Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à **Dr. Drihem Douadi** pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je remercie aussi le **Dr. A. Djeriou** d'avoir accepté de présider le jury aussi que **Dr. R. Heraiz** d'être membre.

Je ne saurais oublier de remercier ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mon mari pour leur soutient tout long de mes études.

.

Table des matières

Introduction

La théorie de l'interpolation a été développée suite à des questions pratiques sur l'inclusion des ensembles. Par exemple, si f est une fonction qui appartient à L_{p_0} et L_{p_1}, appartient-elle à un autre L_p ? Si on sait résoudre cette question, une question vient immédiatement. Peut-on alors prolonger des opérateurs linéaires existant sur nos espaces de départ (L_{p_0} et L_{p_1}) à notre nouvelle espace L_p ?

Les travaux de ce mémoire est étudié l'interpolation dans deux méthodes (complex et réel). Dans chacun des cas, nous examinerons plus particulièrement le cas des espaces L_p.

On divisé le travail en trois chapitres :

Dans la première chapitre, on donne quelque rappels des notions nécessaires à l'interpolation des espaces et des opérateurs, puis on étudie la méthode complexe qui contient deux méthode d'interpolation C^{θ}, C_{θ} et leurs points communs et on décrire lemme des droites d'Hadamard et théorème d'équivalence, théorème de Riesz-Thorin.

Dans le deuxième chapitre, on étudie la méthode réel qui contient aussi deux méthode: la première qui s'appelle méthode K et l'autre méthode J et on décrire un introduction aux espace de Lorentz.

En fin, dans le troisième chapitre, on étudie les deux méthodes dans l'espace L_p.

Chapitre 1

Méthode complexe

Dans ce chapitre, on présente les difinitions et les propriétés d'espace d'interpolation, puis on etudie la méthode complexe et leur deux foncteurs interpolation C^{θ}, C_{θ}, utulisant le théorème de foncteue analytique.

1.1 Propriétés générales des espaces d'interpolation

1.1.1 Définition et propriétés

Avant de définir des espaces d'interpolation, nous allons construire deux espaces, la somme et l'intersection. Sur ces nouveaux espaces nous allons ensuite prolonger nos applications linéaires.

Soient A_0 et A_1 deux espaces vectoriels normés. On suppose qu'il existe un espace topologique A muni d'une topologie de Haussdörff qui contient A_0 et A_1. Nous savons construire l'intersection $A_0 \cap A_1$ et la somme $A_0 + A_1$ qui sont tous deux des espaces vectoriels.

On peut munir $A_0 \cap A_1$ et $A_0 + A_1$ de norme:

$$\begin{aligned} \|a\|_{A_0 \cap A_1} &= \max\left(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\right) \\ \|a\|_{A_0 + A_1} &= \inf_{a = a_0 + a_1} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}). \end{aligned}$$

Lemme 1.1.1 *Soit A un espace vectoriel normée .*
A est complet si seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|_A < \infty$ ce qui implique $\left\|a - \sum_{n=1}^{N} a_n\right\|_A \to 0$ tel que $N \to \infty,\ \ a \in A$.

Proposition 1.1.2 *Si A_0 et A_1 sont complets alors $A_0 \cap A_1$ et $A_0+ A_1$ sont complets.*

Preuve. Soit $a_n = a_n^0 + a_n^1$ telle que $\|a_n^0\|_{A_0} + \|a_n^1\|_{A_1} \leq 2\,\|a_n\|_{A_0+A_1}$,
avec $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n^0\|_{A_0} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n^1\|_{A_1} < \infty$ et on a A_0, A_1 sont complets et d'après le lemme précédente on trouve $\sum a_n^0$ converge dans A_0 et $\sum a_n^1$ converge dans A_1. Mais $a^0 = \sum a_n^0$, $a^1 = \sum a_n^1$ et $a = a^0 + a^1$ alors $a \in A_0 + A_1$,
et $\left\|a - \sum_{n=1}^{N} a_n\right\|_{A_0+A_1} \leq \left\|a^0 - \sum_{n=1}^{N} a_n^0\right\|_{A_0} + \left\|a^1 - \sum_{n=1}^{N} a_n^1\right\|_{A_1}$ finalement $\sum a_n$ converge dans $A_0 + A_1$. ■

On prolonge nos applications linéaires à nos deux espaces.

Proposition 1.1.3 *Soient $T\colon A_0 \to B_0$ et $T\colon A_1 \to B_1$ deux applications linéaires continues. Alors $T\colon A_0 \cap A_1 \to B_0 \cap B_1$ et $T\colon A_0 + A_1 \to B_0 + B_1$ définir par $Ta = Ta_0 + Ta_1$ sont continués.*

Preuve. Le cas de l'intersection est trivial. Montrons que T est bien défini.
Soient $a = a_0 + a_1 = b_0 + b_1$ avec $a_0, b_0 \in A_0$ et $a_1, b_1 \in A_1$. Alors $a_0 - b_0 = b_1 - a_1$ donc $a_0 - b_0 \in A_0$ et $a_1 - b_1 \in A_1$. Donc $T\,(a_0 - b_0) = T\,(b_1 - b_0)$.
En fin $\|T\|_{A_0+A_1,B_0+B_1} \leq \max\left(\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\right)$.

■

Nous allons construire une méthode générale qui à partir d'une collection d'espaces et l'ensemble des morphismes associés.

Définition 1.1.4 *Une catégorie est une relation constitué entre les objets $A, B, C, ...$et les morphismes $R, T, S, ...$Si $T : A \to B$ et $S : B \to C$ alors il ya une morphisme ST, la composition de S et T tel que $ST : A \to C$. La composition de morphisme satisfait à la loi associative*

$$T\,(SR) = (TS)\,R.$$

De plus, pour tout objet A dans la catégorie il existe un morphisme $I = I_A$ alors pour tout morphisme on trouve:

$$TI = IT = T.$$

On notera N la catégorie des espaces vectoriels normés et B celle des Banach, et N_1 sous catégorie de N.

Définition 1.1.5 *On dira que A_0 et A_1 deux objets de N sont compatibles s'il existe A un espace topologique muni d'une topologie de Haussdörff (séparé) tel que A_0 et A_1 soient des sous espaces de A.*

Remarque 1.1.6 *A partir de deux couples compatibles, on peut former la somme et l'intersection d'espace.*

Définition 1.1.7 *On notera C_1 la catégorie des couples de N_1 qui sont compatibles et telles que l'intersection et la somme soient dans N_1. On notera $\bar{A} = (A_0,A_1)$ un couple de C_1*
On définit deux foncteurs de C_1 dans N_1 Σ et Δ:

$$\begin{aligned} \Delta\left(\bar{A}\right) &= A_0 \cap A_1, \\ \Sigma\left(\bar{A}\right) &= A_0 + A_1, \\ \text{tel que } \Sigma\left(T\right) &= T = \Delta\left(T\right). \end{aligned}$$

1.1.2 Définition des espaces d'interpolation

Définition 1.1.8 *Soit $\bar{A} = (A_0,A_1)$ un couple de C_1. On dit qu'un espace A est un espace intermédiaire pour A_0 et A_1 (ou relatif à $\bar{A}$) si:*

$$\Delta\left(\bar{A}\right) \subset A \subset \Sigma\left(\bar{A}\right) \quad \text{avec injection continues.}$$

Si de plus pour tous morphisme $T\colon \bar{A} \to \bar{A}$ on sait définir $T\colon A \to A$ alors on dira que A est un espace d'interpolation pour $\bar{A}$.
Plus généralement si $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont deux couples de C_1, alors A et B sont des espaces d'interpolation pour $\bar{A}$ et $\bar{B}$ s'ils sont des espaces d'interpolation pour $\bar{A}$ et $\bar{B}$ et si pour tout application linéaire continue $T\colon\ \bar{A} \to \bar{B}$ on sait définir $T\colon A \to B$.

Proposition 1.1.9 *(Le cas des espaces L_p). Soit $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Alors L_q est un espace intermédiaire pour le couple $\left(L_{p_0},L_{p_1}\right)$.*

Preuve. L'inclusion continue dans la somme est évidente. Nous devons le montrer pour l'intersection:

$$\begin{aligned}
\|f\|_q &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(|f|^{1-\theta} |f|^{\theta}\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\|f^{1-\theta} f^{\theta}\right\|_q \quad \text{avec } \frac{1}{q} = \frac{1}{\frac{p_0}{1-\theta}} + \frac{1}{\frac{p_1}{\theta}} \\
&\leq \left\|f^{1-\theta}\right\|_{\frac{p_0}{1-\theta}} \|f\|_{\frac{p_1}{\theta}} \\
&= \|f\|_{L_{p_0}}^{1-\theta} \|f\|_{L_{p_1}}^{\theta}
\end{aligned}$$

donc, $\|f\|_{L_q} \leq \|f\|_{L_{p_0}}^{1-\theta} \|f\|_{L_{p_1}}^{\theta}$. ■

Attention: En général ce n'est pas parce que A et B sont des espaces d'interpolation pour $\bar{A}$ et $\bar{B}$ que A est un espace d'interpolation pour $\bar{A}$ ou B est un espace d'interpolation pour $\bar{B}$.

Remarque 1.1.10 $\Delta\left(\bar{A}\right)$ *et* $\Delta\left(\bar{B}\right)$ *sont des espaces d'interpolation pour* $\bar{A}$ *et* $\bar{B}$*.*

Nous allons donner maintenant des définitions qui nous permettons de savoir comment nous allons contrôler l'application linéaire T obtenue sur ce nouvel espace.

Définition 1.1.11 *On dit que* A *et* B *sont des espaces d'interpolation uniforme si:*

$$\|T\|_{A,B} \leq \max\left(\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\right).$$

On dit que A *et* B *sont des espaces d'interpolation d'exposant* θ *avec* $(0 \leq \theta \leq 1)$ *si:*

$$\|T\|_{A,B} \leq C\left(\|T\|_{A_0,B_0}^{1-\theta}, \|T\|_{A_1,B_1}^{\theta}\right).$$

Si de plus $C = 1$ *on dira que* A *et* B *sont des espaces d'interpolation exact d'exposant* θ*.*

Maintenant que nous avons précisé le vocabulaire nous aimerions construire explicitement des méthodes (une méthode sera un foncteur de N_1 dans N). La première méthode est la méthode complexe basée sur le lemme des trois droites et l'analyse complexe. La deuxième méthode va chercher à modifier les normes de la somme ou de l'intersection pour construire de nouveau espace.

1.2 Méthode complexe

Nous allons dans un premier temps montrer le lemme des trois droites. Nous décrirons deux interpolations de foncteur C_θ, C^θ et leurs points communs.

1.2.1 lemme des trois droites d'Hadamard

On notera par la suite $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ et $S_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

Lemme 1.2.1 *Soit F une fonction holomorphe sur S_0, continue et bornée sur S tel que*:

$\forall t \in \mathbb{R}$ $|F(it)| \leq M_0$, $|F(1+it)| \leq M_1$. Alors

$$|F(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ 0 < \theta < 1.$$

Preuve. Nous allons utiliser le principe du maximum. On pose la fonction:

$$F_\epsilon(z) = \exp\left(\epsilon z^2 + \lambda z\right) F(z).$$

Alors $|F_\epsilon(z)| \to 0$ quand $|z| \to +\infty$. Soit $\eta > 0$, il existe A tel que pour tout z vérifiant $|\operatorname{Im} z| \geq A$ alors $|F(z)| < \eta$. On applique le principe du maximum à l'ouvert $S_\eta = \{z \in S, \ |\operatorname{Im} z| \leq A\}$. Alors

$$|F_\epsilon(z)| \leq \max\left(M_0, \, M_1 e^{\epsilon+\lambda}, \, \eta\right).$$

En choisissant $\eta \leq \max\left(M_0, \, M_1 e^{\epsilon+\lambda}\right)$. On obtient que

$$|F_\epsilon(z)| \leq \max\left(M_0, \, M_1 e^{\epsilon+\lambda}\right).$$

Ainsi

$$|F(\theta + it)| \leq \exp\left(-\epsilon\left(\theta^2 - t^2\right)\right) \max\left(M_0 e^{-\theta\lambda}, \, M_1 e^{(1-\theta)\lambda+\epsilon}\right),$$

puis

$$|F(\theta + it)| \leq \max\left(M_0 e^{-\theta\lambda}, \, M_1 e^{(1-\theta)\lambda}\right).$$

En choisissant, $M_0 e^{-\theta\lambda} = M_1 e^{(1-\theta)\lambda}$ $\left(Soit\ e^{\lambda} = \frac{M_0}{M_1}\right)$, on déduit que

$$|F(1 + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

■

Ce lemme se généralise au cas où notre fonction est à valeurs dans un espace de Banach A partir de ce principe, nous allons construire des fonctions analytiques dans des espaces de Banach dont les bords seront à valeurs dans A_0 et A_1. On contrôlera qui se passe entre $\Delta\left(\bar{A}\right)$ et $\Sigma\left(\bar{A}\right)$.

1.2.2 Définition et propriété de méthodes complexes

Dans la suite on rappele qu'un couple $\bar{A} = (A_0, A_1)$.

Définition 1.2.2 *On notera $F\left(\bar{A}\right)$ l'ensemble des fonctions f continues bornées sur S à valeurs dans $\Sigma\left(\bar{A}\right)$, analytiques sur S_0 tel que:*

$t \mapsto f(j+it)$ $(j = 0{,}1)$ soit continue dans A_j et qui tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

On muni F de la norme:

$$\|f\|_F = \max\left(\sup_t \|f(it)\|_{A_0,} \sup_t \|f(1+it)\|_{A_1}\right).$$

Montrons que c'est une norme. Le seul point difficile est de montrer que si $\|f\|_{F\left(\bar{A}\right)} = 0$ alors $f = 0$. En effet, soit un tel f. Alors $\sup \|f(it)\|_{A_0} = 0$ et $\sup \|f(1+it)\|_{A_1} = 0$. D'après le lemme des trois droites $f = 0$.

Proposition 1.2.3 *Muni de cette norme, F est un espace de Banach.*

Preuve. Nous allons utiliser une caractérisation des espaces de Banach: Si toute série de E absolument convergente est convergente alors E est un espace de Banach.
Soit (f_n) tel que $\Sigma_n \|f_n\|_F < \infty$.
On va montrer que cette série est absolument convergente dans $\Sigma\left(\bar{A}\right)$ qui est complet. Puis on montrera que cette série converge dans F.
En effet, puisque $f_n(z)$ est borné dans $\left(\bar{A}\right)$ et que $\lim_{|\mathrm{Im}\, z| \to \infty} \to 0$, d'après le principe du maximum:

$$\|f_n(z)\|_{\Sigma\left(\bar{A}\right)} \leq \max\left(\sup_t \|f(it)\|_{\Sigma(\bar{A}),} \sup_t \|f(1+it)\|_{\Sigma\left(\bar{A}\right)}\right).$$

En fin comme A_j s'injecte dans $\Sigma\left(\bar{A}\right)$. On déduit que $\|f_n(z)\|_{\Sigma\left(\bar{A}\right)} \leq \|f_n\|_F$.
Ainsi la série $\Sigma_n f_n$ converge uniformément sur S vers une fonction f dans $\Sigma\left(\bar{A}\right)$. f est

continue et bornée dans S. Elle est même analytique sur S_0. Il nous reste à montrer la continuité et la décroissance sur les bords.
Maintenant $\|f_n(j+it)\|_{A_j} \leq \|f_n\|_F$ $(j = 0{,}1)$ par définition de la norme. Mais A_j est complet donc la série converge uniformément vers une limite notée f_j. Par continuité de f. On obtient la continuité et la décroissance (avec la convergence uniforme, on peut intervertir signe somme et limite). On en déduit que la série $\Sigma_n f_n$ converge dans f.

■

A partir de ces fonctions nous allons construire nos espaces d'interpolation.

Définition 1.2.4 *On définit le foncteur d'interpolation C_θ par $C_\theta\left(\bar{A}\right) = A_{[\theta]}$ composée des éléments $a \in \Sigma\left(\bar{A}\right)$ tel qu'il existe $f \in F$ tel que $a = f(\theta)$. On muni $\bar{A}_{[\theta]}$ de la norme:*

$$\|a\|_{[\theta]} = \inf\left(\|f\|_F \quad \text{tel que} \quad a = f(\theta)\,,\ f \in F\right).$$

Remarque 1.2.5 *Au lieu de chercher à contrôler la norme des éléments a de $\Sigma\left(\bar{A}\right)$, on se ramène à contrôler des normes de fonctions analytiques qui sont des éléments qu'on sait mieux manipuler.*

Avec cette définition, on aboutit au théorème suivant :

Théorème 1.2.6 *$A_{[\theta]}$ est un espace de Banach. Il est un espace intermédiaire pour $\bar{A}$. De plus, c'est un espace d'interpolation exacte d'exposant θ.*

Preuve.
Première étape: $A_{[\theta]}$ est un espace de Banach.
En effet, l'application $f \to f(\theta)$ est linéaire continue de F dans $\Sigma\left(\bar{A}\right)$ car

$$\|f(\theta)\|_{\Sigma(\bar{A})} \leq \|f\|_F\,.$$

Le noyau de cette application est

$$N_\theta = \{f \in F \text{ tel que } f(\theta) = 0\ \} \text{ qui est fermé.}$$

On a alors un isomorphisme isométrique dans espace quotient $F\left(\bar{A}\right)/N_\theta$. Ainsi $A_{[\theta]}$ est complet.
Deuxième étape: $A_{[\theta]}$ est un espace intermédiaire pour $\bar{A}$.

$$\|a\|_{[\theta]} = \|f(\theta)\| \leq \|f\|_F\,.$$

En prenant l'infimum, on déduit que la première inclusion est continue alors $\bar{A}_{[\theta]} \subset \Sigma\left(\bar{A}\right)$. Pour l'autre inclusion. Soit $a \in A_0 \cup A_1$. On construit une fonction dans F tel que $f(\theta)$ soit égal à a. Il suffit de prendre $f(z) = \exp\left(\delta(z-\theta)^2\right) a$ ce qui implique $\Delta\left(\bar{A}\right) \subset \bar{A}_{[\theta]}$.

Troisième étape : la méthode est bien exact d'exposant θ.

Soit $T\colon A_j \to B_j$ $(j = 0,1)$ de norme M_j $(j = 0, 1)$. On veut montrer:

$$\|T(a)\|_{\bar{B}_{[\theta]}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|A\|_{\bar{A}_{[\theta]}}, \text{ tel que } a \in A_{[\theta]}.$$

Soit $f \in F\left(\bar{A}\right)$ tel que $f(\theta) = a$ et

$$\|f\|_{F\left(\bar{A}\right)} \leq \|a\|_{[\theta]} + \epsilon,\ \epsilon > 0.$$

On définit la fonction g par $g(z) = M_0^{z-1} M_1^{-z} T(f(z))$. C'est une fonction continue bornée sur S, holomorphe sur S_0 tel que:

$$g(\theta) = M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} T(a),$$

de plus

$$\|g(it)\|_{B_0} = M_0^{-1} \|T(f(it))\|_{B_0}.$$

Mais $f(it) \in A_0$. Donc par hypothèse sur T on en déduit que:

$$\|g(it)\|_{B_0} \leq \|f(it)\|_{A_0}.$$

En faisant de même pour $g(1+it)$, on en conclue que $\forall \epsilon > 0$:

$$\|T(a)\|_{[\theta]} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|g\|_{F\left(\bar{B}\right)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{F\left(\bar{A}\right)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|a\|_{\bar{A}_{[\theta]}} + M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \epsilon.$$

■

Avant d'examiner les propriétés de cette méthode, nous proposons une autre méthode d'interpolation de foncteur. L'idée est la même que précédemment à la défférence que nous allons contrôler un taux de variation.

Définition 1.2.7 *On notera $G\left(\bar{A}\right)$ l'ensemble des fonctions g continues bornées sur S à valeurs dans $\Sigma\left(\bar{A}\right)$, analytiques sur S_0 tel que:*

- $\exists C > 0$ tel que $\|g(z)\|_{\Sigma\left(\bar{A}\right)} \leq C(1+|z|)$;

- $(t_1,t_2) \longmapsto g(j+it_1) - g(j+it_2)\,(j=0{,}1)$ est continue dans A_j et tend vers 0 lorsque t_1, t_2 tend vers l'infini. On muni G de la norme:

$$\|g\|_G = \max\left(\sup_{t_1\neq t_2}\left\|\frac{g(it_1)-g(it_2)}{t_1-t_2}\right\|_{A_0}, \sup_{t_1\neq t_2}\left\|\frac{g(1+it_1)-g(1+it_2)}{t_1-t_2}\right\|_{A_1}\right).$$

Proposition 1.2.8 $G\left(\bar{A}\right)$ *muni cette norme, est un espace de Banach réduit modulo les constantes.*

Théorème 1.2.9 *Pour* $0<\theta<1$*, on définit le foncteur d'interpolation* C^{θ} *par* $C^{\theta}\left(\bar{A}\right) = \bar{A}^{[\theta]}$ *composée des éléments* $a \in \Sigma\left(\bar{A}\right)$ *tel qu'il existe* $g \in G$ *tel que* $a = g^{'}(\theta)$. *On muni* $\bar{A}^{[\theta]}$ *de la norme:*

$$\|a\|^{[\theta]} = \inf\left(\|g\|_G \ \textit{tel que}\ g^{'}(\theta) = a,\ g \in G\right).$$

A la différence du foncteur $C_{[\theta]}$, le foncteur $C^{[\theta]}$ on peut être défini pour $\theta = 0{,}1$. La dérivée n'ayant de sens que sur un ouvert.

Théorème 1.2.10 $\bar{A}^{[\theta]}$ *est un espace de Banach. Il est un espace intermédiaire pour* $\bar{A}$. *De plus, c'est un espace d'interpolation exacte d'exposant* θ *pour* $\bar{A}$.

Preuve. Soit $\left\|g^{'}(\theta)\right\|_{\Sigma\left(\bar{A}\right)} \leq \|g\|_G$ nous voyons que l'application de $g \to g^{'}(\theta)$ de G dans $\Sigma\left(\bar{A}\right)$ est continue. Le noyau N^{θ} de cette application est fermé et du rang $\bar{A}^{[\theta]}$. La norme sur $\bar{A}^{[\theta]}$ est la norme de quotient sur G/N^{θ} donc $\bar{A}^{[\theta]}$ est un espace de Banach et évidemment, $\bar{A}^{[\theta]} \subset \Sigma\left(\bar{A}\right)$. Si $a \in \Delta\left(\bar{A}\right)$ nous prenons $g(z) = za$ et puis nous voyons que $\Delta\left(\bar{A}\right) \subset \bar{A}^{[\theta]}$.

Pour prouver que C^{θ} est un foncteur d'interpolation exacte d'exposant θ.

Supposons que $T : A_j \to B_j$ avec norme M_j pour $j = 0, 1$ alors nous avons choisi une fonction $g \in G\left(\bar{A}\right)$, tel que

$$g^{'}(\theta) = a,\ \ \|g\|_G \leq \|a\|^{[\theta]} + \varepsilon.$$

Considérons la fonction

$$h(z) = \left[M_0^{n-1}M_1^{-n}T(g(n))\right]_0^z - \int_0^z \left(\log\frac{M_0}{M_1}\right) M_0^{n-1}M_1^{-n}T(g(n))\,dn.$$

L'intégrale est prend la longue d'une trajectoire en S qui relie 0 et z si le trajet prend tous, ses points en S_0 sauf 0 et possible z. Nous pouvons intégrer par partie, en fait si $n \in S_0$ nous avons $\frac{d(T(g(n)))}{dn} = T\left(g^{'}(n)\right)$, avec $g^{'}(n)$ est bornée et continue en S_0 alors $\frac{d(T(g(n)))}{dn}$ est continue en S_0 et bornée de norme dans $\Sigma\left(\bar{B}\right)$, alors nous intégrons par partie, et on obtient, pour tout trajectoire dans S,

$$h(z) = \int_0^z M_0^{n-1} M_1^{-n} T(g(n))\, dn.$$

D'où en général, l'intégrale est interpréter comme un vecteur d'une valeur. Il suit que $\|h(z)\|_{\Sigma(\bar{B})} \leq c\,|z|$. On voit que $T(g(j+it))$ il values dans B_j et est un Lipschitz fonction dans B_j alors

$$\|h(j+it_1) - h(j+it_2)\|_{B_j} \leq M_j^{-1} \int_{t_1}^{t_2} \|T(dg(j+it))\|_{B_j},\ t_1 < t_2.$$

D'autr côté est limité par

$$\int_{t_1}^{t_2} \|dg(j+it)\|_{A_j} \leq (t_2 - t_1)\, \|g\|_G,$$

de plus

$$\|h\|_{G(\bar{B})} \leq \|a\|^{[\theta]} + \varepsilon.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} h^{'}(\theta) &= M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} \left(\frac{d}{dn} T(f(n))\right)_{n=\theta} \\ &= M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} T(a). \end{aligned}$$

Cela prouve que

$$T(a) = M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} h^{'}(\theta) \in \bar{B}^{[\theta]},$$

et

$$\|T(a)\|^{[\theta]} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|a\|^{[\theta]} + \varepsilon^{'}.$$

■

Nous allons dans ce paragraphe essayer de comprendre comment se comporte l'espace $A_{[\theta]}$. On le notera $A_{[\theta]} = (A_0, A_1)_\theta$.

Théorème 1.2.11 *On a les propriétés suivantes:*

1. $(A_0,A_1)_{[\theta]} = (A_1,A_0)_{[1-\theta]}$;

2. Si $A_1 \subset A_0$ *Alors* $(A_0,A_1)_{[\theta_0]} \leq (A_0,A_1)_{[\theta_1]}$ *pour* $\theta_0 \leq \theta_1$;

3. $(A,A)_{[\theta]} = A$, $\forall \theta \in]0,1[$.

Preuve.

1. Il est facile de voir que si $f \in F(A_0,A_1)$. Alors $(z \to f(1-z)) \in F(A_1,A_0)$.

2. Soit $A_0 \subset A_1$ Montrons que $(A_0,A_1)_{\theta_0} \leq (A_0,A_1)_{\theta_1}$ pour $\theta_0 < \theta_1$. Soit $a \in (A_0,A_1)_{\theta_0}$, $\exists f \in F(\bar{A})$ tel que $f(\theta_0) = a$ et $\|f\|_F \leq \|a\|_{[\theta]} + \epsilon$. Il existe $\lambda \in [0,1[$ tel que $\theta_0 = \lambda\theta_1$.
On pose $g(z) = f(\theta_1 z)\exp\left(\epsilon\left(z^2 - \lambda^2\right)\right)$. On notera $B_1 = (A_0,A_1)_{\theta_1}$ alors:

$$\|f(\theta_1 + it)\|_{B_1} \leq \|f\|_{F(\bar{A})}.$$

Il s'en suit que :
$\|g\|_{F(A_0,B_1)} \leq \max\left(\sup\left\|f(\theta_1 it)\exp\epsilon\left((it)^2 - \lambda^2\right)\right\|_{A_O}, \sup\left\|f(\theta_1(1+it))\exp\left(\epsilon\left((1+it)^2 - \lambda^2\right)\right)\right\|_{B_1}\right).$
Donc

$$\|g\|_{F(A_0,B_1)} \leq \exp(\epsilon)\|f\|_F \leq \|a\|_{[\theta]}\exp(\epsilon) + \epsilon\exp(\epsilon).$$

Mais $g(\lambda) = a$. On a trivialement: $(A_0,B_1)_\lambda \subset (B_1,B_1)_\lambda = B_1$. Il existe $c < 0$ tel que

$$\|a\|_{[\theta_1]} \leq c\|g(\lambda)\|_{(A_0,B_1)\lambda} \leq c\|g\|_{F(A_0,B_1)}.$$

Donc $\|a\|_{[\theta_1]} \leq c\|a\|_{[\theta_0]}$.

3. Il est facile on va montrer que $\Delta\left(\bar{A}\right) \subset (A,A)_{[\theta]} \subset \Sigma\left(\bar{A}\right)$. ■

Lemme 1.2.12 *On notera* $F_0\left(\bar{A}\right)$ *l'espace des combinaisons linéaires des fonctions de la forme:*

$$\exp\left(\delta z^2\right)\Sigma_{n=1}^N a_n \exp(\lambda_n z),$$

$a_n \in \Delta\left(\bar{A}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\delta > 0$. *Alors* $F_0\left(\bar{A}\right)$ *est dense dans* $F\left(\bar{A}\right)$.

Preuve. Puisque $\|\exp(\delta z^2) f(z) - f(z)\|_F \to 0$ si $\delta \to 0$ $(\delta > 0)$, $\forall f \in F\left(\bar{A}\right)$, il suffit de montrer que toutes les fonctions $g(z) = \exp(\delta z^2) f(z)$ avec $f \in F\left(\bar{A}\right)$ peut être approchée par des fonctions dans $F_0\left(\bar{A}\right)$. On pose

$$g_n(z) = \sum g(z + 2\pi ik), \ n \geq 1.$$

g_n est analytique dans S_0 et continue dans S à valeurs dans $\Sigma\left(\bar{A}\right)$. De plus g_n est périodique de période $2\pi in$. et $g_n\left(j+it\right)\in A_j \quad \forall j=0,1$. De plus

$$\left\|g_n\left(j+it\right)-g\left(j+it\right)\right\|_{A_j}\rightarrow 0, \text{ si } n\rightarrow\infty,$$

uniformément sur toute ensemble compacte de $t-$valeur et $\left\|g_n\left(j+it\right)\right\|_{A_j}$ est fonction bornée de t et n il suit $\forall s>0$, nous avons $\exp\left(sz^2\right)g_n\left(z\right)$ dans l'espace $F\left(\bar{A}\right)$. De plus nous pouvons trouver s et n tels que

$$\left\|\exp\left(sz^2\right)g_n\left(z\right)-g\left(z\right)\right\|_F<\varepsilon.$$

Mais maintenant $g_n\left(z\right)$ peuvent être représentée par une série de Fourier

$$g_n\left(z\right)=\sum_k a_{kn}e^{\frac{kz}{n}}, \text{ avec } z=s+it, \tag{1.2.1}$$

alors

$$a_{kn}=\left(2\pi nm\right)^{-1}\int_{-\pi nm}^{\pi nm}g_n\left(s+it\right)e^{-k(s+it)n}dt.$$

On remarque, par périodicité, l'intégrale est indépendante de m, il est aussi indépendant de s. En fait, l'intégration est analytique et bornée dans $\Sigma\left(\bar{A}\right)$, Ainsi les valeurs d'intégrale à deux valeurs de s sera différant un peu si m assez grand avec la présence du facteur $\frac{1}{m}$. Mais l'intégral est indépendant de m, alors l'intégrale à la même valeur pour les deux valeurs donnant de s, il suit comme ça:

$$a_{kn}=\left(2\pi n\right)^{-1}\int_{-\pi n}^{\pi n}g_n\left(j+it\right)e^{-k(j+it)\frac{k}{n}}dt, \quad j=0,1.$$

Alors on trouve $a_{kn}\in\Delta\left(\bar{A}\right)$, d'après la somme (1.2.1) nous considérons,

$$\delta_m g_n\left(z\right)=\sum_{|k|\leq m}\left(1-\frac{|k|}{m+1}\right)a_{kn}e^{\frac{kz}{n}}.$$

Alors

$$\left\|\delta_m g_n\left(j+it\right)-g_n\left(j+it\right)\right\|_{A_j}\rightarrow 0, \text{ si } m\rightarrow\infty \text{ uniformemant dans } n.$$

Donc

$$\left\|\exp\left(sz^2\right)\left(\delta_m g_n-g_n\right)\right\|_F\rightarrow 0, \text{ si } m\rightarrow\infty.$$

Et

$$\left\|\exp\left(sz^2\right)\delta_m g_n-g\right\|_F<2\varepsilon,$$

mais $\exp\left(sz^2\right)\delta_m g_n\in F_0\left(\bar{A}\right)$. ■

Théorème 1.2.13 *Soit $\theta \in [0,1]$, on a:*

1. $\Delta\left(\bar{A}\right)$ *est dense dans* $\bar{A}_{[\theta]}$ *;*

2. A_j^0 *la fermeture de* $\Delta\left(\bar{A}\right)$ *dans* A_j*. Alors:*

$$(A_0,A_1)_{[\theta]} = \left(A_0^0,A_1\right)_{[\theta]} = \left(A_0^0,A_1^0\right)_{[\theta]}.$$

3.Si $B_j = \bar{A}_{[j]}$ *est un sous espace fermé de* A_j *dont les normes coïncidents sur* B_j*;*

4. $(A_0,A_1)_{[\theta]} = (B_0,B_1)_{[\theta]}$.

Preuve.

1. Soit $a \in \bar{A}_{[\theta]}$. Il existe $f \in F\left(\bar{A}\right)$ tel que $f(\theta) = a$. D'après le lemme il existe $g \in F_0\left(\bar{A}\right)$ tel que $\|f-g\|_F < \epsilon$. De plus $\|a - g(\theta)\|_{[\theta]} < \epsilon$. En fin comme $g(\theta) \in \Delta\left(\bar{A}\right)$, la conclusion est immédiate.

2. Cela provient du point précédent.

3. On a $B_0 \subset A_0$ et $B_1 \subset A_1$. Montrons que les normes coïncidents sur B_0. Soit $a \in B_0$. Il existe $a_1 \in \Delta\left(\bar{A}\right)$ tel que $\|a - a_1\|_{B_0} < \epsilon$.

On pose la fonction $f_n(z) = a_1 \exp\left(z^2 - nz\right) \in F\left(\bar{A}\right)$ alors:

$$f_n(0) = a_1 \text{et } \|f_n\|_F \leq \|a_1\|_{A_0} + e^{1-n}\|a_1\|_{A_1}.$$

Par définition de B_1 on a $\|a_1\|_{B_0} \leq \|f_n\|_F$ pour tout n, alors: $\|a_1\|_{B_0} \leq \|a_1\|_{A_0}$. Mais $\|a\|_{A_0} \leq \|a\|_{B_0}$ et de la même façon:

$$\|a - a_1\|_{A_0} \leq \|a - a_1\|_{B_0} \leq \epsilon.$$

On en déduit que: $\|a\|_{B_0} \leq \epsilon + \|a_1\|_{B_0} \leq \|a\|_{A_0} + 2\epsilon$, donc $\|a\|_{B_0} \leq \|a\|_{A_0}$ alors on a égalité des normes.

4. On a $F\left(\bar{B}\right) \subset F\left(\bar{A}\right)$. Et si $f \in F\left(\bar{A}\right)$ alors $f(j+it) \in B_j$ par définition de B_j. on a $F\left(\bar{B}\right) = F\left(\bar{A}\right)$. Donc $f(z) \in F\left(\bar{B}\right)$ On en déduit le résultat annoncé. ■

1.2.3 Théorème d'équivalence

Théorème 1.2.14 *Pour* $\bar{A} = (A_0,A_1)$, *on a:*

$$\bar{A}_{[\theta]} \subset \bar{A}^{[\theta]} \text{ et } \|a\|^{[\theta]} \leq \|a\|_{[\theta]}.$$

Preuve. Soient $a \in \bar{A}_{[\theta]}$ et $f \in F\left(\bar{A}\right)$ tel que $f(\theta) = a$ et $\|f\|_F \leq \|a\|_{[\theta]} + \epsilon$.
On pose

$$g(z) = \int_0^Z f(z)\,dz.$$

Alors $g \in G\left(\bar{A}\right)$ et $\|g\|_G \leq \|f\|_F$.
De plus

$$\acute{g}(\theta) = f(\theta) = a.$$

Donc

$$\|a\|^{[\theta]} \leq \|g\|_G \leq \|f\|_F \leq \|a\|_{[\theta]} + \epsilon.$$

■

1.2.4 Théorème de Riesz-Thorin

Théorème 1.2.15 *Soit T un opérateur linéaire, supposons que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ où $0 < \theta < 1$ et*
$0 < p_i, q_i \leq \infty$, $i = 0, 1$ avec $p \leq q$. Alors

$$\begin{aligned} T &: L_{p_0}(U, d\mu) \to L_{q_0}(V, d\nu),\ \text{de norme } \|Tf\|_{L_{q_0}} \leq M \|f\|_{L_{p_0}}, \\ T &: L_{p_1}(U, d\mu) \to L_{q_1}(V, d\nu),\ \text{de norme } \|Tf\|_{L_{q_1}} \leq M \|f\|_{L_{p_1}}. \end{aligned}$$

Implique que

$$T : L_p(U, d\mu) \to L_q(V, d\nu),\ \text{de norme } \|Tf\|_{L_q} \leq M \|f\|_{L_p},$$

telle que M vérifiant:

$$M \leq C M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$$

Si $p_i = q_i < \infty$ $(i = 0, 1)$ alors $C = 1$.

Preuve. On a démontré ce théorème dans le troisième chapitre. ■

Chapitre 2

Méthode Réel

Dans ce chapitre, on introduce les méthodes K et J, avec un introduction aux espaces de Lorentz et ces propriétés, en fin on parle sur le théorème de Riesz-Thorin.

2.1 Définitions et propriétés

L'idée va être un petit peu différent de la méthode précédente. Nous avons déjà construit des foncteurs simples Σ et Δ. Nous allons modifier les normes sur les espaces d'arrivée de façon à faire grossir (dans le cas de l'intersection) ou rétrécir (dans le cas de la somme).

2.1.1 Méthode K

Soit $\bar{A} = (A_0,A_1)$ un couple de N_1. L'idée de cette méthode est de partir de l'espace $\Sigma\left(\bar{A}\right)$. On va essayer d'imposer plus aux éléments de $\Sigma\left(\bar{A}\right)$, pour rétrécir l'espace.

Nous avons déjà construit notre foncteur Σ et nous avons muni la somme de nos espaces de la norme :

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf_{a=a_0+a_1}\left(\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}\right).$$

Mais nous aurions pu munir A_1 d'une norme équivalente qui est $t\,\|\cdot\|_{A_1}$ où $t > 0$.

On définit ainsi une famille de norme sur $\Sigma\left(\bar{A}\right)$:

$$K(t,a) = K\left(t,a,\bar{A}\right) = \inf_{a=a_0+a_1}\left(\|a_0\|_{A_0} + t\,\|a_1\|_{A_1}\right).$$

Ces normes sont équivalentes. Nous pouvons même précisé ce résultat:

Lemme 2.1.1 *Soit $a \in \Sigma\left(\bar{A}\right)$. Alors la fonction $t \longmapsto k(t,a)$ est positive croissante et concave. De plus, on a:*

$$K(t,a) \leq \max\left(1,\frac{t}{s}\right) K(s,a).$$

Le problème que nous avons est que nous définissons un ensemble de norme équivalente sur $\Sigma\left(\bar{A}\right)$. Nous ne diminuons pas notre espace. Pour cela nous allons étudier le comportement de notre fonction et essayer de sélectionner nos éléments en fonction de ce comportement. On notera

$$\Gamma(a) = \left\{x = (x_0,\, x_1) \in \mathbb{R}^2 : \exists a = a_0 + a_1,\, a_i \in A_i \ (i = 0,1),\ \|a_i\|_{A_i} \leq x_i\right\}.$$

On peut décrire plus facilement notre fonction:

$$K(t,a) = \inf_{x\in\Gamma(a)} (x_0 + tx_1) = \inf_{x\in\partial\Gamma(a)} (x_0 + tx_1).$$

Nous avons alors une interprétation géométrique. Nous pouvons de plus donner le comportement en 0 et à l'infini de notre fonction. Si nous prenons le point qui réalise le minimum. Alors sa tangente intersecté l'axe des abscisses en $(K(t,a),0)$ et l'axe des ordonnées et $(0,t^{-1}K(t,a))$.

En fin comme $\Gamma(a)$ est un ensemble convexe, $t \mapsto K(t,a)$ et $t \mapsto t^{-1}K(t,a)$ sont bornées. Nous allons donc essayer d'augmenter cette condition pour faire nos choix de a possible. On pose la fonctionnelle:

$$\boldsymbol{\phi}_{\theta,q}(\varphi) = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}\varphi(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

où φ est une fonction positive avec $1 \leq q \leq \infty$ et $\theta \in \left]0,1\right[$.

En appliquant cette fonctionnel à $K(t,a)$, et en choisissant les a tel que cette quantité soit finie, nous allons en quelque sorte les sélectionner.

Définition 2.1.2 *On définit dont le foncteur $K_{\theta,q}$ tel que :*

1. $\bar{A}_{\theta,q;K} = K_{\theta,q}\left(\bar{A}\right) = \left\{a \in \Sigma\left(\bar{A}\right) :\ \boldsymbol{\phi}_{\theta,q}(K(t,a)) < \infty\right\}$ donc $\|a\|_{\theta,q;K} = \boldsymbol{\phi}_{\theta,q}(K(t,a))$;
2. $K_{\theta,q}(T) = T$ pour toute application linéaire $T : \bar{A} \to \bar{B}$. Avec $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ où $0 \leq \theta \leq 1$, $q = \infty$.

Théorème 2.1.3 *$K_{\theta,q}$ est un foncteur d'interpolation exact pour l'exposant θ de la catégorie N, de plus nous avons:*

$$K\left(s,a,\bar{A}\right)\leq\gamma_{\theta,q}s^{\theta}\left\|a\right\|_{\theta,q;K}.$$

Preuve.

Première étape: $\bar{A}_{\theta,q;K}$ est un espace normé

En effet, comme $K\left(t,a;\bar{A}\right)$ est une norme sur $\Sigma\left(\bar{A}\right)$ et $\Phi_{\theta,q}$ possède les trois propriétés d'une norme on en déduit que la composition de norme est une norme.

Deuxième étape: $\bar{A}_{\theta,q;K}$ est un espace intermédiaire pour $\bar{A}$. Par le lemme (2.1.1) on a:

$$\min\left(1,\frac{t}{s}\right)K\left(s,a\right)\leq K\left(t,a\right).$$

On applique $\Phi_{\theta,q}$:

$$\Phi\left(\min\left(1,\frac{t}{s}\right)\right)K\left(s,a\right)\leq\left\|a\right\|_{\theta,q;K}.$$

Nous allons utiliser une propriété de $\Phi_{\theta,q}$: Soit φ une fonction positive. On définit φ_s par $\varphi_s\left(t\right)=\varphi\left(\frac{t}{s}\right)$. Alors

$$\Phi_{\theta,q}\left(\phi_s\right)=s_{p,q}^{-\theta}\Phi\left(\phi\right).$$

En effet, $\Phi_{\theta,q}\left(\phi_s\right)=\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}\phi\left(\frac{t}{s}\right)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=s^{-\theta}\left(\int_0^\infty\left(\left(\frac{t}{s}\right)^{-\theta}\phi\left(\frac{t}{s}\right)\right)^q\frac{d\left(\frac{t}{s}\right)}{\left(\frac{t}{s}\right)}\right)^{\frac{1}{q}}$.

Par changement de variable, on obtient le résultat souhaité. Ainsi,

$$\Phi_{\theta,q}\left(\min\left(1,\frac{t}{s}\right)\right)=s_{\theta,q}^{-\theta}\Phi\left(\min\left(1,t\right)\right),$$

alors

$$\Phi_{\theta,q}\left(\min\left(1,t\right)\right)=\frac{1}{\left(q^{\frac{1}{q}}\left(\theta\left(1-\theta\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right)}.$$

Ce qui prouve l'inégalité annoncée. Pour $s=1$, on trouve

$$K\left(t,a\right)\leq\min\left(1,t\right)\left\|a\right\|_{\Delta\left(\bar{A}\right)}.$$

On applique $\Phi_{\theta,q}$

$$\left\|a\right\|_{\theta,q;K}\leq\Phi_{\theta,q}\left(\min\left(1,t\right)\right)\left\|a\right\|_{\Delta\left(\bar{A}\right)}.$$

Alors

$$K_{\theta,q}\left(\bar{A}\right) \subset \Sigma\left(\bar{A}\right) et \Delta\left(\bar{A}\right) \subset K_{\theta,q}\left(\bar{A}\right),$$

on prouve que l'inclusion est continue.

Troisième étape: la méthode est d'exposant θ.

Soit $\bar{A} = (A_0, A_1)$,$\bar{B} = (B_0, B_1)$ et T une application linéaire continue de $\bar{A}$ dans $\bar{B}$ tel que:

$$\|T\|_{A_j,B_j} = M_j \text{ pour } j = 0, 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} K\left(t, Ta, \bar{B}\right) &\leq \inf_{a=a_0+a_1}\left(\|Ta_0\|_{B_0} + t\|Ta_1\|_{B_1}\right) K\left(t, Ta, \bar{B}\right) \\ &\leq \inf_{a=a_0+a_1}\left(M_0\|a_0\|_{A_0} + tM_1\|a_1\|_{A_1}\right), \end{aligned}$$

autrement dit:

$$K\left(t, Ta, \bar{B}\right) \leq M_0 K\left(\frac{M_1}{M_0}t, a, \bar{A}\right).$$

En appliquant $\Phi_{\theta,q}$ et en utilisant la propriété montrée ci-dessus avec $s = \frac{M_1}{M_0}$, on obtient :

$$\|Ta\|_{K_{\theta,q}\left(\bar{B}\right)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|a\|_{K_{\theta,q}\left(\bar{A}\right)}.$$

■

Remarque 2.1.4 *on peut aussi définir la $K_{\theta,q}$ méthode discrète. Cette méthode est équivalente à la précédente. Cependant, il est parfois plus pratique d'utiliser des sommes que des intégrales. Cette méthode permet en particulier de montrer le théorème d'équivalence que nous citerons plus tard.*

2.1.2 Méthode J

Au contraire de la méthode K, nous allons partir de l'espace $\Delta\left(\bar{A}\right)$ et essayer d'imposer moins de contrainte à nos éléments pour agrandir l'espace. De la même manière, nous allons définir une famille de norme équivalente:

$$\forall t > 0, J(t, a) = J\left(t, a, \bar{A}\right) = \max\left(\|a_0\|_{A_0}, t\|a_1\|_{A_1}\right).$$

Précisons:

Lemme 2.1.5 *Soit $a \in \Delta\left(\bar{A}\right)$. La fonction $t \mapsto J(t,a)$ est positive croissante convexe. De plus on a:*

$$\begin{aligned} J(t,a) &\leq \max\left(1, \frac{t}{s}\right) J(s,a), \\ K(t,a) &\leq \min\left(1, \frac{t}{s}\right) J(s,a). \end{aligned}$$

Définition 2.1.6 *On définit notre foncteur d'interpolation $J_{\theta,q}$ par: $\bar{A}_{\theta,q;J} = J_{\theta,q}\left(\bar{A}\right)$ où les éléments a de $J_{\theta,q}\left(\bar{A}\right)$ sont les de $\Sigma\left(\bar{A}\right)$ telle que: il existe $t \mapsto u(t) \in \Delta\left(\bar{A}\right)$ tel que*

$$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}, \tag{2.1.1}$$

$$\Phi_{\theta,q}\left(J(t,u(t))\right) < \infty. \tag{2.1.2}$$

Dans le cas où $\theta \in \left]0,1\right[$, $q \in [1,\infty[$ ou $\theta \in [0,1]$, $q = 1$, on définit une norme sur cet espace:

$$\|a\|_{\theta,q,J} = \inf_u \Phi_{\theta,q}\left(J(t,u(t))\right).$$

Où u vérifie (2.1.1) et (2.1.2). En fin si T est une application linéaire de $\bar{A} \to \bar{B}$ alors $J_{\theta,q}(T) = (T)$.

Théorème 2.1.7 *La méthode J est une méthode exacte d'exposant θ. De plus, il existe $c > 0$ indépendant de θ et q tel que:*

$$\|a\|_{\theta,q,J} \leq cS^{-\theta} J\left(s,a,\bar{A}\right), a \in \Delta\left(\bar{A}\right).$$

Preuve. La démonstration est sensiblement la même que pour K. On renvoie à ([3] p.42). ■

Remarque 2.1.8 *On peut définir l'espace discret $J_{\theta,q}\left(\bar{A}\right)$. On renvoie à* ([1]*p.*43).

Théorème 2.1.9 *Soit $\bar{A} = (A_0, A_1)$ alors:*

1. $(A_0, A_1)_{\theta,q} = (A_0, A_1)_{1-\theta,q}$ *avec égalité des normes;*
2. $\bar{A}_{\theta,q} \subset \bar{A}_{\theta,r}$ *si* $q \leq r$;
3. *Si* $A_1 \subset A_0$ *alors* $\bar{A}_{\theta_1,q} \subset \bar{A}_{\theta_0,q}$ *pour* $\theta_0 < \theta_1$;
4. *Si* $A_1 = A_0$ *(avec même norme), alors* $\bar{A}_{\theta,q} = A_0$ *et* $\|a\|_{A_0} = (q\theta(1-\theta))^{\frac{1}{q}} \|a\|_{\theta,q}$.

Remarque 2.1.10 *On peut voir que toutes les propriétés démontrées dans le cas complexe sont aussi vraies dans le cas réel. De plus grâce à la construction on obtient des propriétés d'inclusion des espaces d'interpolation que nous n'avions dans le cas complexe.*

Preuve.

1. On a $K(t, a, A_0, A_1) = tK(t^{-1}, a, A_1, A_0)$. Puis comme $\Phi_{\theta,q}(\phi(t)) = \Phi_{1-\theta,q}\left(t\phi\left(t^{-1}\right)\right)$.

2. Lorsque $r = \infty$ le théorème d'interpolation de la méthode K nous donne le résultat.

Si $q \leq r < \infty$, alors en appliquant Hölder et le même théorème

$$\|a\|_{\theta,r} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,a)\right)^q \left(t^{-\theta} k(t,a)\right)^{r-q} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq c \|a\|_{\theta,q}^{\frac{q}{r}} \|a\|_{\theta,r}^{1-\frac{q}{r}}.$$

3. $A_1 \subset A_0$. En particulier, on a $\|a\|_{A_0} \leq \|a\|_{A_1}$. Donc pour $t > k$ on a

$$K\left(t, a, \bar{A}\right) = \|a\|_{A_0}.$$

Plus précisément, si $a = a_0 + a_1$ alors:

$$\|a\|_{A_0} \leq \|a_0\|_{A_0} + \frac{t}{k}\|a_1\|_{A_0} \leq \|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}.$$

Donc $\|a\|_{A_0} \leq K\left(t, a, \bar{A}\right)$. En découpant l'intégrale en deux, on obtient:

$$\|a\|_{\theta,q} \left(\int_0^k \left(t^{-\theta} K\left(t, a, \bar{A}\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + \|a\|_{A_0}.$$

En fin

$$\begin{aligned}
\int_0^k \left(t^{-\theta_0} K\left(t, a, \bar{A}\right)\right)^q \frac{dt}{t} &= \int_0^k \left(t^{-\theta_0+\theta_1-\theta_1} K\left(t, a, \bar{A}\right)\right)^q \frac{dt}{t} \\
\int_0^k \left(t^{-\theta_0} K\left(t, a, \bar{A}\right)\right)^q \frac{dt}{t} &\leq k^{-\theta_0+\theta_1} \int_0^k \left(t^{-\theta_1} K\left(t, a, \bar{A}\right)\right)^q \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat.

4. Il suffit de faire le calcul. ■

2.1.3 Théorème d'équivalence

Lemme 2.1.11 (***Lemme fondamental***) *Supposons que*

$$\min\left(1, \frac{1}{t}\right) K(t,a) \to 0, \textit{ telle que } t \to 0 \textit{ ou } t \to \infty.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe une représentation* $a = \sum_\nu u_v$ $\left(\text{converge dans } \sum\left(\bar{A}\right)\right)$ *telle que*

$$J\left(2^\nu, u_\nu\right) \leq (\gamma + \varepsilon) K\left(2^\nu, a\right), \ \gamma \leq 3.$$

Lemme 2.1.12 *Si* $a \in \sum\left(\bar{A}\right)$, *On pose* $\alpha_\nu = K\left(2^\nu, a; \bar{A}\right)$ *alors* $a \in K_{\theta,q}\left(\bar{A}\right)$ *si et seulement si* $(\alpha_\nu)_{-\infty}^{\infty}$ *appartient à* $\lambda^{\theta,q}$, *de plus nous avons*

$$2^{-\theta} \log 2 \left\|\alpha_\nu\right\|_{\lambda^{\theta,q}} \leq \|a\|_{\theta,q;K} \leq 2 \log 2 \left\|\alpha_\nu\right\|_{\lambda^{\theta,q}}.$$

Théorème 2.1.13 *Si* $\theta \in]0,1[$ *et* $q \geq 1$, *alors* $J_{\theta,q}\left(\bar{A}\right) = K_{\theta,q}\left(\bar{A}\right)$. *De plus les normes sont équivalentes.*

Preuve. Soit $a \in J_{\theta,q}\left(\bar{A}\right)$ et $a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$. Alors par la définition (2.1.5), on trouve

$$\begin{aligned} K(t,a) &\leq \int_0^\infty K(t, u(s)) \frac{ds}{s} \\ &\leq \int_0^\infty \min\left(1, \frac{t}{s}\right) J(s, u(s)) \frac{ds}{s} \\ &= \int_0^\infty \min\left(1, s^{-1}\right) J(ts, u(ts)) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

En fait de changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned} \|a\|_{\theta,q;K} &\leq \Phi_{\theta,q}(J(t, u(t))) \int_0^\infty s^\theta \min\left(1, s^{-1}\right) \frac{ds}{s} \\ &= C\Phi_{\theta,q}(J(t, u(t))). \end{aligned}$$

Alors

$$\|a\|_{\theta,q;K} \leq C \|a\|_{\theta,q;J}.$$

Maintenant pour l'inverse: on utilisant lemme fondamental on trouve:

$$K(t,a) \leq C_{\theta,q} t^\theta \|a\|_{\theta,q;K}, \quad \forall a \in K_{\theta,q}\left(\bar{A}\right),$$

alors

$$\min\left(1, \frac{1}{t}\right) K(t,a) \to 0, \quad \text{telle que } t \to 0 \text{ ou } t \to \infty;$$

donc il existe un représentation $a = \sum_\nu u_v$ telle que

$$J\left(2^\nu, u_\nu\right) \leq (\gamma + \varepsilon) K\left(2^\nu, a\right), \quad \gamma \leq 3.$$

Alors

$$\|J(2^{\nu}, u_{\nu})\|_{\lambda^{\theta,q}} \leq (\gamma+\varepsilon)\|K(2^{\nu}, a)\|_{\lambda^{\theta,q}}.$$

Finalement d'après le lemme (2.1.12) et le théorème (2.1.7) on trouve:

$$\|a\|_{\theta,q;J} \leq 4(\gamma+\varepsilon)\|a\|_{\theta,q;K}.$$

■

La grosse différence avec le cas complexe est l'existence de notre fonction K dont on ne connait pas de formule explicite. Il faut donc faire un premier travail pour déterminer K.

2.1.4 Introduction aux espaces de Lorentz

Soit (U,μ) un espace mesuré ou μ est une mesure positive.

Définition 2.1.14 *On définit $m_f(\sigma)$ par*

$$m_f(\sigma) = \mu\{x : |f(x)| > \sigma\}.$$

Proposition 2.1.15 *Nous avons:*

1. $\sigma \to m_f(\sigma)$ est croissante, continue à droite.

2. $m_{f+g}(\sigma) \leq m_f\left(\frac{\sigma}{2}\right) + m_g\left(\frac{\sigma}{2}\right)$

Preuve.

1. Il est claire.

2. $m_{f+g}(\sigma) = \mu\left\{x : |f(x)+g(x)| > \sigma = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2}\right\}$, on sait que

$$\left\{x : |f(x)+g(x)| > \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2}\right\} \subset \left\{x : |f(x)| > \frac{\sigma}{2}\right\} \cup \left\{x : |g(x)| > \frac{\sigma}{2}\right\}.$$

Donc

$$\mu\left\{x : |f(x)+g(x)| > \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2}\right\} \leq \mu\left\{x : |f(x)| > \frac{\sigma}{2}\right\} + \mu\left\{x : |g(x)| > \frac{\sigma}{2}\right\}.$$

Alors $m_{f+g}(\sigma) \leq m_f\left(\frac{\sigma}{2}\right) + m_g\left(\frac{\sigma}{2}\right)$. ■

Remarque 2.1.16 *On peut réexprimer la norme L_p :*

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p} &= \left(p\int_0^{\infty} \sigma^2 m_f(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad si\ 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_{L_\infty} &= \inf\{\sigma : m(\sigma, f) = 0\}, \qquad si\ p = \infty. \end{aligned}$$

Définition 2.1.17 *Soit f $\mu-$mesurable. On définit le réarrangement décroissant de f, noté f^* par :*

$$f^*(t) = \inf\{\sigma : m_f(\sigma) \leq t, \forall t > 0\}.$$

Remarque 2.1.18 *On peut réexprimer la norme L_p^* :*

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p^*} &= \sup_\sigma \sigma m(\sigma, f)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ si } \leq p < \infty, \\ L_\infty^* &= L_\infty \text{ si } p = \infty. \end{aligned}$$

Définition 2.1.19 ***Proposition 2.1.20*** *f^* est une fonction positive, décroissante et continue à droite. De plus, on a*

$$m_f(\sigma) = m_{f^*}(\sigma).$$

Au point ou f^* est continue, on a la relation $\sigma = f^*(t) \Longleftrightarrow t = mf(\sigma)$

Preuve. Il s'agit en fait de toutes les propriétés du pseudo-inverse d'une fonction. On renvoi ([1] p.7) ■

Définition 2.1.21 *Pour $p \geq 0$, On définit l'espace de Lorentz $L_{p,r}$ comme l'ensemble des fonctions $\mu -$ mesurable tel que:*
1. $\|f\|_{L_{p,r}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \frac{dt}{t}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$ pour $r \in [1, \infty[$;
2. $\|f\|_{L_{p,\infty}} = \sup_t t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty$ pour $r = \infty$.

Proposition 2.1.22 *$L_{p,p} = L_p$ avec égalité des normes.*

Preuve. $\|f\|_p = \left(p \int_0^\infty \sigma^2 m_f(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}$. Mais $m_f(\sigma) = m_{f^*}(\sigma)$. Donc $\|f\|_p = \|f^*\|_p$. D'où la conclusion annoncée. ■

2.1.5 Théorème de Marcinkiewicz

Théorème 2.1.23 *(Marcinkiewicz) Soit T une application linéaire. On suppose $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ avec $0 < \theta < 1$ et $0 < p_i, q_i \leq \infty$, $i = 0,1$. Soit*

$$\begin{aligned} T &: L_{p_0}(U, d\mu) \to L_{q_0}^*(V, d\upsilon) \text{ de norme } \|Tf\|_{L_{q_0}^*} \leq M_0 \|f\|_{L_{p_0}}. \\ T &: L_{p_1}(U, d\mu) \to L_{q_1}^*(V, d\upsilon) \text{ de norme } \|Tf\|_{L_{q_1}^*} \leq M_1 \|f\|_{L_{p1}^*}. \end{aligned}$$

Alors on a

$$T : L_p\left(U,d\mu\right) \rightarrow L_q\left(V,d\upsilon\right) \ \textit{ de norme } \left\|Tf\right\|_{L_q} \leq M\left\|f\right\|_{L_p},$$

vérifiant $M \leq CM_0^{*1-\theta}M_1^{*\theta}$.

Preuve. Pour la démonstration de théorème Marcinkiewicz voir ([3]p.9). ■

Remarque 2.1.24 *Il existe une version du théorème plus faible au sens où* L_{q_i} *est remplacé par* $L_{q_i,\infty}$, $i = 0,1$ *et on utilise la propriété suivantes* $L_p^* = L_{p,\infty}$. *On a la même conclusion pour notre application dans le troisième chapitre.*

Chapitre 3

Interpolation des espaces L_p

Dans cette section, on réalise l'interpolation de deux méthodes réelles et complexes sur l'espace L_p.

On note L_p l'espace $L_p(U, d\mu; A) = L_p(d\mu; A)$, consiste tous les fonctions fortement μ-mesurable à valeurs dans l'espace de Banach A qui satisfait:

$$\|f\|_p^p = \int_U \|f(x)\|_A^p \, d\mu < \infty.$$

3.1 Méthode complexe

Lemme 3.1.1 *Si $f \in F(\bar{A})$ nous avons:*

1. $\log \|f(\theta)\|_{[\theta]} \le \sum_{j=0,1} \int_{-\infty}^{+\infty} \log \|f(j+i\tau)\|_{A_j} P_j(\theta,\tau)\, d\tau;$

2. $\|f(\theta)\|_{[\theta]} \le \left(\frac{1}{1-\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(i\tau)\|_{A_0} P_0(\theta,\tau)\, d\tau\right)^{1-\theta} \left(\frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(1+i\tau)\|_{A_1} P_1(\theta,\tau)\, d\tau\right)^{\theta};$

3. $\|f(\theta)\|_{[\theta]} \le \sum_{j=0,1} \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(j+i\tau)\|_{A_j} P_j(\theta,\tau)\, d\tau.$

Pour la preuve, voir [1, page 94].

Théorème 3.1.2 *On suppose que A_0, A_1 sont des espaces de Banach, telle que $1 \le p_0 < \infty$, $1 \le p_1 < \infty, 0 < \theta < 1$. Alors*

$$(L_{p_0}(A_0), L_{p_1}(A_1))_{[\theta]} = L_p\left((A_0, A_1)_{[\theta]}\right),$$

où $\frac{1}{p} = \frac{(1-\theta)}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Si $1 \le p_0 < \infty$ on a aussi

$$\left(L_{p_0}(A_0), L_\infty^0(A_1)\right)_{[\theta]} = L_p\left((A_0, A_1)_{[\theta]}\right),$$

avec $\frac{1}{p} = \frac{(1-\theta)}{p_0}$.

Preuve. Soit S l'espace des fonctions simple à valeurs dans $\Delta\left(\bar{A}\right)$. S est dense dans $L_{p_0}(A_0) \cap L_{p_1}(A_1)$, et alors aussi dans $\left(L_{p_0}(A_0), L_{p_1}(A_1)\right)_{[\theta]}$, et dans $L_p\left(\bar{A}_{[\theta]}\right)$, par le théorème (1.2.13) on considère une des fonctions dans S, il est assez clair. Premièrement, on preuve l'inégalité:

$$\|a\|_{\left(L_{p_0}(A_0), L_{p_1}(A_1)\right)_{[\theta]}} \leq \|a\|_{L_{p\left(\bar{A}_{[\theta]}\right)}}.$$

Quand $a \in S$, il y a une fonctions $g(.,x) \in F\left(\bar{A}\right)$ telle que

$$\|g(.,x)\|_{F\left(\bar{A}\right)} \leq (1+\varepsilon)\|a(x)\|_{\bar{A}[\theta]} (x \in U; \varepsilon > 0),$$

et avec $g(\theta, x) = a(x)\ (x \in U)$. On pose

$$f(z,x) = g(z,x)\left(\frac{\|a(x)\|_{\bar{A}_{[\theta]}}}{\|a\|_{L_p\left(\bar{A}_{[\theta]}\right)}}\right)^{p\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)(z-\theta)}.$$

Pour cette fonction f, on a

$$\|f(it,.)\|_{L_{p_0}(A_0)} = \left(\int_U \|f(it,x)\|_{A_0}^{p_0} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq (1+\varepsilon)\|a\|_{L_p\left(\bar{A}_{[\theta]}\right)},$$

par quelque calculations élémentaire

$$\|f(1+it,.)\|_{L_{p_1}(A_1)} \leq (1+\varepsilon)\|a\|_{L_p\left(\bar{A}_{[\theta]}\right)},$$

quand $\varepsilon > 0$ est arbitraire, et par lemme (3.1.1) et par inégalité de Hölder $\left(\frac{p_0}{p(1-\theta)} > 1;\ \frac{p_1}{p_\theta} > 1\right)$ si $f(.,x) \in F\left(\bar{A}\right)$ et $f(\theta,x) = a(x)\ (x \in U)$ alors

$$\begin{aligned}
&\|a\|_{L_p\left(\bar{A}_{[\theta]}\right)}^p \\
= &\int_U \|a(x)\|_{\bar{A}_{[\theta]}}^p d\mu \\
\leq &\int_U \left(\left((1-\theta)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(i\tau,x)\|_{A_0} p_0(\theta,\tau)\, d\tau\right)^{1-\theta}\right. \\
&\left.\left(\theta^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(1+i\tau,x)\|_{A_1} p_1(\theta,\tau)\, d\tau\right)^{\theta}\right\}^p d\mu \\
\leq &\sup_\tau \|f(i\tau)\|_{L_{p_0}(A_0)}^{(1-\theta)p} \sup_\tau \|f(1+i\tau)\|_{L_{p1}(A_1)}^{\theta p} \\
\leq &\|f\|_{F\left(L_{p_0}(A_0), L_{p_1}(A_1)\right)}^p.
\end{aligned}$$

Ça donne la conclusion. ■

3.1.1 Application

Première application :Inégalité de Haussdörf-Yong

Théorème 3.1.3 *Pour* $p \in [1{,}2]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *on a:*

$$\|Ff\|_{L_{\acute{p}}} \leq (2\pi)^{\frac{n}{\acute{p}}} \|f\|_{L_p},$$

où F *désigne la transformée de Fourier.*

Preuve. On a $|Ff(\varphi)| \leq \int |f(x)|\, dx = \|f\|_1$, ce qui implique

$$F : L_1 \to L_\infty, \text{ de norme } \|Ff\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_1}.$$

Et d'après la formule de Perceval on obtient:

$$F : L_2 \to L_2, \text{ de norme } \|Ff\|_{L_2} \leq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L_2}.$$

Alors par le théorème de Riesz-Thorin, on peut définir $F : L_p \to L_q$ avec p et q vérifiant :

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{1}+\frac{\theta}{2}, \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{\infty}+\frac{\theta}{2}=\frac{\theta}{2}.$$

Avec $\theta \in]0{,}1[$ .Ainsi $q=\acute{p}$ et on peut contrôler la norme de l'opérateur. Elle est majorée par $(2\pi)^{\frac{\theta n}{2}}=(2\pi)^{\frac{n}{\acute{p}}}$. ■

Deuxième application : Inégalité de Young

Théorème 3.1.4 *Si* $f \in L_p$ *et* $g \in L_q$ *tel que* $1<p<q$. *Alors* $g*f \in L^r$ *avec* $\frac{1}{r}+1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.

Preuve. Soit T l'opérateur lineaire, on fixe g dans $L_q(\mathbb{R}^n)$, alors

$$T(f)=f*g$$

Donc on a

$$|Tf(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

par Hölder on trouve

$$T : L_{\acute{q}} \to L_\infty \text{ de norme } \|Tf\|_{L\infty} \leq \|g\|_{Lq} \|f\|_{L\acute{q}} .$$

Et d'autre part on a

$$\|Tf\|_{L_q} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \, dy \, \|g\|_{L_q} ,$$

ce qui implique

$$T : L_1 \to L_q \text{ de norme } \|Tf\|_{L_q} \leq \|g\|_{Lq} \|f\|_{L_1} .$$

D'après le théorème de Riesz-Thorin on peut définir

$$T : L_p \to L_r \text{ de norme } \|Tf\|_{L_r} \leq \|g\|_{Lq}^{1-\theta} \|g\|_{Lq}^{\theta} \|f\|_{L_p} = \|g\|_{Lq} \|f\|_{L_p} ,$$

avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{\acute{q}}, \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{\infty} \text{ avec } \theta \in \left]0{,}1\right[.$$

■

3.2 La Méthode Réel

Théorème 3.2.1 *Soient* $\bar{A} = (A_0, A_1)$ *et* $\tilde{X} = (X_0, X_1)$ *deux couples compatibles des espaces linéaires normées. Supposons que* $X_i \, (i = 0, 1)$ *est complet et de classe* $C\left(\theta_i, \bar{A}\right)$ *tel que* $0 \leq \theta_i \leq 1$ *et* $\theta_0 \neq \theta_1$. *On pose* $\theta = (1-\eta)\,\theta_0 + \eta\theta_1 \ (0 < \eta < 1)$ *alors pour* $1 \leq q \leq \infty$ $\tilde{X}_{n,q} = \bar{A}_{\theta,q}$ *(norme équivalente). En particulier: si* $0 < \theta_i < 1$ *et* $\bar{A}_{\theta_i,q_i}$ *est complet alors* $\left(\bar{A}_{\theta_0,q_0}, \bar{A}_{\theta_1,q_1}\right)_{\eta,q} = \bar{A}_{\theta,q}$.

Preuve. Voir ([3]p.50) ■

Théorème 3.2.2 *On suppose que $f \in L_p + L_\infty$, $0 < p < \infty$. Alors*

$$K(t, f; L_p, L_\infty) \sim \left(\int_0^{t^p} (f^*(s))^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2.1}$$

Si $p = 1$ il y a une égalité dans (3.2.1). En plus, avec $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$

$$(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta,q} = L_{p,q} \qquad \textit{normes équivalentes.} \tag{3.2.2}$$

Si $p_0 < q \leq \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{(1-\theta)}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ $(0 < \theta < 1)$. En particulier, $(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta,q} = L_p$.

Preuve. Premièrement on preuve l'inégalité pour (3.2.1). On prend

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) - \frac{f^*(t^p) f(x)}{|f(x)|} & \text{si } |f(x)| > f^*(t^p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soient $f_1 = f - f_0$, $E = \{x \mid f_0(x) \neq 0\}$. Alors $\mu(E) \leq t^p$ et on a, quand $f^*(s)$ est une constante dans $[\mu(E), t^p]$

$$\begin{aligned} K(t, f; L_p, L_\infty) &\leq \|f_0\|_p + t\|f_1\|_\infty \\ &= \left(\int_E (|f(x)| - f^*(t^p))^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + t f^*(t^p) \\ &= \left(\int_0^{\mu(E)} (f^*(s) - f^*(t^p))^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{t^p} (f^*(t^p))^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^{t^p} (f^*(s) - f^*(t^p))^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{t^p} (f^*(t^p))^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left(\int_0^{t^p} (f^*(t^p))^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

où $C = 1$ Si $p = 1$. Pour l'inégalité converse, supposons que $f = f_0 + f_1$, $f_0 \in L_p$, $f_1 \in L_\infty$. Utilisant l'inégalité $m(\sigma_0 + \sigma_1, f) \leq m(\sigma_0, f_0) + m(\sigma_1, f_1)$, on obtient par une calculation élémentaire

$$f^*(s) \leq f_0^*((1-\varepsilon)s) + f_1^*(\varepsilon s), \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

alors

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{t^p} (f^*(s))^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} &\leq C \left\{ \left(\int_0^{t^p} (f_0^*((1-\varepsilon)s))^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{t^p} (f_1^*(\varepsilon s))^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\ &\leq C \left\{ \left(\int_0^{\infty} (f_0^*((1-\varepsilon)s))^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} + t f_1^*(0) \right\} \\ &= C \left\{ (1-\varepsilon)^{\frac{-1}{p}} \|f_0\|_p + t\|f_1\|_\infty \right\}. \end{aligned}$$

Prend l'infimume et soit $\varepsilon \to 0$ on obtient (3.2.1), note que $C = 1$ Si $p \geq 1$. On applique (3.2.2) pour $p_1 = \infty$ et par le théorème (3.2.1) pour $p_1 = \infty$ par l'inégalité (3.2.1) On obtient:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\left(L_{p_0}, L_\infty\right)_{\theta,q}} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} k\left(t, f; L_{p_0}, L_\infty\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\sim \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta p_0} \int_0^{tp_0} \left(f^*\left(s\right)\right)^{p_0} ds\right)^{\frac{q}{p_0}} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta p_0 + p_0} \int_0^1 \left(f^*\left(st^{p_0}\right)\right)^{p_0} s\frac{ds}{s}\right)^{\frac{q}{p_0}} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{p_0}{q}}. \end{aligned}$$

Puis, par l'inégalité de Minkowski ($\frac{q}{p_0} > 1$), on obtient

$$\|f\|_{\left(L_{p_0}, L_\infty\right)_{\theta,q}} \leq C \int_0^1 \left(s^{\frac{q}{p_0}} \int_0^\infty t^{(1-\theta)q} \left(f^*\left(st^{p_0}\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{p_0}{q}} \frac{ds}{s} \leq C \|f\|_{L_{p,q}},$$

puisque, $\frac{1}{p} = \frac{(1-\theta)}{p_0}$. D'autre part

$$\|f\|_{\left(L_{p_0}, L_\infty\right)_{\theta,q}} \geq C \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta p_0} t^{p_0} \left(f^*\left(t^{p_0}\right)\right)^{p_0}\right)^{\frac{q}{p_0}} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \geq C \|f\|_{L_{p,q}}.$$

Donc on a (3.2.2) pour $p_1 = \infty$. Ce résultat et d'après le théorème (3.2.1), on obtient

$$\begin{aligned} \left(L_{p_0}, L_{p_1}\right)_{\theta,q} &= \left(\left(\left(L_p, L_\infty\right)_{\theta_0, p_0}\right), \left(\left(L_p, L_\infty\right)_{\theta_1, p_1}\right)\right)_{\theta,q} \\ &= \left(L_p, L_\infty\right)_{\eta,q} = L_{p,q}, \end{aligned}$$

où $0 < r < p_0$ et θ_0, θ_1, η leurs valeurs indiquées. ∎

On remarque qu'il y a une autre preuve de la dernière de théorème, dans le cas $p_1 < \infty$. En réalité on a les résultats suivantes:

Définition 3.2.3 *Si la norme $\|\cdot\|$ est un quasi–norme sur A alors il est $\|\cdot\|^p$ pour tout $p > 0$. donc on note $(A)^p$ l'espace A avec le condition de quasi–norme $\|\cdot\|$.*

Il existe une relation entre les deux espaces $\bar{A}_{\theta,q}$ et $\left((A_0)^{p_0}, (A_1)^{p_1}\right)_{\theta,q}$.

Théorème 3.2.4 *Si $0 < p_0 < p_1 < \infty$ et $p = (1-\eta)\, p_0 + \eta p_1$, $0 < \eta < 1$ alors*

$$\left(\left(L_{p_0}\right)^{p_0}, \left(L_{p_1}\right)^{p_1}\right)_{\eta,1} = \left(L_p\right)^p.$$

Le quasi-norme sur $(L_p)^p$ est une constante multiplie par le quasi-norme sur $\left(\left(L_{p_0}\right)^{p_0}, \left(L_{p_1}\right)^{p_1}\right)_{\eta,1}$.

Preuve. On suppose que $p_0 < p_1$, on écrit

$$L(t,f) = K\left(t,f;(L_{p_0})^{p_0},(L_{p_1})^{p_1}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} L(t,f) &= \inf_{f=f_0+f_1}\int_U \left(|f_0(x)|^{p_0} + t\,|f_1(x)|^{p_1}\right) d\mu \\ &= \int_U \inf_{f(x)=f_0(x)+f_1(x)} \left(|f_0(x)|^{p_0} + t\,|f_1(x)|^{p_1}\right) d\mu. \end{aligned}$$

Mais

$$\inf_{y=y_0+y_1}\left(|y_0|^{p_0} + t\,|y_1|^{p_1}\right) = |y|^{p_0}\,F\left(t\,|y|^{p_1-p_0}\right),$$

où

$$F(s) = \inf_{y_0+y_1=1}\left(|y_0|^{p_0} + s\,|y_1|^{p_1}\right) \sim \min(1,s),$$

alors

$$L(t,f) = \int_U \left(|f(x)|^{p_0}\,F\left(t\,|f_1(x)|^{p_1-p_0}\right)\right) d\mu.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \|f\|_{\left((L_{p_0})^{p_0},(L_{p_1})^{p_1}\right)_{\eta,1}} &= \int_0^\infty t^{-\eta}L(t,f)\,\frac{dt}{t} \\ &= \int_U |f(x)|^{p_0}\int_0^\infty t^{-\eta}F\left(t\,|f(x)|^{p_1-p_0}\right)\left(\frac{dt}{t}\right) d\mu. \end{aligned}$$

On écrit

$$c_0 = \int_0^\infty t^{-\eta}F(t)\,\frac{dt}{t},$$

on obtient

$$\|f\|_{\left((L_{p_0})^{p_0},(L_{p_1})^{p_1}\right)_{\eta,1}} = c_0\int_U |f(x)|^p\,d\mu = c_0\,\|f\|_{L_p}^p.$$

■

Utilisant le théorème (3.2.2) et (3.2.3) on peut preuve maintenant la version suivante de la théorème l'interpolation de Riesz-Thorin.

Théorème 3.2.5 *Supposons que* $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ *où* $0 < \theta < 1$ *et* $0 < p_i, q_i \le \infty$, $i = 0,1$ *avec* $p \le q$. *Alors*

$$\begin{aligned} T &: L_{p_0}(U,d\mu) \to L_{q_0}(V,d\nu), \\ T &: L_{p_1}(U,d\mu) \to L_{q_1}(V,d\nu), \end{aligned}$$

implique que

$$T : L_p(U, d\mu) \to L_q(V, d\nu).$$

Si M_i est un quasi-norme de $T : L_{p_i} \to L_{q_i}$ et si M est un quasi–norme de $T : L_p \to L_q$, Alors

$$M \leq C M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

Si $p_i = q_i < \infty$ $(i = 0, 1)$ alors $C = 1$.

On signe ce théorème est vraie dans le cas de quasi–norme, mais pour ça on a la restriction $p \leq q$.

Preuve. Premièrement on suppose que $p_i \neq q_i$ pour quelque $i \in \{0, 1\}$. Par les théorèmes (3.2.2) et (2.1.9) et la propriété d'interpolation, on a

$$\begin{aligned} \|Tf\|_q &\leq C \|Tf\|_{\left(L_{q_0}, L_{q_1}\right)_{\theta,q}} \leq C M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{\left(L_{p_0}, L_{p_1}\right)_{\theta,q}} \\ &\leq C M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{\left(L_{p_0}, L_{p_1}\right)_{\theta,p}} \leq C M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p, \end{aligned}$$

où C est dépend sur θ. Si $p_i = q_i$, $i = 0, 1$, on utilisant le théorème (3.2.4) on obtient

$$\|Tf\|_{\left(\left(L_{p_0}\right)^{p_0}, \left(L_{p_1}\right)^{p_1}\right)_{\eta,1}} \leq M_0^{(1-\eta)p_0} M_1^{\eta p_1} \|f\|_{\left(\left(L_{p_0}\right)^{p_0}, \left(L_{p_1}\right)^{p_1}\right)_{\eta,1}},$$

avec $(1 - \eta) p_0 = (1 - \theta) p$ et $\eta p_1 = \theta p$ on obtient par le théorème (3.2.2)

$$c_0 \|Tf\|_p^p \leq \left(M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}\right)^p c_0 \|f\|_p^p.$$

Qui donne le résultat. ■

Remarque 3.2.6 *Il existe une autre méthode pour prouver le théorème précèdent.*

3.2.1 Application

On notera $L_p(w)$ l'espace L_p à poid w. De la norme

$$\|f\|_{L_{p(w)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 3.2.7 *Si $1 \leq p \leq 2$ Alors $\|Ff\|_{L_p\left(|\xi|^{-n(2-p)}\right)} \leq C_p \|f\|_{L_p}$.*

Preuve. Soit T une application linéaire définie par $Tf(\xi) = |\xi|^n \hat{f}(\xi)$. En appliquant la formule de Perceval on obtient:

$$\|Tf\|_{L_2\left(|\xi|^{-n(2-p)}\right)} = \left\|\hat{f}\right\|_{L_2} \leq C\,\|f\|_{L_2}.$$

Nous allons appliquer le théorème de Marcinkiewicz. Comme
$L_2\left(|\xi|^{-n}\right) \subset L_2^*\left(|\xi|^{-n}\right)$. On en déduit que l'opérateur T est continue de L_2 dans L_2^*. Il nous reste à montrer la continuité de T dans d'autres espaces. Soit $E_\sigma = \left\{\xi : |\xi|^n \left|\hat{f}\xi\right| > \sigma\right\}$.
On note υ la mesure $|\xi|^{-2n}\,\xi$. On suppose que $\|f\|_{L_1} = 1$. Il vient que $\left|\hat{f}\right| \leq 1$. Pour $\xi \in E_\sigma$, on a $\sigma \leq |\xi|^n$. Donc

$$m(\sigma, Tf) = \upsilon(E_\sigma) = \int_{E_\sigma} |\xi|^{-2n}\, d\xi \leq c\sigma^{-1}.$$

En particulier on déduit que

$$\sigma m(\sigma, Tf) \leq c\,\|f\|_{L_1}.$$

Donc l'application linéaire $T : L_1 \to L_1^*$ et continue. Par le théorème de Marcinkiewicz on obtient le résultat escompté. ■

3.3 Conclusion

Nous nous sommes intéressés ici plus particuliérement au ces des espaces L_p. Ces résultats peuvent se généraliser au cas des espaces de sobolev ou de besov. Ces méthodes sont des outils très puissant dans l'étude des EDP linéaire et non linéaire. Pour plus de précision je renvoie à [1]p.132

Bibliographie

[1] N. Arousgajn, E. Gagliardo. Interpolation spaces and interpolation methods, Ann. Mat. Pura Appl.68,51–118(1965).

[2] N. Artola. Sur un théorème d'interpolation. J. Math. Anal. Appl. 41,148–163(1973).

[3] J. Bergh,.J.Löfstion. Interpolation spaces Berlin, Heidelberg, New york 1976.

[4] A. Klan. Introduction a l'interpolation, 2007.