

III.1- Introduction et définition :

On appelle «filtre numérique» un système utilisé pour modifier la distribution fréquentielle d'un signal numérique selon des spécifications données. Un filtre numérique peut être vu comme un procédé de calcul permettant de transformer un signal numérique d'entrée (séquence de nombres) en un signal numérique de sortie (seconde séquence de nombres) pour obtenir la modification voulue du signal. Le problème du filtrage numérique consiste donc à déterminer l'équation régissant cette transformation des signaux numériques qui d'une part doit représenter la réponse fréquentielle spécifiée et d'autre part peut être effectivement réalisée. La transformation peut être implantée sous forme de logiciel (algorithme) ou matériel (circuits électroniques).

Les filtres numériques sont, pour les signaux échantillonnés, les équivalents des filtres analogiques pour les signaux continus. En raison du développement des circuits intégrés rapides, les filtres numériques deviennent plus intéressants que les filtres analogiques en apportant de nombreux avantages tels que : précision, fiabilité, stabilité, adaptabilité et facilité de commande.

Le problème se pose de la même manière que pour les filtres analogiques. Il consiste à réaliser un filtre donnant une réponse fréquentielle $H(f)$ donnée (prédéfinie à l'aide d'un gabarit : plan de Bode, etc.), une réponse impulsionnelle $h(t)$ fixée ou éventuellement une réponse indicielle voulue. Dans le cas général de ces filtres, la valeur de la sortie numérique $y(KT_e) = y_k$ à l'instant kT_e est fonction de l'entrée $x(kT_e) = x_k$ au même instant kT_e des n entrées numériques précédentes $x(iT_e) = x_i$ pour tout $i \in \{k-1, \dots, k-N\}$ et de plus des sorties numériques précédentes $y_i(iT_e) = y_i$ pour tout $i \in \{k-1, \dots, k-N\}$ (figure.III.1):

$$y_k = F_{onction}(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-N}, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-N})$$

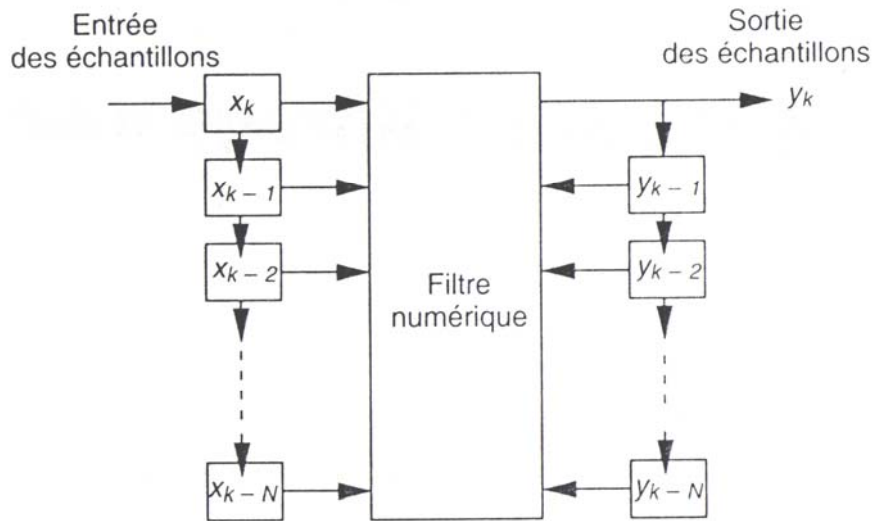


Figure III.1 : Représentation schématique d'un filtre numérique.

Les notions de filtrage numérique abordées concerneront principalement des systèmes linéaires invariants, la sortie d'un tel système est liée à l'entrée par l'opération de convolution. Cela impose que la fonction générale précédente donnant les échantillons de sortie y_k soit une combinaison linéaire de n éléments d'entrée ou de sortie précédents x_i et y_i :

$$y_k = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-j} \quad (\text{III.1})$$

Cette équation générale des filtres numériques est appelée *équation aux différences*. A partir de cette expression, nous pouvons distinguer deux grandes familles de filtres (figure III.2) : les *filtres non récurrents* pour lesquels tous les coefficients b_i sont nuls et les *filtres récurrents* pour lesquels au moins un coefficient b_i est non nul. Ces derniers sont encore définis comme des filtres possédant une boucle de contre-réaction. Pour les filtres non récurrents, l'équation est donc limitée à :

$$y_k = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} \quad (\text{III.2})$$

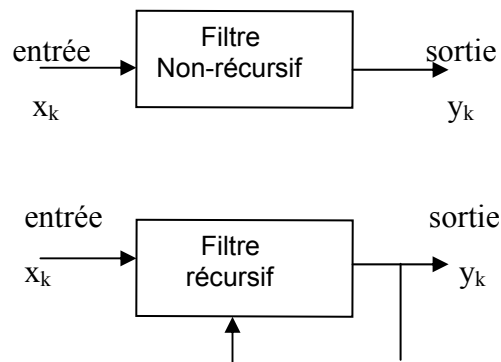


Figure III.2 : Filtrage non-récuratifs et récuratifs.

Mais dans le cadre des systèmes linéaires invariants, nous pouvons utiliser l'équation de convolution discrète, établie au paragraphe (II.4.2) qui est liée aux échantillons de la réponse impulsionnelle h_i :

$$y_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} h_i \cdot x_{k-i} \quad (\text{III.3})$$

Cette équation de convolution amène à définir deux types de filtres numériques : les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou filtres à moyenne ajustée (*MA*) pour lesquels il sera possible d'utiliser l'équation III.3 qui doit être alors limitée au domaine d'existence de la réponse impulsionnelle, soit la forme :

$$y_k = \sum_{i=0}^N h_i \cdot x_{k-i} \quad (\text{III.4})$$

Ainsi les filtres à réponse impulsionnelle finie pourront être réalisés directement à partir de filtres non récuratifs. En effet l'équation III.4 correspond à l'équation III.2 pour laquelle les coefficients a_i sont les valeurs échantillonnées h_i de la réponse impulsionnelle $h(t)$. Il est important de noter que ces filtres peuvent aussi être réalisés à partir de filtres récuratifs.

L'autre catégorie de filtres numériques est celle des filtres dits à réponse impulsionnelle infinie (*RII*) ou filtres généraux (*ARMA*), pour lesquels la relation III.4 ne sera pas applicable ; il sera nécessaire d'utiliser l'équation générale III.1. Il est possible de définir une catégorie particulière des

filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie, appelés filtres autorégressifs (*AR*) pour lesquels nous avons la relation suivante (cas particulier de la relation III.1) :

$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-j}$$

Enfin il ne faut pas oublier que, comme pour les filtres analogiques et puisque nous disposons d'une transformée de Fourier discrète (TFD). Il est possible d'appliquer le produit dans l'espace des fréquences discrètes après une TFD et un retour dans l'espace des temps discrets par une transformée de Fourier discrète inverse. Nous avons ainsi le même schéma de la figure III.3 que celui présenté au paragraphe III.1.

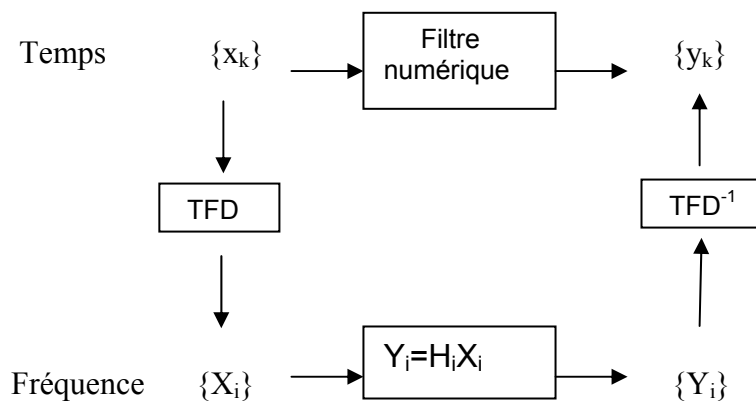


Figure III.3 : Réalisation d'un filtre numérique par transformée de Fourier discrète

La conception et la réalisation des filtres numériques doivent être abordées selon les trois aspects essentiels suivants :

- Modèle du filtre numérique : modèle obtenu par analogie avec un filtre analogique ou modèle direct dans des cas spécifiques ;
- Synthèse du filtre numérique basée sur l'équation aux différences (cas général), l'équation de convolution pour les filtres à réponse impulsionnelle finie ou la transformée de Fourier discrète ;
- Réalisation du filtre numérique : algorithme ou composants électroniques numériques.

Nous allons introduire un autre outil permettant un traitement plus facile des signaux discrets,

en particulier dans le cadre des filtres numériques dont la synthèse est basée sur l'utilisation de l'équation aux différences : la transformée en Z [10].

III.2- Filtrage numérique simple - lissage temporel :

Avant d'étudier la mise en place de filtre numérique à partir des relations III.1 et III.4, la capacité de calcul qu'offrent les systèmes numériques permet de réaliser des opérations numériques de filtrage linéaire simple comme la moyenne temporelle glissante d'ordre N . Ce type de traitement numérique va permettre de réaliser un « *lissage* » du signal d'entrée conduisant par exemple à la suppression d'un bruit résiduel ou à l'atténuation d'un bruit de type impulsif. Par contre ce type de traitement peut modifier fortement le signal informatif. La plus courante de ces techniques est donc la moyenne temporelle glissante d'ordre N , appelé aussi profondeur de lissage, qui s'exprime par :

$$y_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_{k-i}$$

Nous pouvons remarquer que cette opération correspond à l'équation aux différences III.2 des filtres non récurrents pour laquelle les coefficients a_i sont tous égaux à $1/N$.

L'utilisation de cette technique de lissage temporel sur un signal de bruit blanc donne de bons résultats. Soit un bruit blanc uniforme d'amplitude variant entre -1 et +1 avec une moyenne nulle et un écart type de 0.6, l'amplitude du bruit peut être diminuée jusqu'à un intervalle $[-0.6, +0.6]$ avec un écart type de 0,18 dans le cas de 10 valeurs moyennées (figures III.5 et III.6). Plus le nombre N de valeurs moyennées sera grand, meilleur sera le lissage, par contre le signal informatif est lui aussi moyenné et perd donc de l'information.

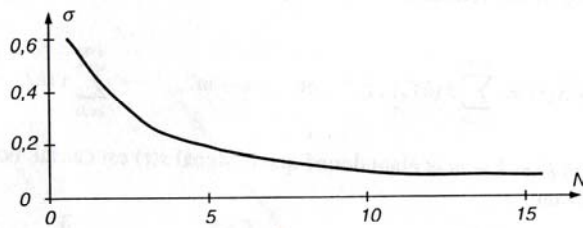


Figure III.5 : Résultat sur l'écart type d'un traitement par lissage temporel d'un bruit blanc uniforme en fonction du nombre N de valeurs moyennées.

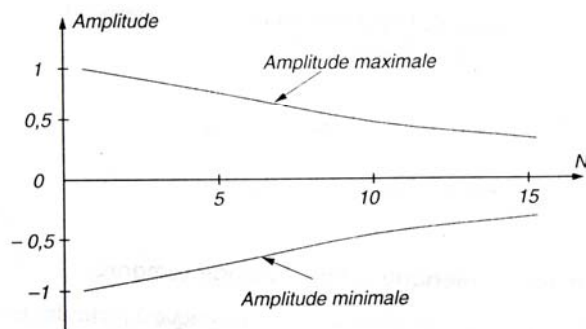


Figure III.6 : Résultat sur l'amplitude d'un traitement par lissage temporel d'un bruit blanc uniforme en fonction du nombre N de valeurs moyennées.

III.3 – Synthèse des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie :

La conception et la réalisation des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie sont essentiellement basées sur la fonction de transfert $H(z)$: gabarit de filtrage de type passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande. La première étape est donc l'obtention de cette fonction de transfert à partir de l'équation aux différences [11].

III.3.1-Équation aux différences :

Nous considérons des filtres numériques linéaires et invariants dans le temps correspondant aux filtres analogiques décrits par des équations différentielles à coefficients constants de la forme :

$$\alpha_0 x(t) + \alpha_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + \alpha_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} = \beta_0 y(t) + \beta_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + \beta_n \frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

Dans cette hypothèse, les systèmes sont représentés par des équations aux différences de la forme (équation III.1) :

$$y_k = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-1} - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-1} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-1} = \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-1} \quad \text{avec } b_0 = 1$$

Cette équation aux différences est une équation linéaire à coefficients constants d'ordre N du filtre numérique où y_k et x_k sont respectivement le signal de sortie (réponse) et le signal d'entrée (excitation).

En appliquant la transformée en z à l'équation générale précédente et soient $Y(z)$ et $X(z)$ les transformées en z de y_k et x_k , il vient :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{j=0}^N b_j \cdot y_{k-1} \right] z^{-k} = \sum_{k=0}^N \left[\sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-1} \right] z^{-k} \quad \text{soit}$$

$$Y(z) \cdot \sum_{j=0}^N b_j \cdot z^{-j} = X(z) \cdot \sum_{i=0}^N a_i \cdot z^{-i}$$

Par analogie avec les filtres analogiques, un filtre numérique peut être caractérisé par sa fonction de transfert en z ou « transmittance » en z , $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i \cdot z^{-i}}{\sum_{j=0}^N b_j \cdot z^{-j}} \quad (\text{III.6})$$

ou dans le cas d'un filtre non-récurif :

$$H(z) = \sum_{i=0}^N a_i \cdot z^{-i} \quad (\text{III.7})$$

Ensuite la question fondamentale à résoudre est comment obtenir $H(z)$ pour des caractéristiques bien définies (gain, phase...) correspondant par exemple à un filtre analogique défini par son équation différentielle ou par sa fonction de transfert $H(p)$: c'est le domaine très vaste de la synthèse des filtres numériques. Les méthodes qui permettent de déterminer une fonction de transfert $H(p)$ répondant à des spécifications données de gain et de phase ou à des réponses impulsionnelles ou indicielles sont bien connues dans le cas des filtres analogiques. Une première approche à cette problématique est de réaliser une transposition du filtre analogique en filtre numérique

III.3.2- Synthèse des filtres numériques par transformation de $H(p)$ en $H(z)$:

Le procédé le plus utilisé pour calculer la fonction de transfert d'un filtre numérique, consiste à transposer la fonction de transfert $H_p(p)$ de son homologue analogique du plan « p » dans le plan « z » par une règle de transformation reliant p à z . Pour réaliser cette transformation et déterminer la fonction de transfert $H_z(z)$ dans le plan z , il suffit de définir une relation $p = F_{\text{onction}}(z)$, d'où :

$$H(z) = H_p(p = F_{\text{onction}}(z))$$

La relation exacte entre p et z est donnée par la définition même de la transformée en z vue dans le paragraphe précédent :

$$Z = e^{pT_e}$$

$$\text{Soit} \quad p = \frac{1}{T_e} \ln(z) \quad (\text{III.8})$$

Dans le domaine étudié des filtres linéaires invariants, $H_p(p)$ se présente sous la forme d'un quotient de deux polynômes en p . Il est nécessaire de rechercher une règle de transformation qui permet de conserver la forme « quotient de deux polynômes ». De nombreuses méthodes ont été développées pour réaliser cette transformation. Elles correspondent à différents types d'analogie dans le sens où une méthode va privilégier telle ou telle propriété : gain, réponse impulsionnelle, réponse indicielle, etc. Ainsi, les principales méthodes sont les suivantes :

- Transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle ;
- Méthode de l'invariance indicielle ;
- Transformation adaptée ;
- Transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation ;
- Transformation homographique ou équivalence de l'intégration.

Pour chacune de ces transformations, nous décrirons brièvement la méthode pour transformer $H(p)$ en $H(z)$, les conditions pour pouvoir réaliser cette transformation et, enfin, les avantages et inconvénients de cette méthode.

a) Transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle :

Par cette méthode on obtient un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle est égale à la réponse impulsionnelle échantillonnée du filtre analogique correspondant. En considérant la fonction de transfert $H(p)$ ou $H(f)$ et la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre analogique, la réponse impulsionnelle, échantillonnée à la période T_e , s'exprime par :

$$h_e(t) = T_e \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} h(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

Le coefficient T_e correspond au fait que la réponse impulsionnelle étant échantillonnée, la fonction de transfert est périodisée avec la fréquence F_e . Soit la relation :

$$H_e(f) = H(f) * \text{Pgn}_{F_e}(f) \text{ d'où } h_e(t) = h(t) \cdot [T_e \cdot \text{Pgn}_{T_e}(t)]$$

Par conséquent la transformée en zH_z de $h_e(t)$ est donnée par :

$$h_e(z) = T_e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} h(kT_e) \cdot z^{-k}$$

Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{a_i}{p - p_i}$$

La transformée de Laplace inverse nous donne la réponse impulsionnelle du filtre analogique :

$$h(t) = a_i e^{p_i t}$$

Ainsi la transformation à réaliser pour obtenir le filtre numérique à partir du filtre analogique caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$ est :

$$\frac{1}{p - p_i} \rightarrow T_e \cdot \frac{1}{1 - e^{p_i T_e} z^{-1}} \quad (\text{III.9})$$

Si un filtre quelconque peut s'exprimer sous la forme de r filtres du premier ordre en parallèle, cette méthode consiste à réaliser dans $H(p)$ la transformation suivante:

$$H(p) = \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{p - p_i} \rightarrow H(z) = \left[T_e \cdot \frac{z-1}{z} \right] \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{1 - e^{p_i T_e} z^{-1}} \quad (\text{III.10})$$

La transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle est caractérisée par :

- Condition : la fréquence de coupure haute du filtre doit être très inférieure à la fréquence de Shannon ;
- Domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres passe-bas ou des filtres passe-bande ;
- Inconvénient : le principal inconvénient réside dans le fait qu'il faille réaliser la décomposition en éléments simples pour calculer l'équation aux différences du filtre numérique.

b) Méthode de l'invariance indicielle :

Par cette méthode on obtient un filtre numérique dont la réponse indicielle est égale à la réponse indicielle échantillonnée du filtre analogique correspondant. La réponse indicielle $S_{\text{ind}}(t)$ s'obtient en utilisant la relation suivante :

$$S_{\text{ind}}(t) = h(t) * u(t)$$

La fonction $u(t)$ est la fonction unité ou échelon d'Heaviside, précédemment étudiée, qui a pour transformée de Laplace $1/p$. La transformée en z de cette fonction est très simple à établir :

Les transformées de Laplace et en z de l'équation donnant $S_{ind}(t)$ sont respectivement :

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}$$

Les transformées de Laplace et en Z de l'équation donnant $S_{ind}(t)$ sont respectivement :

$$S_{ind}(p) = H(p) \cdot U(p) = \frac{H(p)}{p} \quad \text{et} \quad S_{ind}(z) = H(z) \cdot U(z) = H(z) \cdot \frac{z}{z-1}$$

En considérant que $[H(p)/p]$ peut être mis sous la forme d'une somme d'éléments simples du premier ordre, nous pouvons utiliser la transformation précédente. Mais à cette expression $[H(p)/p]$ correspond $[H(z)/(z-1)]$, par conséquent, nous considérerons la transformation suivante :

$$\frac{1}{p-p_i} \rightarrow \frac{z-1}{z} \cdot \frac{T_e}{1-e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (\text{III.11})$$

Ainsi, pour un filtre quelconque s'exprimant sous la forme de r filtres du premier ordre en parallèle, nous avons la relation complète donnant $H(z)$:

$$H(p) = \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{p-p_i} \rightarrow H(z) = [T_e \cdot \frac{z-1}{z}] \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{1-e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (\text{III.12})$$

La transformation par la méthode de l'invariance indicielle est caractérisée par :

- Condition : la fréquence de coupure haute du filtre doit être inférieure à la fréquence de Shannon ;
- Domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres passe-bas ou des filtres passe-bande ;
- Inconvénient : le principal inconvénient réside dans le fait qu'il faille réaliser la décomposition en éléments simples pour calculer l'équation aux différences du filtre numérique.

c) Transformation adaptée :

Par cette méthode, appelée aussi *matched transform*, on obtient un filtre numérique dont les pôles de la fonction de transfert ou transmittance sont conservés. En considérant que $H(p)$ est sous la forme d'un produit d'éléments simples du premier ordre (filtre analogique ne présentant que des pôles), cette méthode consiste à réaliser dans $H(p)$ la transformation identique à la précédente, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{p - p_i} \rightarrow T_e \cdot \frac{1}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}}$$

Pour un filtre quelconque s'exprimant sous la forme de r filtres du premier ordre en série, nous obtenons alors la relation complète :

$$H(p) = \prod_{i=0}^r \frac{a_i}{p - p_i} \rightarrow H(z) = T_e \cdot \prod_{i=0}^r \frac{a_i}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (\text{III.13})$$

d) Transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation :

Étant donné une équation différentielle reliant deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, la méthode, qui correspond à une démarche classique en analyse numérique, consiste à donner une approximation de la dérivée d'une fonction continue. Dans le cas de la transformation d'Euler, l'approximation réalisée est la plus simple :

$$y(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

Cette approximation correspond également à l'approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles :

$$x(t) = \int_0^t y(t) \cdot dt \rightarrow x_k = x_{k-1} + T_e \cdot y_k$$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle initiale est :

$$Y(p) = p \cdot X(p) \quad \text{d'où } H(p) = p$$

La transformée en z de l'équation différentielle initiale discrétisée est :

$$y(z) = \frac{1}{T_e} \cdot [x(z) - x(z) \cdot z^{-1}] = \frac{1-z^{-1}}{T_e} \cdot x(z)$$

$$\text{Soit} \quad H(z) = \frac{1-z^{-1}}{T_e}$$

Cette méthode consiste donc à réaliser dans $H(p)$ la transformation suivante :

$$P \xrightarrow[T_e]{1-z^{-1}} \quad (III.14)$$

La transformation d'Euler ou par équivalence à la dérivation est caractérisée par :

- domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres analogiques simples ;
- inconvénient : le principal inconvénient est la distorsion des caractéristiques en hautes fréquences.

e) Transformation homographique ou équivalence de l'intégration :

De la même manière que précédemment, cette méthode consiste à donner une approximation de l'intégrale d'une fonction continue. Dans ce cas, l'approximation réalisée est celle de la « méthode des trapèzes » :

$$x(t) = \int_0^t y(t) \cdot dt \rightarrow x_k = x_{k-1} + \frac{T_e}{2} \cdot [y_k + y_{k-1}]$$

La transformée en z de l'équation différentielle discrétisée est :

$$x(z) = x(z) \cdot z^{-1} + \frac{T_e}{2} [Y(z) + Y(z) \cdot z^{-1}]$$

Soit

$$H(z) = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{[1-z^{-1}]}{[1+z^{-1}]}$$

Soit après une transformation en z , cette méthode consiste donc à réaliser dans $H(p)$ la transposition suivante:

$$P \longrightarrow \frac{2}{T_e} \cdot \frac{[1-z^{-1}]}{[1+z^{-1}]} \quad (\text{III.15})$$

La transformation homographique ou par équivalence à l'intégration ou encore appelée transformation bilinéaire est caractérisée par :

- Domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres dont la caractéristique fréquentielle est constante dans des domaines de fréquences données ;
- Avantage : le principal avantage de ce filtre est sa stabilité.

III.4- Synthèse des filtres numériques à impulsion finie :

La convolution intervient dans tous les systèmes de filtrage linéaire et consiste en la modification du signal d'entrée par la caractéristique temporelle du système ou réponse impulsionnelle. Le filtre analogique, étant défini par sa fonction de transfert $H(p)$ et sa réponse impulsionnelle $h(t)$, le signal de sortie $y(t)$ du filtre soumis au signal d'entrée $x(t)$ est donné par la relation connue :

$$y(t) = x(t) * h(t).$$

Dans le cas de filtre à réponse impulsionnelle finie, le filtrage numérique par convolution correspond à une sommation pondérée des valeurs du signal d'entrée $x(kT_e) = X_k$ par la suite des coefficients de la réponse impulsionnelle discrète $h(kT_e) = h_k$ du filtre selon la relation (III.4). La réponse impulsionnelle ayant une durée finie, le nombre d'échantillons est limité. Soit N le nombre de

valeurs de h_k connues :

$$y_k = \sum_{i=0}^{N-1} h_i \cdot x_{k-1} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot h_{k-1} \quad (\text{III.16})$$

Dans beaucoup de réalisations de filtre numérique, le point de départ est la réponse fréquentielle du filtre $H(f)$ donnée par un gabarit. Partant de cette réponse fréquentielle discrétisée $H_e(f)$, il est aisé d'obtenir la réponse impulsionnelle discrétisée $h_e(t)$ par transformée de Fourier discrète. La discrétisation de la réponse impulsionnelle a conduit à la périodisation du spectre, soit :

$$H_e(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} H(f - kF_e)$$

d'où la forme de $h_e(t)$, calculée sur N points, pour conserver la réponse fréquentielle :

$$h_e(t) = T_e \cdot \sum_{-N/2}^{N/2-1} h_k \cdot \delta(t - kT_e) = \sum_{-N/2}^{N/2-1} (T_e \cdot h_k) \cdot \delta(t - kT_e) = \sum_{-N/2}^{N/2-1} h'_k \cdot \delta(t - kT_e)$$

Ainsi les échantillons de la réponse impulsionnelle $h_e(t)$ sont h'_k . Dans le cas où la réponse impulsionnelle obtenue n'est pas causale, il est possible de retarder cette réponse impulsionnelle de $N/2$ points pour rendre le filtre causal :

$$h_e(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h'_{k-N/2} \cdot \delta(t - kT_e)$$

III.5-Réalisation des filtres numériques :

A partir de l'expression de la transmittance en Z du filtre numérique ou de l'équation de convolution, il faut concevoir l'algorithme du calcul ou la structure matérielle permettant de réaliser ce filtre. La réalisation des filtres numériques peut être faite en utilisant les trois éléments de base (matériel ou logiciel) suivants :

- Additionneur, { symbolisé par Σ } ;

- Multiplieur, { symbolisé par X } ;
- Retard de T_e : échantillon k par rapport à $k-1$, { symbolisé par T }. Cette opération sera réalisée matériellement par des registres à décalage.

III.5.1- Filtres numériques synthétisés par $H(z)$:

A partir de la fonction de transfert $H(z)$, obtenue selon les différentes transformations possibles, diverses structures peuvent être utilisées : structure *directe* (implémentation de l'équation aux différences), structure *canonique* (structure directe avec minimisation des composants) et structure *en éléments simples*.

a) Structure directe :

Cette structure est l'application directe des expressions de la transmittance $H(z)$. Dans le cas d'un filtre non récursif, une des structures possibles est celle représentée sur le schéma de la figure III.9 qui traduit l'équation III.2.

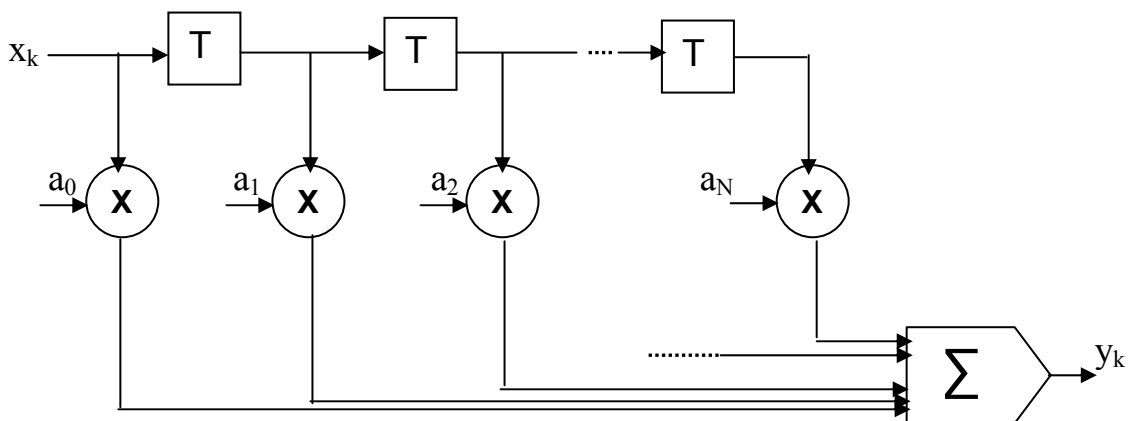


Figure III.9 : Structure directe d'un filtre numérique non-récuratif.

De même, la traduction directe de l'expression de $H(z)$ pour un filtre récursif dans le schéma de la figure III.10, page suivante, qui traduit l'équation générale III.1.

b) Structure canonique :

Cette forme permet de minimiser le nombre d'éléments utilisés dans la réalisation du filtre. L'équation générale peut s'écrire sous la forme :

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = W(z) \blacksquare V(z)$$

Avec $w(z) = \sum_{j=0}^N a_j \cdot z^{-j}$ système non récursif

$$V(z) = \frac{X(z)}{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}}$$

$$Y(z) = \left[\sum_{j=0}^N a_j \cdot z^{-j} \right] V(z)$$

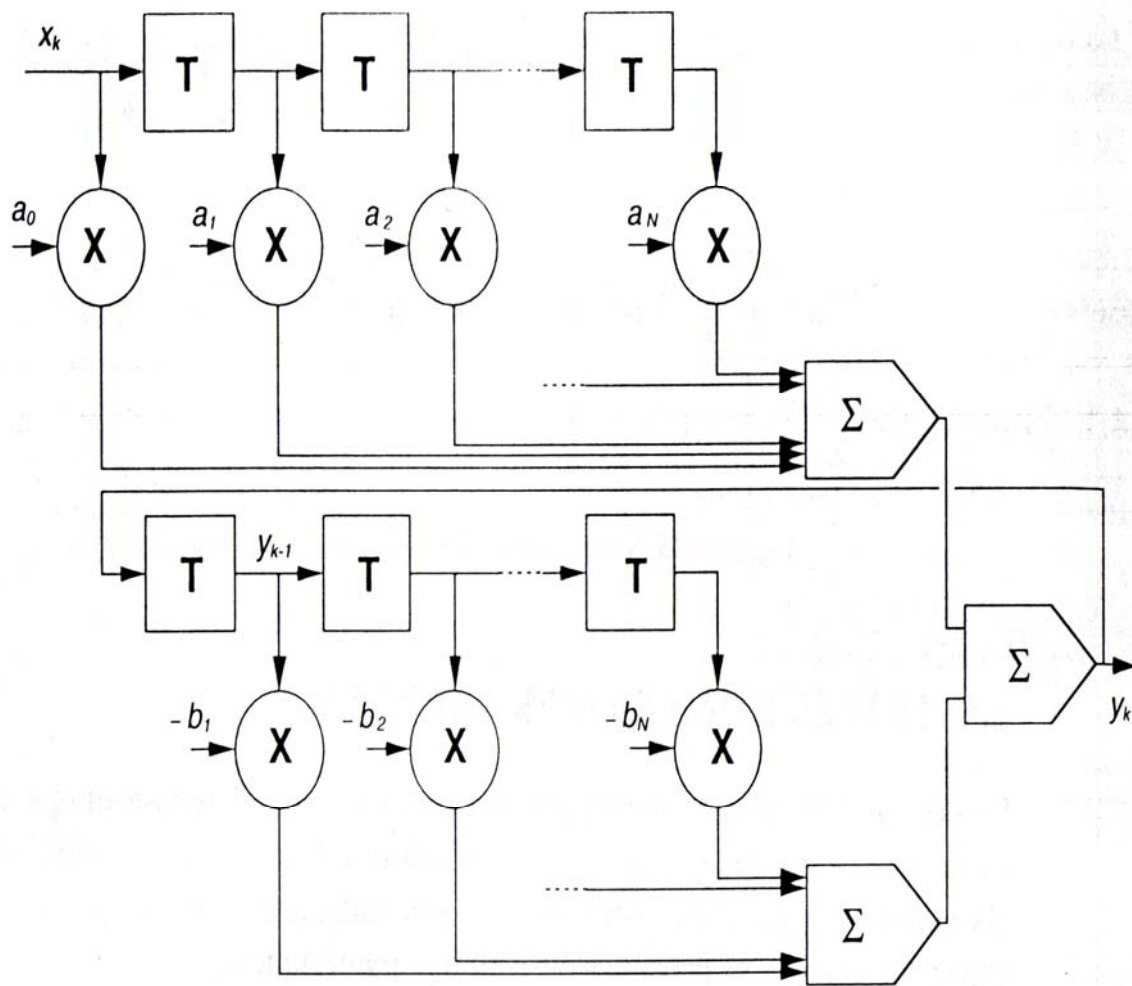


Figure III.10 : Structure directe d'un filtre numérique récursif

En prenant la transformée en z inverse, on obtient l'expression de y_k en fonction de la valeur intermédiaire v_k qui est utilisée pour construire la structure de ce filtre (figure III.11) :

$$Y_k = \sum_{j=0}^N a_j \cdot V_{k-j}$$

Le résultat montre qu'une seule structure retard est nécessaire pour la réalisation de ce filtre numérique.

c) Structure en composants simples :

Il est possible d'exprimer $H(z)$ à partir d'éléments de base ou de composants simples du premier ou du second ordre $H_i(z)$:

- premier ordre

$$H_i(z) = \frac{\alpha_i}{1 - \beta_i \cdot z^{-1}}$$

-second ordre

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{i1} \cdot z^{-1} + \alpha_{i0}}{\beta_{i2} \cdot z^{-2} + \beta_{i1} \cdot z^{-1} + \beta_{i0}}$$

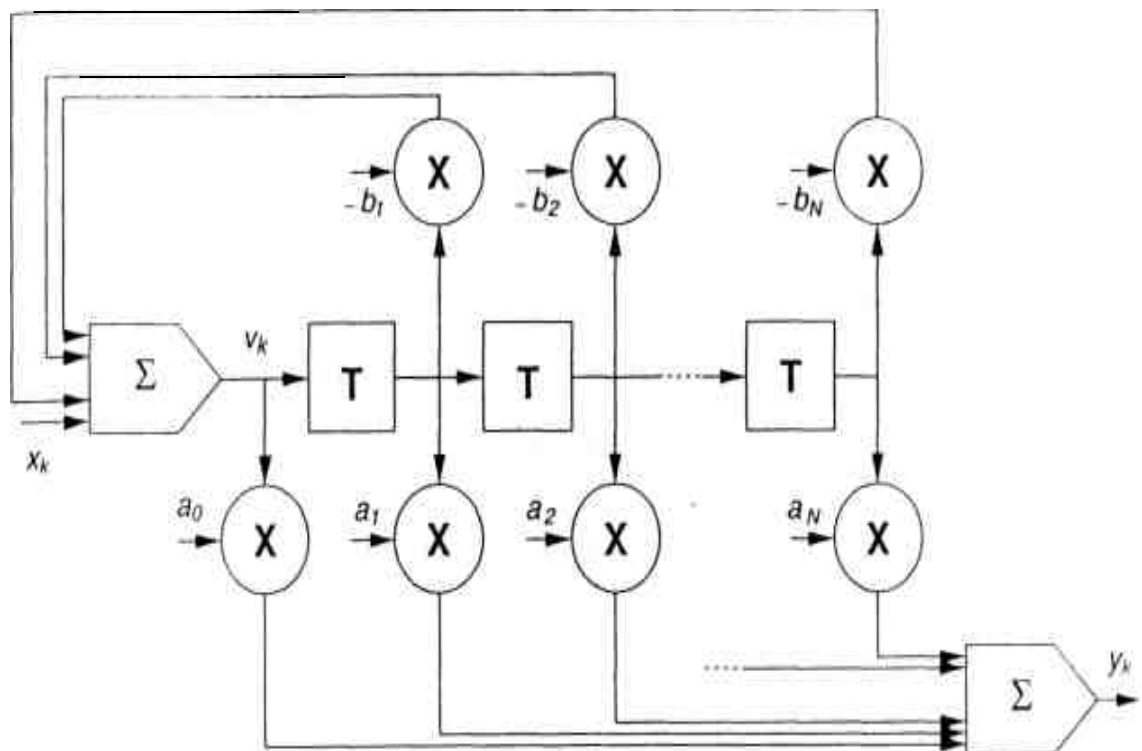


Figure III.11 : Structure canonique d'un filtre numérique récursif.

Ces deux éléments simples peuvent facilement se traduire en structure directe ou canonique. Pour une fonction de transfert quelconque, il suffit de l'exprimer en fonction de ces éléments de base pour

réaliser ensuite une composition « produit » ou « somme » de ces éléments.

La fonction de transfert $H(z)$ peut s'écrire sous deux formes :

- produit de composants simples

$$H(z) = k_2 \cdot \prod_{i=1}^r H_i(z)$$

- somme de composants simples

$$H(z) = k_1 + \sum_{i=1}^r H_i(z)$$

Dans le cas d'une écriture sous la forme « produit », nous obtenons une structure série ou dite en cascade (figure III.12) et dans le cas d'une formulation « somme », nous obtenons une structure parallèle (figure III.13). Comme nous l'avons vu dans le domaine analogique, cette adjonction de composants de base n'est

réalisable, aussi directement, uniquement parce que nous sommes dans le domaine numérique où il n'y a pas de problème d'adaptation d'impédance.

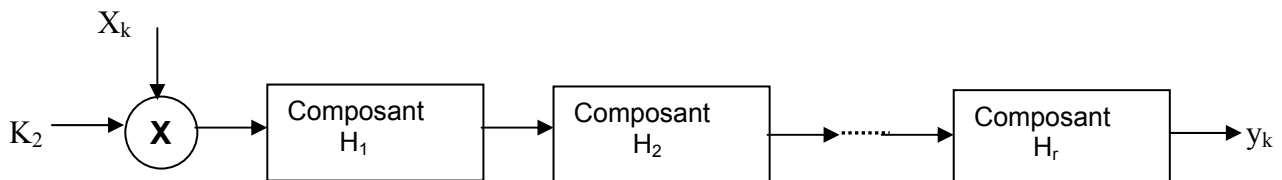


Figure III.12 : Structure série ou en cascade à partir d'éléments de base du premier ou du second ordre.

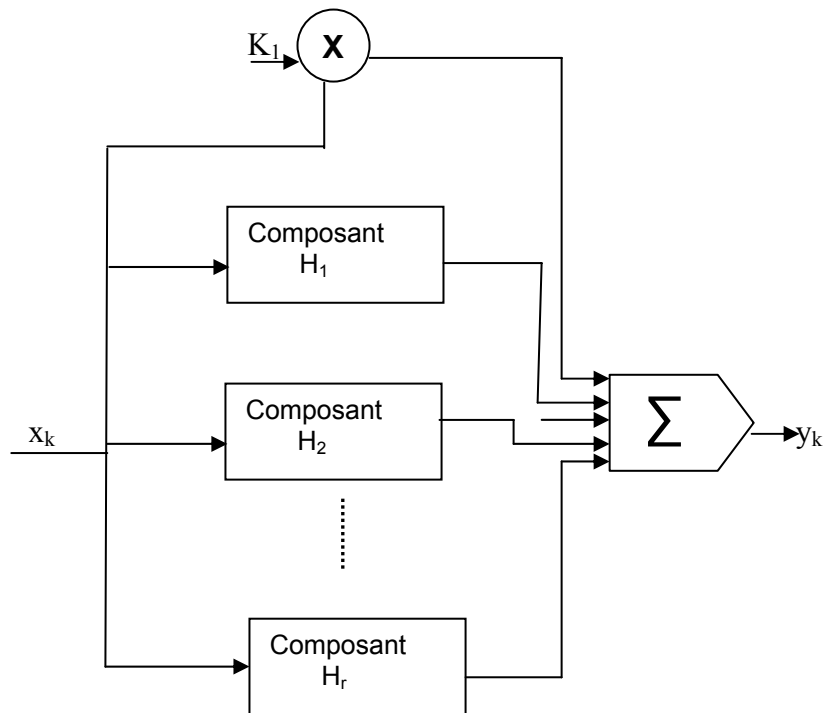


Figure III.13 : Structure parallèle à partir d'éléments de base du premier ou du second ordre.

III.5.2-Filtres numériques basés sur la convolution :

Pour réaliser ces filtres à convolution, les coefficients du filtre, qui sont représentés par les N valeurs de la réponse impulsionnelle discrétisée, sont des constantes dans l'algorithme de calcul ou stockés en mémoire (EPROM) dans le cas d'une réalisation matérielle du filtre. Dans ce dernier cas, deux structures peuvent être adoptées :

- structure directe (figure III.14) :
- structure transposée (figure III.15).

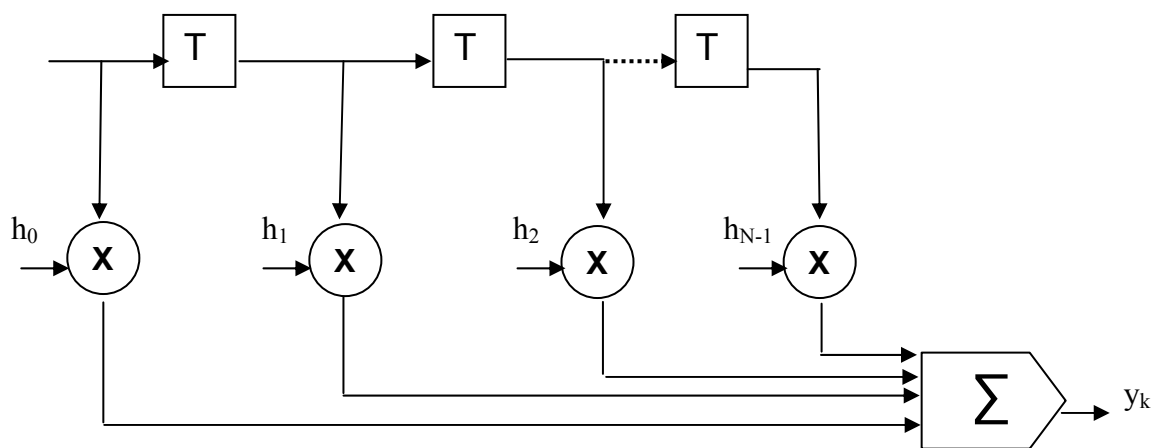


Figure III.14 : Structure directe d'un filtre à convolution.

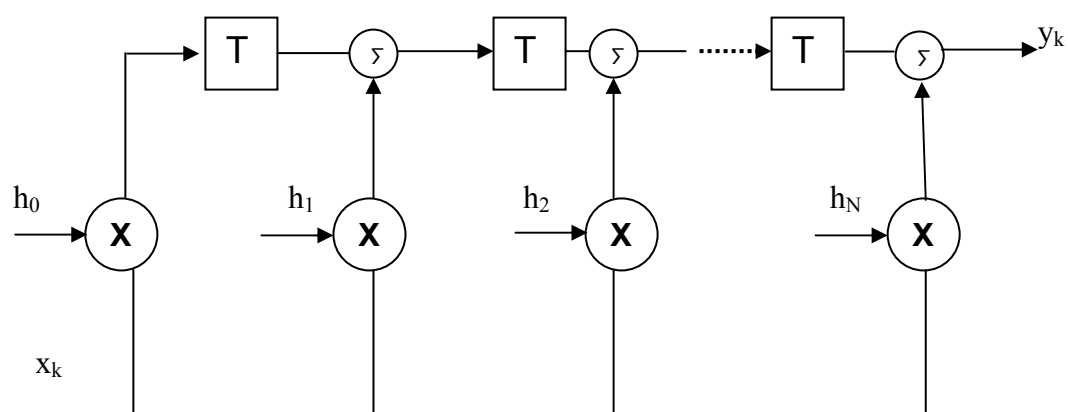


Figure III.15: Structure transposée d'un filtre à convolution.

III.6-Filtres numériques avancés :

Le domaine du filtrage numérique est très vaste car il repose uniquement sur les capacités de calcul des systèmes informatiques. Lorsque les possibilités des filtres classiques, vus précédemment, ne sont pas suffisantes pour un problème donné. Il existe des extensions possibles du « filtrage numérique ».

III.6.1- Filtres numériques de la valeur médiane

Les filtres numériques classiques linéaires ont pour fonction de base d'éliminer certaines composantes fréquentielles qui gênent l'interprétation du signal informatif. Pour cela il est nécessaire que les fréquences à éliminer se situent dans une zone de fréquences hors de la zone occupée par le signal utile. Pour répondre à cette limitation, il est possible de mettre en place des traitements non linéaires, appelés abusivement « filtres » numériques non linéaires.

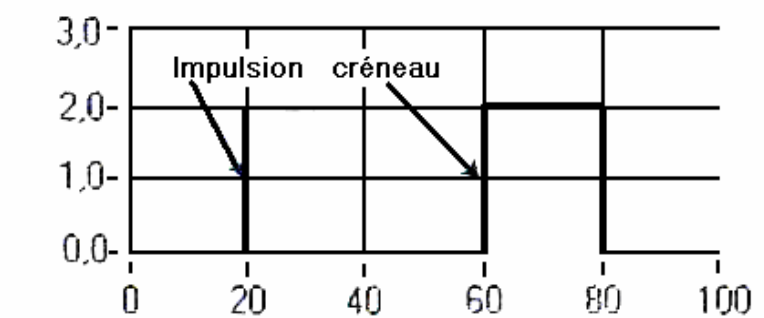
Un de ces traitements non linéaires est le *filtre de la valeur médiane* : étant donné $2N + 1$ échantillons x_k , la valeur médiane $x_{med,k}$ de cet ensemble est l'échantillon qui se trouve au milieu de l'ensemble ordonné selon un ordre croissant :

$$\{x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-2N}\} \xrightarrow{\text{Ordre croissant}} \{x'_k, x'_{k-1}, \dots, x'_{k-2N} ; \text{avec } x'_i \leq x'_{i+1}\}$$

D'où $x_{med,k} = x'_{k-N}$

Ce type de filtre numérique non linéaire permet de conserver les transitions rapides mais maintenues d'un signal et d'éliminer complètement des transitions de type impulsion courte. Si nous reprenons les exemples du paragraphe III.1.3 « lissage temporel », ils mettent parfaitement en évidence cette caractéristique du filtre de la valeur médiane : le signal créneau est conservé sans modification et l'impulsion de durée unité est éliminée. Le traitement du signal du deuxième exemple montre aussi que ce filtre modifie moins fortement le signal informatif en conservant en particulier certaines transitions rapides.

Visualisation du signal en entrée



Visualisation du signal en sortie

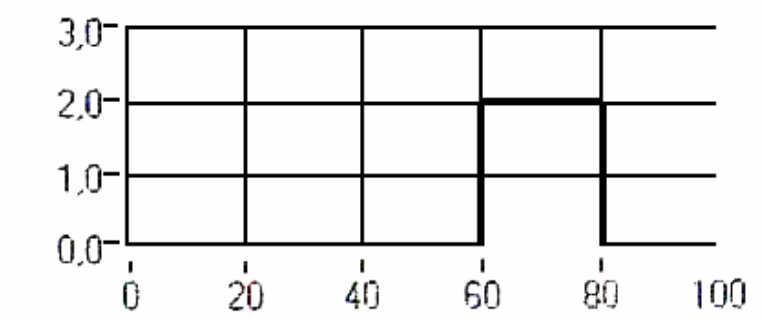
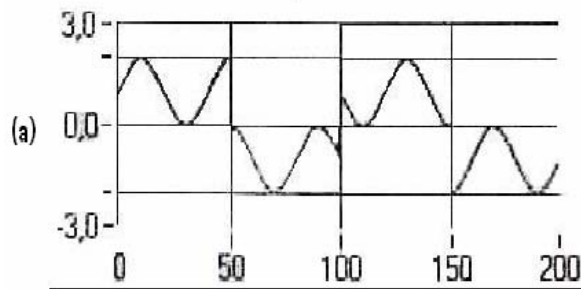
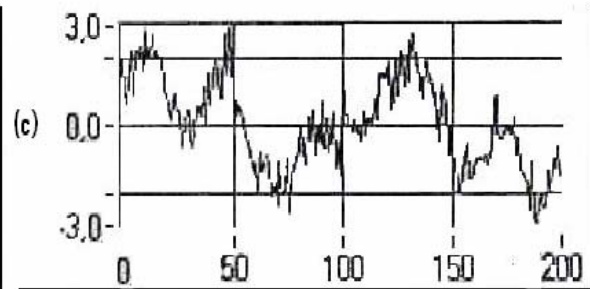


Figure III.16: effet d'un filtre numérique non linéaire de la valeur médiane avec un rang de 10 sur un signal impulsion de durée unité suivi d'un créneau.

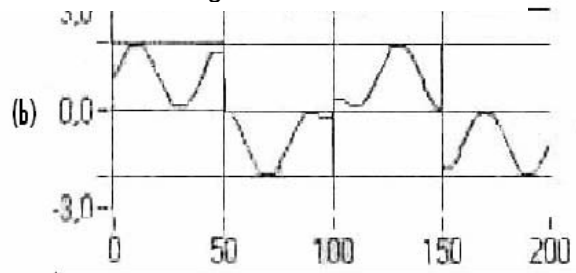
Visualisation du signal en entrée



Visualisation du signal en entrée



Visualisation du signal en sortie



Visualisation du signal en sortie

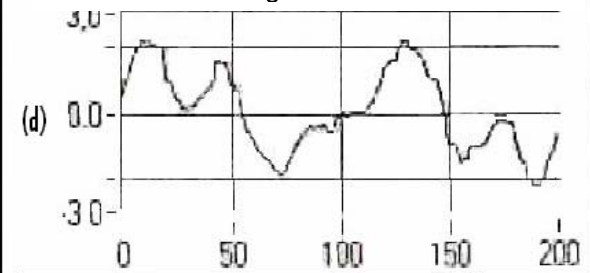


Figure III.17 : Effet d'un traitement par filtre de valeur médiane : signal initial (a), signal lissé avec un rang 5(b) , signal bruité initial (c) et signal bruité et lissé avec un rang 5 (d).

De façon plus générale, le calcul de la valeur médiane s'effectue sur $2N+1$ échantillons, cette technique permettra de sauvegarder toutes transitions rapides suivies par un plateau dont la durée est supérieure ou égale à $N.T_e$ (T_e : période des échantillons). Dans le cas contraire cette transition sera éliminée.

III.6.2- Filtres numériques multicadence :

Les systèmes étudiés, jusqu'à présent ne mettaient en œuvre qu'une seule fréquence ou cadence d'échantillonnage $1/T_e$. Il est possible de trouver certaines applications où le signal d'entrée du filtre et le signal de sortie ne fonctionnent pas à la même cadence (système multicadence). Considérons deux exemples :

- Filtrage passe-bas : le signal de sortie aura par définition même du traitement effectué une fréquence plus basse et donc pourra être échantillonné à une cadence plus faible;
- Modulation : le signal de sortie qui sera l'onde porteuse du signal informatif va avoir une fréquence plus élevée que le signal informatif d'entrée.

Dans les deux cas, on cherchera à adapter le filtre à la cadence la plus petite afin de minimiser les temps de calcul. Dans le cas où il sera réalisé une réduction de la fréquence d'échantillonnage, l'opération est appelée « *décimation* » et dans le cas où une augmentation de la fréquence d'échantillonnage sera réalisée, l'opération est appelée « *interpolation* ».

Les opérations de décimation (enlever un échantillon sur n échantillons) ou d'interpolation (rajouter n échantillons entre 2 échantillons) vont conduire à des déformations spectrales.

Considérons l'exemple inverse de la décimation. Soit un signal $x_k(t)$ échantillonné à la fréquence T_{e1} et le signal de sortie $y_k(t)$ dont nous voulons diminuer la fréquence d'échantillonnage jusqu'à T_{e2} (avec $T_{e2} = T_{e1}/4$). Cette opération ne sera possible que si le spectre du signal initial est limité *a priori* ou par une opération de filtrage à la fréquence $1/2T_{e2}$, i.e. à la fréquence $1/8T_{e1}$. En effet la décimation est équivalente à une opération d'échantillonnage et, si le spectre du signal à échantillonner à cette nouvelle cadence T_{e2} n'a pas son spectre limité à la fréquence $1/2T_{e2}$, le phénomène de repliement va se produire.

