



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière Mathématiques:

Option : Algèbre et Mathématiques Discrètes

Par

TOUAIRI Nacera

Sujet

Théorèmes de

Ceva et Menelaus en Géométrie Euclidienne

Devant le jury :

Mr L.Zedam

Prof. Univ de M'sila

Président

Mr M.Benoumhani

Prof. Univ de M'sila

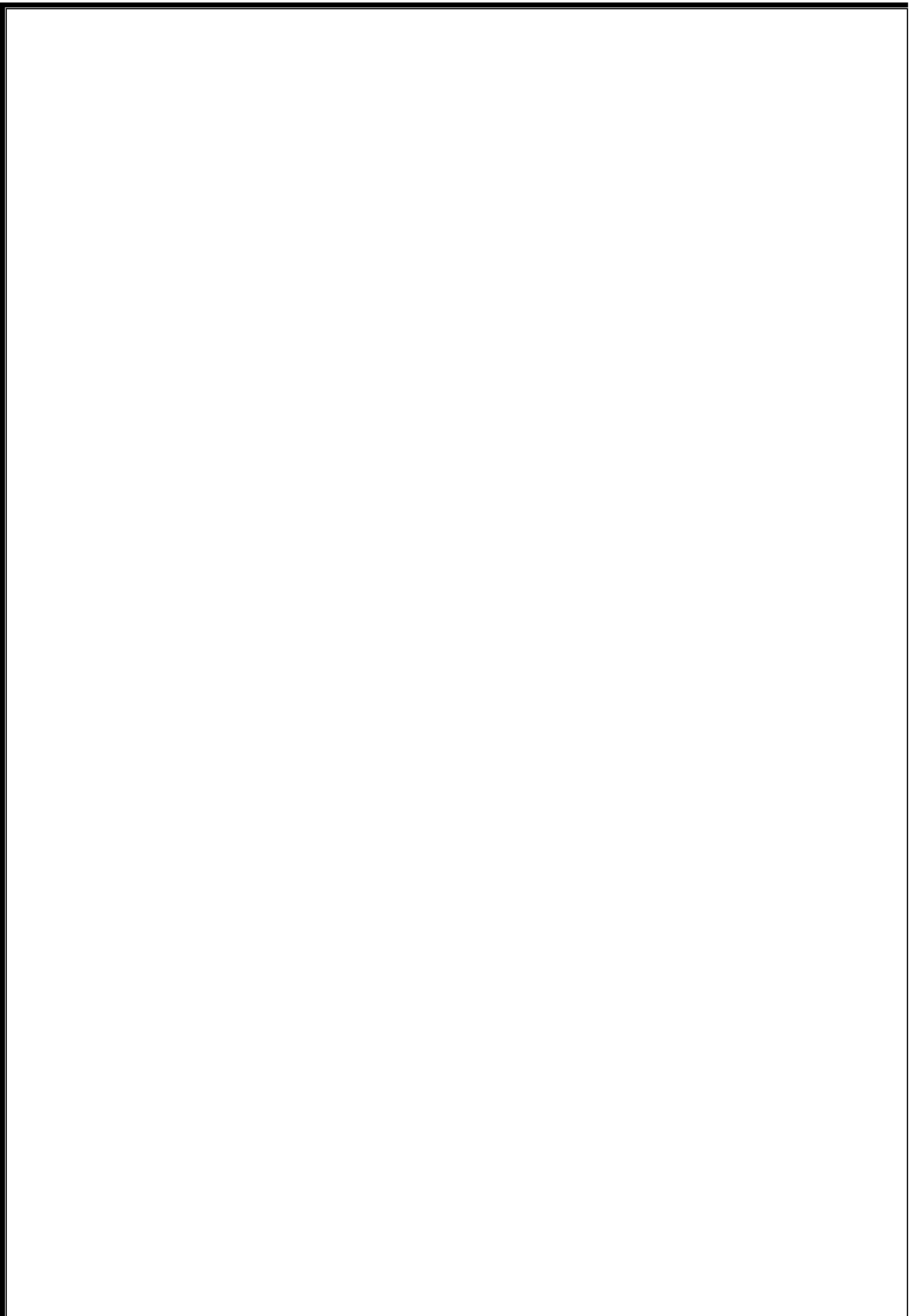
Encadreur

Mr L.Ladjalat

Prof. Univ de M'sila

Examineur

Promotion : 2018 / 2019



شكر وعرفان

اللهم لك الحمد والشكر كله وإليك يرجع الفضل كله

أتقدم بأسمى آيات الشكر والامتنان

والتقدير والمحبة إلى كل من لجنة المناقشة وكل من وقف بجاني

وساعدني وقدم لي يد العون من قريب وبعيد

واخص بالذكر الأستاذ المشرف "موسى بن أم هاني"

الذي لم يبخل علي بنصائحه القيمة وتوجيهاته

من بداية هذا العمل إلى نهايته

وكل من ساهم معنا في إنجاز هذا العمل .

إهداء

أهدي ثمرة جهدي إلى :

إلى لؤلؤة قلب النابض و قرّة عيني إلى من جعلت رضاها حافزي للنجاح
إليك أمي الحبيبة .

إلى اعز ما أهداه الله لي تاج أيامي إلى من جاد بنفسه من اجل تعليمي
إليك أبي الغالي .

إلى إخوتي و أخواتي وكل أفراد العائلة .

إلى شموع الأسرة: تمارى و أسماء و مروى .

إلى كل من يحمل لقب **طويري** صغيرا وكبيرا .

وإلى اعز صديقتي: إلهام و حنان .

وإلى كل طلبة الرياضيات

فهرس المحتويات

مقدمة

I. نظرية سيفا

1. مدخل

2. النظرية

3. الاثبات

- باستعمال المساحات
- باستعمال النسب المثلثية
- باستعمال المرجح

4. تطبيقات

5. امثلة

II. نظرية منيلاوس

1. مدخل

2. النظرية

3. الاثبات

• اثبات 1

• اثبات 2

4. امثلة

III. ملاحظة

الخاتمة

التلخيصات

تلخيص

يتطرق موضوع البحث لمبرهنتين غاية في الأهمية وهما مبرهنتا شيفا و منيلاوس في الهندسة الاقليدية.

Abstract

The subject of this work is the study of two classical theorems in Euclidean geometry, namely, Menelaus and Ceva .

Résumé

L'objet de ce travail est l' étude de deux théorèmes classiques en géométrie euclidienne : Ceva et Minelaus .

مقدمة

موضوع المذكرة يتحدث عن نظريتي سيفا ومنيلاوس في الهندسة الاقليدية .

فلنتعرف أولا على الهندسة الاقليدية هي احد الأنظمة الرياضية التي وضع أسسها اقليدس في كتابه "العناصر"

وهي نفسها هندسة الاستكمال التي تدرس في المدارس حاليا حيث تنقسم الهندسة الاقليدية إلى قسمين هناك

الهندسة المستوية التي تختص بدراسة الأشكال مثل المستقيمت و الزوايا و المثلثات و الأشكال الرباعية و الدوائر أما الهندسة المجسمة فتتعلق بدراسة الفضاء ذو البعد الثلاثي.

الفصل الأول وهو الفصل الذي تحدثنا فيه عن نظرية سيفا وهي النظرية التي تعطي الحالة الضرورية والكافية لتقاطع

ثلاث مستقيمت تمر عبر القمم الثلاثة لمثلث ما .

سوف نثبت مبرهنة سيفا بعدة طرق: الإثبات الأول يتم عن طريق المساحات, ويعد من أسهل البراهين وأوضحها. أما

الإثبات الثاني, فيستخدم فيه حساب المثلثات, أما الإثبات الأخير فيتم باستعمال المرجح .

لإظهار مدى أهمية و قوة هذه المبرهنة, أثبتنا بعض النتائج بدون استخدامها, حيث ظهر البرهان طويلا ومعقدا.

في الفصل الثاني تناولنا نظرية منيلاوس , النظرية المتعلقة بالقطع المستقيمة الناتجة من مستقيم قاطع

لأضلاع المثلث أو إمدادها حيث تعين كل نقطة قطعيتين على الضلع و حاصل ضرب اطوال الثلاث قطع غير متجاورة

يساوي حاصل أطوال الثلاث الأخرى هذه نظرية منيلاوس ببساطة .

مثل سابقتها, مبرهنة سيفا, لها أيضا عدة إثباتات , الإثبات الأول باستخدام نظرية طالس والثاني باستخدام بعض النتائج

الأساسية من الهندسة الاقليدية.

وتناولنا تطبيق هام و أمثلة لتواطؤ ثلاث نقاط وانتمائها لنفس المستقيم مثل ما هو مبين في مستقيم سيمسون.

لإظهار مدى أهمية وقوة هذه النظرية فقد قارنا بين إثباتين لمستقيم سيمسون بتطبيق النظرية وبدون تطبيقها

فتجلت لنا فعالية مبرهنة منيلاوس حيث أن تطبيقها قصر الإثبات و لخص الكثير .

الفصل الاول

مبرهنة سيفا *Théorème de Ceva*

1.1. مدخل

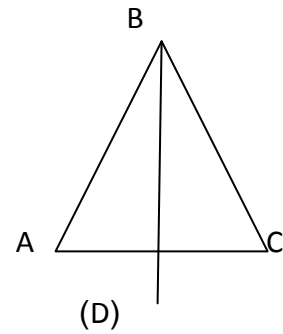
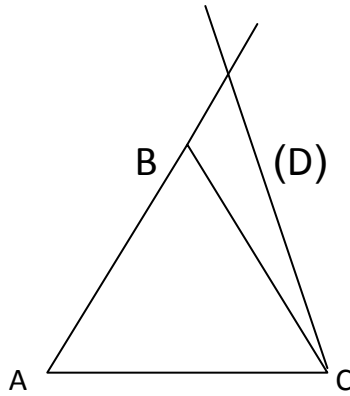
تعد مبرهنة سيفا من بين المبرهنات اللافتة للانتباه في الهندسة الاقليدية المبرهنة الشهيرة باسم مبرهنة سيفا نسبت هذه المبرهنة في المراجع الأوروبية و الغربية إلى عالم الرياضيات الايطالي جيوفاني سيلفا الذي قدم برهان لها سنة 1678 في حيث انه كان أول برهان رياضي موثق لها تم قبل ذلك بنحو اكثر من 6 قرون على يد الأمير يوسف المؤتمن بن هود احد ملوك الطوائف بالأندلس الذي كان يحكم منطقة سرقسطة شرق شبه الجزيرة وتعتبر هذه المبرهنة من انجازاته بإضافة إلى العديد من الإسهامات الأخرى .

2.1. تعريف

أي مستقيم يمر عبر قمة رأس مثلث يسمى شيفية (cevienne). الشيفية قد تقطع الضلع المقابل لهذا الرأس (داخل المثلث) أو في امتداد الضلع المقابل وهنا التقاطع يكون خارج المثلث.

مثال :

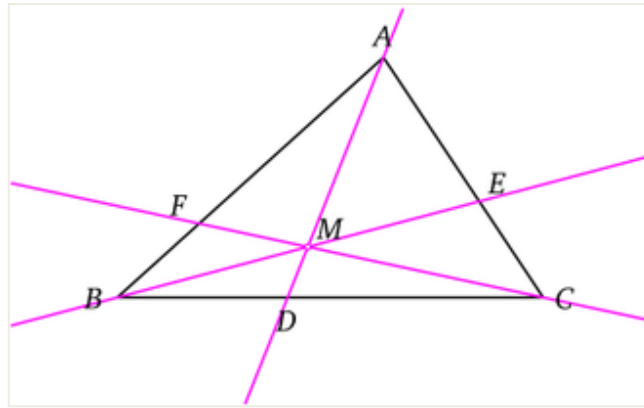
الشيفيتان مثل ما هو مبين في الشكلين التاليين :



3.1. النظرية

إذا كان ABC مثلث و كانت النقاط D و E و F تقعن على الأضلاع BC, CA, AB على التوالي فإن المستقيمت أو الشيفيات (cevienes) $(AD), (BE), (CF)$ تتقاطع في نقطة واحدة M إذا و فقط إذا :

$$\frac{CE}{EA} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{AF}{FB} = 1$$



4.1. الصيغة المثلثية للمبرهنة

هناك صيغة مثلثية مكافئة لمبرهنة سيفا.

إذا كان ABC مثلث و كانت النقاط D, E, F تقع على الأضلاع $(BC), (AC), (AB)$ على الترتيب فإن المستقيمت (cevienne), الشيفيات $(AD), (BE), (CF)$ تتقاطع في نقطة واحدة M إذا و فقط كان :

$$\frac{\sin CBE}{\sin BEA} \times \frac{\sin ADB}{\sin DAC} \times \frac{\sin AFC}{\sin FCB} = 1$$

5.1. الإثبات

هناك عدة إثباتات لهذه النظرية سنتطرق إلى بعض منها.

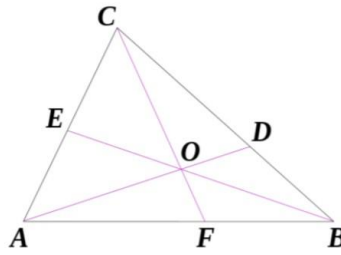
أولها إثبات باستعمال المساحات وهو أحد أسهل وأوضح البراهين وآخر باستعمال المرجح .

هناك صيغة مثلثية لمبرهنة شيفا, سوف نثبتها أيضا .

هناك حالتين لتقاطع الشيفيات الثلاث :

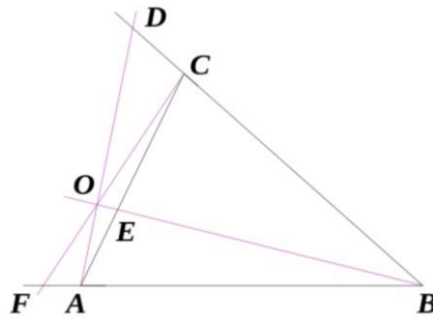
• الحالة الأولى

تلتقي المستقيمات الثلاثة عند نقطة داخل المثلث.

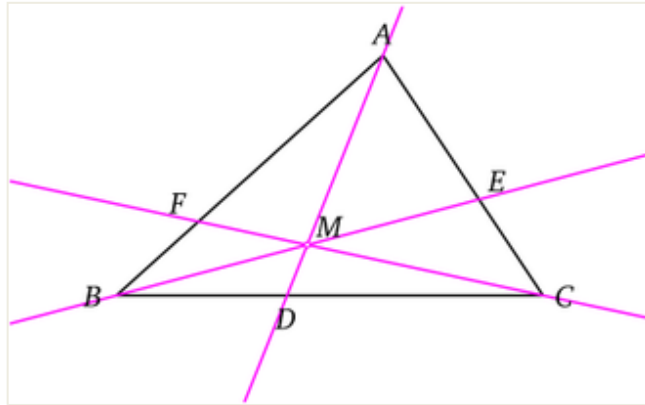


• الحالة الثانية

تلتقي المستقيمات الثلاثة عند نقطة خارج المثلث.



الإثبات الأول 1 : عن طريق المساحات



نرمز لمساحة المثلث ABC بـ ΔABC

لدينا المثلثين BMD , CMD لهما نفس الارتفاع (DM) وقاعدتين (BD) , (DC) على الترتيب

و بالتالي :

$$\frac{\Delta BMD}{\Delta CMD} = \frac{BD}{DC}$$

و أيضا المثلثان ABD , ACD لهما نفس الارتفاع (AD) وقاعدتين (BD) و (DC) على الترتيب

و بالتالي :

$$\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD} = \frac{BD}{DC}$$

بناء على ذلك فان

$$\frac{\Delta ABD - \Delta BMD}{\Delta ACD - \Delta CMD} = \frac{BD}{DC}$$

ومنه نستنتج

$$\frac{\Delta AMB}{\Delta AMC} = \frac{BD}{DC} \quad (1)$$

ولدينا مثلثين BFM و AFM لهما نفس الارتفاع (FM) وقاعدتين (AF) و (FB) على الترتيب

وبالتالي :

$$\frac{\Delta AMF}{\Delta BMF} = \frac{AF}{FB}$$

وكذلك المثلثان CAF و CBF لهما نفس الارتفاع (CF) وقاعدتين (AF) و (FB) على الترتيب

و بالتالي :

$$\frac{\Delta CAF}{\Delta CBF} = \frac{AF}{FB}$$

بناء على ذلك

$$\frac{\Delta CAF - \Delta AMF}{\Delta CBF - \Delta BMF} = \frac{AF}{FB}$$

ومنه نستنتج

$$\frac{\Delta ACM}{\Delta BMC} = \frac{AF}{FB} \quad (2)$$

ولدينا أيضا المثلثان CME و AME لهما نفس الارتفاع EM وقاعدتين (CE) و (EA) على الترتيب

وبالتالي :

$$\frac{\Delta CME}{\Delta AME} = \frac{CE}{EA}$$

وكذلك المثلثان BCE و BAE لهما نفس الارتفاع (BE) وقاعدتين (CE) و (AE) على الترتيب

و بالتالي :

$$\frac{\Delta BCE}{\Delta BAE} = \frac{CE}{EA}$$

بناء على ذلك

$$\frac{\Delta BCE - \Delta CME}{\Delta BEA - \Delta AME} = \frac{CE}{EA}$$

ومنه نستنتج

$$\frac{\Delta BCM}{\Delta ABM} = \frac{CE}{EA} \quad (3)$$

بضرب المعادلات الثلاث (3) و (2) و (1) طرف بطرف نجد

$$\frac{\Delta ACM}{\Delta BMC} \times \frac{\Delta BCM}{\Delta AMB} \times \frac{\Delta AMB}{\Delta AMC} = \frac{AF}{FB} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{BD}{DC} = 1$$

بالمقابل

إذا كان لدينا

$$\frac{CE}{EA} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

فان المستقيمات (CF), (BE), (AD) تتقاطع في نقطة واحدة

لتكن M نقطة تقاطع المستقيمين (CF), (BE)

سنثبت أن المستقيم (AD) يمر بالنقطة M

نرسم المستقيم AM الذي يقطع BC في النقطة D ثم نثبت أن D = D

ومنه سيكون المستقيم AD نفسه المستقيم AD الذي يمر عبر النقطة M وبالتالي يتحقق المطلوب

المستقيمت (CF), (BE), (AD) تتقاطع في النقطة M بتطبيق مبرهنة سيفا أي الاتجاه الأول نجد :

$$\frac{CE}{EA} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

ومن المعطيات لدينا :

$$\frac{CE}{EA} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DB} = \frac{BD}{DB}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DB} + 1 = \frac{BD}{DB} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DB} + \frac{DC}{DC} = \frac{BD}{DB} + \frac{DC}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{BD+DC}{DC} = \frac{BD+DC}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{DC}$$

$$\Rightarrow DC = DC$$

$$\Rightarrow D = D$$

وهو ما يحقق التالي :

$$\frac{CE}{EA} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

إذن الشيفيات تتقاطع في نقطة واحدة M وبالتالي الاستلزام العكسي محقق .

أثبت الصيغة المثلثية لمبرهنة سيفا 2

الصيغة المثلثية لمبرهنة سيفا هي

$$\frac{\sin CBE}{\sin BEA} \times \frac{\sin ADB}{\sin DAC} \times \frac{\sin AFC}{\sin FCB} = 1$$

إذا فقط اذا كانت الشيفيات الثلاثة تلتقي في النقطة M .

أولا نلاحظ أن العلاقة

$$\frac{CE}{EA} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{\Delta(AEM)}{\Delta(CEM)} \times \frac{\Delta(CMD)}{\Delta(BMD)} \times \frac{\Delta(BMF)}{\Delta(AMF)} = 1$$

هذا لان المثلثين AEM و CEM لهما نفس الارتفاع من النقطة M .

$$\Delta(AEM) = AE \cdot AM \cdot \sin(CAD) / 2 \quad \text{ومنه ينتج أن}$$

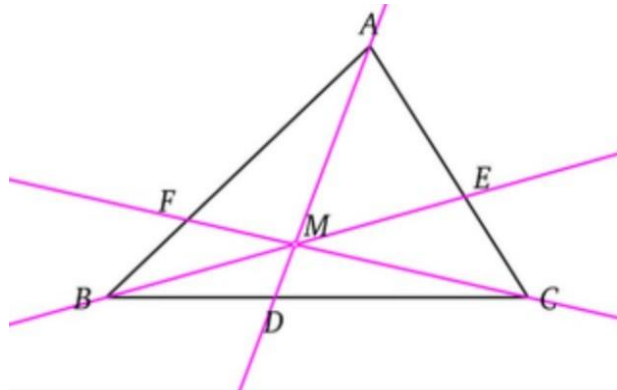
و أيضا

$$\Delta(CEM) = EC \cdot MC \cdot \sin(ABE) / 2$$

ونفس الشيء بالنسبة للمثلثات الأخرى.

بالتعويض في العلاقة (1) نحصل على

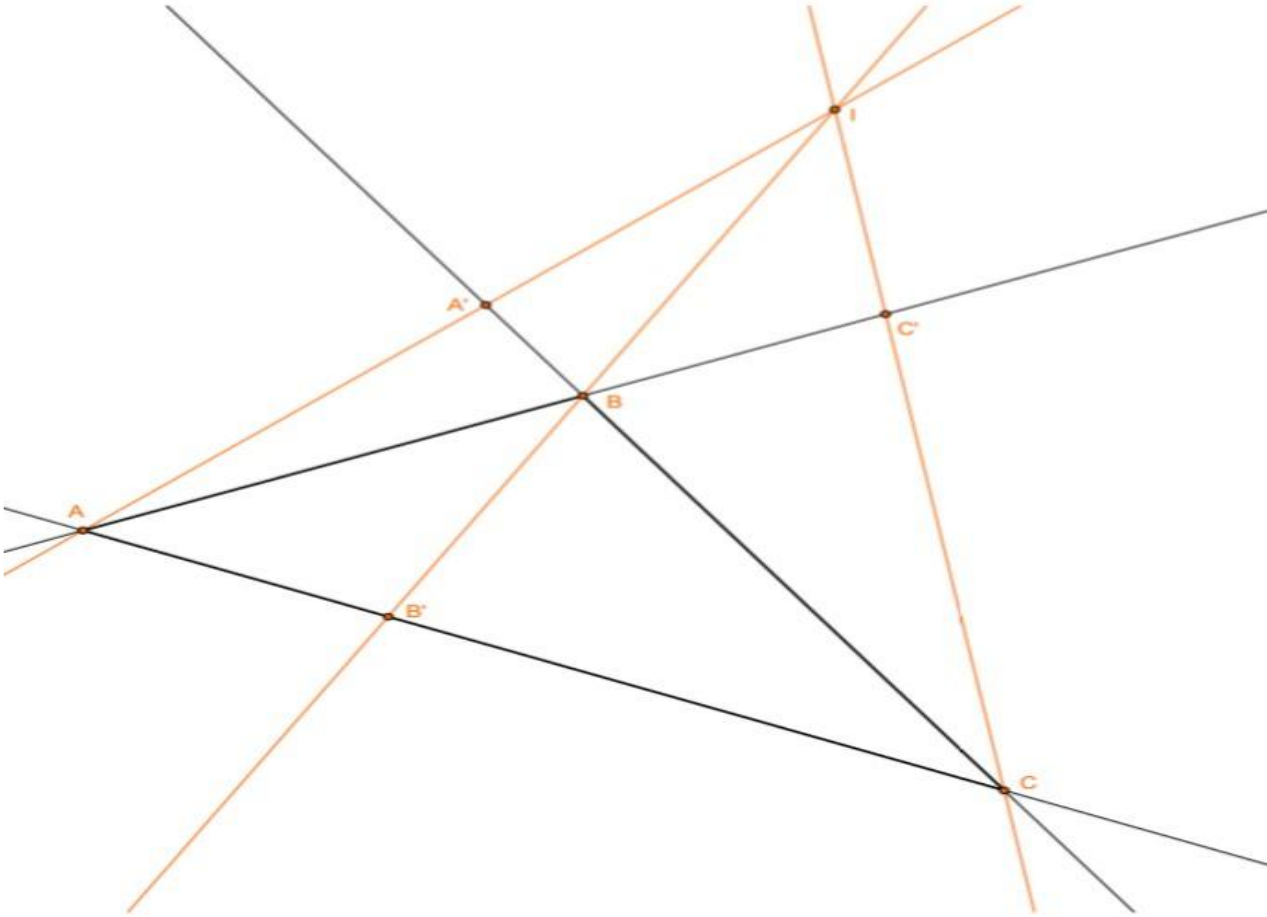
$$\frac{\sin \widehat{CBE}}{\sin \widehat{EBA}} \times \frac{\sin \widehat{ADB}}{\sin \widehat{DAC}} \times \frac{\sin \widehat{AFC}}{\sin \widehat{FCB}} = \frac{AE}{EC} \times \frac{CD}{DB} \times \frac{BE}{FA} = 1$$



وبالتالي نحصل على المطلوب .

الإثبات الثاني: عن طريق المرجح

لدينا الشكل المقابل



لتكن النقط A, B, C من المثلث AIC

نفرض النقطة I مرجح لنقاط الثلاث A, B, C

$$I = \left(\frac{A}{\alpha} \mid \frac{B}{\beta} \mid \frac{C}{\gamma} \right)$$

حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

لما $\alpha = 0$ ومنه النقطة I تنتمي إلى المستقيم (BC) وهذا غير منطقي

اذن $\alpha \neq 0$

نحاول إثبات $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$ و هذا ما يساوي $\alpha + \beta \neq 0$

لنفرض $\beta + \gamma = 0$

إذن $\gamma = -\beta$

$$I = \left\langle \frac{A}{\alpha} \mid \frac{B}{\beta} \mid \frac{C}{\gamma} \right\rangle = \left\langle \frac{A}{\alpha} \mid \frac{B}{\beta} \mid \frac{C}{-\beta} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} - \beta \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

ومنه المستقيمان (AI), (BC) متوازيان وهذا غير منطقي لأنهما يتقاطعان في النقطة \hat{A}

نستنتج إذن $\beta + \gamma \neq 0$

يسمح لنا تجميع المرجح بافتراض النقطة \hat{A} حيث

$$\hat{A} = \left\langle \frac{B}{\beta} \mid \frac{C}{\gamma} \right\rangle$$

ومنه

$$I = \left\langle \frac{A}{\alpha} \mid \frac{\hat{A}}{\beta + \gamma} \right\rangle$$

إذن النقطة \hat{A} هي نقطة من المستقيم (BC) و هي أيضا نقطة تقاطع المستقيم (AI) والمستقيم (BC)

وهذان المستقيمان يتقاطعان في النقطة \hat{A}

ومنه نستنتج أن النقطة \hat{A} هي نفسها النقطة \hat{A}

$$\hat{A} = \hat{A}$$

$$\hat{A} = \left\langle \frac{B}{\beta} \mid \frac{C}{\gamma} \right\rangle$$

إذن

$$\beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

لدينا المعاملات غير معدومة ومنه

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{BA}} = -\frac{\beta}{\gamma} \quad (1)$$

$$\beta = -\alpha$$

نفرض أن $\alpha + \beta = 0$, إذن

$$I = \left\langle \frac{A}{\alpha} \mid \frac{B}{\beta} \mid \frac{C}{\gamma} \right\rangle = \left\langle \frac{A}{\alpha} \mid \frac{B}{-\alpha} \mid \frac{C}{\gamma} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \alpha \overrightarrow{IA} - \alpha \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \alpha \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

ومنه المستقيمان (AB) و (IC) متوازيان وهذا غير منطقي.

لأنهما يتقاطعان في النقطة \hat{C} ،

إذن $\alpha + \beta \neq 0$ و عليه

يسمح لنا تجميع المرجح بافتراض النقطة \hat{C}

$$\hat{C} = \left\langle \frac{A}{\alpha} \mid \frac{B}{\beta} \right\rangle$$

ومنه

$$I = \left\langle \frac{\hat{C}}{\alpha + \beta} \mid \frac{C}{\gamma} \right\rangle$$

حيث النقطة \hat{C} هي نقطة من المستقيم (AB) و هي أيضا نقطة تقاطع المستقيمان (AB) ، (CI)

وهذان المستقيمان يتقاطعان في نقطة \hat{C}

نستنتج في الأخير أن النقطة \hat{C} و النقطة \check{C} متطابقتين

$$\hat{C} = \check{C}$$

$$\check{C} = \left\langle \frac{A}{\alpha} \mid \frac{C}{\gamma} \right\rangle$$

إذن

$$\alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

لدينا المعاملات غير معدومة ومنه

$$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}} = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (2)$$

نفرض أن $\alpha + \gamma = 0$

$$\alpha = -\gamma$$

إذن

$$I = \left\langle \frac{A}{\alpha} \mid \frac{B}{\beta} \mid \frac{C}{\gamma} \right\rangle = \left\langle \frac{A}{-\gamma} \mid \frac{B}{\beta} \mid \frac{C}{\gamma} \right\rangle$$

ومنه

$$\Rightarrow -\gamma \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

ومنه المستقيمان (AC), (IB) متوازيان

وهذا غير ممكن لأنها تتقاطع في النقطة \dot{B} إذن

$$\alpha + \gamma \neq 0$$

يسمح لنا تجميع المرجح بافتراض النقطة \ddot{B}

$$\ddot{B} = \left\langle \frac{A}{\alpha} \mid \frac{C}{\gamma} \right\rangle$$

ومنه

$$I = \left\langle \frac{B}{\alpha} \mid \frac{\ddot{B}}{\alpha + \gamma} \right\rangle$$

النقطة \ddot{B} هي نقطة من المستقيم (AC) وهي أيضا نقطة تقاطع المستقيمين (IB), (AC)

وهذان المستقيمان يتقاطعان في النقطة \dot{B}

أخير , نستنتج أن النقطة \dot{B} تتطابق مع النقطة \ddot{B}

$$\dot{B} = \ddot{B}$$

$$\dot{B} = \left\langle \frac{A}{\alpha} \mid \frac{C}{\gamma} \right\rangle$$

إذن

$$\alpha \overrightarrow{BA} + \gamma \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

لدينا المعاملات غير معدومة ومنه

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\gamma}{\alpha} \quad (3)$$

بضرب المعادلات الثلاثة طرفا بطرف نجد

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} \times \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right) \times \left(-\frac{\gamma}{\alpha}\right) \times \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) = -1$$

و هو المطلوب , أي

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -1$$

بالمقابل

ليكن لدينا

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -1$$

لنفرض أن المستقيمين (AA) و (BB) يتقاطعان في النقطة C

لتكن النقطة J هي نقطة تقاطع المستقيمان (CI) و (AB) و باستعمال الاستلزام الأول المثبت

لدينا

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AJ}} \times \frac{\overline{BJ}}{\overline{BA}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -1$$

ولدينا الفرضية

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -1$$

من المعادلتين نستنتج

$$\frac{\overline{BJ}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

المعادلة تسمح لنا باستنتاج أن النقطتين J و C متطابقتين

بطريقة أخرى C هي نقطة تقاطع المستقيمان CI و AB وكذلك A نقطة تقاطع المستقيمان

$$. (AA), (BB), (CC)$$

بهذا فقد أثبتنا الاستلزام العكسي .

6.1 تطبيقات

لنظرية شيفا عدة استخدامات و عدة نتائج . فهي تساعد في اختصار بعض البراهين وتخطي بعض التعقيدات.

فيم يلي بعض تطبيقاتها. نبين تقاطع المستقيمان الشهيرة في المثلث (المتوسطات, منصفات زوايا المثلث

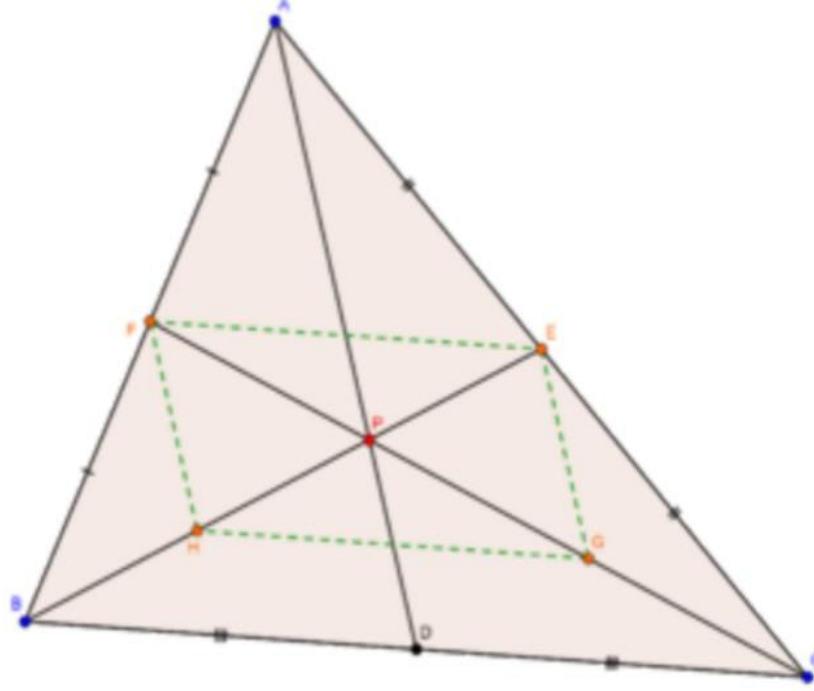
الداخلية وكذا الارتفاعات) . ولاكتشاف الفرق نقارن بين الإثبات بمبرهنة شيفا و بدونها

1.6.I . بالنسبة للمتوسطات في المثلث

تلتقي متوسطات المثلث الثلاثة في نقطة واحدة تعرف بالنقطة الوسطى أو مركز ثقل المثلث .

الإثبات :

لدينا الشكل التالي



في المثلث ABC رسمنا المتوسطات AD, BE, CF و النقطة P هي النقطة الوسطى, النقطتان H, G منتصفا PB, PC على الترتيب , سنثبت أن النقطة P تقسم المتوسط إلى جزئين النسبة بينهما 1/2 من جهة الرأس .

$$\text{أي أن المطلوب تحقيق } \frac{PC}{PF} = 2 \text{ أو } \frac{PB}{PE} = 2 .$$

القطعة المستقيمة EF تصل بين منتصفي الضلعين في المثلث ABC

$$\text{إذن } EF \text{ توازي الضلع الثالث } BC \text{ و } EF = \frac{1}{2} BC$$

$$\text{كذلك الحال مع القطعة } GH \text{ في المثلث } PBC \text{ إذن } GH \text{ يوازي } BC \text{ و } GH = \frac{1}{2} BC .$$

في الرباعي FEGH , الضلعان EF, GH متوازيان حيث يوازي كل منهما BC و متطابقان حيث يساوي كل منهما نصف BC .

إذن الرباعي FEGH متوازي الأضلاع ومن خصائص متوازي الأضلاع أن القطرين FG, EH يناصفان بعضهما البعض:

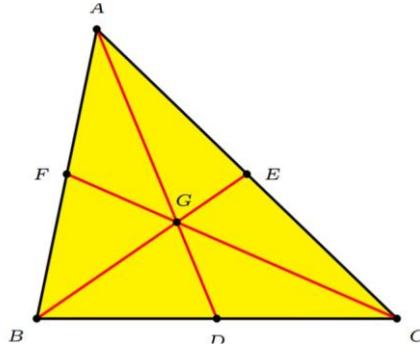
$$\Rightarrow PF = PG = \frac{1}{2} PC$$

$$PE = PH = \frac{1}{2}PB$$

وبالتالي تحقق المطلوب.

الاثبات الثاني بتطبيق نظرية سيفيا

في المثلث ABC المستقيمت CF , BE, AD متوسطات تنصف الأضلاع AB , CA, BC عند النقاط F, E, D على الترتيب



المتوسطات و مركز الثقل .

لكي تتقاطع المتوسطات في نقطة واحدة لا بد من أن يتحقق :

$$\frac{CE}{EA} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

نلاحظ أن النقطة F منتصف AB

ومنه

$$AF = FB$$

ومنه

$$\frac{AF}{FB} = 1$$

كذلك الأمر مع النقطتين E, D منتصف CA, BC على الترتيب

ومنه

$$\frac{CE}{EA} = 1$$

$$\frac{BD}{DC} = 1$$

من الواضح أن

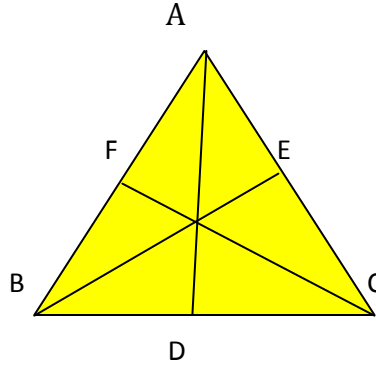
$$\frac{CE}{EA} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{AF}{FB} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

و بالتالي فإن المتوسطات AD , BE , CF تلتقي في نقطة واحدة G .

وفي الأخير نلاحظ الفرق الظاهر بين الإثباتين , حيث أن الإثبات بتطبيق نظرية سيفا اقل تعقيدا و الأسهل بينهما .

2.6.I . تقاطع منصفات الزوايا

تلتقي منصفات الزوايا في نقطة واحدة , هذه النقطة مركز الدائرة الداخلية التي تمس أضلاع المثلث .



لكي تتقاطع منصفات الزوايا في نقطة واحدة لابد أن يتحقق :

$$\frac{CE}{EA} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

باستخدام مبرهنة منصف الزاوية ينتج لنا

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB}$$

ومنه

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = \frac{AC}{BC} \times \frac{AB}{AC} \times \frac{BC}{AB} = 1$$

ولهذا فإن منصفات الزوايا تلتقي في نقطة واحدة .

مبرهنة منصف الزاوية

منصف الزاوية في المثلث يقسم الضلع المقابل الى قسمين النسبة بينهما تساوي النسبة بين الاضلاع التي تحصر الزاوية .

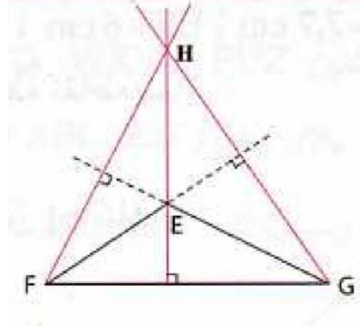
I.6.3. تقاطع الارتفاعات

تلتقي ارتفاعات المثلث في نقطة واحدة تعرف بملتقى الارتفاعات أو المركز تعامد هذا المثلث .

ملاحظة

إذا كان لمثلث زاوية منفرجة فإن نقطة تلاقي ارتفاعاته تقع خارج المثلث .

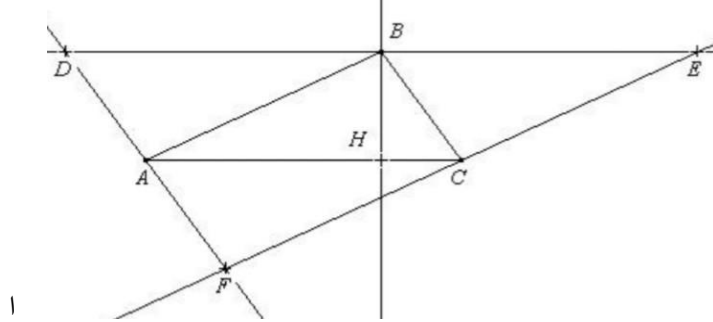
مثل ما هو مبين في الشكل التالي :



الإثبات :

ولكي نوضح قوة نظرية سيفاسنقارن بين اثباتان الأول بدون تطبيق سيفا والثاني بتطبيقها .

لدينا الشكل التالي :



المثلث ABC حيث تحقق المستقيمات التالي

$$. (DE) // (AC) , (EF) // (AB) , (DF) // (BC)$$

. و (BH) ارتفاع المثلث ABC .

في الأول سنثبت أن النقطة B منتصف الضلع ED للمثلث DEF

لدينا DBCA , BECA متوازي أضلاع لان كل ضلعين متوازيين مع بعضهما البعض, ونعلم أن من خصائص متوازي

الأضلاع , الأضلاع المتوازية لها نفس الطول .

إذن (BD), (BE) متوازية مع المستقيم (AC) ومنه النقط B,D,E على استقامة واحدة و طول الضلعين BD ,BE متساويين لان كل منهما يساوي طول الضلع AC وهذا طبقا لخصائص متوازي الإضلاع .

ومنه نستنتج أن النقطة B منتصف (DE) .

ثانيا سنثبت أن (BH) محور للمستقيم [DE] .

النقطة B منتصف (DE) ومن الشكل الهندسي لدينا :

$$(BH) \perp (AC) \text{ و } (AC) \parallel (DE)$$

إذن BH عمودي على DE في المنتصف أي انه محور ل DE .

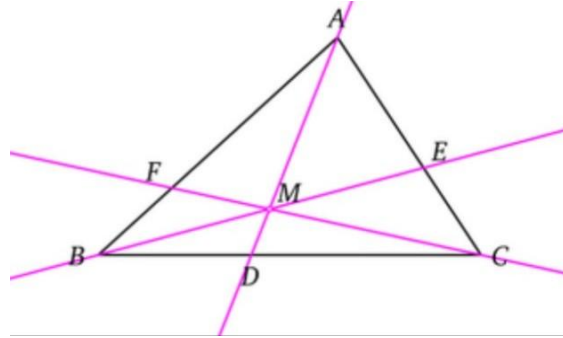
بنفس الطريقة نثبت أن الارتفاعات الأخرى في المثلث ABC هي محاور في المثلث DEF .

في الأخير نستنتج أن الارتفاعات الثلاثة للمثلث ABC هي ثلاث محاور للمثلث DEF ,

حيث أن المحاور الثلاثة في المثلث DEF متقاطعة, ومنه فان الارتفاعات الثلاث للمثلث ABC متقاطعة أيضا .

الإثبات الثاني بتطبيق نظرية سيفيا

في المثلث ABC : AD , BE , CF ارتفاعات أقدمها D , E , F على الترتيب .



نقطة تقاطع الارتفاعات في المثلث تسمى المركز القائم

لكي تتقاطع ارتفاعات المثلث في نقطة واحدة لا بد ان يتحقق:

$$\frac{CE}{EA} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

المثلثان AFM, CDM متشابهان (زاويتان قائمتان وزاويتان متقابلتان بالرأس) ومن التشابه ينتج

$$\frac{AF}{DC} = \frac{AM}{CM}$$

أيضا المثلثان BFM, CEM متشابهان وكذلك المثلثان BDM, AEM متشابهان (لان لكل منهما

زاويتان قائمتان وزاويتان متقابلتان بالرأس) .

ومن التشابه ينتج

$$\frac{CE}{FB} = \frac{CM}{BM}$$

$$\frac{BD}{EA} = \frac{BM}{AM}$$

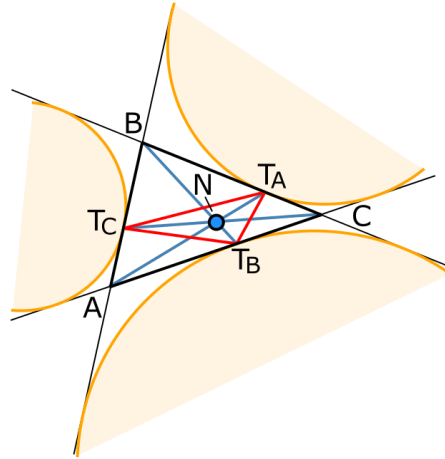
$$\frac{CE}{EA} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{AF}{FB} = \frac{AF}{DC} \times \frac{BD}{EA} \times \frac{CE}{FB} = \frac{AM}{CM} \times \frac{BM}{AM} \times \frac{CM}{BM} = 1$$

و بهذا تلتقي ارتفاعات المثلث في نقطة واحدة M .

وفي الأخير نرى أن الإثبات الثاني باستخدام سيفا أسهل بكثير من الأول.

7.1 أمثلة

مثال 1: نقطة Nagel



نقطة ناجل هي نقطة موجودة في أي مثلث. نعتبر المثلث ABC بحيث

$$|AB| = c \quad \text{و} \quad |CA| = b \quad \text{و} \quad |BC| = a$$

لتكن نقاط T_B , T_A , T_C هي نقاط تتقاطع فيها الدائرة الخارجية C مع المستقيم (AB) و الدائرة الخارجية

A مع المستقيم (BC) و الدائرة الخارجية B مع المستقيم (CA) على الترتيب .

نذكر أن هذه الدوائر هي الدوائر التي مركزها نقطة تلاقي منصفات زاويتين خارجيتين للمثلث و زاوية داخلية.

تتقاطع المستقيمت AT_A , BT_B , CT_C في النقطة N (نقطة ناجل).

دعنا نثبت أن :

$$\frac{BT_A}{T_{AC}} \times \frac{CT_B}{T_{BA}} \times \frac{AT_C}{T_{CB}} = 1$$

$$AC + AT_C = S \quad \text{لدينا :}$$

$$AC + T_A C = S$$

$$AT_C = CT_A \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{AT_C}{CT_A} = 1 \quad (1)$$

$$CB + BT_C = S \quad \text{لدينا كذلك}$$

$$CB + CT_B = S$$

$$\frac{CT_B}{T_{CB}} = 1 \quad (2) \quad \text{ومنه}$$

وبنفس الطريقة نجد

$$\frac{BT_A}{T_{BA}} = 1 \quad (3)$$

بضرب المعادلات طرفاً بطرف نجد المعادلة التالية :

$$\frac{BT_A}{T_{AC}} \times \frac{CT_B}{T_{BA}} \times \frac{AT_C}{T_{CB}} = 1$$

سميت نقطة ناجل نسبة للعالم الألماني كريستيان هاينريش فون ناجيل التي دونها في كتابه سنة 1836

مثال 2 : نقطة Lemoine

سنعرف أولاً symédianes المثلث : هو المستقيم النظير للمتوسط بالنسبة لمنصف الزاوية .

Les symédianes (اللون الأحمر) هم المستقيمت النظرية للمتوسطات (باللون الأخضر) بالنسبة لمنصفات الزوايا

(اللون الأزرق المتقطع). تتقاطع symédianes المثلث في نقطة واحدة تعرف بنقطة Lemoine .

يمكن إثبات تقاطعها باستعمال نظرية شيفا بصيغتها المثلثية: وعليه فان هذه المستقيمت تتقاطع في نقطة واحدة

إذا فقط إذا

$$\frac{\sin \widehat{N_C CB}}{\sin \widehat{N_C CA}} \times \frac{\sin \widehat{N_A AC}}{\sin \widehat{N_A AB}} \times \frac{\sin \widehat{N_B BA}}{\sin \widehat{N_B BC}} = 1 \quad (A)$$

وَم أن ال symédianes هي المستقيمت المتناظرة مع المتوسطات بالنسبة للمنصفات , فان الزوايا التالية متساوية:

$$\widehat{N_cCB} = \widehat{M_cCA}, \quad \widehat{N_cCA} = \widehat{M_cCB}$$

ونفس الأمر مع الزوايا الأربعة الأخرى:

$$\widehat{N_AAC} = \widehat{M_AAB}, \quad \widehat{N_AAB} = \widehat{M_AAC}$$

و

$$\widehat{N_BBA} = \widehat{M_BBC}, \quad \widehat{N_BAB} = \widehat{M_BBA}$$

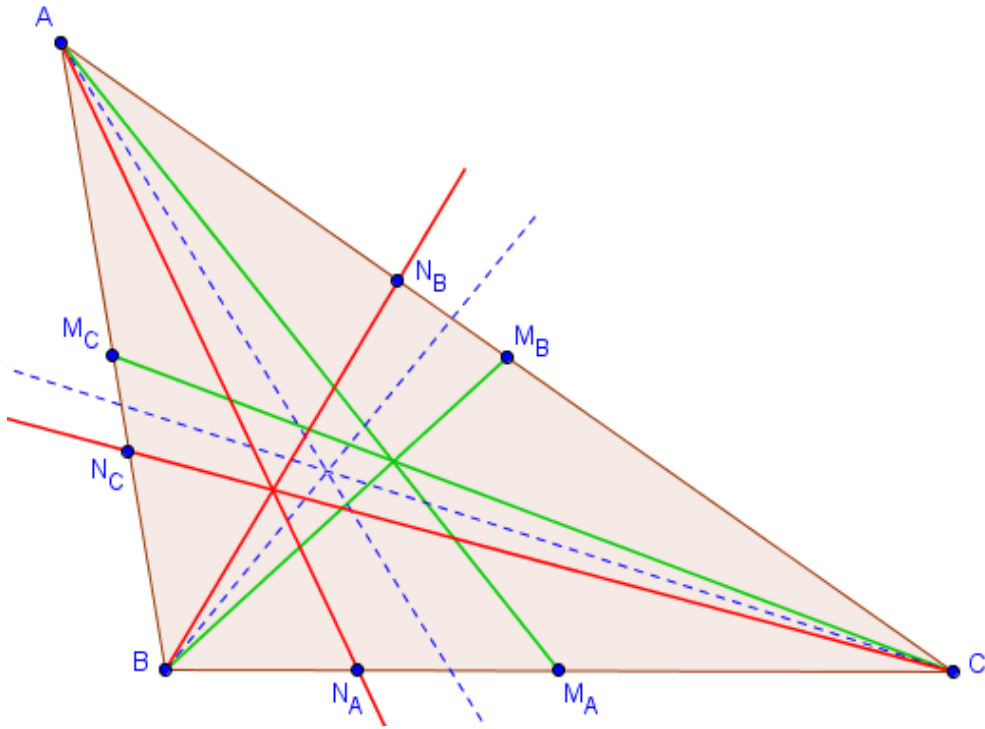
وبالتعويض في العلاقة (A) نحصل على العلاقة

$$\frac{\sin \widehat{M_cCA}}{\sin \widehat{M_cCB}} \times \frac{\sin \widehat{M_AAB}}{\sin \widehat{M_AAC}} \times \frac{\sin \widehat{M_BBC}}{\sin \widehat{M_BBA}}$$

وهي علاقة شيفا بصيغتها المثلثية بالنسبة لتقاطع المتوسطات اذن

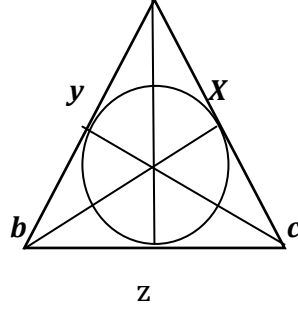
$$\frac{\sin \widehat{M_cCA}}{\sin \widehat{M_cCB}} \times \frac{\sin \widehat{M_AAB}}{\sin \widehat{M_AAC}} \times \frac{\sin \widehat{M_BBC}}{\sin \widehat{M_BBA}} = 1.$$

وهذا يثبت تقاطع هذه المستقيمات.



مثال 3 نقطة Gergonne

لدينا الشكل المقابل



الدائرة المحاطة بالمثلث مركزها نقاط تقاطع المنصفات حيث x و y و z نقاط تماس هذه الدائرة مع الاضلاع bc, ab, ac

ومنه فان المستقيمات az, xb, cy تتقاطع في نقطة واحدة نقطة Gergonne ويمكن إثباتها باستخدام نظرية سيفي .

لدينا $ax = ay$ و $cx = cz$ و $bz = by$ ومنه وبتطبيق نظرية سيفي على المثلث

$$\frac{bz}{zc} \times \frac{cx}{xa} \times \frac{ay}{yb} = 1$$

وبالتالي محققة .

II .مبرهنة منيلاوس Théorème de Menelaus

1.II .مدخل

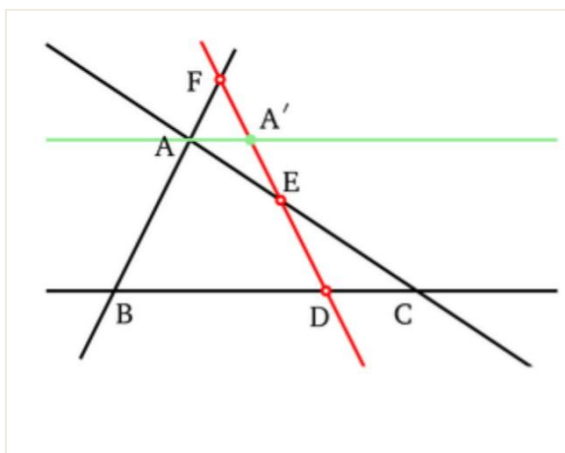
مبرهنة منيلاوس Théorème de Menelaus هي مبرهنة تم صياغتها من قبل منيلاوس الاسكندري تتعلق بمثلثات في المستوي تعد من أهم النظريات المفيدة في إنشاء و توطؤ النقاط على التوالي. وظفها في دراسته لعلم الفلك , و له العديد من المؤلفات كما اشتهر بالنظرية التي حملت اسمه.

2.II .النظرية

إذا كانت النقاط C, A, B تشكل مثلثا ABC و كانت النقاط F, E, D تقع على المستقيمات $(AB), (AC), (BC)$.

النقاط الثلاثة D, E, F تقع على مستقيم واحد إذا و فقط تحققت العلاقة

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

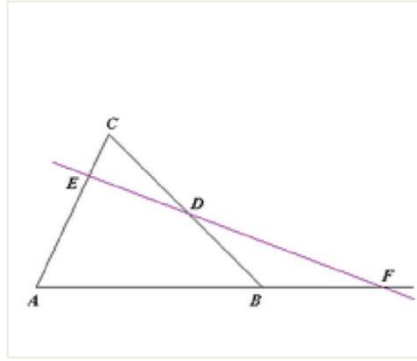


3.II. الإثبات

هناك حالتين , بحسب وضعية المستقيم DEF داخل أو خارج المثلث ABC.

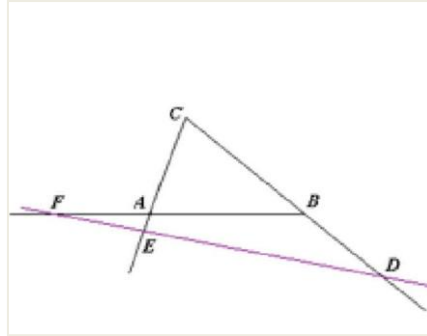
• الحالة الأولى

يمر المستقيم DEF داخل المثلث ABC



• الحالة الثانية

المستقيم EDF بالكامل خارج المثلث ABC



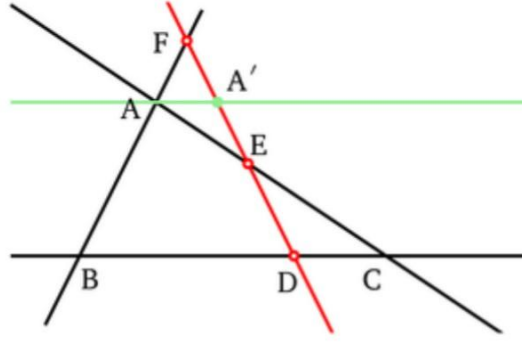
الإثبات الأول

\hat{A} هي نقطة تنتمي إلى المستقيم (FD) حيث المستقيم (BD) موازي للمستقيم ($\hat{A}\hat{A}$) وبتطبيق نظرية طالس

على الشكل المقابل :

مير هنة طالس

المستقيمت المتوازية تحدد على اي قاطعان لها قطعا متقابلة متناسبة في اطوالها .



$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$$

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{AA}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}$$

ومنہ نستنتج

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{AA}} \times \frac{\overline{AA'}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} \times \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$$

وهذا ما يكافئ

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

بالمقابل

لنكن النقاط الثلاثة F, E, D تنتمي للمستقيمات (AB), (AC), (BC) تقع على التوالي

حيث تحقق :

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

لنفترض أن المستقيمين (EF), (BC) متوازيان

بتطبيق نظرية طالس على المثلث FBC

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$$

بنظر إلى الفرضية فهذا يعني:

$$\overline{DB} = \overline{DC}$$

وبالتالي

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = 1$$

ومنه نستنتج أن $B=C$ وهذا مستحيل .

لنكن لدينا نقطة تقاطع للمستقيمين (BC) , (EF) نسميها X

لدينا

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} \times \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1$$

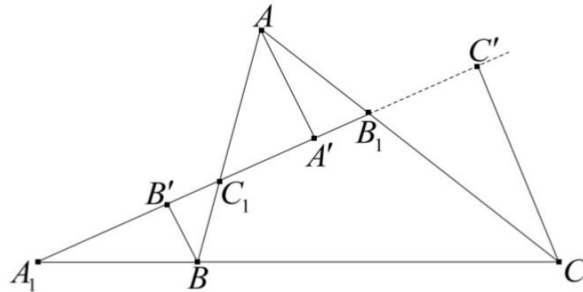
وفقا للفرضية $X = D$

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}$$

مما يعني أن D, E, F تقع على استقامة واحدة

الإثبات الثاني

وهناك إثبات آخر.



بتطبيق نظرية منلاوس على المثلث ABC سنجد

$$\frac{A_1B}{A_1C} \times \frac{B_1C}{B_1A} \times \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

لإثبات ان النقط A_1 و B_1 و C_1 تقع على خط واحد

في البداية ان المستقيمات (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) عمودية على المستقيم الذي يشمل النقط الثلاث

$$(A_1B_1C_1) \quad A_1 \text{ و } B_1 \text{ و } C_1$$

إذن المستقيمات (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) عمودية على المستقيم (A_1B_1)

وبالتالي تحقق المعادلات التالية

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B\hat{B}}{C\hat{C}}$$

$$\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C\hat{C}}{A\hat{A}}$$

$$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{A\hat{A}}{B\hat{B}}$$

بضرب المعادلات طرفاً بطرف نجد

$$\frac{A_1B}{A_1C} \times \frac{B_1C}{B_1A} \times \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

و هو المطلوب

بالمقابل

لدينا

$$\frac{A_1B}{A_1C} \times \frac{B_1C}{B_1A} \times \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

نفرض أن المستقيمان (B_1C_1) و (BC) يتقاطعان في النقطة \hat{A}

إذن

$$\frac{\hat{A}B}{\hat{A}C} \times \frac{B_1C}{B_1A} \times \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

ومنه نستنتج أن

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{\hat{A}B}{\hat{A}C}$$

النقطة \hat{A} في المستقيم (BC) تتطابق مع النقطة A_1

وبالتالي النقط A_1 و B_1 و C_1 تقع على نفس المستقيم.

4.II أمثلة

مثال 1 لإظهار مدى أهمية وقوة هذه النظرية سوف نقارن بين إثباتين لمستقيم سيمسون بتطبيق النظرية

وبدون تطبيقها .

لدينا الشكل المقابل: **مستقيم سيمسون**

ABC مثلث حيث النقطة M نقطة من الدائرة المحيطة بالمثلث ABC حيث النقاط u, v, w مواقع عمودية

على الأضلاع AB, AC, BC على التوالي ومنه سنثبت أن النقاط U, V, W تقع على استقامة واحدة .

هذا المستقيم الذي يمر عبر النقاط U, V, W يسمى مستقيم **سيمسون**.

الإثبات بتطبيق نظرية مينلاوس

من الشكل السابق لإثبات أن النقاط W, V, U تقع على نفس المستقيم لابد من تحقيق العلاقة التالية

$$\frac{BU}{UC} \times \frac{CV}{VA} \times \frac{AW}{WB} = 1 \quad (1)$$

ولدينا باستخدام الدالة المثلثية \cos

$$\cos MBU = \frac{BU}{MB}$$

$$BU = MB \cos MBU \quad \text{ومن هنا فإن}$$

بنفس الطريقة نجد القيم الأخرى

$$UC = MC \cos MCU$$

$$CV = MC \cos MCV$$

$$VA = MA \cos MAV$$

$$AW = MA \cos MAW$$

$$WB = MC \cos MBW$$

وبتعويضها في المعادلة (1) نستنتج

$$\frac{BU}{UC} \times \frac{CV}{VA} \times \frac{AW}{WB} = \frac{MB \cos MBU}{MC \cos MCU} \times \frac{MC \cos MCV}{MA \cos MAV} \times \frac{MA \cos MAW}{MB \cos MBW}$$

ولدينا الزوايا

$$\widehat{MBU} = \widehat{MAV}$$

$$\widehat{MCV} = \widehat{MBW}$$

$$\widehat{MAW} = \widehat{MCU}$$

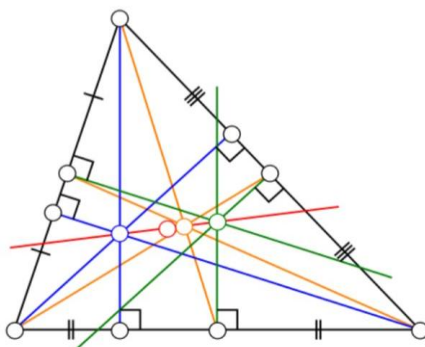
بالتعويض في المعادلة نجد

$$\frac{BU}{UC} \times \frac{CV}{VA} \times \frac{AW}{WB} = 1$$

وهو المطلوب .

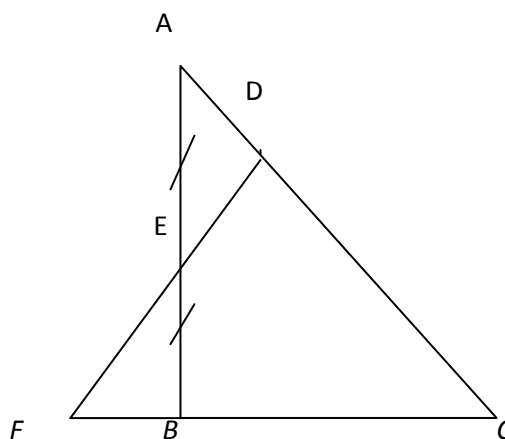
مثال 2

مستقيم اويلر



اثبت العالم الرياضي السويسري ليونارد اولر انه في أي مثلث غير متساوي الأضلاع , فان نقطة تلاقي المحاور ونقطة تلاقي المتوسطات ونقطة تلاقي الارتفاعات تنتمي إلى نفس المستقيم الذي سمي باسمه. في الشكل أعلاه يظهر مستقيم اويلر باللون الأحمر , حيث يمر من نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث (لون ازرق) و مركز الدائرة المحيطة بالمثلث (اللون الأخضر) و النقطة المركزية للمثلث (لون برتقالي) ..

تطبيق



(ABC) مثلث حيث

$$AB= 4\text{cm} \quad BC=3\text{cm} \quad B=^{\circ}90$$

D نقطة من المستقيم AC حيث $AD = 1\text{cm}$ و E منتصف AB

المستقيم (DE) يقطع المستقيم (CB) في F اوجد BF

نعتبر المثلث ΦABC حيث E, F, D تقع على المستقيمات (AC) (BC) (AB) على التوالي

وباستعمال مير هنة منلاوس نجد

$$\frac{AE}{EB} \times \frac{BF}{FC} \times \frac{CD}{DA} = 1 \quad *$$

$$AE=EB=2 \quad \text{لدينا}$$

$$DE=1$$

$$FC=FB+BC = BF+3$$

باستعمال خاصية فيثاغورس نجد

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{BC^2 + AB^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \end{aligned}$$

$$CD= AC-AD \quad \text{ولدينا}$$

$$= 5-1$$

$$=4$$

بالتعويض في * نجد

$$\frac{2}{2} \times \frac{BF}{BF+3} \times \frac{4}{1} = 1$$

$$CD= AC-AD \quad \text{ولدينا}$$

$$= 5-1$$

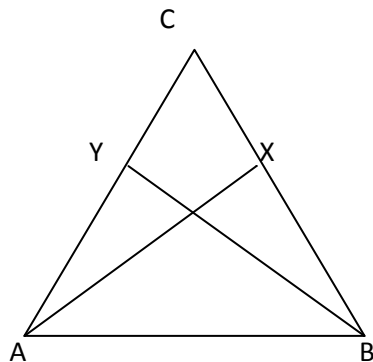
$$=4$$

بالتعويض في * نجد

$$\frac{2}{2} \times \frac{BF}{BF+3} \times \frac{4}{1} = 1$$

خاصية فيثاغورس

إذا كان مثلث قائما فان مربع طول وتره يساوي مجموع مربعي طولي ضلعيه الاخرين



ليكن المثلث ABC ونقطتان X و Y تقعان على المستقيمان (BC) و (AC) على الترتيب

ونقطة تقاطع المستقيمين (AX) , (BY) هي النقطة R

- باستعمال $\frac{AY}{YC} = P$ و $\frac{AR}{RX} = Q$ حيث $0 < P < Q$

- عبر عن $\frac{BX}{XC}$

نعتبر المثلث AXC وعليه، فإن النقط B, R, Y تقع على استقامة واحدة

وباستعمال نظرية منلاوس نجد

$$\frac{AR}{RX} \times \frac{XB}{BC} \times \frac{CY}{YA} = 1$$

$$\frac{BC}{XC} = \frac{AR}{RX} \times \frac{CY}{YA} = \frac{Q}{P}$$

وبالتالي

$$\frac{BX+XC}{BX} = \frac{Q}{P}$$

وهذا يعني

$$1 + \frac{XC}{BX} = \frac{Q}{P}$$

وبالتالي

$$\Rightarrow \frac{XC}{BX} = \frac{Q}{P} - 1$$

$$= \frac{Q-P}{P}$$

ومنه ينتج

$$\frac{BX}{XC} = \frac{P}{Q-P}$$

III. ملاحظة

كملاحظة أخيرة, نذكر أن النظريتين مكافئتين لبعضهما البعض. حيث أن نظرية منلاوس تتعلق بتقرير يخص النقط, بينما نظرية شيفا محتواها يخص المستقيمات.

الهندسة الإسقاطية (Projective Geometry) هي هندسة تعتمد على عدد قليل من المسلمات البسيطة الخاصة بالنقط و المستقيمات, وبعبارة أدق تعتمد على البديهيات التالية

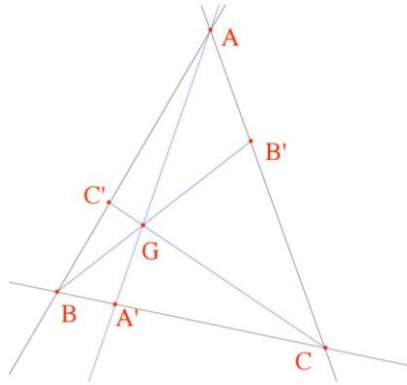
_ كل مستقيمين يتقاطعان في نقطة واحدة.

_ كل نقطتين يعرفان مستقيما واحدا.

_ لا يوجد توازي في الهندسة الإسقاطية.

هناك مبدأ هام في هذه الهندسة يسمى مبدأ الازدواجية مفاده ان كل نتيجة صحيحة تتعلق بالنقاط يكون لديها ما يقابلها من نتيجة خاصة بالمستقيمات.

و من هنا نستنتج ان مينلاوس و شيفا متكافئتين.



لدينا المثلث ABC حيث تقع النقط \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} على المستقيمات (AB) و (AC) و (BC) بالترتيب

ومن المستقيمات الشيفات $\hat{A}\hat{A}$, $\hat{B}\hat{B}$, $\hat{C}\hat{C}$ تتقاطع في نقطة واحدة G وحسب شيفا لدينا

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = 1$$

بتطبيق نظرية مينلاوس مرتين

المرّة الأولى على المثلث $AB\hat{A}$ حيث تقع النقاط الثلاثة \hat{C} و C و G على استقامة واحدة في المستقيم $(\hat{C}\hat{C})$

ومنّه المعادلة التالية

$$\frac{\overline{\hat{C}A}}{\overline{CB}} \times \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} \times \frac{\overline{GA}}{\overline{GA}} = 1$$

المرّة الثانية على المثلث $CA\hat{A}$ حيث تقع النقاط الثلاثة B و G و \hat{B} على استقامة واحدة في المستقيم $(\hat{B}\hat{B})$

ومنّه المعادلة التالية

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \times \frac{\overline{GA}}{\overline{GA}} \times \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = 1$$

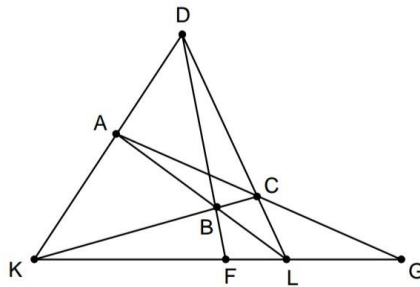
بضرب المعادلتين نستنتج

$$\frac{\overline{\hat{C}A}}{\overline{CB}} \times \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} \times \frac{\overline{GA}}{\overline{GA}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \times \frac{\overline{GA}}{\overline{GA}} \times \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$$

$$= 1$$

منه فهي محققة

مثال



في الشكل المقابل الرباعي المحدب $ABCD$

المستقيم DA و CB يتقاطعان في النقطة k

المستقيم AB و DC يتقاطعان في النقطة L

المستقيم AC و kI يتقاطعان في النقطة G

المستقيم DB و KL يتقاطعان في النقطة F

$$\frac{KG}{GL} = \frac{KF}{FL} \quad \text{اثبت ان}$$

بتطبيق نظرية سيفال على المثلث DKL حيث B هي نقطة تقاطع الشيفيات ومنه

$$\frac{DA}{AK} \times \frac{KF}{FL} \times \frac{LC}{CD} = 1 \quad (1)$$

و بتطبيق نظرية منبراس على المثلث DKL حيث المستقيم ACG ومنه

$$\frac{DA}{AK} \times \frac{KG}{GL} \times \frac{LC}{CD} = 1 \quad (2)$$

من (1) و (2) فإن

$$\frac{KG}{GL} = \frac{KF}{FL}$$

الخاتمة

لقد تطرقنا لمبرهنتين هامتين في الهندسة الاقليدية ,شيفا ومنيلاوس حيث يعدان من أهم النظريات القديمة التي مازالت تطبق إلى اليوم في علم الهندسة ويعتبران من الخواص المهمة للمثلثات .
تحدثنا عنهما بالتفصيل وعن الاثباتات الواردة و الاكثر استعمالا لهما وضحنا ذلك بأمثلة وتطبيقات و تحدثنا عن دورهما و اسهامهما في تخطي الكثير من الصعوبات في الهندسة الاقليدية .
ولا ينحصر استخدام هاتين النظريتين في علم الرياضيات بل يمتد استخدامهما إلى علوم الفيزياء والفلك
سيفا ومنيلاوس جزء بسيط من هندسة المثلث , فهناك العديد من النظريات البالغة الأهمية التي لم نتطرق لها و قد تكون موضوعات أخرى لعديد من مشاريع التخرج لطلبة آخرين في موضوع الهندسة الاقليدية

قائمة المراجع

1. J. Benitez . "A unified Proof of Ceva and Menelaus ,Theorems using Projective Geometry ". journal of Geometry and Graphics 11.1 (2007) 39-44.
2. A. S.Posamentier, C. T.Salkind, Challenging Problems in Geometry, Dover. Second revised edition (1996) .
3. H. Robin Geometry : Euclid and beyond , Springer, 2000.
4. J .Silvester .Geometry : Ancient et Modern .Oxford University Press, 2001.
5. J. Silvester ."ceva =(Menelaus) ", The Math. Gazette 84.500(july2000) , pp 286-271.
6. La droite de Simson ; online at mathwbs.com.
7. Nagel Point, <http://mathworld.wolfram.com/NagelPoint.html>.
8. Notions sur le point de Nagel , mathworld.wolfram.com.