + NU = f, \quad (2.7)$$

L étant inversible, on note par L^{-1} son inverse on a :

$$U = \phi_0 + L^{-1}f - L^{-1}RU - L^{-1}NU, \quad (2.8)$$

Où ϕ_0 est la constante de l'intégration.

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \quad (2.9)$$

Et décomposer le terme non linéaire NU sous forme d'une série :

$$NU = F(U) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n, \quad (2.10)$$

Les A_n sont appelés les polynomes d'Adomian et sont obtenues grâce à la relation suivante :

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [N(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i)]_{\lambda=0}, \quad (2.11)$$

Où λ est un paramètre réel.

En remplaçant les relations (2.8) et (2.9) dans (2.10), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \phi_0 + L^{-1}f - L^{-1}R \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \quad (2.12)$$

Ce qui entraîne par identification :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \phi_0 + L^{-1}f \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ \dots \\ u_n = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{array} \right.$$

Remarque 2.2.1 Tous les termes de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ne peuvent être calculés, pour cela en utilisant l'approximation:

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \quad n \geq 1, \quad \text{avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = U \quad (2.14)$$

Le problème qui se pose est comment déterminer les $(A_n)_{n \geq 0}$.

Les polynômes d'Adomian

Définition 2.2.1 Les polynômes d'Adomian sont définie par la formule :

$$A_0(u_0) = N(u_0) = F(u_0)$$

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{d\lambda^n} [N(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i)]_{\lambda=0}$$

La formule proposé par G.Adomian pour le calcul des polynômes d'Adomian $(A_n)_{n \geq 0}$ est la suivante :

$$\begin{aligned} A_0 &= N(u_0) \\ A_1 &= \frac{d}{d\lambda} N(u_0 + u_1\lambda) |_{\lambda=0} = N'(u_0) u_1 \\ A_2 &= \frac{1}{2!} \frac{d}{d\lambda} ((u_0 + u_1\lambda)N''(u_0 + u_1\lambda)) |_{\lambda=0} \\ &= N''(u_0)u_2 + \frac{1}{2!}N''(u_0)u_1^2. \end{aligned}$$

$$A_n = \sum_{v=0}^n c(v, n)N^{(v)}(u_0), n \geq 1$$

Où , $c(v, n)$ représente la somme de tous les produits (divisée par $m!$) des v termes u_i dont la somme des indices i est égale à n ; m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

Résolution des équations différentielles ordinaires par la méthode d'Adomian

Pour appliquer la méthode de décomposition d'Adomian pour résoudre des équations ordinaires linéaires, nous considérons l'équation générale suivante écrite sous la forme d'opérateur :

$$LU + RU = f(x) \tag{2.15}$$

Où l'opérateur différentiel linéaire L peut être considéré comme opérateur de dérivation d'ordre élevé dans l'équation, R est le reste de l'opérateur différentiel, et $g(x)$ est la partie non homogène. Si L est l'opérateur de dérivation du premier défini par:

$$L = \frac{d}{dx} \tag{2.16}$$

Alors en supposant que L est inversible, l'opérateur inverse L^{-1} est donné par:

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot) dt, \tag{2.17}$$

Maintenant, pour mettre en application l'ADM, nous procédons comme suit: en appliquant L^{-1} à (2.15) :

$$U = \phi_0 + L^{-1}f - L^{-1}RU \quad (2.18)$$

nous avons :

$$\phi_0 = \begin{cases} u(0) & \text{si } L = \frac{d}{dx} \\ u(0) + xu'(0) & \text{si } L = \frac{d^2}{dx^2} \\ u(0) + xu'(0) + \frac{x^2}{2!}u''(0) & \text{si } L = \frac{d^3}{dx^3} \\ u(0) + xu'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}u^{(n)}(0) & \text{si } L = \frac{d^n}{dx^n} \end{cases} \quad (2.19)$$

Exemple 2.2.1 on considère l'équation différentielle ordinaire non-linéaire du premier ordre suivante :

$$u' - u^2 = 1, \quad (2.20)$$

avec le condition initiale:

$$u(0) = 0 \quad (2.21)$$

Appliquons L^{-1} et utilisons le condition initiale (2.21) :

$$U = u(0) + L^{-1}1 - L^{-1}u^2 = -L^{-1}u^2 + x. \quad (2.22)$$

En utilisant la décomposition de série pour u et la représentation polynomiale d'Adomian pour le terme non linéaire u^2 , on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right) + x. \quad (2.23)$$

où les A_n sont les polynômes d'Adomian pour u^2 . Par identification des deux côtés de l'équation on obtient

schéma itératif d'ADM suivant:

$$u_0 = x,$$

$$u_{n+1} = -L^{-1}A_n, \quad n \geq 0. \quad (2.24)$$

Les premières composantes sont ainsi déterminés comme suit :

$$u_0 = x,$$

$$u_1 = -L^{-1}(A_0) = -L^{-1}(u_0^2) = -\frac{x^3}{3},$$

$$u_2 = -L^{-1}(A_1) = -L^{-1}(2u_0u_1) = \frac{2x^5}{15}. \quad (2.25)$$

$$u_3 = -L^{-1}(A_2) = -L^{-1}(2u_0u_2 + u_1^2) = -\frac{17x^7}{315}$$

En conséquence, la solution s'écrit sous forme de série :

$$U(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots, \quad (2.26)$$

Qui converge clairement vers la solution exacte suivante :

$$U(x) = \tanh(x), \quad (2.27)$$

qui la solution exacte du problème. C'est un cas où l'ADM converge vers la solution.

2.2.2 la transformée de laplace

Soit f une fonction d'ordre exponentiel α (c'est-à-dire qu'il existe deux constante M et T telles que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pour $t > T$), la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ définie pour tout nombre réel $t \geq 0$ est la fonction F , définie par :

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.28)$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction f .

L'inversion de transformation de Laplace s'effectue par le moyen d'une intégrale dans le plan complexe, pour t positive,

$$f^{-1}(t) = L^{-1}\{F(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (2.29)$$

Propriétés

Pour $L[f(x)] = F(s)$ et $L[g(x)] = G(s)$ on a

$$L[f(x) + g(x)] = F(s) + G(s),$$

$$L[x^\beta] = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{s^{\beta+1}}, \quad \beta > -1, \quad (2.30)$$

$$L[f^{(n)}(x)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad (2.31)$$

$$L[x^n f(x)] = (-1)^n F^{(n)}(s),$$

$$L\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s},$$

$$L\left[\int_0^x f(x-t)g(t)dt\right] = F(s)G(s)$$

Exemple 2.2.2

$$\begin{cases} Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t} \\ Y(0) = -3, Y'(0) = 5 \end{cases}$$

Solution 2.2.1 on a

$$L[Y''] - 3L[Y'] + 2L[Y] = 4L[e^{2t}].$$

Utilisons les théorèmes des transformés de Laplace des fonctions dérivés, nous obtenons

:

$$\{s^2y(s) - sY(0) - Y'(0)\} - 3\{sy(s) - Y(0)\} + 2y = \frac{4}{s-2}.$$

On remplace $Y(0) = -3$ et $Y'(0) = 5$ on obtient:

$$\{s^2y + 3s - 5\} - 3\{sy + 3\} + 2y = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2 - 3s + 2)y + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}.$$

$$y = \frac{4}{(s^2 - 3s + 2)(s-2)} + \frac{14 - 3s}{s^2 - 3s + 2}$$

$$= \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-1)(s-2)^2},$$

$$y = \frac{-7}{(s-1)} + \frac{4}{(s-2)} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

Donc la solution est donnée par:

$$Y = L^{-1}[y]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{-7}{(s-1)} + \frac{4}{(s-2)} + \frac{4}{(s-2)^2}\right]$$

$$= -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}.$$

2.3 Résolution des EDFs par la méthode d'Adomian

Pour le cas des équations différentielles fractionnaires, obtenir une solution analytique exacte est très compliqué, ainsi, il est nécessaire de se tourner vers les méthodes numériques. Nous allons traiter les méthodes que nous avons déjà vu dans le cas entier.

Considérons l'équation différentielle au sens de Caputo avec $0 < \alpha < 1$, d'après le lemme1, si f est une fonction continue alors notre problème à valeur initiale est équivalent à l'équation intégrale non linéaire de Volterra.

Dans ce sens, si $u(x) \in C[0; T]$ satisfait le problème, alors elle satisfait aussi l'équation intégrale de Volterra.

L'équation non linéaire de Caputo peut s'écrire sous la forme:

$${}^C D^\alpha u(x) = f(x, u(x)) = g(x) + h(x)u + N(x, u) \quad (2.32)$$

où $g; h$ sont des fonctions continues et N est la partie non linéaire de f .

Appliquons l'opérateur I sur les deux cotés de l'équation précédente, on trouve l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = u(0) + I^\alpha[g](x) + I^\alpha[h(x)u + N(x, u)](x) \quad (2.33)$$

ADM propose la relation de récurrence suivante :

$$u_0(t) = u(0) + I^\alpha[g](x), \quad u_{n+1}(t) = I^\alpha[h(x)u + N(x, u)](x), \quad n \geq 0 \quad (2.34)$$

Tel que les A_n sont des polynômes d'Adomian.

Finalement, nous rapprochons la solution par la série suivante:

$$\phi_N = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(t) \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \phi_N = u(t)$$

Exemple 2.3.1 On considère l'équation différentielle fractionnaire non linéaire à coefficients variables :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha u + tu^2 = \frac{32}{21\Gamma(\frac{7}{4})} t^{\frac{7}{4}} + t^5 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte de cette équation pour $\alpha = \frac{1}{4}$ et $u(t) = t^2$.

D'après (2.34), nous avons la relation récursive suivante :

$$u_0(t) = I_0^\alpha \left[\frac{32}{21\Gamma(\frac{7}{4})} t^{\frac{7}{4}} + t^5 \right], \quad u_{n+1}(t) = -I_0^\alpha [A_n](t), \quad n \geq 0$$

D'après cette relation, on trouve :

$$u_0(t) = I_0^\alpha \left[\frac{32}{21\Gamma(\frac{7}{4})} t^{\frac{7}{4}} + t^5 \right],$$

$$u_1(t) = -I_0^\alpha [t(u_0(t))^2],$$

$$u_2(t) = -2 I_0^\alpha (tu_0(t)u_1(t)),$$

$$u_3(t) = -2 I_0^\alpha (tu_0(t)u_2(t)) - I_0^\alpha (t(u_1(t))^2),$$

$$u_4(t) = -2 I_0^\alpha (tu_1(t)u_2(t)) - 2 I_0^\alpha (tu_0(t)u_3(t)),$$

$$u_5(t) = -2 I_0^\alpha (tu_0(t)u_4(t)) - 2 I_0^\alpha (tu_1(t)u_3(t)) - I_0^\alpha (t(u_2(t))^2)$$

Finalement on a une approximation des cinq premiers termes comme suit :

$$\begin{aligned} \phi_6 = \sum_{n=0}^5 u_n(t) = & t^2 - 0.223473t^{\frac{21}{4}} + 0.412130385t^{\frac{17}{2}} - 0.755616844t^{\frac{47}{4}} \\ & + 1.538979902t^{15} - 3.18619934t^{\frac{73}{4}} - 55.57748572t^{\frac{47}{2}} - 119.5579407t^{\frac{99}{4}} \\ & - 115.5219367t^{28} - 58.93506052t^{\frac{125}{4}} - 15.55703363t^{\frac{69}{2}} - 1.683107690t^{\frac{151}{4}}. \end{aligned}$$

2.4 Résolution des EDFs par la transformée de Laplace

Lemme 2.4.1 [2] la transformée de Laplace de L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-

Liouville de l'ordre $\alpha > 0$ peut être obtenu en forme de :

$$L[I^\alpha f(x)] = \frac{F(s)}{s^\alpha}.$$

Preuve. la transformée de Laplace de L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-

Liouville de l'ordre $\alpha > 0$ est :

$$L[I^\alpha f(x)] = L\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} F(s)G(s),$$

■

Où

$$G(s) = L[x^{\alpha-1}] = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}.$$

Lemme 2.4.2 la transformée de Laplace de dérivées fractionnaire au sens de Caputo pour

$m - 1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}$ on obtenu sous la forme suivante :

$$L[D^\alpha f(x)] = \frac{s^m F(s) - s^{m-1} f(0) - s^{m-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)}{s^{m-\alpha}}.$$

Preuve. la transformée de Laplace de dérivées fractionnaire au sens de Caputo de

l'ordre $\alpha > 0$ est : ■

$$L[D^\alpha f(x)] = L[I^{m-\alpha} f^{(m)}(x)] = \frac{L[f^{(m)}(x)]}{s^{m-\alpha}}.$$

Lemme 2.4.3 pour $\alpha, \beta > 0, a \in \mathbb{R}$ et $s^\alpha > |a|$ nous faisons transformer le Laplace inverse de $s^{\alpha-\beta}/s^\alpha + a$ sous la formule suivante:

$$L^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a}\right] = x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-ax^\alpha).$$

Preuve. $s^{\alpha-\beta}/s^\alpha + a$ en utilisant le développement de Taylor l'équation précédent peut être s'écrite : ■

$$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a} = \frac{1}{s^\beta} \frac{1}{1 + \frac{a}{s^\alpha}} = \frac{1}{s^\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-a}{s^\alpha}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{s^{n\alpha+\beta}}$$

La transformée de Laplace inverse de cette fonction est:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n x^{n\alpha+\beta-1}}{\Gamma(n\alpha + \beta)} = x^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ax^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)} = x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-ax^\alpha).$$

Lemme 2.4.4 [2] pour $\alpha \geq \beta > 0, a \in \mathbb{R}$ et $s^{\alpha-\beta} > |a|$ on a:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^\alpha + as^\beta)^{n+1}}\right] = x^{\alpha(n+1)-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(k(\alpha - \beta) + (n+1)\alpha)} x^{k(\alpha-\beta)}.$$

Preuve. la série d'expansion de $(1+x)^{-n-1}$ sous la forme ■

$$\frac{1}{(1+x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} (-x)^k$$

On a:

$$\frac{1}{(s^\alpha + as^\beta)^{n+1}} = \frac{1}{(s^\alpha)^{n+1}} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{s^{\alpha-\beta}}\right)^{n+1}} = \frac{1}{(s^\alpha)^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \left(\frac{-a}{s^{\alpha-\beta}}\right)^k.$$

Exemple 2.4.1

$$D^2y(x) + D^{3/2}y(x) + y(x) = 1 + x$$

$$y(0) = y'(0) = 1$$

En appliquant la transformer de Laplace on obtient :

$$s^2F(s) - sy(0) - y'(0) + \frac{s^2F(s) - sy(0) - y'(0)}{s^{1/2}} + F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2},$$

$$s^2F(s) - s - 1 + \frac{s^2F(s) - s - 1}{s^{1/2}} + F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2},$$

$$F(s)(s^2 + s^{3/2} + 1) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)(s^2 + s^{3/2} + 1)$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

En applique l'inverse de transformée de laplace on obtient la solution exact :

$$y(x) = 1 + x$$

Exemple 2.4.2

$$D^\alpha y(x) + y(x) = 0$$

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$$

Deux cas possible :

1.pour $\alpha < 1$

$$L[D^\alpha f(x)] = \frac{s^2 F(s) - s}{s^{2-\alpha}} = \frac{sF(s) - 1}{s^{1-\alpha}},$$

2.pour $\alpha > 1$

$$L[D^\alpha f(x)] = \frac{sF(s) - 1}{s^{1-\alpha}},$$

qui sont identiques, ce qui donnée:

$$\frac{sF(s) - 1}{s^{1-\alpha}} + F(s) = 0,$$

Où:

$$F(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{1 + s^\alpha}.$$

En utilisant le lemme 3, la solution exacte de ce problème peut être obtenue par :

$$y(x) = E_\alpha(-x^\alpha)$$

Chapitre 3

Résolution numérique des équations différentielles fractionnaires

Pour la plupart des équations différentielles fractionnaires, obtenir une solutions analytique exacte est très compliqué, ainsi, il est nécessaire de se tourner vers les méthodes numériques.

Ces méthodes sont développées sur l'idée du cas entier, mais à cause du caractère non-local des dérivées fractionnaires elles vont se distinguer par plusieurs aspects et elles vont exhiber des problèmes qu'on a pas rencontré dans le cas classique.

Nous allons maintenant introduire quelques méthodes, tout en donnant une plus grande importance à la méthode d'Euler fractionnaire, la méthode d'Eulers améliorée, la Méthode de Taylor, la Méthode de Runge-kutta 2 et la Méthode de Runge-kutta 4

3.1 Méthode d'Euler

Rappelons la méthode d'Euler pour l'équations différentielles

Approximation numérique

On se restreint d'ésormais a une équation différentielle ($d = 1$).

On subdivise l'intervalle $[0, X]$ en N sous-intervalles $] x_n; x_{n+1}]$, avec $n = 0, 1, \dots, N - 1$

On choisit, une subdivision uniforme : $x_n = nh$.

où h et le pas de temps

On construit un schéma numérique permettant de définir des approximations y_n de $y(x_n)$ (Schémas numériques).

Lien avec l'intégration numérique

En intégrant l'équation différentielle $y'(x) = f(x, y(x))$ entre $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$, on obtient:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

On peut approcher cette intégrale par la méthode des rectangles à gauche :

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = hf(x_n, y(x_n))$$

On trouve le schéma

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y(x_n)) \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

La méthode d'Euler permet ainsi de calculer $y(x_n + h)$ en fonction de $y(x_n)$ et la dérivée en $y(x_n)$.

Cette méthode n'est pas symétrique par rapport à l'intervalle puisqu'il ne fait pas intervenir l'information sur la dérivée en fin d'intervalle, *i.e.* $f(x_n, y(x_n + 1))$ n'intervient pas.

la méthode d'Euler pour l'équations différentielles fractionnaire

Dans [6] qui est concerné par la résolution numérique du problème suivant à valeur initiale de l'EDF

$$D_{a^+}^\alpha y = f(x, y) \tag{3.1}$$

$$y(a) = y_0 \quad (3.2)$$

La dérivé fractionnaire est donnée au sens de Riemann-Liouville avec l'ordre $0 < \alpha < 1$. En employant les propriétés de l'intégration fractionnaire et de la dérivé fractionnaire, nous pouvons faire de façon analogue aux EDO. Si nous appliquons le dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $1 - \alpha$ à l'équation (3.1) nous obtenons l'équation suivante :

$$y' = D_{a+}^{1-\alpha} f(x, y) \quad (3.3)$$

Selon la méthode d'Euler, nous obtenons l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a + nh \\ h = \frac{H}{n} \\ y_{n+1} - y_n = h D_{a+}^{1-\alpha} f(x, y_n)|_{x=x_n} \end{cases}$$

Avec le logiciel Matlab, l'algorithme peut être réalisé en ordinateur. Et l'algorithme s'est avéré efficace et convergent.

3.2 Méthode d'Eulers améliorée

Une question se pose naturellement : pouvons nous améliorer le calcul de l'algorithme? Premièrement, nous rappelons la méthode d'Euler explicite donnée comme suit :

$$y_{n+1} - y_n = h D_{a+}^{1-\alpha} f(x, y_{n+1})|_{x=x_{n+1}}.$$

Il est évident que l'algorithme de la méthode d'Euler retrogradé est implicite. La méthode d'Euler et la méthode d'Euler explicite ont leurs propres caractéristiques. La méthode d'Euler est beaucoup plus pratique. Mais en prenant en compte les facteurs de stabilité numérique, la méthode d'Euler retardée est souvent choisie. Les équations d'Euler explicite sont généralement résolues par itération. Et le processus itératif est progressivement explicite. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1}^{(0)} - y_n = h \times D_{a+}^{1-\alpha} f(x, y_n)|_{x=x_{n+1}} \\ y_{n+1}^{(k+1)} - y_n = h \times D_{a+}^{1-\alpha} f(x, y_{n+1}^{(k)})|_{x=x_{n+1}} \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

Par un calcul, nous pouvons obtenir une erreur de troncature locale des deux méthode

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

Et

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

Il est facile de voir que nous pouvons obtenir une méthode plus précise, par la moyenne des deux méthodes, nous obtenons la méthode implicite:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2} \times D_{a+}^{1-\alpha} f(x, y_n)|_{x=x_n} + D_{a+}^{1-\alpha} f(x, y_n)|_{x=x_{n+1}}$$

Qui peut être résolu par une formule d'itération:

$$y_{n+1}^{(0)} - y_n = h \times D_{a+}^{1-\alpha} f(x, y_n)|_{x=x_{n+1}}$$

$$y_{n+1}^{(k+1)} - y_n = \frac{h}{2} \times D_{a+}^{1-\alpha} f(x, y_{n+1}^{(k)})|_{x=x_{n+1}} + D_{a+}^{1-\alpha} f(x, y_n)|_{x=x_n}$$

Bien que la méthode trapézoïdale améliore la précision, l'algorithme est complexe. Dans la formule itérative, l'opération d'itération est répétée plusieurs fois ce qui conduit à une grande quantité de calcul et par conséquent à la difficulté de prédire les résultats.

Afin de diminuer la nombre de calcul, introduisons que l'algorithme sera transféré au calcul de l'étape suivante après seulement une ou deux opérations d'itération. par conséquent, nous proposons des améliorations d'Euler méthode:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a + nh \\ y_p - y_n = h \times D_{a+}^{1-\alpha} f(x, y_n)|_{x=x_n} \\ y_c - y_n = h \times D_{a+}^{1-\alpha} f(x, y_p)|_{x=x_{n+1}} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

Après nous avérons que la méthode d'Euler est efficace avec de premier ordre erreur .

3.3 Méthode de Taylor

Supposons la fonction f dérivable. On a d'après la formule de Taylor :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h)$$

$$= y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \dots + \frac{1}{k!} h^k y^{(k)}(x_n) + \frac{1}{(k+1)!} h^{k+1} y^{(k+1)}(\xi_n)$$

Où $\xi_n \in [x_n, x_{n+1}]$

Donc si $h \ll 1$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \dots + \frac{1}{k!} h^k y^{(k)}(x_n).$$

Pour $k = 1$:

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h y'(x_n) = y(x_n) + h f(x_n, y(x_n)).$$

Pour $k = 2$:

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) = y(x_n) + h f(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2} y''(x_n).$$

Pour évaluer $y''(x_n)$, on dérive l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{df}{dx}(x, y(x)) + \frac{df}{dy}(x, y(x))y'(x) \\ &= \frac{df}{dx}(x, y(x)) + \frac{df}{dy}(x, y(x))f(x, y(x)) \end{aligned}$$

Où le schéma :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{df}{dx}(x_n, y_n) + \frac{df}{dy}(x_n, y_n) f(x_n, y_n) \right).$$

On montre que ce schéma est d'ordre 2

la méthode Taylor pour l'équation différentielle fractionnaire

On a le problème suivant à valeur initiale de l'EDF :

$$\begin{aligned} D_{a^+}^\alpha y &= f(x, y) \\ y(a) &= y_0 \end{aligned}$$

Nous appliquons le dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $1 - \alpha$ tq : $0 < \alpha < 1$ nous obtenons l'équation suivante :

$$y' = D_{a^+}^{1-\alpha} f(x, y)$$

On pose que $F(x, y) = D_{a^+}^{1-\alpha} f(x, y_n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{d}{dt} f(t, y) dt.$

Nous obtenons l'algorithme suivant :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \times F(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{dF}{dx}(x_n, y_n) + \frac{dF}{dy}(x_n, y_n) F(x_n, y_n) \right).$$

3.4 Méthode de Runge-kutta 2

la méthode Runge-kutta 2 pour les équations différentielles

La méthode Runge Kutta est symétrique puisqu'elle revient à évaluer numériquement la dérivée au centre de l'intervalle.

L'algorithme de cette méthode sont :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a + nh. \\ h &= \frac{b-a}{n}. \\ k_1 &= h \times D_{a^+}^{1-\alpha} f(x, y_n)|_{x=x_n} \\ k_2 &= h \times D_{a^+}^{1-\alpha} f(x + h/2, y + k_1/2)|_{x=x_n} \\ y(x_{n+1}) &= y(x_n) + h \times D_{a^+}^{1-\alpha} f(x + h/2, y + k_1/2). \end{aligned}$$

la méthode Runge-kutta 2 pour l'équations différentielles fractionnaire

L'algorithme de cette méthode sont :

$$\begin{aligned} k_1 &= h D_{a^+}^{1-\alpha} f(x, y_n)|_{x=x_n} \\ k_2 &= h D_{a^+}^{1-\alpha} f(x + h/2, y + k_1/2) \\ y(x_{n+1}) &= y(x_n) + h D_{a^+}^{1-\alpha} f(x + h/2, y + k_1/2) + O(h^3) \end{aligned}$$

3.5 Méthode de Runge-kutta 4

la méthode Runge-kutta 4 pour l'équations différentielles

La formule Runge-Kutta à l'ordre 4 est de loin la plus utilisée. elle a une forme assez symétrique :

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_n, y(x_n)) \\
 k_2 &= hf(x_n + h/2, y(x_n) + k_1/2) \\
 k_3 &= hf(x_n + h/2, y(x_n) + k_2/2) \\
 k_4 &= hf(x_n + h, y(x_n) + k_3) \\
 y(x_{n+1}) &= y(x_n) + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned}$$

La technique Runge-Kutta à l'ordre 4 intervient dans la plupart des programmes EDO (Equation Differentiel Ordinaire) comme utilisés par Matlab et Octave.

la méthode Runge-kutta 4 pour l'équations différentielles fractionnaire

L'algorithme de cette méthode sont :

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= a + nh. \\
 h &= \frac{b - a}{n}. \\
 k_1 &= h \times D_{a^+}^{1-\alpha} f(x, y_n)|_{x=x_n} \\
 k_2 &= h \times D_{a^+}^{1-\alpha} f(x + h/2, y + k_1/2)|_{x=x_n} \\
 k_3 &= h \times D_{a^+}^{1-\alpha} f(x + h/2, y + k_2/2)|_{x=x_n} \\
 k_4 &= h \times D_{a^+}^{1-\alpha} f(x + h, y + k_3)|_{x=x_n} \\
 y(x_{n+1}) &= y(x_n) + 1/6(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4).
 \end{aligned}$$

3.6

Chapitre 4

résultats numériques

Dans ce chapitre on utilis différentes méthodes numériques (Euler, Euler améliorée, Taylor, Runge_kuta 2, Runge_kuta 4) pour résoudre équation différentielle fractionnaire.

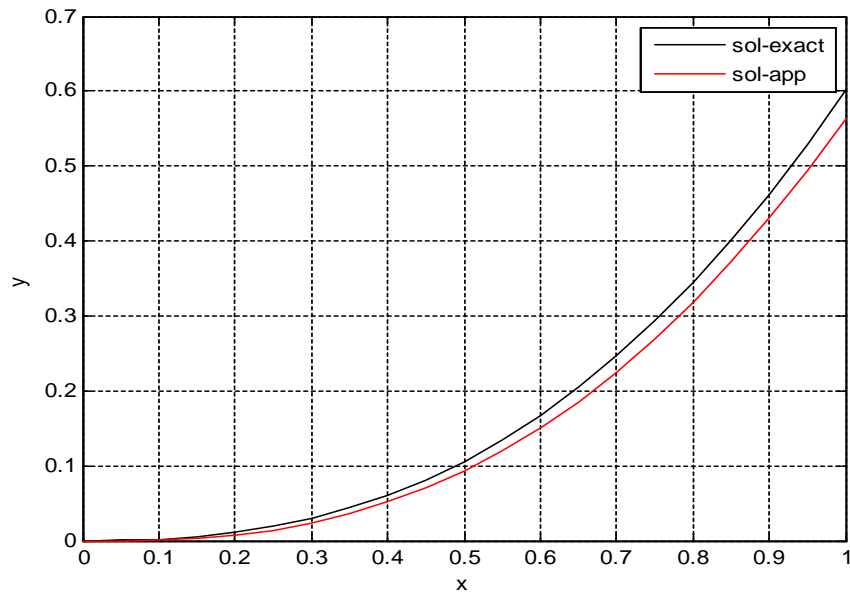
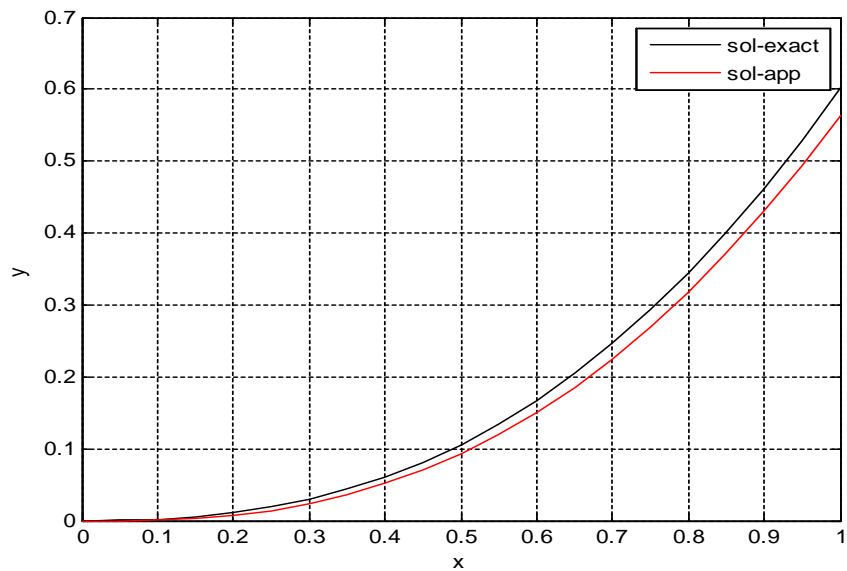
Exemple 4.0.1 on considère l'équation différentiel fractionnaire suivant :

$$D_{0+}^{0.5}y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 0$$

La solution analytique est

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \frac{16x^{2.5}}{15}$$

Figure 4.0.1 : Comparaison entre la solution exacte et la solution(Euler)pour $n=20$ Figure 4.0.2 : Comparaison entre la solution exacte et la solution(Euler améliorée)pour $n=20$

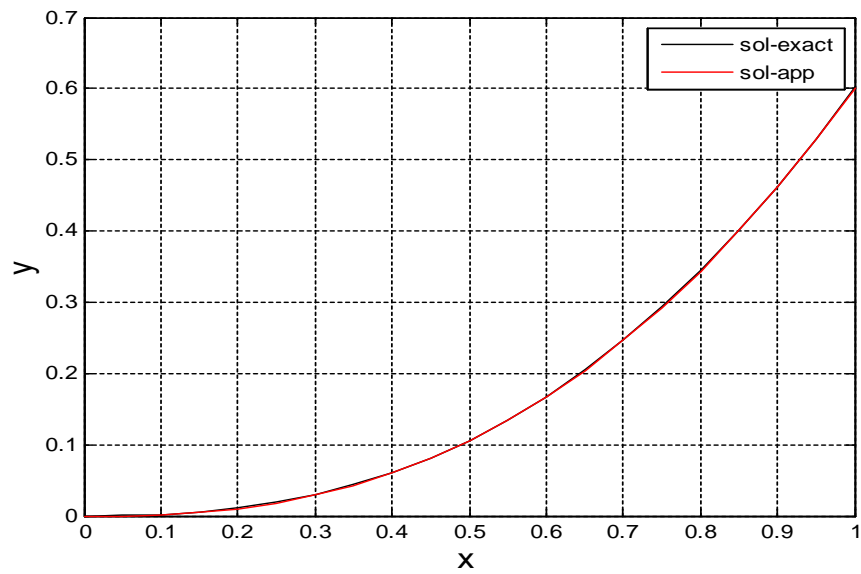


Figure 4.0.3 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchées(Taylor)pour $n=20$

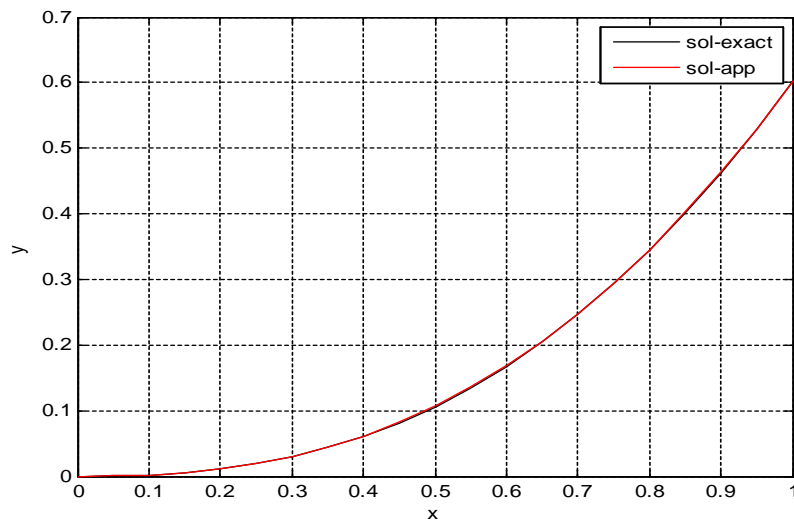


Figure 4.0.4 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchées(Runge kutta
2) pour $n=20$

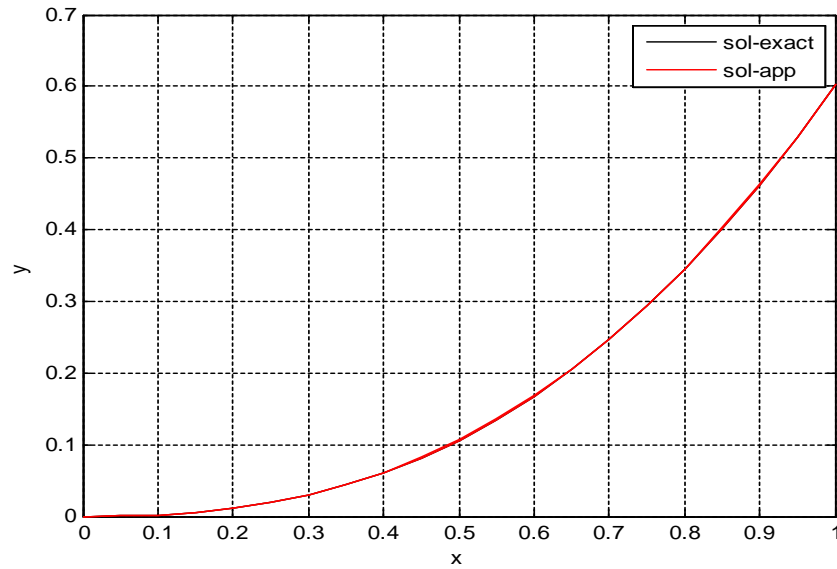


Figure 4.0.5 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchées(Runge kutta 4) pour $n=20$

i	x_i	$exact$	y_Euler	$y_E.amél$	y_Taylor	$y_R_k_2$	$y_R_k_4$
1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.050000	0.000336	0.000000	0.000000	0.000000	0.000421	0.000338
3	0.100000	0.001903	0.000841	0.000841	0.001472	0.002030	0.001905
4	0.150000	0.005244	0.003220	0.003220	0.004743	0.005405	0.005246
5	0.200000	0.010765	0.007590	0.007590	0.010205	0.010954	0.010767
6	0.250000	0.018806	0.014318	0.014318	0.0181195	0.019020	0.018808
7	0.300000	0.029666	0.023722	0.023722	0.029009	0.029902	0.029668
8	0.350000	0.043614	0.036082	0.036082	0.042915	0.043871	0.043616
9	0.400000	0.060898	0.051659	0.051659	0.060160	0.061174	0.060900
10	0.450000	0.081749	0.070689	0.070689	0.080975	0.082043	0.081752

Tab 4.1.1 : Comparaison entre les solutions approchées (Euler ,Euler améliorée,Taylor,Runge_Kuta 2,Runge_Kuta 4)et la solution exacte

i	x_i	Err_Euler	$Err_E.améli$	Err_Taylor	$Err_R_k_2$	$Err_R_k_4$
1	0.000000	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00
2	0.005000	3.364177e-04	3.364177e-04	3.364177e-04	8.410442e-05	1.992372e-06
3	0.010000	1.062022e-03	1.062022e-03	4.312384e-04	1.273945e-04	2.054912e-06
4	0.015000	2.024356e-03	2.024356e-03	5.015109e-04	1.607407e-04	2.071817e-06
5	0.020000	3.175295e-03	3.175295e-03	5.599018e-04	1.888813e-04	2.079046e-06
6	0.025000	4.487896e-03	4.487896e-03	6.1093612e-04	2.136839e-04	2.082890e-06
7	0.030000	5.944276e-03	5.944276e-03	6.568417e-04	2.361117e-04	2.085214e-06
8	0.035000	7.531439e-03	7.531439e-03	6.989087e-04	2.567386e-04	2.086742e-06
9	0.040000	2.087811e-06	2.087811e-06	7.379635e-04	2.759392e-04	2.087811e-06
10	0.045000	2.088592e-06	2.088592e-06	7.745727e-04	2.939736e-04	2.088592e-06

Tab 4.1.2 : Comparaison entre les erreurs des (Euler,Euler améliorée ,Taylor,Runge_Kuta

2,Runge_Kuta 4)

Conclusion

Dans ce travail, nous avons essayé d'introduire quelques une des méthodes les plus utilisées dans le calcul des approximations numériques des équations différentielles d'ordre fractionnaire. à savoir la méthode d'Euler, la méthode d'Euler améliorée, la méthode de Taylor, la méthode de Runge_kutta 2 et Runge_kutta 4, tout en donnant une plus grande importance à la méthode (Runge_kuta 4) car c'est une méthode plus précise que les autres, après les applications des ces méthodes sur les équations différentielles d'ordre fractionnaire nous avons obtenus des résultats suffisantes.

Bibliographie

- [1] Z. Fatiha, La résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire, Université de Djilali BOUNAËMA, Khemis Miliana, Faculté des Sciences et de la Technologie, 2015
- [2] S. Kazem, Exact Solution of Some Linear Fractional Differential Equations by Laplace Transform, Imam Khomeini International University, 25 March 2013
- [3] A. M. SALAH, Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires, université Mentouri-Constantine, faculté des sciences, 2009.
- [4] H. Tarek, Analyse du Chaos dans un Système d'Équations Différentielles Fractionnaires, doctorat en sciences de l'université constantine 1
- [5] K. Belakroum, Existence et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Bordj Mokhtar ANNABA, 2013.
- [6] P. Tong, Y. Feng, Hengjin .L, Eulers Method for Fractional Differential Equations, December 2013
- [7] B. Stout, Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles, Université de Provence Institut Fresnel, Case 161 Faculté de St Jérôme Marseille, France Février 2007
- [8] Anatoly A. Kilbas, Sergei A. Marzan, Cauchy Problem for Differential Equation with Caputo derivative, Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis, 2004.

- [9] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. Fractional integrals and derivatives theory and applications. Gordon and Breach (1993).
- [10] P. Inizan. Dynamique fractionnaire pour le chaos hamiltonien. Thèse de Doctorat, L'Observatoire de Paris, France (2010).
- [11] K. Diethelm. The Analysis of Fractional Differential Equations. Springer (2004).
- [12] R.P. Agarwal. A propos d'une note de M. Pierre Humbert. C. R. Académie des Sciences 236, 2031–2032 (1953).
- [13] J. Cresson and P. Inizan. Variational formulations of differential equations and asymmetric fractional embedding. Journal of Mathematical analysis and Applications (2010).

ملخص

المعادلات التفاضلية ذات رتب ناطقة هي تعميم للمعادلات التفاضلية الكلاسيكية. في هذه المذكرة تطرقنا الى دراسة تقريبات عددية للحل لهذه المعادلات و ذلك باستخدام بعض الطرق أو الخوارزميات المعروفة و الكثيرة الاستعمال, حيث تم استخدام المشتقات الكسرية بمعنى كابيتو.

RESUME

Les équations différentielles fractionnaires sont des généralisations des équations différentielles classiques.

Dans ce travail, nous étudions des approximations numériques de la solution d'un problème différentiel fractionnaire par les méthodes Euler, Taylor, Runge Kutta 2 et 4, Euler, en utilisant la dérivé fractionnaire au sens de Caputo.

ABSTRACT

Fractional differential equations are generalization of classical Differential equations.

In this work, we study numerical approximations of the Solution of a fractional differential problem with the Eulers method, Improved Eulers method, Taylor, Runge Kutta 2 et 4, using the fractional derivative in the sense of Caputo.