

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE : TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE
N° :



DOMAINE : SCIENCES ET
TECHNOLOGIES
FILIERE : GENIE MECANIQUE
OPTION : CONSTRUCTION
MECANIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique

Par : MAKHLOUF HEDDA

Intitulé

**Etude Vibratoire d'un ventilateur
de tirage FAN 280 par method analytique**

Soutenu le : 14-06-2018

Soutenu devant le jury composé de:

ZAOUI.M	MCA	président
MENASRI .N	MCA	Encadreur
FARSI C	MCB	Examineur
AMROUNE. S	MCA	Examineur

Année universitaire : 2017 / 2018

Remerciements

Au nom d'Allah le tout - Miséricordieux, le très -

Miséricordieux

*La louange est à Allah l'unique et la paix et le salut
sur celui qui n'a point de messager après lui et sur sa
famille, ses compagnons et tous ceux qui suivent son
chemin*

Jusqu'à un jour de la résurrection

*Tout d'abord on remercie le Dieu le tout puissant de la
bonne santé, la volonté et de la patience qu'il nous a
donné pour faire ce travail.*

*Je tiens tout particulièrement, à exprimer ma profonde
gratitude à monsieur Menasri .N docteur à l'université
de Mohammed Boudiaf m'silla pour ces conseils
précieux ainsi que pour la confiance et l'aide qu'il ma
accordé pour mener ce travail à terme*

*Je voudrais aussi remercier tous les membres de ma
famille.*

*Je tiens à remercier mes professeurs de l'option
construction qui m'ont marqué par leurs grandes
valeurs scientifiques et humaines.*

*Mes remerciements vont également tout les personnes
qui n'est pas citées et qui ont de per ou de loin participé
à la réalisation de ce travail.*

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

*Mon chère mère, pour ses sacrifices depuis qu'elle
m'a mis au
Monde.*

*Mon père, qui m'a toujours soutenu et aidé à
affronter les
Difficultés.*

*Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Mes
parentes pour leur éducatons et tout*

Lamour, et toujours à Mes amis

*Qu'ils n'ont pas cessé de me donner, à mes chers
frères, sœurs, ma*

Et toute la famille

Et à tous les profs de génie mécanique

Et

Toute la promotion 2018

Makhlouf

.Hedda

Sommaire

Remerciement	
Dédicace	
Sommaire	
Liste des Figures	

Liste Des Tableaux

Introduction générale.....	01
-----------------------------------	-----------

Chapitre I

Modélisation des systèmes des rotors

Introduction.....	06
I.1 Modélisation du rotor	06
I.1.1 Le disque	07
I.1.2 L'arbre	08
I.1.2 L'énergie cinétique	08
I.1.2.2 Energie de déformation	09
I.1.3 Paliers	11
I.1.4 Le balourd.....	13
I.2 Modèle simple.....	15
I.2.1 Description du modèle	15
I.2.2 Elément de disque.....	17
I.2.3 Elément de l'arbre.....	17
I.2.4 Paliers à roulement.....	17
I.2.5 Balourd.....	18
I.2.6 Equation du mouvement	18
I.2.7 validation du modèle.....	18
I.2.7.1 Modèle symétrique	21
I.2.7.2 Fréquences naturelles en fonction de la vitesse rotation	21

Diagramme de Campbell

Chapitre II

Modélisation par Eléments Finis

II.1 Expressions des Energies des Eléments du rotor.....	28
II.1.1 Energie de déformation d'un élément de rotor.....	29

II.1.2 Energie cinétique d'un élément de rotor	30
II.2 Formulation Matricielle	31
II.2.1 Formulation Matricielle de équations du disque	31
II.2.2 Formulation Matricielle de équations du l'arbre	32
III.2.3 Formulation Matricielle de équations de palier	39
III.2.4 Formulation Matricielle de équations de balourd	40
II.3 Exemple de Montage de matrice globales.....	40

Chapitre III

Analyse vibration du ventilateur FN280 analytiquement

III. Introduction.....	48
III.1.Description du ventilateur de tirage	48
III.2 Caractéristique technique de ventilateur	51
III.3 Principe de Fonctionnement	53
III.4.1 La conception du ventilateur FN280 par logiciel solidworks.....	53
III.4.2 La mise Equation du comportement du FN280	56
III.4.2.1 Le modèle étudié	56
III.4.2.2 Modèle symétrique	58
III.4.2.3 Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation Diagramme de Campbell.....	58
Conclusion	65
Bibliographies.	68

Liste des figures

Figure I.1 Exemple de rotor	06
Figure I.2 Repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible	08
Figure I.3 coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor	09
Figure I.4 Amortissement et raideur des paliers.....	12
Figure I.5 Répartition du balourd sur le rotor.....	13
Figure I.6 Modélisation de la répartition du balourd sur le rotor.....	13
Figure I.7 Masse de balourd.....	14
Figure I.8 Représentation des coordonnées.....	16
Figure I.9 Schématisation du modèle simple du rotor.....	19
Figure I.10 Diagramme de Campbell pour modèle simple.....	25
Figure II.1 Degrés de liberté du disque.....	30
Figure II.2 Degrés de liberté d'un élément arbre.....	33
Figure II.3 Modèle de rotor avec éléments et nœuds.....	40
Figure III .1 Diagramme du ventilateur de ciment.....	48
Figure III.2 Images du ventilateur de cimenterie de LAFARGE M'silla.....	49
Figure III.3 Dessin d'ensemble du ventilateur FN280 [12	51
Figure III.4 Conception de l'ailette.....	53
Figure III.5 Conception de la roue.....	54
Figure III.6 Conception 'assemblage de la FN 280.....	54
Figure III.7 Assemblage des éléments du ventilateur FN280.....	55
Figure III.8 Schématisation du modèle étudié.....	56
Figure III.09 Diagramme de Campbell pour modèle étudié.....	62

List des Tableaux

Tableau III.1 Les données techniques de Ventilateur [12].....	52
Tableau III.2 Le Donnée géométrique de la Ventilateur.....	52
.Tableau III.3 Les Données techniques de Moteur [12].....	52

INTRODUCTION GENERALE

Introduction Générale

Les arbres ou les rotors sont définis comme étant tout élément tournant autour d'un axe fixe. Ils constituent les pièces maîtresses des machines tournantes dont le domaine d'applications industrielles est très vaste (machines-outils, turbines, véhicules, turbocompresseurs, nucléaire, l'industrie pétrolière, etc.). Parmi leurs fonctions on peut citer la transmission de puissance ou la transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique.

L'arbre d'un rotor peut être considéré en tant qu'un corps élastique continu avec des propriétés d'inertie et de masse réparties tout le long de sa longueur surtout dans le domaine de grandes vitesses. Pour cela des types variés de vibrations apparaissent dans ce système mécanique et souvent limitent les performances et mettent en danger la sécurité d'opération.

L'analyse dynamique des corps continus en rotation s'impose donc car la connaissance précise du comportement vibratoire est indispensable pour assurer un bon fonctionnement.

Le progrès technologique exige sans cesse des systèmes plus performants. Pour les machines tournantes, de grandes puissances et des vitesses très élevées sont parmi les objectifs voulus. Cependant, les problèmes vibratoires liés leurs éléments principaux tels que les arbres et les rotors sont des phénomènes qui demeurent encore préoccupants malgré les progrès réalisés dans la conception. Ces derniers qui sont dus, par exemple, aux inévitables défauts d'usinage et de montage limitent les performances des machines en affectant leur fonctionnalité et leur rentabilité. Ils peuvent causer des dégâts sérieux ou mener à leurs ruines. Une compréhension complète du comportement vibratoire et une connaissance suffisante sur la dynamique des rotors sont donc nécessaires pour trouver les moyens d'éviter ou de réduire ou de supprimer les vibrations. Initialement, les premiers soucis et efforts étaient de prédire les vitesses de rotation critiques de résonance et après modifier la conception pour les changer

afin de les éviter. Mais, il a longtemps été observé que quand les vitesses d'opération dépassèrent les vitesses critiques des problèmes indésirables variés d'instabilité apparaissaient. La dynamique des rotors a été développée pour surmonter ces difficultés techniques. L'arbre ou le rotor est la partie tournante d'une machine. Si sa déformation est négligeable pour des vitesses dans la gamme d'opération on dit qu'il est rigide. Par contre, s'il se déforme appréciablement à certaines vitesses de la gamme d'opération on dit qu'il est flexible.

Le comportement dynamique des arbres et des rotors est principalement du aux vibrations de flexion qui peuvent être excité par plusieurs différentes causes. L'une des causes les plus connues est l'excentricité du centre de gravité quand appelle le balourd. Avec ce dernier, on a une distribution de déséquilibre tout le long de l'arbre ou le rotor.

Généralement, il a aussi des vibrations de torsions qui peuvent concerner le comportement dynamique de tels systèmes, mais pour ce travail on s'intéresse principalement aux problèmes directs des vibrations de flexion.

Le problème principe dans l'étude dynamique des arbres et rotors est la détermination des vitesses critiques. Le concept de ses dernières est montré à l'aide du modèle simple De Laval Jeffcott où une excentricité du centre de gravité cause la déflexion élastique qui dépend de la vitesse de rotation et peut avoir des valeurs extrêmement grandes voir infinies en théorie (phénomène de résonance).

Les arbres ou rotors des machines tournantes sont, dans une première étape dimensionnés à partir de la résistance des matériaux où il s'agit d'avoir des dimensions minimales pouvant supporter des charges nominales. L'étude dynamique vibratoire est ensuite effectuée. Parmi les objectifs principaux de cette dernière on peut citer :

- La prédiction des vitesses critiques ; vitesses pour lesquelles les vibrations dues aux déséquilibres sont maximales.
- La modification de la conception pour altérer les vitesses critiques. Si l'on ne peut pas changer la gamme des vitesses d'opération alors des modifications de la conception seront requises.
- La prédiction des réponses dues au déséquilibre dont la précision dépend de la modélisation.
- La détermination des conditions qui limitent le seuil de la vitesse et de la puissance au-delà de laquelle le rotor serait instable. Par exemple les forces déstabilisatrices venant des paliers ne sont pas bien connues pour une modélisation précise.
- Le calcul des masses de correction d'équilibre à partir des données des vibrations mesurées. Ceci permet de réduire sur place l'amplitude des vibrations synchrones.

Le travail présenté dans cette thèse concerne l'analyse du comportement dynamique

vibratoire d'un ventilateur de tirage ciment. Il comprend une introduction générale, trois chapitres et une conclusion générale.

Les concepts de base de la dynamique des rotors sont exposés dans le premier chapitre. Dans celui-ci le phénomène du tournoiement est expliqué et la notion de vitesse critique est introduite. Les vibrations latérales du modèle élémentaire de Laval / Jeffcott sont étudiés sans paliers ensuite avec des paliers isotropiques puis anisotropies.

Dans le deuxième chapitre, Le développement de la modélisation par éléments finis est exposé dans le quatrième chapitre. Dans celui-ci on présente la procédure et les moyens pour faire une étude précise de l'analyse du

comportement vibratoire des arbres ou des rotors avec un exemple de modèle de rotor pour montrer le montage de la matrice globale.

Dans le troisième chapitre, on développe l'analyse vibratoire analytiquement du ventilateur de terrage ciment FAN 280.

Enfin, on termine par une conclusion générale avec des suggestions pour des travaux futurs.

CHAPITRE I

MODELISATION DES SYSTEMES DES ROTORS

Introduction

Cette partie a pour but de développer les équations du mouvement afin de prévoir le comportement dynamique d'un rotor dont le support est soumis à un mouvement quelconque connu. Les caractéristiques de chaque élément composant un rotor sont d'abord développées. Un modèle éléments finis est développé dans le souci de traiter des systèmes réels. Les équations du mouvement du rotor sont obtenues par application des équations de Lagrange.

La méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée pour mettre en place un modèle permettant de traiter des cas simples et de mettre en évidence des phénomènes de base.

I.1 modélisation du rotor

Ce chapitre expose les éléments théoriques utilisés pour obtenir les équations du mouvement d'un système en rotation. Il permet de définir aussi bien un modèle analytique d'analyse qu'un modèle éléments finis à usage plus général.

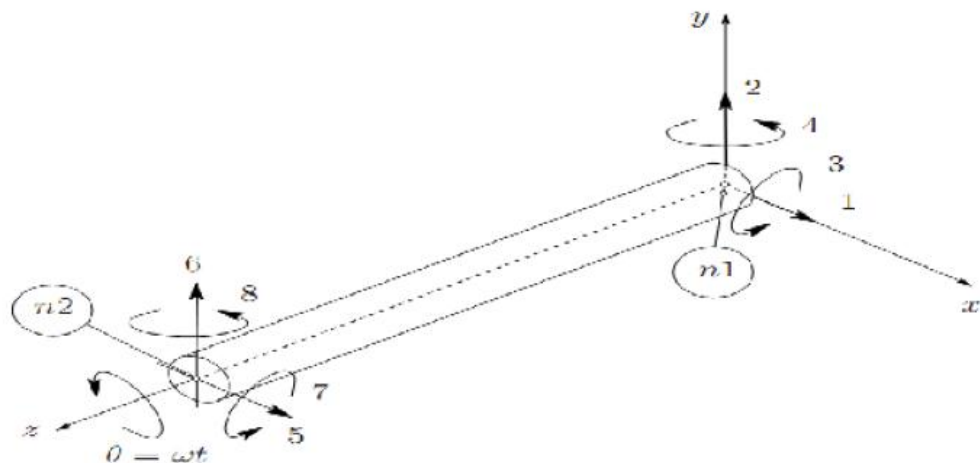


Figure I.1 Exemple de rotor

Les éléments de base des rotors sont l'arbre, les disques et les paliers. Les expressions des énergies cinétiques sont nécessaires pour caractériser l'arbre, le disque et le balourd (figure I.1).

L'énergie potentielle est nécessaire pour caractériser l'arbre, le travail virtuel est calculé pour les forces dues aux paliers. Les équations générales du rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes :

-L'énergie cinétique T , l'énergie de déformation U et l'énergie de déformation U , et le travail virtuel δW sont calculés pour tous les éléments de système.

-une méthode de discrétisation est choisie : la méthode de Rayleigh-Ritz est bien adaptée aux systèmes simples et résulte en un faible nombre de degrés de liberté, la méthode des éléments finis est adaptée aux applications réelles.

N ($1 \leq i \leq N$) représente le nombre de degrés de liberté.

q_i : sont les coordonnées généralisées indépendantes.

F_{q_i} : est le vecteur forces généralisées.

- les équations de Lagrange sont utilisées pour l'obtention des équations du mouvement soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (1.1)$$

I.1.1.le disque

Le disque est supposé rigide. Seule son énergie cinétique est considérée. Soient

$R_0(x, Y, Z)$ un repère fixe et $R(x, y, z)$ un repère tournant lié au disque (figure III.2).

Le système de coordonnées x, y et z est relié au système de coordonnées X, Y et Z par l'intermédiaire des angles $\theta_x, \theta_y, \theta_z$. pour déterminer la position du disque, on effectue une rotation initiale d'un angle autour de l'axe Z , puis d'un angle autour du nouvel axe x , noté x_1 , enfin d'un angle autour de l'axe de rotation propre du disque y .

Le vecteur de rotation instantanée traduisant la position du repère R s'écrit

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \dot{\theta}_z \vec{Z} + \dot{\theta}_x \vec{x}_1 + \dot{\theta}_y \vec{y} \quad (1.2)$$

Où \vec{Z}, \vec{x}_1 et \vec{y} sont les vecteurs unitaires suivant les axes OZ, Ox_1 et OY .

L'énergie cinétique du disque autour de son centre de masse O est calculée dans le repère tournant R . le vecteur de rotation instantanée s'exprime alors dans ce repère :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \sin \theta_y + \dot{\theta}_x \cos \theta_y \\ \dot{\theta}_y + \dot{\theta}_z \sin \theta_x \\ -\dot{\theta}_z \cos \theta_x \cos \theta_y + \dot{\theta}_x \sin \theta_y \end{bmatrix}_R \quad (1.3)$$

ω_x, ω_y Et ω_z étant les composants du vecteur de rotation instantanée suivant x, y et z . soient u et w les coordonnées du centre du disque O suivant OX, OZ dans R_0 ; les coordonnées suivant OY restant constante. la masse de disque m_d le tenseur d'inertie est noté :

$$\square_{/O} = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix}_R \quad (1.4)$$

I_{dx} , I_{dy} et I_{dz} sont le moment d'inertie suivant les axes X, Y et Z.

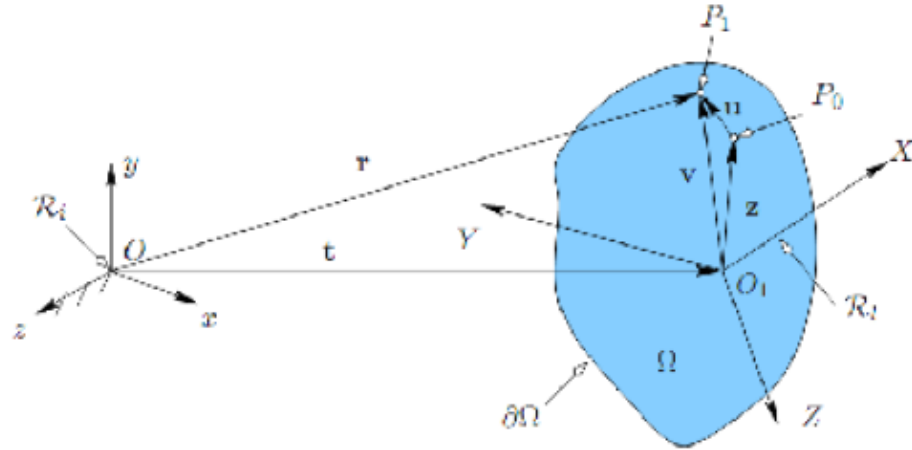


Figure I.2 repère de référence d'un disque monté sur un arbre flexible

L'expression générale de l'énergie cinétique du disque T_d s'écrit alors :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) \quad (1.5)$$

Cette expression peut être simplifiée quand le disque est symétrique $I_{dx} = I_{dz}$.

Lorsque les angles θ_x et θ_z sont petits et la vitesse angulaire constante $\theta_y = \Omega$, l'équation (1.5) devient :

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\theta}_x \theta_x) \quad (1.6)$$

Le terme $\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$, qui est constant, n'a pas d'influence. Le dernier terme $I_{dy} \Omega \dot{\theta}_x \theta_x$ représente l'effet gyroscopique (Coriolis).

I.1 .2 l'arbre

L'arbre est assimilé à une poutre de section circulaire et caractérisé par son énergie cinétique et potentielle.

I.1 .2 .1 l'énergie cinétique

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est similaire à celle développée pour le disque (équation 1.6). Pour un élément de longueur L de section droit constante, l'expression de l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho S_a \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho I_a \left[\left(\frac{\partial \theta_z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial t} \right)^2 \right] + \Omega I_a \left[\theta_a \frac{\partial \theta_x}{\partial t} - \theta_x \frac{\partial \theta_z}{\partial t} \right] \right\} dy \quad (1.7)$$

ρ Est la masse volumique, S_a est la section, I_a est le moment d'énergie transverse, J_a est le moment d'inertie polaire.

La première intégrale de l'équation (1.7) correspond à l'expression de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion, la seconde à l'effet d'inertie dû à la rotation et la dernière intégrale représente l'effet gyroscopique.

I.1.2.2 Energie de déformation

L'énergie de déformation n'est pas affectée par le mouvement du support car elle ne dépend que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre par rapport au support. Dans ce calcul, (en néglige les effets de cisaillement).

Les notations suivantes sont utilisée (figure I .3) :

C est le center géométrique de l'arbre, **B(x, z)** est un point typique de section, **E** est le module d'Young du matériau, ϵ et σ représentent la déformation et la contrainte, u^* et w^* sont les déplacements du centre géométrique suivant les axes x et z (dans le repère mobile).

Le déplacement d'un point de la section droit s'exprime en considérant seules les déformations dues à la flexion, les effets de cisaillement ne sont pas pris en compte.

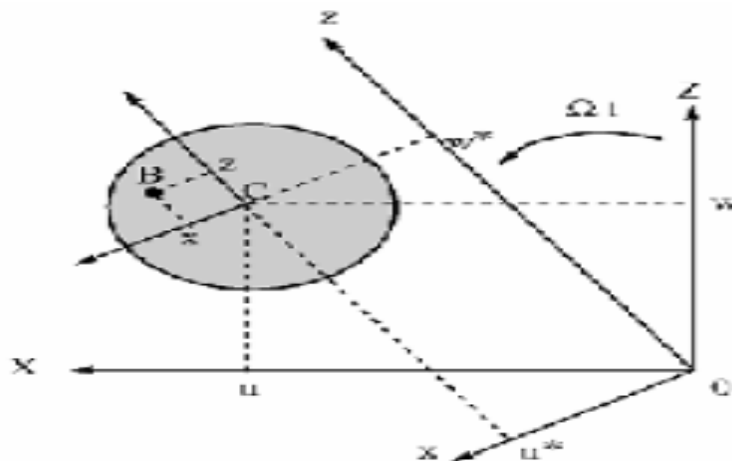


Figure I.3 coordonnées du centre géométrique C et d'un point arbitraire B de la section du rotor

La déformation en flexion d'un point de l'arbre de coordonnée x et z dans R est $\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl}$ avec :

$$\text{Déformation linéaire : } \varepsilon_l = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (1.8)$$

Déformation non linéaire :

$$\varepsilon_{nl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (1.9)$$

L'expression générale de l'énergie de déformation du rotor en flexion est alors

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^t [\sigma] d\tau \quad (1.10)$$

Où τ est le volume de l'arbre et σ est la contrainte de flexion.

La relation entre contraintes et déformations est : $\sigma = E\varepsilon$, donc :

$$U = \frac{E}{2} \int_V (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l \varepsilon_{nl}^2) d\tau \quad (1.11)$$

A cause de la symétrie de l'arbre par rapport aux axes x et y :

$$\int_V \varepsilon_{nl} \varepsilon_l d\tau = 0 \quad (1.12)$$

Le troisième terme de l'intégrale (1.11) représente l'effet d'une force axiale et n'est pas pris en compte dans cette étude. En utilisant (1.8) :

$$\int_V \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy \quad (1.13)$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xy \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dS dy \quad (1.14)$$

Par symétrie, le troisième terme de (1.14) est nul et, en introduisant les inerties de section :

$$I_x = \int_S z^2 dS$$

$$I_z = \int_S x^2 dS \quad (1.15)$$

$$\int_S xz dS = 0$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left(I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (1.16)$$

Pour éviter des termes périodiques, explicitement fonction du temps, il est nécessaire compte tenu des propriétés des paliers, d'exprimer l'énergie de déformation en fonction de U et w composantes du déplacement dans R_0 . Le passage de u^* , w^* à u , w s'écrit (Figure. I.3) :

$$\begin{cases} u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\ w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \end{cases} \quad (1.17)$$

En remplaçant u^* et w^* par leurs valeurs (1.17) :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left(I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z \left(\cos^{-1} \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^{-1} \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u \partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) + \\ I_x \left(\sin^{-1} \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \cos^{-1} \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u \partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Pour un arbre symétrique (ou. $I_x = I_z = I_a$.) L'expression de l'énergie potentielle devient :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z (\cos^{-1} \Omega t + \sin^{-1} \Omega t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + (\sin^{-1} \Omega t + \cos^{-1} \Omega t) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \quad (1.20)$$

Finalement :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I_z \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \quad (1.21)$$

I.1.3 paliers

Un palier comporte des caractéristiques de raideur et d'amortissement dans les deux plans, plus des termes croisés (Figure I.4). Les forces induites par ces paliers sont dues au déplacement de l'arbre (repère R) par rapport au support (repère R_s). Elles ne dépendent donc pas du mouvement du repère R_s par rapport au repère R_0

Le travail virtuel δW_p , des forces extérieures agissant sur l'arbre s'écrit sous la forme :

$$\delta W_p = -K_{xx} u \delta u - K_{xz} w \delta u - K_{zz} w \delta w - K_{zx} u \delta w - C_{xx} u \dot{\delta u} - C_{xz} w \dot{\delta u} - C_{zz} u \dot{\delta w} \quad (1.22)$$

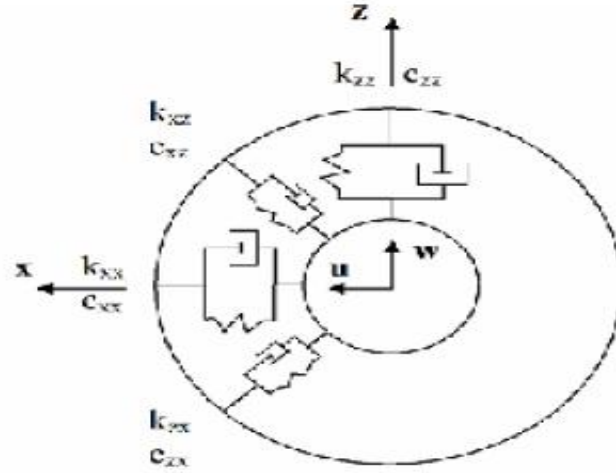


Figure I.4 Amortissement et raideur des paliers

Ou sous une forme plus compacte :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (1.23)$$

Où F_u et F_w sont les forces généralisées déterminées à partir des caractéristiques de raideur et d'amortissement des paliers (figure I.4). En utilisant les deux équations (1.22) et (1.23) il vient :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xz} \\ K_{zx} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} \\ C_{zx} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Remarque : ces équations peuvent également être exprimées en fonction des déplacements dans le repère R. ces dernières ne font intervenir que K_{xx} et K_{zz} sont obtenues à partir de l'expression du travail virtuel suivant :

$$\delta W_p = -K_{xx}(u^* \cos \Omega t + w^* \sin \Omega t)(\delta u^* \cos \Omega t + \delta w^* \sin \Omega t) - K_{zz}(-u^* \sin \Omega t + w^* \cos \Omega t)(-\delta u^* \sin \Omega t + \delta w^* \cos \Omega t) \quad (1.25)$$

$$\delta W_p = - \left[(K_{xx} \cos^{-1} \Omega t) u^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (K_{xx} - K_{zz}) w^* \right] \delta u^* - \left[(K_{xx} \sin^{-1} \Omega t + K_{zz} \cos^{-1} \Omega t) w^* + \frac{\sin 2\Omega t}{2} (K_{xx} - K_{zz}) u^* \right] \delta w^* \quad (1.26)$$

L'équation (1.26) montre que, si $K_{xx} \neq K_{zz}$ la contribution des paliers ne permet pas dans ce cas d'éliminer la variable temps des équations.

I.1.4 Le balourd

Le balourd initial est généralement réparti de manière continue et quelconque sur le rotor (figure I.5)

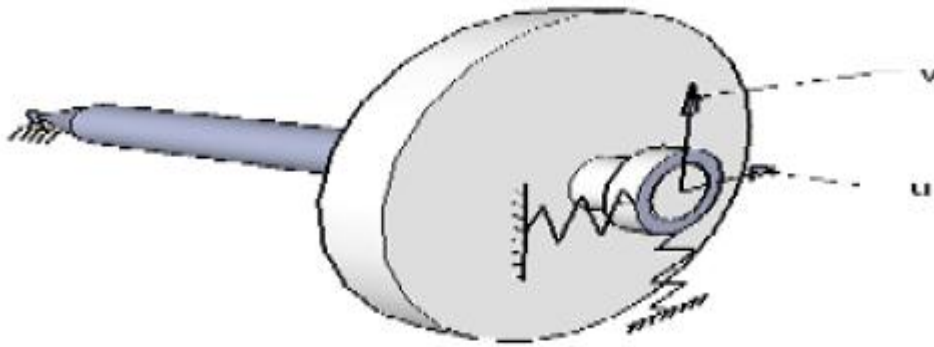


Figure I.5 Répartition du balourd sur le rotor

Pour modéliser simplement le balourd, il est décomposé en masses concentrées situées dans différents plans (figure I.5). ces masses sont supposées avoir effet que le balourd

Continu sur le comportement dynamique du rotor.

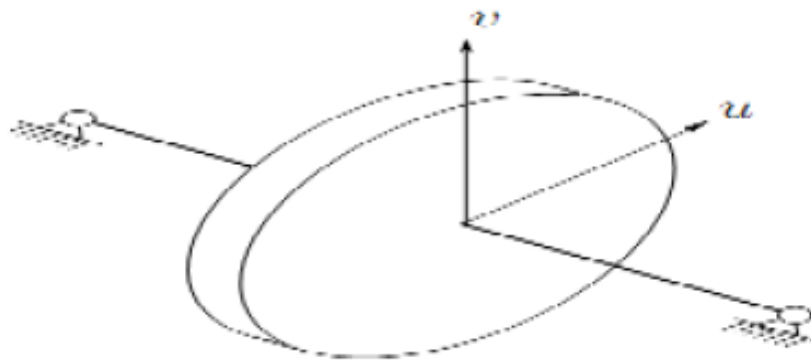


Figure I.6 Modélisation de la répartition du balourd sur le rotor

A l'arrêt, la position M_i de chaque masse m_i est définie par son abscisse sur l'axe Y_i .

La distance $r_i = O_i M_i$, O_i étant le centre de la section de l'arbre, l'angle α_t que fait la position de la masse par rapport au repère tournant de référence. Lors de la rotation du rotor, chaque masse m_i est liée à l'arbre en position déformée (figure I.7).

La masse m située à la distance d du centre géométrique de l'arbre .Son énergie cinétique doit être prise en compte.

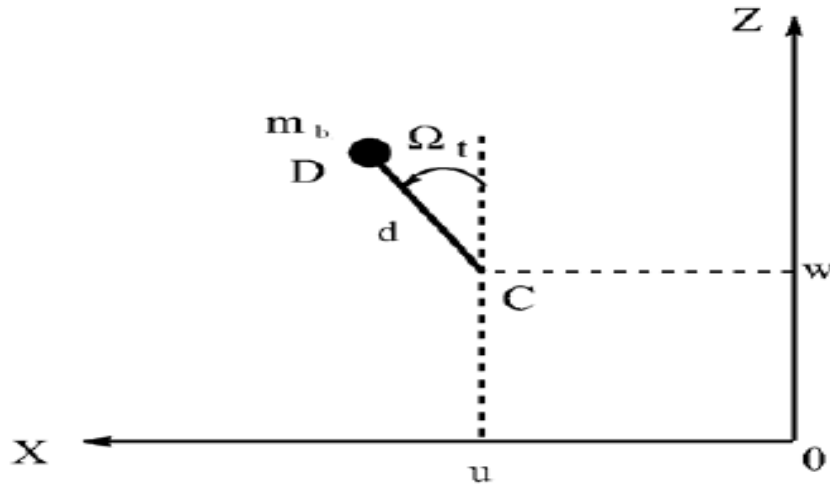


Figure I.7 Masse de balourd

La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe y , sa coordonnée selon cet axe dans le repère R_0 est donc constante.

$$\overrightarrow{OD} = \begin{bmatrix} u + d \sin \Omega t \\ \text{constante} \\ w + d \cos \Omega t \end{bmatrix}_{R_0} \quad (1.27)$$

La vitesse du balourd s'écrit alors :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} + d\Omega \sin \Omega t \end{bmatrix}_{R_0} \quad (1.28)$$

L'expression de l'énergie cinétique T_b du balourd :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b (\vec{V}^0(D))^2 \quad (1.29)$$

Introduisant (1.28) dans (1.29) :

$$T_b = \frac{m_b}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega u \dot{d} \cos \Omega t - 2\Omega w \dot{d} \sin \Omega t) \quad (1.30)$$

Le terme $\Omega^2 d^2/2$ est constant et n'interviendra pas dans les équations .La masse du balourd étant négligeable par rapport à la masse de rotor, l'expression de l'énergie cinétique peut être approximée par :

$$T_b \approx m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (1.31)$$

Les expressions de l'énergie cinétique, de déformation et du travail virtuel étant établies, la dissipation due à l'amortissement interne peut être développée via des modèles analytiques ou élément finis.

I.2 Modèle simple

Notre objectif est de présenter la mise en place d'un modèle de calcul permettant, à l'aide d'un rotor vertical pas dans les temps. Ainsi, après avoir validé le modèle sur exemples de référence, nous pourrions évaluer l'influence de l'action non linéaire d'un palier à air sur le comportement de l'ensemble.

I.2.1. Description du modèle

Le modèle retenu s'agit d'un modèle simple mais réaliste, permettant de rendre compte des phénomènes de base de la dynamique des rotors.

$R_0(X, Y, Z)$ Est le repère initial, l'axe du rotor au repos étant porté par la direction Y. La vitesse de rotation est constante. Afin de pouvoir simplifier les calculs, un seul degré de liberté est utilisé pour le déplacement dans les directions X et Z.

Les expressions des déplacements dans les directions X et Z sont respectivement mises sous la forme (méthode de séparation des variables)

$$\begin{aligned} u(y, t) &= f(y)q_1(t) = f(y)q_1 \\ w(y, t) &= f(y)q_2(t) = f(y)q_2 \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ou q_1 et q_2 sont des coordonnées indépendantes généralisées .Etant donné, que les déplacements angulaires Ψ et θ , Figure I.8, sont petits, ils sont approchés par :

$$\left(\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy} q_2 = g(y)q_2 \\ \psi &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{df(y)}{dy} q_1 = -g(y)q_1 \end{aligned} \right. \quad (1.33)$$

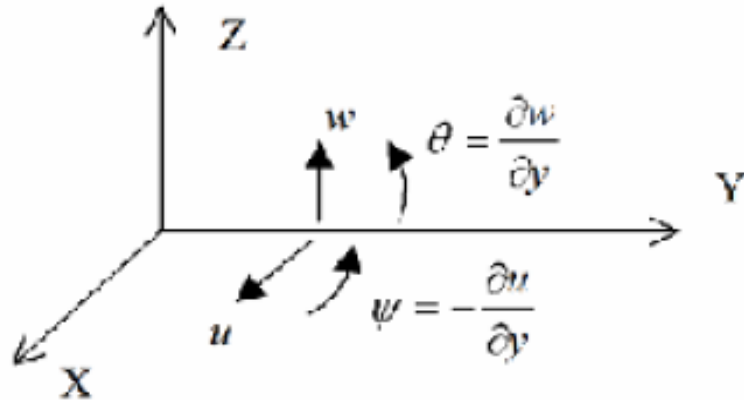


Figure I.8 Représentation des coordonnées

Le second ordre des dérivées des déplacements u et w est nécessaire pour exprimer l'énergie élastique de l'arbre

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{d^2 f(y)}{dy^2} q_1 = h(y) q_1 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{d^2 f(y)}{dy^2} q_2 = h(y) q_2 \end{aligned} \quad (1.34)$$

La fonction de déplacement f est choisie pour représenter exactement la forme du premier mode d'une poutre de section constante en flexion sur deux appuis situés à ses extrémités.

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} \quad (1.35)$$

$$\text{D'où, } g(y) = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \quad (1.36)$$

$$h(y) = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{\pi y}{L} \quad (1.37)$$

Dans ce qui suit toutes les expressions seront données en fonction des coordonnées généralisées q_1 et q_2 et de leurs dérivées.

Les constituants de la ligne d'arbre à prendre en compte sont :

- le(s) disque(s)
- le rotor (section circulaire pleine ou creuse)
- le(s) roulement(s), (palier(s) à action linéaire)
- le(s) palier(s) aérodynamique(s), (palier(s) action non linéaire)
- le(s) balourd(s)

I.2.2 Elément de disque

Le disque est considéré comme étant parfaitement axisymétrique. Son énergie cinétique T_D , peut s'écrire de la façon suivante :

$$T_D = \frac{1}{2} [M_D f^2(y_{disk}) + I_{Dx} g^2(y_{dick})] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - I_{Dy} \Omega g^2(y_{dick}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (1.38)$$

Le disque est considéré rigide, son énergie de déformation est donc nulle.

I.2.3 Elément de l'arbre

Le rotor est lui aussi considéré axisymétrique. L'expression de son énergie cinétique, T_a , est la suivante :

$$T_a = \frac{1}{2} \left[\rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2\rho I \Omega \int_0^L g^2(y) dy \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (1.39)$$

L'énergie de déformation de l'arbre U_a , s'écrit :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L h^2(y) dy (q_1^2 + q_2^2) \quad (1.40)$$

Il peut être intéressant d'exprimer l'énergie cinétique T_{DS} , de l'ensemble disque

Rotor.

$$T_{Da} = T_a + T_D = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - a \Omega \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (1.41)$$

$$\text{Avec } m = \left[M_D f^2(y_{disk}) + I_{Dx} g^2(y_{dick}) + \rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right]$$

$$\text{Et } a = I_{Dy} g^2(y_{dick}) + 2\rho I \int_0^L g^2(y) dy$$

I.2.4. Paliers à roulement

La ligne d'arbre peut éventuellement recevoir des paliers à roulement.

L'expression du travail virtuel de la force exercée sur la ligne d'arbre s'écrit de la façon suivant :

$$\delta W = F_1 q_1 \delta q_1 + F_2 q_2 \delta q_2$$

Nous n'avons pris en compte ici que les termes directs de la matrice de raideur qui sont dans un premier temps assez représentatifs du comportement des roulements. En plus de la géométrie du palier et de la déformation de sa structure, il prend en compte la position de à l'intérieur du palier qui peut être due au déplacement et à la déformation du rotor.

I.2.5. Balourd

La ligne d'arbre peut être déséquilibrée par la présence d'un balourd. L'énergie cinétique du balourd s'écrit :

$$T_u = m_b d \Omega f(y_{bal}) (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t) \quad (1.42)$$

I.2.6. Equation du mouvement

L'application des équations de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_c}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \delta W_i \text{ avec } i = 1, 2 \quad (1.43)$$

Permet d'obtenir le système d'équations du rotor :

- a) La résolution de ce système d'équation permet d'obtenir les déflexions de la ligne d'arbre en chacun de ses points.
- b) Le système d'équation de la dynamique de rotor permet alors de calculer les composant de l'accélération du rotor.

Les conditions initiales sont choisies de façon arbitraire .Elles peuvent aussi résulter d'un calcul antérieur. Etant donné que la sollicitation extérieure est de nature cyclique.

I.2.7 validation du modèle

Le premier cas concerne une ligne d'arbre simplement supportée par deux appuis.

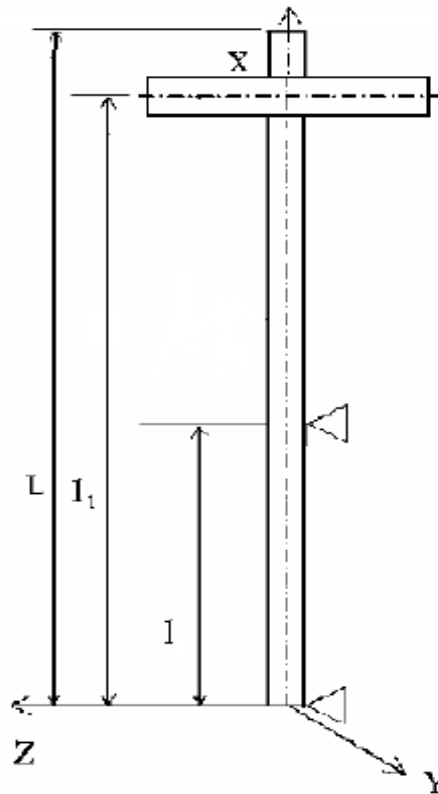


Figure I.9 Schématisation du modèle simple du rotor

Les données numériques communes du cas étudié sont :

Exemple : données

Disque :

Rayon intérieur $R_1 = 0.025 \text{ m}$

Rayon extérieur $R_2 = 0.15 \text{ m}$

Epaisseur $h = 0.03 \text{ m}$

Masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

$l_1 = 1 \text{ m}$

La masse et les inerties du disque sont :

$$M_d = \pi (R_2^2 - R_1^2) h \rho = 16.07 \text{ kg}$$

$$I_{dx} = I_{dz} = \frac{M_d}{12} (3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2) = 9.41 * 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

Arbre :

$$\text{Langueur } L = 1.2 \text{ m}$$

$$\text{Rayon de section droite } R_1 = 0.025 \text{ m}$$

$$\text{Masse volumique } \rho = 7800 \text{ kg / m}^3$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

L'aire de la section droite et le moment d'inertie sont :

$$S = \pi R_1^2 = 1.96 * 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi R_1^4}{4} = 3.066 * 10^{-7} \text{ m}^4$$

Balourd :

$$\text{Masse } m_b = 10^{-4} \text{ kg}$$

$$\text{Distance } d = 0.15 \text{ m}$$

Les fonctions de déplacement sont celles du premier mode d'une poutre de section constante, en flexion et appuyée aux deux extrémités, soit :

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} = \sin \frac{\pi y}{1.2}$$

Les expressions générales de l'énergie cinétique T , de l'énergie de déformation U et du travail virtuel δW peuvent être obtenues.

L'énergie cinétique a pour expression :

$$T = T_d + T_a + T_b$$

Où T_d, T_a, T_b sont les énergies cinétiques respectives du disque, de l'arbre, du balourd.

Tous calculs faits, on a :

$$T = 2.25(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 0.975\Omega\dot{q}_1\dot{q}_2 + 7.5 * 10^{-6}\Omega(\cos \Omega t \dot{q}_1 - \sin \Omega t \dot{q}_2) \quad (1.44)$$

L'énergie de déformation a pour expression :

$$U_a = 17.28 * 10^5 (q_1^2 + q_2^2) \quad (1.45)$$

I.2.7.1 Modèle symétrique

L'application des équations de Lagrange (1.43) en utilisant les expressions (1.44) et (1.45) conduit aux équations mouvement :

$$\begin{aligned} 4.5\ddot{q}_1 - 0.975\Omega\dot{q}_2 + 3.456 * 10^6 q_1 &= 0.75 * 10^{-5}\Omega^2 \sin \Omega t \\ 4.5\ddot{q}_2 + 0.975\Omega\dot{q}_1 + 3.456 * 10^6 q_2 &= 0.75 * 10^{-5}\Omega^2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (1.46)$$

Qui, sous forme générale s'écrivent :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 &= m_b d\Omega^2 f(l_1) \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 &= m_b d\Omega^2 f(l_1) \cos \Omega t \end{aligned} \quad (1.47)$$

I.2.7.2 Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation

Diagramme de Campbell

Le rotor est tout d'abord étudié en mouvement libre. Seule la solution de système (1.49) sans second membre, est considérée :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 &= 0 \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.49)$$

La deuxième matrice, représente l'effet gyroscopique. Les deux autres matrices sont les matrices de masse et de raideur. Les solutions des équations sont de la forme :

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 \exp(rt) \\ q_2 = Q_2 \exp(rt) \end{cases} \quad (1.50)$$

En remplaçant (1.52) dans (1.51) , il vient :

$$\begin{bmatrix} k + mr^2 & -a\Omega r \\ a\Omega r & k + mr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.51)$$

La solution simple $Q_1 = Q_2 = 0$ est sans intérêt et les autres solutions sont celles qui correspondent à l'annulation du déterminant de matrice. Le calcul du déterminant donne l'équation caractéristique :

$$(k + mr^2)^2 + a^2\Omega^2 r^2 = 0$$

$$m^2 r^4 + (2km + a^2\Omega^2)r^2 + k^2 = 0 \quad (1.52)$$

A l'arrêt ($\Omega = 0$), les racines r_{10} et r_{20} de (1.52) sont :

$$r_{10}^2 = r_{20}^2 = j^2 \omega_{10}^2 = j^2 \omega_{20}^2 = -\frac{k}{m} \quad (1.53)$$

Avec $j^2 = -1$

Et les pulsations :

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.54)$$

En rotation ($\Omega \neq 0$), les racines de (1.52) sont r_1 et r_2 et les pulsations correspondantes ω_1 et ω_2 . Il vient :

$$r_1^2 = -\left[\omega_{10}^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_{10}^2}{a^2\Omega^2}} \right) \right] = j^2 \omega_1^2 \quad (1.55)$$

Alors :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_{10}^2}{a^2\Omega^2}} \right)} \quad (1.56)$$

Et :

$$r_2^2 = \left[\omega_{10}^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_{10}^2}{a^2\Omega^2}} \right) \right] = j^2 \omega_2^2 \quad (1.57)$$

Alors :

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_{10}^2}{a^2\Omega^2}} \right)} \quad (1.58)$$

A partir de (4.56) et (4.58) il est clair que :

$$\omega_1 < \omega_{10} = \omega_{20} < \omega_2 \quad (4.59)$$

De plus, les équations (1.55) et (1.57) montrent que r_1^2 et r_2^2 sont des quantités négatives ; ainsi sont des quantités imaginaires et la solution générale du mouvement reste donc limitée dans le temps, le rotor est stable. La représentation de ω en fonction de la vitesse de rotation,

$\omega_1 = \omega_1(\Omega)$ et $\omega_2 = \omega_2(\Omega)$ est le diagramme de Campbell. En générale le diagramme de Campbell représente f_1 et f_2 :

$$\begin{aligned} f_1 &= \omega_1/2\pi \\ f_2 &= \omega_2/2\pi \end{aligned} \quad (1.60)$$

En fonction de la vitesse de rotation N (tr/min) qui est reliée à Ω (rad/s) par :

$$N = 30\Omega/\pi \quad (1.61)$$

Ici ω et Ω sont des pulsations et f une fréquence. Dans ce qui suit les trois quantités sont simplement appelées fréquences. Compte tenu des symboles utilisés, il est facile de savoir de quelle unité il s'agit. Les formes modales (modes) sont examinées ensuite. La première équation de (1.51) donne :

$$Q_1 = \frac{a\Omega r Q_2}{k + m\Omega^2} \quad (1.62)$$

Il est clair que les modes sont complexes ($r = \pm j \omega$) et leur interprétation délicate. Choisissons l'ensemble de conditions initiales suivant, à $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} q_1 = q_{10} \\ \dot{q}_1 = 0 \\ \dot{q}_2 = -\omega_2 q_{10} \end{cases} \quad (1.63)$$

Tous calculs faits, il vient :

$$\begin{aligned} q_1 &= -q_{10} \cos \omega_2 t \\ q_2 &= q_{10} \sin \omega_2 t \end{aligned} \quad (1.64)$$

Les déplacements u et v d'un point situé à de l'origine de l'axe du rotor sont donnés par (1.32), soit :

$$\begin{cases} u(l, t) = q_{10} \sin \frac{\pi l}{L} \cos \omega_2 t = R \cos \omega_2 t \\ u(l, t) = -q_{10} \sin \frac{\pi l}{L} \sin \omega_2 t = -R \sin \omega_2 t \end{cases} \quad (1.65)$$

Tel que :

$$R = \sqrt{u^2(l, t) + w^2(l, t)} = q_{20} \sin \frac{\pi l}{L} \quad (4.66)$$

Pour notre cas le rotor est défini par les équations :

$$r^4 + (1.536 * 10^6 + 4.69 * 10^{-2}\Omega^2)r^2 + 5.898 * 10^{11} = 0 \quad (1.67)$$

Les fréquences à l'arrêt du rotor sont :

$$f_{10} = \frac{\omega_{10}}{2\pi} = f_{20} = \frac{\omega_{20}}{2\pi} = 139.48 \text{ Hz} \quad (1.68)$$

Les fréquences en rotation sont :

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{7,68 * 10^5 + 2,347 * 10^{-2} \Omega^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{6.544 * 10^7}{\Omega^2}} \right)} \quad (1.69)$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{7,68 * 10^5 + 2,347 * 10^{-2} \Omega^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{6.544 * 10^7}{\Omega^2}} \right)} \quad (1.70)$$

Le diagramme de Campbell [$f_1 = f_1(N)$, $f_2 = f_2(N)$] est présenté sur la figure I. 10 et les intersections de $f_1(N)$, $f_2(N)$ avec deux droites sont indiquées .Les points C points A et B correspondent aux intersections avec la droite $f = N/60$; à c e s deux points une fréquence du rotor égale la fréquence de rotation. Les points C et D correspondent à une fréquence du rotor égale à la moitié de la fréquence de rotation. Les points C et D correspondent aux intersections avec la droite $f = 0.5 N/60$; ces deux points correspondent à une fréquence du rotor égale à la moitié de la fréquence de rotation. Il est intéressant d'avoir une expression générale des fréquences correspondant aux points A, B, C, D.

La relation entre ω et Ω est :

$$\omega = s\Omega \quad (1.71)$$

Où $S = 1$ en A et B, $S = 0,5$ en C et D, les expressions $r_1^2 = j^2 \omega_1^2$ et $r_2^2 = j^2 \omega_2^2$ permettent d'écrire :

$$r = \pm j\omega = \pm js\Omega \quad (1.72)$$

Substituent dans (1.52) on trouve :

$$\begin{aligned} s^4 m^2 \Omega^4 - (2km + a^2 \Omega^2) s^2 \Omega^2 + k^2 &= 0 \\ s^2 (s^2 m^2 - a^2) \Omega^4 - 2kms^2 \Omega^2 + k^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.73)$$

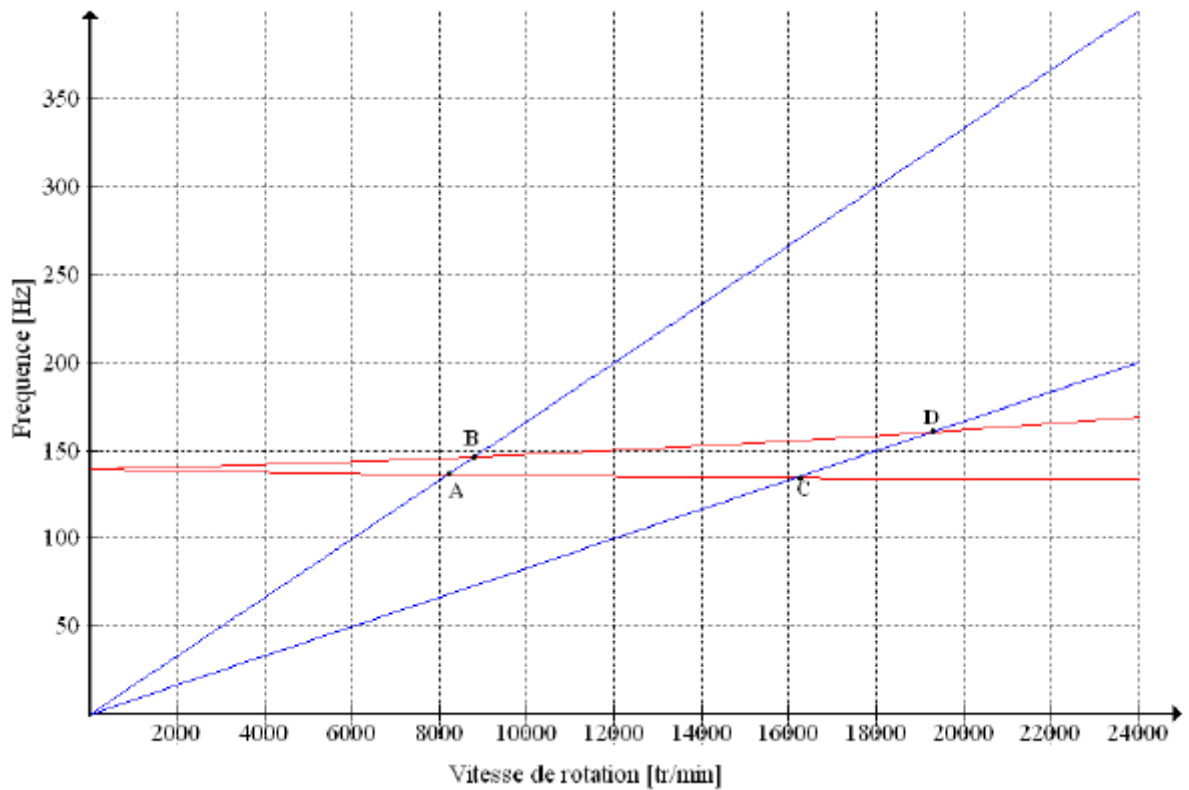


Figure I.10 Diagramme de Campbell pour modèle simple

Les solutions de (1.73) sont :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (1.74)$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (1.75)$$

Et à partir de (1.71) on tire la fréquence ω_1 qui correspond aux points A(s=1) et C(s=0,5)

$$\omega_1 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (1.76)$$

Et de (1.71) ω_2 qui correspond aux points B (s=1) et D(s=0,5)

$$\omega_2 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (1.77)$$

Pour l'application :

- en A : $f_1 = 135,5 \text{ Hz}$; $N = 8190 \text{ tr/min}$
- en B : $f_2 = 146,5 \text{ Hz}$; $N = 8795 \text{ tr/min}$
- en C : $f_1 = 134,7 \text{ Hz}$; $N = 16170 \text{ tr/min}$
- en D : $f_2 = 160,5 \text{ Hz}$; $N = 19260 \text{ tr/min}$

CHAPITRE II

MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS

Connue depuis les années 1950, la méthode des éléments finis a vu son apparition pour le calcul de contraintes et n'a cessé de se développer. Aujourd'hui, son champ d'application dépasse le cadre du génie mécanique. Désormais, elle est utilisée pour résoudre des problèmes d'écoulement de fluides ou de transferts de chaleur, d'électromagnétisme ou d'hydrologie.

Elle est considérée comme une généralisation et amélioration de la méthode de Rayleigh Ritz qui permet de traiter facilement des systèmes d'équation complexes ou de hauts degrés causés par une complexité des formes géométrique et de la condition aux limites. Son principe est le même dans tous les cas de figures : dans un premier temps la structure étudiée est maillée c'est à dire divisée en petits éléments de géométries simples, puis dans un second temps un ou plusieurs champs (déplacement, contrainte, température, pression, ou autre) sont approchés localement, sur chaque élément du maillage, par des fonctions de forme (ou fonctions d'interpolation) [18].

En dynamique des structures, l'utilisation des éléments finis permet de transformer les équations aux dérivées partielles modélisent le mouvement en des équations différentielles temporelles (on passe du cas continu au cas discret pour les variables spatiales).

2.1 EXPRESSIONS DES ENERGIES DES ELEMENTS DU ROTOR

La méthode des éléments finis consiste à discrétiser la structure en éléments sur leur dimensions finis qui sont réunis en des points appelés points nodaux ou nœuds situés sur leur contour. A partir d'hypothèses raisonnables sur le déplacement d'un point de l'élément, on calcule les énergies cinétiques, de déformation et de dissipation de l'élément en fonction des déplacements des nœuds.

Si la structure est composée de N éléments alors :

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (2.1.1)$$

$$T = \sum_{i=0}^N T_i \quad (2.1.2)$$

$$R = \sum_{i=0}^N R_i \quad (2.1.3)$$

Où U_i est l'énergie de déformation ; T_i est l'énergie cinétique et R_i est la fonction de dissipation de l'énergie i . Les forces généralisées sont déterminées en exprimant le travail virtuel des forces extérieures. Dans la dynamique des rotors R_i sont négligés quand les systèmes tournent à grandes vitesses.

2.1.1 Energie de déformation d'un élément de rotor

L'expression générale de l'énergie de déformation d'un élément est donnée par :

$$U_i = \frac{1}{2} \int \varepsilon^t \sigma d\tau \quad (2.1.4)$$

Le vecteur de déplacement d d'un point de l'élément est relié au vecteur δ regroupant tous les déplacements nodaux de l'élément par l'intermédiaire d'une matrice N , résultat de l'hypothèse sur les déplacements à l'intérieur de l'élément. Ceci donne une relation de la forme :

$$d = N(y)\delta \quad (2.1.5)$$

Qui donne après dérivation :

$$\varepsilon = \frac{\partial d}{\partial y} = B(y)\delta \quad (2.1.6)$$

C'est la relation qui relie les déformations aux déplacements nodaux.

La relation qui relie les contraintes et les déformations est :

$$\sigma = D\varepsilon \quad (2.1.7)$$

Où D est une matrice carrée symétrique dont les termes dépendent des caractéristiques mécaniques des matériaux, généralement le module de Young E et le coefficient de poisson ν .

En substituant les équations (2.1.6) et (2.1.7) dans (2.1.4) on obtient l'équation :

$$U_i = \frac{1}{2} \int (B(y)\delta)^t DB(y)\delta d\tau \quad (2.1.8)$$

$$= \frac{1}{2} \delta^t [\int B^t DB d\tau] \delta \quad (2.1.9)$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$U_i = \frac{1}{2} \delta^t K \delta \quad (2.1.10)$$

$$\text{Où } K = \int B^t DB d\tau$$

C'est la matrice raideur de l'élément qui est symétrique car la matrice D est symétrique ainsi que la matrice produit $B^t D B$.

2.1.2 Energie cinétique d'un élément de rotor

L'expression générale de l'énergie cinétique d'un élément est :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho V^2 d\tau \quad (2.1.11)$$

Où ρ est masse volumique d'un élément d'arbre et V est la vitesse d'un point de l'arbre obtenu par dérivation par rapport au temps du déplacement d donné par (2.1.5), soit :

$$V = N(y) \frac{d\delta}{dt} = N(y) \dot{\delta} \quad (2.1.12)$$

En substituant (2.1.12) dans (2.1.11) et en considérant que $V^2 = (N\dot{\delta})^t N\dot{\delta}$, On aura :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (N\dot{\delta})^t N\dot{\delta} d\tau \quad (2.1.13)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\delta}^t [\int \rho N^t N d\tau] \dot{\delta} \quad (2.1.14)$$

Qui s'écrit sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\delta}^t m \dot{\delta} \quad (2.1.15)$$

C'est la matrice masse d'un élément d'arbre qui est aussi symétrique comme la matrice K.

2.2 FORMULATION MATRICIELLE

2.2.1 Formulation matricielle des équations du disque

Le disque est modélisé par un nœud possédant quatre degrés de liberté ; deux translations u et w et deux rotations θ et Ψ respectivement autour des axes x et z (voir figure II.1).

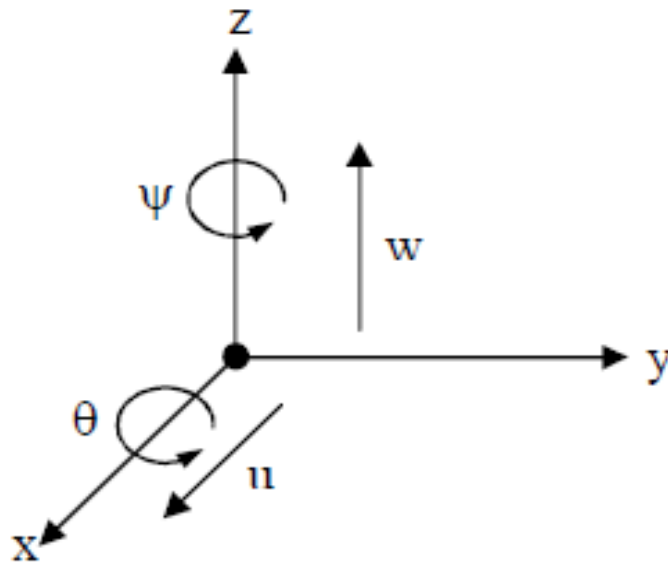


Figure II.1 Degrés de liberté du disque

Le vecteur des déplacements nodaux δ s'écrit sous la forme : $\delta = [u, w, \theta, \Psi]^t$

La matrice masse et la matrice gyroscopique sont obtenues en appliquant les équations de Lagrange à l'expression (2.1.10), soit :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_i} \left[\frac{1}{2} M_d (\dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx'} (\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\Psi}\theta) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left\{ \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx'} (\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\Psi}\theta) \right\} \right\}
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Ou aura donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dx'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy'} \\ 0 & 0 & I_{dy'} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

$$M_d G_d$$

M_d Étant la matrice masse et G_d la matrice gyroscopique.

2.2.2 Formulation matricielle des équations de l'arbre

Les résultats présentés concernent le cas d'un élément arbre symétrique qui est modélisé par un élément poutre de section constante. L'élément fini utilisé a deux nœuds et quatre degrés de liberté (voir figure II.2).

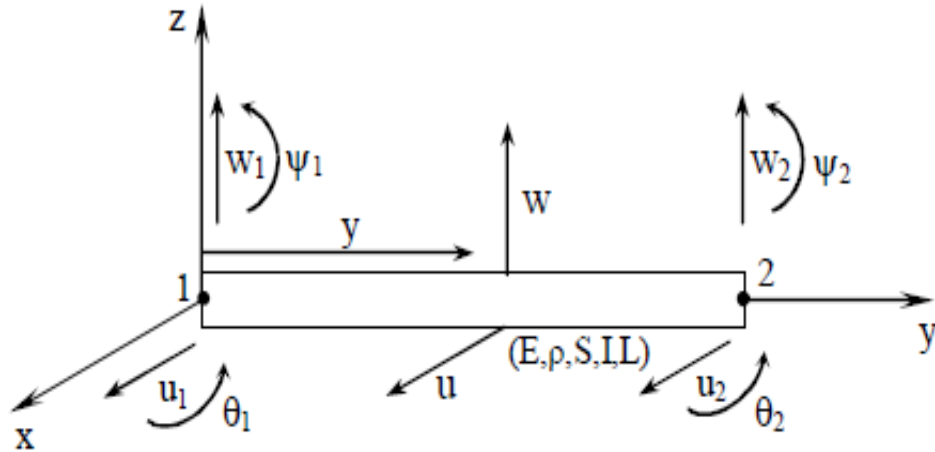


Figure II.2 Degrés de liberté d'un élément arbre

La fonction de déplacement w qui est normale à la poutre (arbre) est donnée par le polynôme d'interpolation du 3^{ième} degré.

$$w = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3 \quad (2.2.3)$$

L'inclinaison ou la autour de z est donnée par la dérivée de la fonction de déplacement w .

$$\theta = \frac{\partial w(y)}{\partial y} = a_2 + 2a_3 y + 3a_4 y^2 \quad (2.2.4)$$

Les constantes a_1 , a_2 , a_3 et a_4 sont déterminées on appliquant les conditions aux limites sur les polynômes (2.2.3) et (2.2.4).

Pour $y = 0$ (nœud 1) on a $\begin{cases} w_1 = a_1 \\ \theta_1 = a_2 \end{cases}$ système

(a)

Pour $y = L$ (nœud 2) on a $\begin{cases} w_2 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 \\ \theta_2 = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2 \end{cases}$ système (b)

Après avoir résolu le système (b) et en remplaçant les constantes a_1 et a_2 par leurs valeurs on trouve :

$$a_1 = w_1$$

$$a_2 = \theta_1$$

$$a_3 = 3 \frac{w_2 - w_1}{L^2} - \frac{\theta_2 + 2\theta_1}{L}$$

$$a_4 = -2 \frac{w_2 - w_1}{L^3} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{L^2}$$

On remplace les valeurs des constants a_1, a_2, a_3, a_4 dans w pour avoir :

$$w(y) = \left(1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}\right) w_1 + \left(y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right) \theta_1 + \left(\frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}\right) w_2 + \left(-\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right) \theta_2$$

(2.2.5)

Ou bien

$$w(y) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(y) \delta_i \quad (2.2.6)$$

Le vecteur des déplacements nodaux est :

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \Psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2]^t \quad (2.2.7)$$

Qui est à son tour séparé en deux vecteurs de déplacements dont chacun correspond à une direction :

$$\delta u = [u_1, \Psi_1, u_2, \Psi_2]^t \quad (2.2.8)$$

$$\delta w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^t \quad (2.2.9)$$

Les déplacements sont exprimés à partir des expressions suivantes :

$$u = N_1(y) \delta u \quad (2.2.10)$$

$$\text{Et } w = N_2(y)\delta w \quad (2.2.11)$$

Où N_1 et N_2 sont les vecteurs des fonctions de forme classiques d'un élément de poutre en flexion [13] :

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (2.2.12)$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right] \quad (2.2.13)$$

Où $N_1(y)$ et $N_2(y)$ sont obtenues en posant $u(y) = a_1 + a_2y + a_3y^2 + a_4y^3$ avec la rotation autour de x donnée par $\Psi = -\frac{\partial u(y)}{\partial y}$.

Les relations exprimant donc les déplacements et les pentes sont :

$$\theta = \partial w / \partial y \quad (2.2.14)$$

$$\Psi = -\partial u / \partial y \quad (2.2.15)$$

Le nombre total de degrés de liberté pour chaque nœud est de quatre ; les matrices élémentaires de l'arbre sont donc de taille 8*8 qui obtenues en remplaçons u, w, θ, Ψ par leurs expressions dans les énergies cinétique et de déformation de l'arbre.

a) L'énergie cinétique

L'utilisation de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre (2.1.15) pour un élément conduit à :

$$T_a = \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\delta \dot{u}^t N_1^t N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^t N_2^t N_2 \delta \dot{w}] dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy + \rho I L \Omega^2 - 2\rho I \Omega \int_0^L \delta \dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy \quad (2.2.16)$$

En substituant (2.2.10) et (2.2.11) ainsi que leurs dérivée dans (2.2.16) on aura la forme compacte suivante :

$$T_a = \frac{1}{2} \delta \dot{u}^t M_1 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^t M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^t M_3 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^t M_4 \delta \dot{w} + \delta \dot{u}^t M_5 \delta \dot{w} + \rho I L \Omega^2 \quad (2.2.17)$$

Les matrices obtenues sont de l'ordre 4*4. M_1 et M_2 sont les matrices classiques de masse, M_3 et M_4 représentant l'effet secondaire d'inertie de rotation de la section par rapport à un diamètre et la matrice M_5 représente l'effet gyroscopique. Le terme qui est une constante à une contribution nulle de l'application des équations de Lagrange. L'expression (2.2.17) se réduit à :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta} = (M_c + M_g) \ddot{\delta} + G \dot{\delta} \quad (2.2.18)$$

Où M_c et M_g sont déduites respectivement de M_1 , M_2 , M_3 , et M_4 et G est déduite de M_5 , Les matrices sont donc les suivantes :

$$M_1 = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & -22L \\ 13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.19)$$

$$M_2 = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.20)$$

$$M_3 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.21)$$

$$M_4 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.22)$$

$$M_5 = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.23)$$

Rassemblons les matrices qui ont les mêmes propriétés $M_c = M_1 + M_2$ et $M_g = M_3 + M_4$ d'où :

$$M_c = \frac{\rho s L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.24)$$

$$M_g = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.25)$$

$$\text{Et } G = \frac{\rho\Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.26)$$

b) L'énergie de déformation

L'application des expressions (2.2.12) et (2.2.13) sur l'équation de l'énergie de déformation donnée par la formule (4.1.10) donne :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\delta u^t \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^1} \delta u + \delta w^t \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \quad (2.2.27)$$

$$\text{Ou } U_a = \frac{EI}{2} \left[\delta u^t \left(\int_0^L \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} dy \right) \delta u + \delta w^t \left(\int_0^L \frac{d^2 N_1^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} dy \right) \delta w \right] \quad (2.2.28)$$

Qui peut s'écrire sous la forme réduite :

$$U_a = \frac{1}{2} \delta u^t K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t K_2 \delta w \quad (2.2.29)$$

$$\text{Où } K_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.30)$$

$$\text{Et } K_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.31)$$

K_1 et K_2 sont les matrices classiques de raideur.

La matrice global K est :

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \Psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}$$

Dans le cas où nous tiendrons compte de l'effet de cisaillement notre matrice prend la forme suivante :

$$K = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix}$$

(2.2.33)

La quantité caractérisant le cisaillement est $a = \frac{12EI}{GS_r L^2}$, où $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ est le module de cisaillement et ν est le coefficient de poisson et $S_r \approx S$ (section réduite).

2.2.3 Formulation matricielle des équations du palier

En général, l'influence des pentes des moments est négligée pour les paliers on ne tient compte que des forces généralisées F_u et F_w qui sont liées aux déplacements u et w . En tenant compte de (3.1.30) on a :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_\Psi \\ F_w \\ F_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & K_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{zx} & 0 & K_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \Psi \\ w \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & C_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & C_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\Psi} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.2.34)$$

La première matrice est une matrice de raideur et la seconde est une matrice d'amortissement. Ces matrices sont en général asymétriques et peuvent varier de manière significative en fonction de vitesse de rotation.

2.2.4 Formulation matricielle des équations du balourd

L'application des équations de Lagrange sur l'équation de l'énergie cinétique d'un balourd (2.1.33) donne :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{T_b}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{T_b}{\partial \delta} = -m_b d \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (2.2.35)$$

Avec $\delta = [u \ w]^t$.

2.3 EXEMPLE DE MONTAGE DE MATRICES GLOBALES

Considérons le modèle de rotor étudié qui est schématisé sur la figure 4.3 ayant quatre nœuds et cinq éléments : un élément disque, un élément palier et trois éléments arbre de même longueur $l = l_1 = l_2 = l_3 = L/3$.

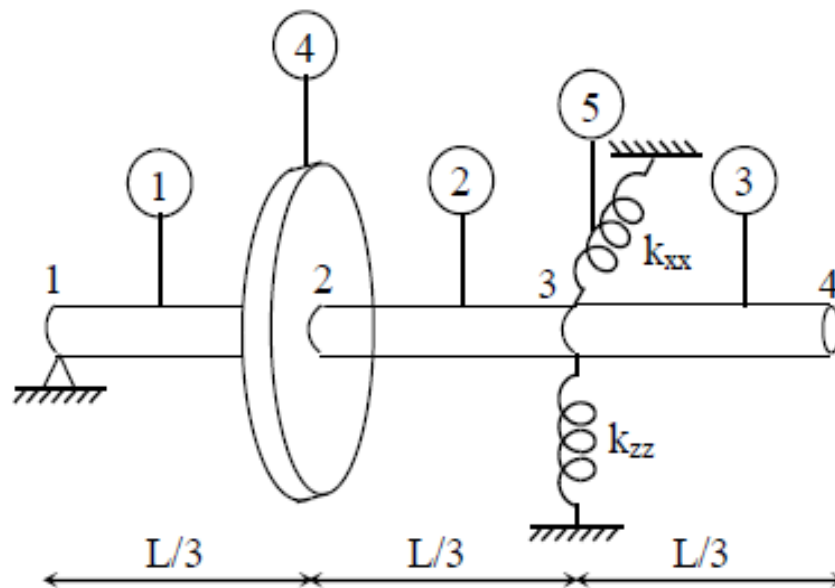


Figure II.3 Modèle de rotor avec éléments et nœuds.

Dans le modèle au-dessus, les nœuds de chaque élément de l'arbre, du palier ou du disque sont en rapport avec les nœuds du rotor d'après la table ci-dessous :

Nombre d'éléments	Type d'élément	Nœuds du rotor	Vecteurs de déplacements δ
1	arbre	1-2	$u_1, w_1, \theta_1, \Psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2$
2	arbre	2-3	$u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2, u_3, w_3, \theta_3, \Psi_3$
3	arbre	3-4	$u_3, w_3, \theta_3, \Psi_3, u_4, w_4, \theta_4, \Psi_4$
4	disque	2	$u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2$
5	palier	3	u_3, w_3

Les matrices globales de masse, de rigidité et de Coriolis sont obtenues en superposant les matrices élémentaires selon le tableau. Chaque type de matrice globale est obtenu en sommant les trois matrices des trois éléments.

a) *Matrice globale classique de masse*

$$M_{ct} = \frac{\rho s l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -221 & 54 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 221 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 221 & 41^2 & 0 & 0 & 131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -221 & 0 & 0 & 41^2 & -131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 0 & 0 & -131 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & 131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & -131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & -131 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 131 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & -131 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -131 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & 131 & -31^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & -31^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & -131 & 0 & 0 & -31^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & -131 & 156 & 0 & 0 & 221 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 131 & 0 & 0 & 156 & -221 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -131 & -31^2 & 0 & 0 & -221 & 41^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 131 & 0 & 0 & -31^2 & 221 & 0 & 0 & 41^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\Psi}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\Psi}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\Psi}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{w}_4 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\Psi}_4 \end{bmatrix}$$

(2.3.1)

Où $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $s = 3,142 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ et $l = 0.1333 \text{ m}$

b) Matrice globale représentant l'effet secondaire d'inertie de rotation

$$M_{gt} = \frac{\rho l}{301} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -36 & -36 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 31 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & 41^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31 & 0 & 0 & 41^2 & 361 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 31 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 31 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 31 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & -31 & -1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & -1^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 31 & 0 & 0 & -1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 31 & 36 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & -31 & 0 & 0 & 36 & -31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & -1^2 & 0 & 0 & -31 & 41^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -31 & 0 & 0 & -1^2 & 31 & 0 & 0 & 41^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\Psi}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\Psi}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\Psi}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{w}_4 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\Psi}_4 \end{bmatrix}$$

(2.3.2)

$$l_1 = l_2 = l_3 = l = L/3 = 0,13333 \text{ m}$$

d) Matrice de rigidité totale de l'énergie de déformation

$$M_{gt} = \frac{\rho l}{301} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -61 & -12 & 0 & 0 & -61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 61 & 0 & 0 & -12 & 61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 61 & 41^2 & 0 & 0 & -61 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -61 & 0 & 0 & 41^2 & 61 & 0 & 0 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 61 & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -61 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 61 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 61 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 61 & 0 & 0 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -61 & 0 & 0 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 61 & 0 & 0 & 21^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 61 & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & -61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -61 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 61 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 0 & 0 & -61 & 21^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -61 & 0 & 0 & 21^2 & 0 & 0 & 0 & 81^2 & 61 & 0 & 0 & 21^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 61 & 12 & 0 & 0 & 61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 61 & 0 & 0 & 12 & -61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 61 & 21^2 & 0 & 0 & -61 & 41^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -61 & 0 & 0 & 21^2 & 61 & 0 & 0 & 41^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \Psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \Psi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ \Psi_3 \\ u_4 \\ w_4 \\ \theta_4 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

Avec $I = 7,854.10^{-9}m^4$ et $E = 2.10^{11} N/m^2$

e) Matrice du palier

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \\ F_\Psi \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ \Psi_3 \end{Bmatrix} \quad (2.3.5)$$

$$K_{xx} = \frac{10^5 N}{m} \quad K_{zz} = 5.10^5 N/m$$

f) Matrice du balourd

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = 1,5. 10^{-5} \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

Où $m_b. d = 1,5. 10^{-5} Kg. m$

g) Matrice globale du disque (masse et gyroscopique)

$$M_d = \begin{bmatrix} 16,47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16,47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9,247 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,247 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\Psi}_2 \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1861 \\ 0 & 0 & 0,1861 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\Psi}_2 \end{Bmatrix}$$

(2.3.7)

Avec $M_d = 16,47Kg$ $I_{dx} = 9,247 \cdot 10^{-2}Kg \cdot m^2$ Et $I_{dy} = 0,1861Kg \cdot m^2$

CHAPITRE III

ANALYSE VIBRATOIRE DU VENTILATEUR FN280

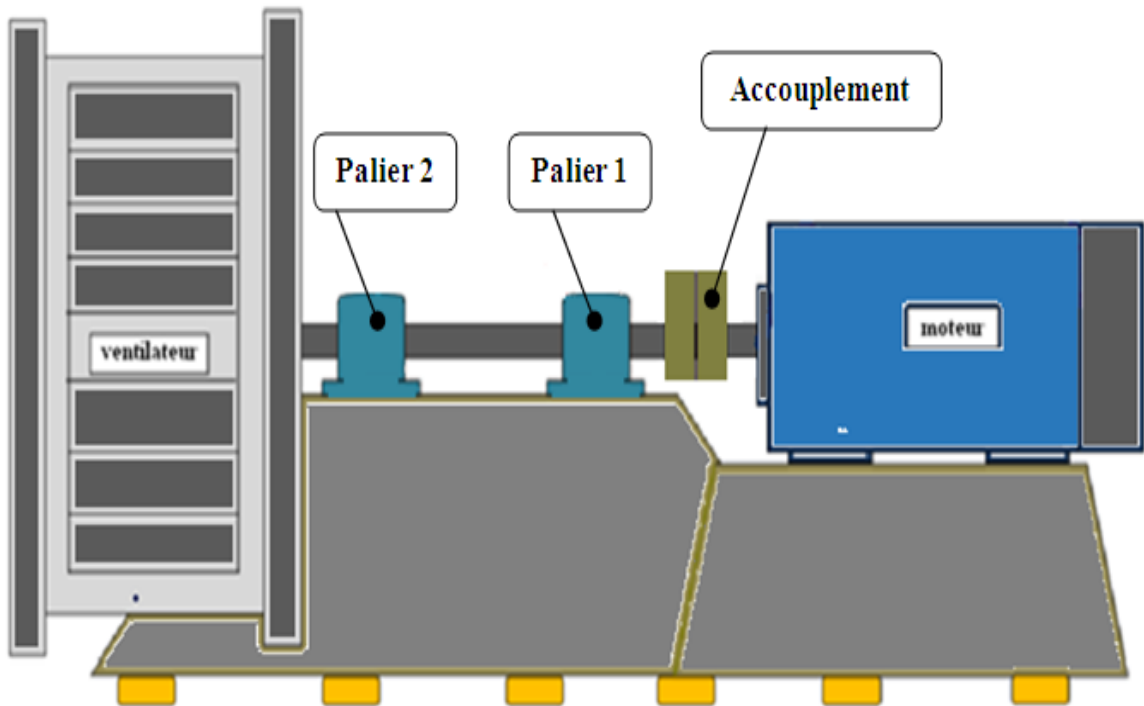
ANALYTIQUEMENT

III .Introduction

Ce chapitre sera réservé pour présenter la description du ventilateur de tirage, son principe de fonctionnement et à la fin la conception et l'analyse vibratoire du ventilateur FN280 analytiquement.

III.1 Description du ventilateur de tirage

Les ventilateurs de type FN 280 sont prévus pour le transport de gaz chauds dont la teneur en poussière non-abrasive est limitée. Le ventilateur (Figure 1) et (Figure 2) est du type aspirant sans caisson d'aspiration [12].



FigureIII.1 Diagramme du ventilateur de ciment.



FigureIII.2 : Images du ventilateur de cimenterie de LAFARGE M'silla.

Le ventilateur est constitué de la roue à aubes (11) avec moyeu d'assemblage (13), arbre (15), turbine de refroidissement (16), paliers (18) et (06) et enveloppe (17) à flasque avant (03), flasque arrière (05) et pavillon d'aspiration (02).

La roue à aubes (11) est conçue comme roue fermée constituée d'un moyeu coulé (13) auquel la roue elle-même est boulonnée.

L'ajustement entre arbre et moyeu (13) est un ajustement glissant, h/H. La roue à aubes a subi un équilibrage dynamique.

L'arbre est construit en acier d'arbre. Les paliers (18) et (06) sont à roulements à rouleaux à butée sphérique Désignation de base 22332 à voile C3 pour le palier(18) et 22328 à voile C3 pour le palier (06). Ils sont freinés sur l'arbre. L'un d'eux, conçu comme palier de guidage, est monté près du moteur. L'autre est mobile dans son corps.

Tous ces deux paliers sont montés dans des corps de paliers FLS coulés (19), montés sur le tabouret (20). Une turbine de refroidissement (16) est montée sur l'arbre à proximité de l'enveloppe vu que les ventilateurs doivent travailler à des températures supérieures à 125°C.

L'enveloppe du ventilateur est constituée de la carcasse elle-même (17), flasque avant (03), flasque arrière (05) et pavillon d'aspiration (02). L'enveloppe du ventilateur étanchée par corde de bourrage (12), est dotée d'une trappe de visite (21). La flasque avant est boulonnée à l'enveloppe.

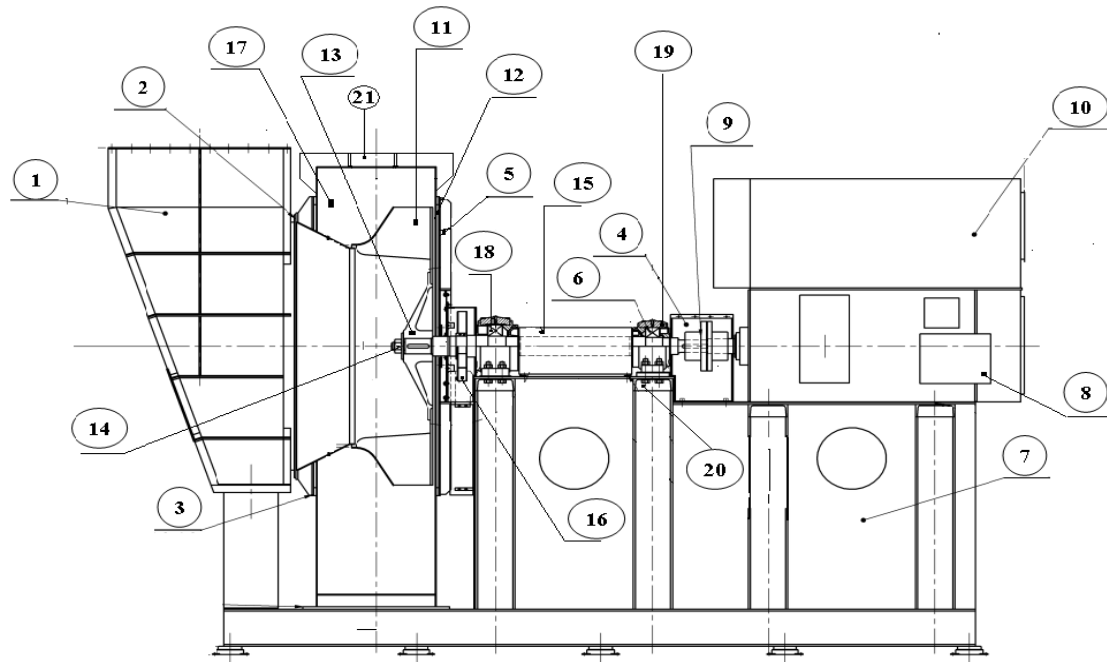


Figure III.3 Dessin d'ensemble du ventilateur FN280 [12]

- 1- Enveloppe et ouïe de refoulement. 2- pavillon d'aspiration. 3- flasque avant.
- 4- Carter d'accouplement. 5- flasque arrière. 6- Palier à roulement (22328/C3).
- 7- support moteur. 8- Moteur. 9- Accouplement flexible. 10- Protecteur moteur.
- 11- roue à aubes. 12- corde de bourrage. 13- Moyeu. 14- Ecrou. 15- Arbre.
- 16- turbine de refroidissement. 17- Enveloppe de ventilateur.
- 18- Palier à roulement (22332/C3).
- 19 - Corps de palier. 20 - Tabouret de palier. 21 - Trappe de visite.

III.2 Caractéristique technique de ventilateur

Le ventilateur comprend essentiellement :

- Un moteur d'entraînement ABB.
- Un accouplement flexible.
- Une turbine à aubes montées sur un arbre avec 2 paliers SKF, munis de roulements

à rotule sur rouleaux coniques.

Les données techniques de Ventilateur et de géométrie de la Ventilateur et de Moteur sont données dans table 1, table 2 et table 3.

Type	MTSS 224/224	
Nbre de pales	16	
température	84 C°	
vitesse	985 tr/mn	
	Palier 1	22328/C3
	Palier 2	22332/C3

TableauIII.1 Les données techniques de Ventilateur [12].

Ailette	H=8mm	$\alpha =49.2^0$	$\beta=51.6^0$
Flasque avant	$D_i=1660\text{mm}$	$D_s=2255\text{mm}$	H=15mm
Flasque arrière	$D_i=949\text{ mm}$	$D_s=2255\text{mm}$	H=15mm

TableauIII.2 Le Donnée géométrique de la Ventilateur.

Marque	ABB	
Puissance	500 kW	
Tension	11000 V	
Poids	53 Kg	
Intensité	33 A	
vitesse	995 tr/mn	
	DE	6324/C3
	NDE	6326/C3

TableauIII.3 Les Données techniques de Moteur [12].

III.3 Principe de Fonctionnement

Déplacer l'air d'un emplacement à un autre en créant une pression différentielle qui crée un courant d'air [12].

- Le moteur de commande entraîne le rotor du Ventilateur
- Le ventilateur renvoie l'air vers l'extérieur grâce à la force centrifuge
- Cela crée une pression statique négative (P_s) à l'entrée du ventilateur
- La pression atmosphérique (P_a) force l'air dans l'entrée
- L'air qui quitte le ventilateur a une pression positive.
- La Pression totale = Pression dynamique + Pression Statique ($P_t = P_s + P_d$)

III.4 .1 la conception du ventilateur FN 280 par l'logiciel SOLIDWORKS :

Les figures ci-dessous présentent la conception des pièces et leur assemblage du ventilateur FN280 en utilisant Solidworks.

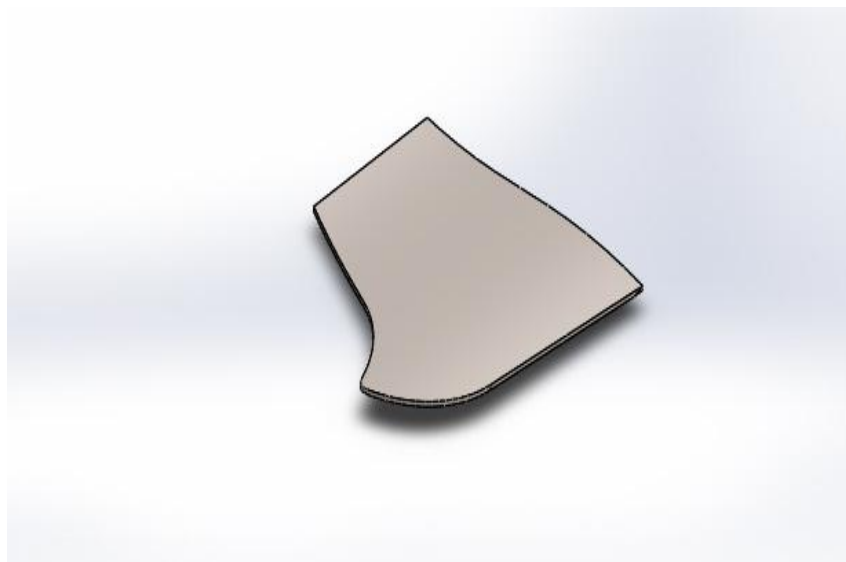


Figure III.4 Conception de l'ailette.

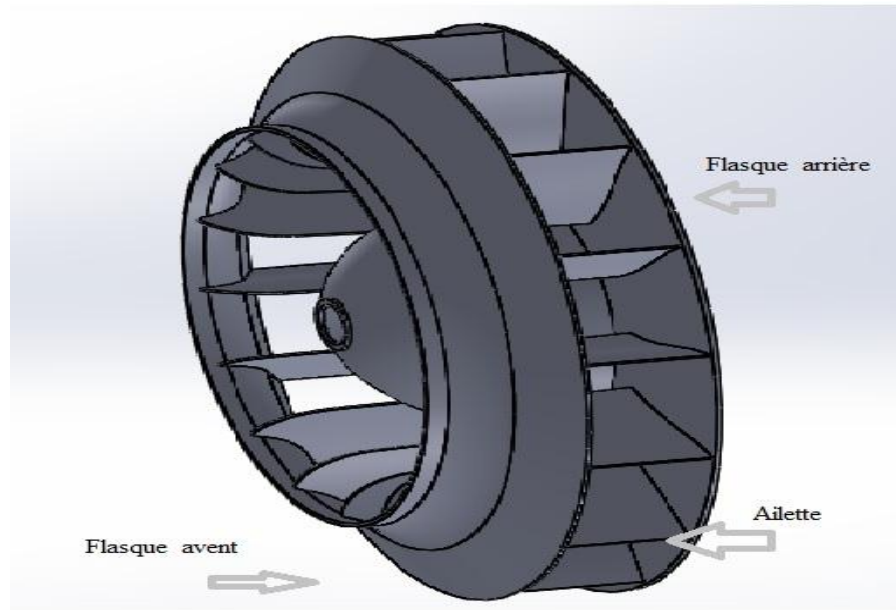


Figure III.5 : Conception de la roue.

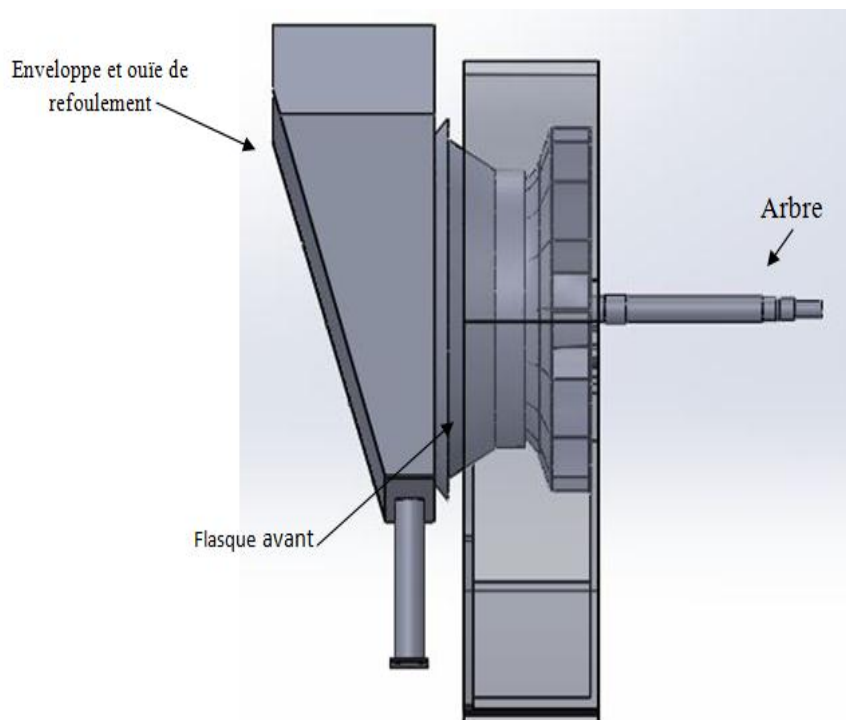


Figure III.6 : Conception 'assemblage de la FN 280

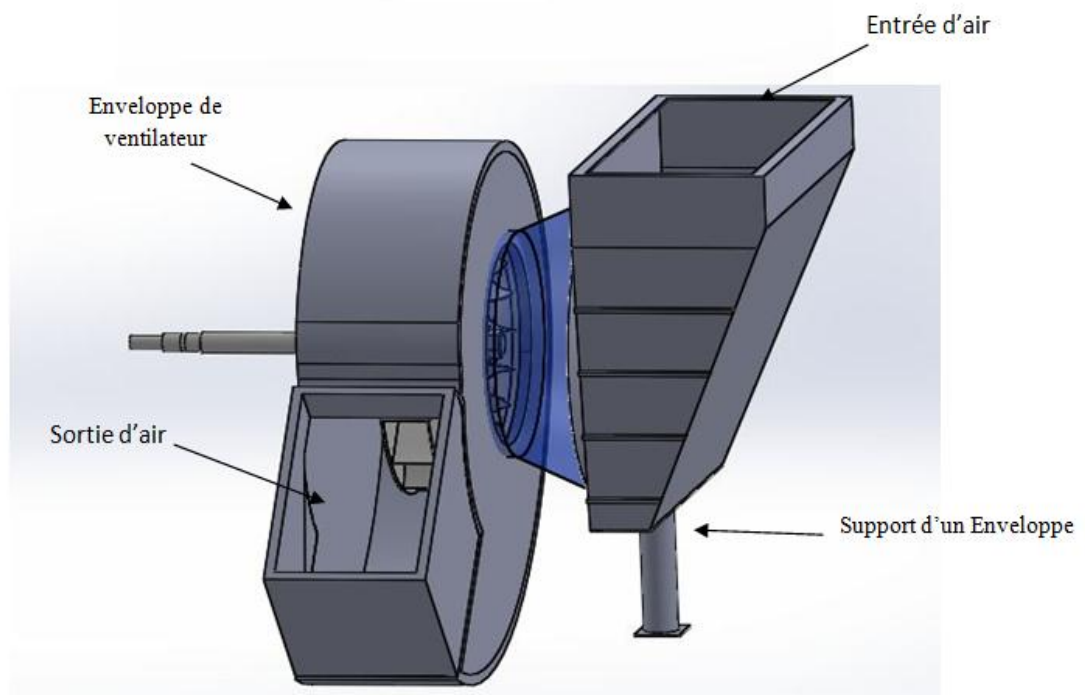


Figure III.7 Assemblage des éléments du ventilateur FN280.

III.4.2 Lamise en équations du comportement du FN280

III.4.2.1 Le modèle étudié :

Noter rotor (Le ventilateur FAN 280) modélisé est par la figure .III.8

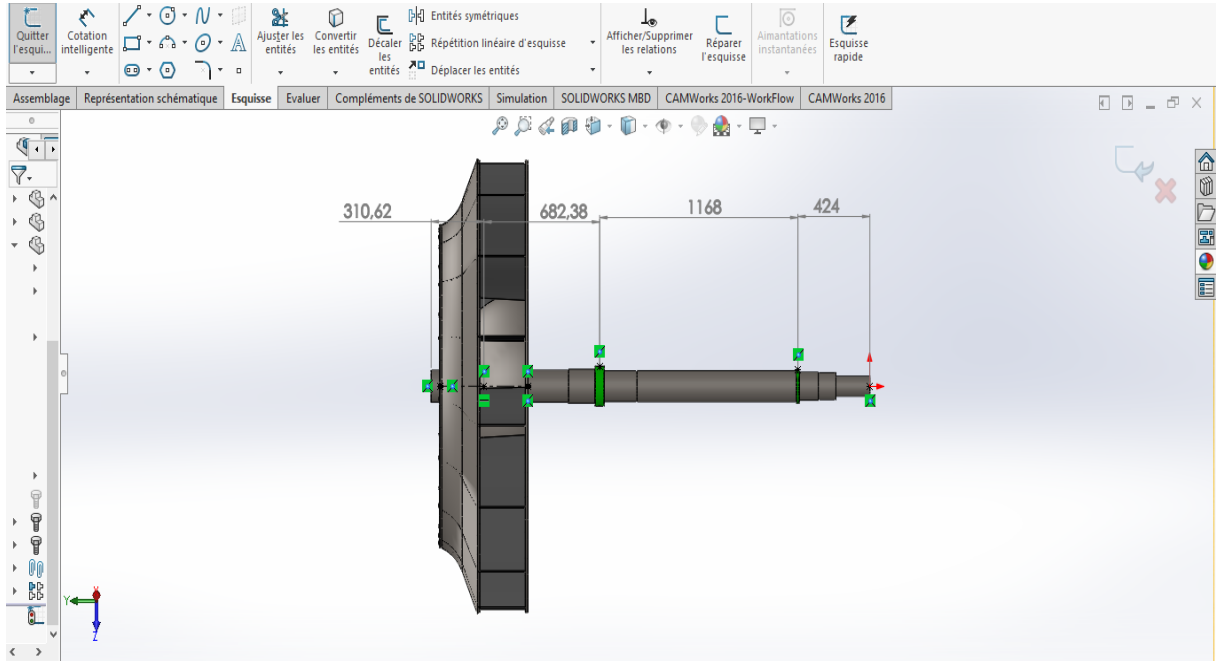


Figure III.8 Schématisation du modèle étudié

Les données numériques communes du cas étudié sont :

Exemple : données

Disque :

$$Y = 2.585 \text{ m}$$

$$R = 0.085 \text{ m}$$

$$\text{Masse volumique } \rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

La masse et les inerties du disque sont :

$$M_d = 11.3341508 \text{ kg}$$

$$I_{dx} = I_{dz} = 7.056178787868181 * 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

Arbre :

$$\text{Langueur } L = 2.2743 \text{ m}$$

$$\text{Rayon de section droite } R = 0.085 \text{ m}$$

$$\text{Masse volumique } \rho = 7850 \text{ kg / m}^3$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

L'aire de la section droite et le moment d'inertie sont :

$$S = \pi R^2 = 2.26865 * 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi R^4}{4} = 4.097 * 10^{-5} \text{ m}^4$$

Balourd :

$$\text{Masse } m_b = 10^{-4} \text{ kg}$$

$$\text{Distance } d = 0.865 \text{ m}$$

Les fonctions de déplacement sont celles du premier mode d'une poutre de section constante, en flexion et appuyée aux deux extrémités, soit :

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} = \sin \frac{\pi y}{2.2743}$$

Les expressions générales de l'énergie cinétique T , de l'énergie de déformation U et du travail virtuel δW peuvent être obtenues.

L'énergie cinétique a pour expression :

$$T = T_d + T_a + T_b$$

Ou T_d, T_a, T_b sont les énergies cinétiques respectives du disque, de l'arbre, du balourd.

Tous calculs faits, on a :

$$T = 2.12(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 0.87\Omega\dot{q}_1q_2 + 8.09 * 10^{-4}\Omega(\cos \Omega t\dot{q}_1 - \sin \Omega t\dot{q}_2)$$

$$(1.44)$$

L'énergie de déformation à pour expression :

$$U_a = 16.92 * 10^{-3}(q_1^2 + q_2^2) \quad (1.45)$$

III4.2.2 Modèle symétrique

L'application des équations de Lagrange (1.43) en utilisant les expressions (1.44) et (1.45) conduit aux équations mouvement :

$$\begin{aligned} 4.8\ddot{q}_1 - 0.87\Omega\dot{q}_2 + 3.76 * 10^4 q_1 &= 0.80 * 10^{-3}\Omega^2 \sin \Omega t \\ 4.8\ddot{q}_2 + 0.87\Omega\dot{q}_1 + 3.76 * 10^4 q_2 &= 0.80 * 10^{-3}\Omega^2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (1.46)$$

Qui, sous forme générale s'écrivent :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 &= m_b d\Omega^2 f(l_1) \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 &= m_b d\Omega^2 f(l_1) \cos \Omega t \end{aligned} \quad (1.47)$$

III4.2.3 Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation

Diagramme de Campbell

Le rotor est tout d'abord étudié en mouvement libre. Seule la solution de système (1.49) sans second membre, est considérée :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 &= 0 \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.49)$$

La deuxième matrice, représente l'effet gyroscopique. Les deux autres matrices sont les matrices de masse et de raideur. Les solutions des équations sont de la forme :

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 \exp(rt) \\ q_2 = Q_2 \exp(rt) \end{cases} \quad (1.50)$$

En remplaçant (1.52) dans (1.51) , il vient :

$$\begin{bmatrix} k + mr^2 & -a\Omega r \\ a\Omega r & k + mr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.51)$$

La solution simple $Q_1 = Q_2 = 0$ est sans intérêt et les autres solutions sont celles qui correspondent à l'annulation du déterminant de matrice. Le calcul du déterminant donne l'équation caractéristique :

$$(k + mr^2)^2 + a^2\Omega^2 r^2 = 0$$

$$m^2 r^4 + (2km + a^2\Omega^2)r^2 + k^2 = 0 \quad (1.52)$$

A l'arrêt ($\Omega = 0$), les racines r_{10} et r_{20} de (1.52) sont :

$$r_{10}^2 = r_{20}^2 = j^2 \omega_{10}^2 = j^2 \omega_{20}^2 = -\frac{k}{m} \quad (1.53)$$

Avec $j^2 = -1$

Et les pulsations :

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.54)$$

En rotation ($\Omega \neq 0$), les racines de (1.52) sont r_1 et r_2 et les pulsations correspondantes ω_1 et ω_2 . Il vient :

$$r_1^2 = - \left[\omega_{10}^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_{10}^2}{a^2\Omega^2}} \right) \right] = j^2 \omega_1^2 \quad (1.55)$$

Alors :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_{10}^2}{a^2\Omega^2}} \right)} \quad (1.56)$$

Et :

$$r_2^2 = \left[\omega_{10}^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_{10}^2}{a^2\Omega^2}} \right) \right] = j^2 \omega_2^2 \quad (1.57)$$

Alors :

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (1.55)$$

A partir de (4.56) et (4.58) il est clair que :

$$\omega_1 < \omega_{10} = \omega_{20} < \omega_2 \quad (1.56)$$

De plus, les équations (1.55) et (1.57) montrent que r_1^2 et r_2^2 sont des quantités négatives ; ainsi sont des quantités imaginaires et la solution générale du mouvement reste donc limitée dans le temps, le rotor est stable. La représentation de ω en fonction de la vitesse de rotation, $\omega_1 = \omega_1(\Omega)$ et $\omega_2 = \omega_2(\Omega)$ est le diagramme de Campbell. En générale le diagramme de Campbell représente f_1 et f_2 :

$$\begin{aligned} f_1 &= \omega_1 / 2\pi \\ f_2 &= \omega_2 / 2\pi \end{aligned} \quad (1.60)$$

En fonction de la vitesse de rotation N (tr/min) qui est reliée à Ω (rad/s) par :

$$N = 30\Omega / \pi \quad (1.61)$$

Ici ω et Ω sont des pulsations et f une fréquence. Dans ce qui suit les trois quantités sont simplement appelées fréquences. Compte tenu des symboles utilisés, il est facile de savoir de quelle unité il s'agit. Les formes modales (modes) sont examinées ensuite. La première équation de (1.51) donne :

$$Q_1 = \frac{a\Omega r Q_2}{k + mm^2} \quad (1.62)$$

Il est clair que les modes sont complexes ($r = \pm j \omega$) et leur interprétation délicate. Choisissons l'ensemble de conditions initiales suivant, à $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} q_1 = q_{10} \\ \dot{q}_1 = 0 \\ \dot{q}_2 = -\omega_2 q_{10} \end{cases} \quad (1.63)$$

Tous calculs faits, il vient :

$$\begin{aligned} q_1 &= -q_{10} \cos \omega_2 t \\ q_2 &= q_{10} \sin \omega_2 t \end{aligned} \quad (1.64)$$

Les déplacements u et v d'un point situé à de l'origine de l'axe du rotor sont donnés par (1.32), soit :

$$\begin{cases} u(l, t) = q_{10} \sin \frac{\pi l}{L} \cos \omega_2 t = R \cos \omega_2 t \\ u(l, t) = -q_{10} \sin \frac{\pi l}{L} \sin \omega_2 t = -R \sin \omega_2 t \end{cases} \quad (1.65)$$

Tel que :

$$R = \sqrt{u^2(l, t) + w^2(l, t)} = q_{20} \sin \frac{\pi l}{L} \quad (4.66)$$

Pour notre cas le rotor est défini par les équations :

Tel que :

$$R = \sqrt{u^2(l, t) + w^2(l, t)} = q_{20} \sin \frac{\pi l}{L}$$

(4.66)

Pour notre cas le rotor est défini par les équations :

$$r^4 + (1.517 * 10^4 + 3.69 * 10^{-2} \Omega^2) r^2 + 5.58 * 10^{11} = 0$$

(1.67)

Les fréquences à l'arrêt du rotor sont :

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{7,68 * 10^5 + 2,347 * 10^{-2} \Omega^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{6.544 * 10^7}{\Omega^2}} \right)} \quad (1.69)$$

$$f_2 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{7.68 * 10^5 + 2,347 * 10^{-2} \Omega^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{6.544 * 10^7}{\Omega^2}} \right)} \quad (1.70)$$

$$f_{10} = \frac{\omega_{10}}{2\pi} = f_{20} = \frac{\omega_{20}}{2\pi} = 206.92 \text{ Hz} \quad (1.71)$$

Les fréquences en rotation sont :

Le diagramme de Campbell [$f_1 = f_1(N)$, $f_2 = f_2(N)$] est présenté sur la figure I. 10 et les intersections de $f_1(N)$, $f_2(N)$ avec deux droites sont indiquées .Les points C points A et B correspondent aux intersections avec la droite $f = N/60$; à c e s deux points une

fréquence du rotor égale la fréquence de rotation. Les points C et D correspondent à une fréquence du rotor égale à la moitié de la fréquence de rotation. Les points C et D correspondent aux intersections avec la droite $f = 0.5 N/60$; ces deux points correspondent à une fréquence du rotor égale à la moitié de la fréquence de rotation. Il est intéressant d'avoir une expression générale des fréquences correspondant aux points A, B, C, D.

La relation entre ω et Ω est :

$$\omega = s\Omega \quad (1.71)$$

Où $S = 1$ en A et B, $S = 0,5$ en C et D, les expressions $r_1^2 = j^2\omega_1^2$ et $r_2^2 = j^2\omega_2^2$ permettent d'écrire :

$$r = \pm j\omega = \pm js\Omega \quad (1.72)$$

Substituent dans (1.52) on trouve :

$$s^4 m^2 \Omega^4 - (2km + a^2 \Omega^2) s^2 \Omega^2 + k^2 = 0$$

$$s^2 (s^2 m^2 - a^2) \Omega^4 - 2kms^2 \Omega^2 + k^2 = 0 \quad (1.73)$$

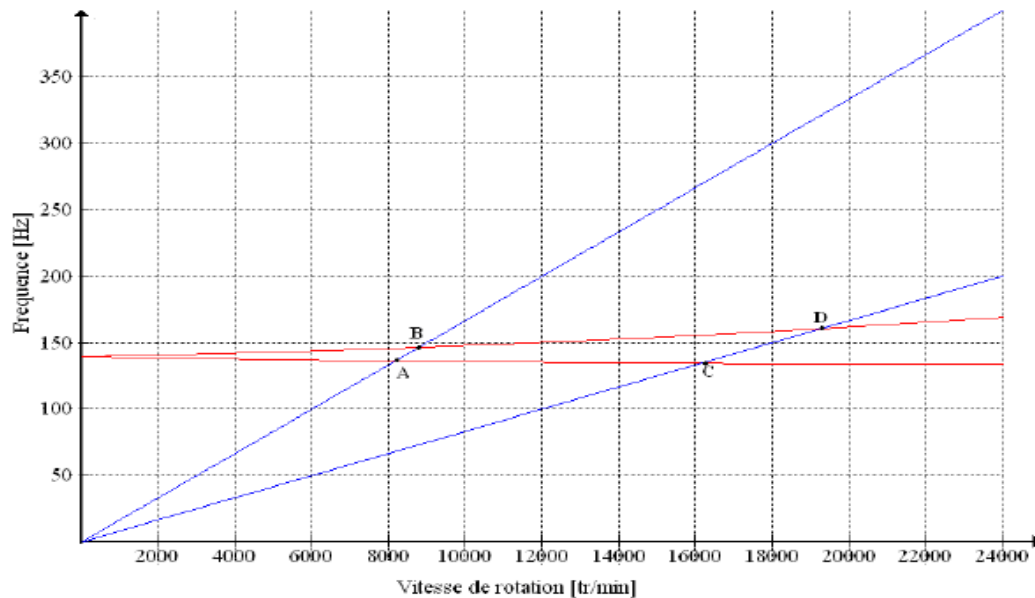


Figure III.09 Diagramme de Campbell pour modèle étudié

Les solutions de (1.73) sont :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (1.74)$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (1.75)$$

Et à partir de (1.71) on tire la fréquence ω_1 qui correspond aux points A(s=1) et C(s=0,5)

$$\omega_1 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (1.76)$$

Et de (1.71) ω_2 qui correspond aux points B (s=1) et D(s=0,5)

$$\omega_2 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (1.77)$$

Pour l'application :

- en A : $f_1 = 135,5 \text{ Hz}$; $N = 8190 \text{ tr/min}$
- en B : $f_2 = 146,5 \text{ Hz}$; $N = 8795 \text{ tr/min}$
- en C : $f_1 = 134,7 \text{ Hz}$; $N = 16170 \text{ tr/min}$
- en D : $f_2 = 160,5 \text{ Hz}$; $N = 19260 \text{ tr/min}$

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Dans le travail présenté ici on s'est intéressé à l'étude et l'analyse des arbres et rotors flexibles par leur modélisation analytique et numérique. Aussi l'effet des conditions aux limites sur les fréquences naturelles et les réponses aux sollicitations extérieures est étudié. Une compréhension fine des problèmes vibratoires associés aux systèmes tournants constitue à l'heure actuelle un enjeu majeur dans le domaine industriel. Il est nécessaire de comprendre et prédire précisément le comportement vibratoire afin d'optimiser le comportement dynamique et de dimensionner au mieux les systèmes. Ainsi, pour éviter les réponses de fortes amplitudes qui peuvent mener à leur destruction, les fréquences naturelles du système doivent être distinctes des fréquences d'excitations dans tout le domaine de fonctionnement. Pour cela l'étude s'est articulée sur plusieurs étapes.

En premier, un historique sur l'évolution des études sur les corps continus en rotation est donné pour montrer la grande importance du domaine qui est appelé la dynamique des rotors.

Ensuite les fondements de la mécanique vibratoire et de l'analyse modale sont exposés car ils aident à comprendre tous les phénomènes physiques que l'on rencontre dans l'analyse dynamique des arbres et rotors. Dans ceux-ci on a revu les phénomènes de composition de mouvements harmoniques (courbes de Lissajous) que l'on rencontre dans les vibrations de rotation. Les fonctions de formes pour les différentes conditions aux limites ont été retrouvées.

Les caractéristiques dynamiques vibratoires fondamentales des corps en rotation sont étudiées et analysées en utilisant des modèles de rotors simples tels que le modèle de Laval-Jeffcott.

Celui-ci a permis de comprendre le phénomène du tournoiement (whirling) et les vitesses critiques et cela en considérant des paliers rigides ou flexibles.

Pour l'étude des vibrations continues proprement dite, le modèle de Lalanne-Ferraris a été choisi. C'est un modèle qu'un grand nombre de personnes ont utilisé dans leurs travaux de recherche. Mais il se trouve qu'ils prennent tous la fonction de déplacement la plus simple prise par Lalanne et Ferraris qui correspond aux conditions aux limites appuyé-appuyé qui représentent des paliers rigides. Ici des conditions différentes sont prises dans l'analyse. Il s'agit des conditions appuyé-libre pour lesquelles les fréquences et les modes propres ainsi que les réponses aux sollicitations extérieures telles que le balourd et les forces

asynchronessont analysées et cela pour un modèle symétrique, un modèle dissymétrique et un modèle amorti dissymétrique.

Les résultats obtenus par la méthode de Rayleigh Ritz sont comparés au cas de Lalanne et Ferraris et l'effet du changement des conditions aux limites est très clair. Un point qui est à prendre sérieusement en considération surtout lors de l'élaboration de code de calculs.

Enfin la modélisation par éléments finis est exposée avec le développement des équations générales ainsi que les matrices élémentaires des différents éléments du rotor et un exemple de montage des matrices globales. Celle-ci est utilisée pour des systèmes très complexes car elle traite tous les modes ensemble de vibrations alors que la méthode de Rayleigh Ritz ne peut traiter qu'un seul mode à chaque la fois.

Pour des travaux futurs, il est possible de faire la même analyse pour les autres conditions aux limites dont les fonctions de déplacement sont plus complexes. Il est possible de faire une étude comparative sur l'effet des caractéristiques des paliers et leur nature sur le comportement dynamique vibratoire.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] mémoire de magister<Identification et modélisation par éléments finis des charges dynamiques du rotor principal d'hélicoptère> Chellil Ahmed
- [2] mémoire de magister<*ANALYSE DYNAMIQUE DESCORPS CONTINUS EN ROTATION* : *APPLICATION AUX ARBRES MOTEURS*> BELAHRACHE Saliha, Née DJERRI
- [3] Jeffcott H.H a examine l'effet du balourd sur les amplitudes du mouvement rotatif et les Forces transmises aux roulements
- [4] Mémoire < Méthode des Eléments Finis en Thermique et en Thermo-mécanique > L. CHAMPANEY
- [5] P, BERTHIER, g, FERRARIS, M , LALANNE, « prédiction du comportement dynamique des moteurs d'avions : vitesse critiques - effets de balourds » journal de mécanique théorique et appliquée , Vol,5, n°4,(1986),
- [5] Jeffcott , H,H,, "The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of whirling speed_the effect want of balance ", Phil,Mag., 37,304,(1919),

Résumé

Le progrès technologique exige sans cesse des systèmes plus performants. Pour les machines tournantes, de grandes puissances et des vitesses très élevées sont parmi les objectifs voulus. Cependant, les problèmes vibratoires liés à leurs éléments principaux tels que les arbres et les rotors sont des phénomènes qui demeurent encore préoccupants malgré les progrès réalisés dans la conception. Ces derniers qui sont dus, par exemple, aux inévitables défauts d'usinage et de montage limitent les performances des machines en affectant leur fonctionnalité et leur rentabilité. Ils peuvent causer des dégâts sérieux ou mener à leurs ruines. Une compréhension complète du comportement vibratoire et une connaissance suffisante sur la dynamique des rotors sont donc nécessaires pour trouver les moyens d'éviter ou de réduire ou de supprimer les vibrations. Initialement, les premiers soucis et efforts étaient de prédire les vitesses de rotation critiques de résonance et après avoir modifié la conception pour les changer afin de les éviter. Mais, il a longtemps été observé que quand les vitesses d'opération dépassèrent les vitesses critiques des problèmes indésirables variés d'instabilité apparaissaient.

Le problème principal dans l'étude dynamique des arbres et rotors est la détermination des vitesses critiques. Le concept de ces dernières est montré à l'aide du modèle simple De Laval Jeffcott où une excentricité du centre de gravité cause la déflexion élastique qui dépend de la vitesse de rotation et peut avoir des valeurs extrêmement grandes voir infinies en théorie (phénomène de résonance).

Le travail présenté dans cette thèse concerne l'analyse du comportement dynamique vibratoire d'un ventilateur de tirage ciment.

ملخص:

التقدم التكنولوجي يتطلب أنظمة أكثر فعالية من أي وقت مضى. بالنسبة للأجهزة الدوارة، تعد الطاقة العالية والسرعات العالية من بين الأهداف المرجوة. ومع ذلك، فإن المشاكل الاهتزازية المتعلقة بعناصرها الأساسية مثل المحاور والدورات هي ظواهر لا تزال مقلقة على الرغم من التقدم المحرز في التصميم. هذه، على سبيل المثال، بسبب أخطاء تصنيع وتجميع لا مفر منها، تحد من أداء الماكينة من خلال التأثير على الأداء الوظيفي والربحية. يمكن أن تسبب أضرارًا خطيرة أو تؤدي إلى أنقراضهم. لذلك فإن الفهم الكامل لسلوك الاهتزاز والمعرفة الكافية لديناميكيات الدوار ضروريًا لإيجاد طرق لتجنب أو تقليل الاهتزازات أو التخلص منها. في البداية، كانت المخاوف والجهود الأولى هي التنبؤ بسرعات دوران الرنين الحرجة وبعد تعديل التصميم لتغييرها من أجل تجنبها. ولكن، منذ فترة طويلة لوحظ أنه عندما تجاوزت سرعات التشغيل ظهرت سرعات حرجة من مختلف المشاكل غير المستقرة لعدم الاستقرار. المشكلة الرئيسية في الدراسة الديناميكية للمحاور والدورات هي تحديد السرعة الحرجة. يظهر مفهوم الأخير باستخدام النموذج البسيط لـ Laval Jeffcott حيث يؤدي انحراف مركز الجاذبية إلى انحراف مرن يعتمد على سرعة الدوران ويمكن أن يكون له قيم كبيرة جدًا أو قيمًا غير محدودة من الناحية النظرية (ظاهرة الرنين). العمل المقدم في هذه الرسالة يتعلق بتحليل السلوك الديناميكي الاهتزازي لمروحة الاسمنت.