



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Spécialité: Mathématiques

Option : Géométrie des espaces de Banach et analyse harmonique

Par

MAILBI Abedarrahrmane

Sujet

**Les opérateurs positifs sur quelque
espace de Banach ordonnés**

Soutenu le : 19 / 06 / 2014

devant le jury composé de :

SAADI .Khalil	M.C.A	Président	Univ M'sila
TIAIBA .Abdelmoumen	M.C.A	Rapporteur	Univ M'sila
TALLAB .Abdelhamid	M.A.A	Examineur	Univ M'sila
BLAADA. Abdelaziz	M.A.B	Examineur	Univ M'sila

Promotion : 2013/2014

Table des matières

Résumé

Nous étudions dans notre travail premièrement les opérateurs linéaires positifs en générale où on va donner une caractérisation a ce type d'opérateurs puis dans un second travail on va voir dans quelle mesure certains résultats classiques concernant les opérateurs T d'un espace $C(K)$ dans un espace de Banach, ou à partir d'un espace de Banach dans l'espace L^1 , peuvent être précisé, lorsque les espaces de Banach concernés sont ordonné par un cône normal dans le premier cas, par une générateur de cône convexe bien fermé dans le second cas lorsque les opérateurs T sont positifs.

Mots Clés : Les espaces $C(K)$ et L^1 , opérateurs p -sommant, espace de Banach ordonnées. opérateurs positifs.

1.1.1. L'opérateur adjoint	7
1.2. Les opérateurs p -sommants	9
1.3. Espaces de Riesz	11
1.4. La propriété de la décomposition de Riesz	13
1.4.1. Idéaux et bandes	15
1.4.2. L'espace de Riesz archimédien et mode de convergence	16
1.5. Espace de Riesz borné	17
2. Opérateurs positives	18
2.1. Les opérateurs dans les espaces de Riesz	23
2.1.1. Opérateurs linéaires et homomorphismes de Riesz	24
2.1.2. Opérateurs réguliers	27

Table des matières	
Notations	1
Introduction	2
1 Préliminaires et l'espace de Riesz normé	4
1.0.1 L'espaces de Banach	4
1.0.2 L'espaces $\mathcal{L}(E, F)$	4
1.0.3 L'espaces L^p	5
1.0.4 Opérateurs nucléaires	5
1.1 L'espace $C(K)$	6
1.1.1 L'opérateur adjoint	7
1.2 Les opérateurs p -sommants	8
1.3 Espaces de Riesz	11
1.4 La propriété de la décomposition de Riesz	13
1.4.1 Idéaux et bandes	14
1.4.2 L'espace de Riesz archimédien et mode de convergence	16
1.5 Espace de Riesz normé	17
2 Opérateurs positives	18
2.1 Les opérateurs dans les espaces de Riesz	18
2.1.1 Opérateurs linéaires et homomorphismes de Riesz	21
2.1.2 Opérateurs réguliers	27

2.1.3	La projection	27
2.1.4	Les opérateurs linéaires positifs dans $\mathbb{R}$ (les fonctions):	29
2.1.5	Les opérateurs sous-linéaires	30
2.2	Extension des opérateurs linéaires	32
3	Opérateurs positifs de $C(K)$ vers B et L^1	37
3.1	Des résultats sur les espaces de Banach	37
3.2	Opérateur positive définit sur l'espace $C(K)$	40
3.3	mesure conique:	42
3.4	Opérateurs positifs avec les valeurs dans L^1	43

$L_b(E, F)$: L'espace des opérateurs linéaires bornés pour l'ordre $T : E \rightarrow F$.

$L^+(E, F)$: L'espace des opérateurs positifs.

$C(E, F)$: L'espace des opérateurs réguliers continus.

$SL(E, F)$: Espace d'opérateurs sous-linéaires.

$\Pi_p(X, Y)$: Espace des opérateurs p -sommeux.

(X) : $\inf \left\{ p : \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq G \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \right\}$

$\bar{f}(X)$: est le conjugué de $f(X)$, c'est-à-dire $\bar{f}(x) = f(x^*) = 1$.

Introduction

Dans ce travail on ait initialement entrain de faire une étude fondamentale sur la classe des opérateurs linéaires positifs. La dont on citera une identification algébrique a ce type d'opérateurs aussi quelques résultats concernant les opérateurs positifs entre les espaces de Riesz. Il est intéressant de dire qu'on va donner le théorème de Hain.Banch pour les opérateurs positifs.

Dans un second temps nous examinons dans quelle mesure certains théorèmes classiques concernant les opérateurs entre espace de Banach peut être précisé quand l'espace de Banach impliqués sont commandés ou bien ordonné par des cônes convexes appropriées, et lorsque les opérateurs sont positifs. Rappelons le théorème suivant de B.Maurey ([12] proposition 3).

Théorème 3.1.1 soit B un espace de Banach ayant cotype $q \geq 2$; pour tout espace compact séparé K , une application continue $T : C(K) \rightarrow B$ et tout $r > q$, alors T est r -sommant.

Nous allons établir un résultat analogue du **Théorème 3.1.1** en supposant que B est ordonné par un cône normal et que T est positif, nous allons donner aux applications de mesures coniques . En effet , la preuve de notre théorème (3.2.1) est tout à fait différent de ceux du **Théorème 3.1.1** donnée dans ([12]), on va examiner le cas des opérateurs positifs à partir d'un espace de Banach B , ordonné par une générateur de cône convexe bien fermé $Y(B = A - A)$ à un espace L^1 et nous donnerons une application pour commander l' space de Banach des fonctions mesurables . le réglage de cônes normaux est plus générale que celle des treillis de Banach, en effet , même si E et F sont deux treillis de Banach, alors le cône de tous les opérateurs positifs de E à F n'est pas nécessaire un réseau, mais il est en tout cas un cône normal. Le mémoire est divisé en trois chapitres

Dans le premier chapitre on commencé naturellement comme tout travail scientifique par ce chapitre fondamental pour faciliter la littérature de ce mémoire. Là dont on va citer le max possible des terminologies " définitions, propositions, théorèmes et résultats" utiles pour la suite de notre travail. Par exemple on va donner les définitions et les résultats concernant les espaces de Riesz.

Dans le second chapitre, le but est de faire un survol un peu approfondi sur les opérateurs linéaires positifs où on va donner la définition de ce type d'opérateurs et leur construction algébrique, on peut dire que la précision a été sur ce type d'opérateur entre les espaces de Riesz. La plus belle citation dans ce chapitre est le théorème de Hahn-Banach pour ce classe d'applications, à la fin on citera le concept des opérateurs sous linéaires symétriques comme un exemple des applications non linéaires positifs.

Dans le dernier chapitre, nous étudions dans quelle mesure certains résultats classiques concernant les opérateurs T d'un espace $C(K)$ dans un espace de Banach, ou à partir d'un espace de Banach dans l'espace L^1 , peuvent être précisés, lorsque les espaces de Banach concernés sont ordonnés par un cône normal dans le premier cas, par un générateur de cône convexe bien fermé dans le second cas lorsque les opérateurs T sont positifs.

On commence naturellement par le chapitre fondamental pour faciliter la lecture de ce livre. On va citer le maximum des "définitions, propositions, théorèmes et lemmes" utiles pour le reste de notre travail. Spécialement on a bien cité les espaces de Banach normés comme que l'outil important de notre travail. Pour plus de détail voir [14, 15, 16].

1.0.1 Les espaces de Banach

Définition 1.0.1 Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace normé, on dit que X est un Banach si $\|\cdot\|_X$ est complet.

Définition 1.0.2 Un espace topologique E est dit Hausdorff si pour tout $x, y \in E$, $x \neq y$ il existe des voisinages disjoints de x et y .

1.0.2 Les espaces $\mathcal{L}(E, F)$

voir [23]

Définition 1.0.3 Soient E et F deux E -espaces vectoriels. Une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire si pour tout $\lambda \in K$ et tout $(x, y) \in E^2$, on a $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Bibliographie

- [1] A. PIETSCH. *Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen*. Studia Math. **28**, 333-353 (1967), 1-103.
- [2] CHARALAM BOS, D. ALIPRANTIS, OWEN BURKINSHAW. *Positive Operators*.
- [3] D. ACHOUR AND L. MEZRAG. *Little Grothendieck's theorem for sublinear operators*. J. Math. Anal. Appl. **296** (2004), 541-552.
- [4] D. ACHOUR, L. MEZRAG. *On the Cohen strongly p -summing multilinear operators*. J. Math. Anal. Appl. **327** (2007) 550-563
- [5] G. BUSKES. *Five theorems in theory of Riesz space*. 1-8.
- [6] HASKELL P. ROSENTHAL. *The Banach spaces $C(K)$* . The University of Texas. Austin, TX 78712-1082, USA.
- [7] H. H. SCHAEFFER. *Banach lattices and positive operators*, Springer-Verlag, Berlin and New York, (1974).
- [8] J. LINDENSTRAUSS AND L. TZAFRIRI. *Classical Banach Spaces, I and II*. Springer-Verlag, Berlin (1996).
- [9] J. S. COHEN, *Absolutely p -summing, p -nuclear operators and their conjugates*. Math. Ann. **201** (1973), 177-200.
- [10] J. DIESTEL, H. JARCHOW, A. TONGE, *Absolutely summing operators*. Cambridge University Press, (1995).

- [11] L. MEZRAG AND A. TIAIBA. *On the sublinear operators factoring through L_q* . Int. J. Math. Math. Sci., **50** (2004), 2695-2704.
- [12] MAUERY, B. *Une nouvelle caractérisation des applicaion (p, q) sommants, ecole polytechnique Plaiseu, Séminaire Maurey-schwartz 1973/74 EXP XII*.
- [13] N. TH. VAROPOULOS. *Algèbre de Banach, Algèbre de Groupes*.
- [14] O. BLASCO. *A class of operators from a Banach lattice into a Banach space*. Collect. Math. **37** (1986), 13-22.
- [15] O. BLASCO. *Positive p -summing operators from L_p -spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. **31** (1988), 275-280.
- [16] O. BLASCO. *Positive p -summing operators, vector measures and tensor products*. Proc. Edinburgh. Math. Soc. **100** (1987), 179-184.
- [17] P. MEYER-NIEBERG. *Banach lattices*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, (1991).
- [18] RICHARD BECKER. *CONVEX CONES, TENSOR PRODUCTS, AND OPERATORS*. 75014 Paris, France. Received 18 July 2006.
- [19] R. BECKER. *On positive operators on some ordered Banach space. positivity (2005) 9: 249-257*.
- [20] S. S. KUTATELADZE. *On difference of Riesz homomorphisms*. arXiv math V. 2, (2005), 1-2.
- [21] THIRRY GALLAY. *Theorie de la mesure et de l'intégration*.
- [22] Y. A. ABRAMOVICH & A. W. WICKSTEAD. *When each continuous operator is regular, II*. ArXiv math V. 1, (1996) 1-19.
- [23] YVES SONNTAG. *Topologie et analyse fonctionnelle*. Univ de Provence. ellipses