

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté par

Azedine RAHMOUNE

En vue de l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Option : Analyse et mathématique discrète

Sujet du mémoire

RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS INTEGRALES



Soutenu le : 30 /06 / 2004
Devant le jury composé de :

Président :	Madani. MOUSSAÏ	Professeur	M'SILA
Promoteur :	Mostefa. NADIR	Maître de conférence	M'SILA
Examineurs :			
	Brahim. BOUDERAH	Maître de conférence	M'SILA
	Naceurdine. BENSALEM	Maître de conférence	UFA (Sétif)
	Lahçen. MAZRAG	Maître de conférence	M'SILA
	Belkaçem. LAKHALI	M.A.C.C	M'SILA

RESUME

Dans ce travail nous proposons une nouvelle méthode de résolution numérique des équations intégrales, en particulier celles de Volterra de seconde espèce. L'idée principale de cette construction est l'adaptation de la formule de quadrature de Simpson, ainsi pour voir la performance et l'efficacité de cette méthode, nous allons contribuer à l'étude du comportement de l'erreur face à des problèmes différents, en outre on établit une comparaison avec deux méthodes, celle des trapèzes (voir [8]) et une méthode adaptative (voir [14]).

Mots clés : *Equation intégrale, équation de Volterra, équation de Fredholm, méthode des trapèzes, méthode adaptative, Simpson modifiée.*

ABSTRACT

In this work, we develop a new approach for solving integral equations, in particular, Volterra integral equations of the second kind, the simple idea in this approach is based on the adaptation of Simpson's quadrature, we also present numerical examples which show the performance and efficiency of this method in some cases.

Keywords: *Integral equations, Volterra equations, Fredholm equations, trapezes method, adaptive method, modified Simpson's method.*

Remerciements

Premièrement et particulièrement, je tiens à remercier vivement mon promoteur M Nadir. Mostefa pour sa guidance et son soutien indéfectible durant la préparation de ce projet, dès le début sa confiance à mon égard et à mon travail m'a donnée une énergie et une inspiration de soulever toutes les difficultés.

Aussi je tiens à remercier par l'occasion qui m'est offerte, l'enseignant Lakhali. B, pour son encouragement et son aide fidèle.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'il me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Enfin, je tiens à remercier mes parents pour leur soutien exemplaire et leurs sacrifices loyaux durant ces longues années de quête sur la voie du savoir.

Dédicace

A mes parents

SOMMAIRE

Titres	Pages
INTRODUCTION	0
CHAPITRE I	
1-Notions fondamentales et définitions	1
1.1. Opérateur intégral linéaire.....	1
1.2. Opérateur adjoint	1
1.3. Opérateur compact	1
1.4. Equations intégrales linéaire et leurs classifications.....	3
1.4.1. Equations intégrales de Fredholm	4
1.4.2. Equations intégrales de Volterra	4
1.4.3. Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales deVolterra	5
<i>Théorème de Riesz</i>	6
<i>Alternative de Fredholm</i>	7
CHAPITRE II	
2. Méthodes d' approximations pour les équations intégrales	8
2.1 Méthodes Classiques	8
2.1.1. Séries de Neumann	8
<i>Théorème de Banach</i>	8
2.1.2. Méthode des approximations successives	10
2.1.3. Méthode de Nyström	12
2.2. Méthodes du noyau dégénéré	13
2.2.1. Notions générales sur l'interpolation	15
2.2.2. Interpolation polynomiale	15
<i>Théorème d'approximation de Weierstrass</i>	15
<i>Théorème de Korovkin</i>	15
2.2.3 Interpolation du noyau	16
2.3. Méthodes de la base finie	16
2.3.1 Méthodes de Projection	16
<i>Théorème de Banach - Steinhau</i>	17
<i>Théorème CNS de convergence des méthodes de projection</i>	19
2.3.2 Méthode de Galerkin	20
CHAPITRE III	
3. Résolution numérique des équations intégrales	22
3.1 Equations intégrales de Volterra	22
3.1.1 Méthode des trapèzes	22
3.1.2 Méthode adaptative	24

3.1.3 Méthode de Simpson Modifiée	26
3.1.4 Etude comparative des trois méthodes	28
▪ Sur un problème a solution oscillatoire	28
▪ Sur un problème a solution quadratique polynomiale	29
▪ Sur un problème a solution exponentielle	30
3.2 Equations intégrales de Fredholm	32
▪ Première méthode	32
▪ Deuxième méthode	33

ANNEXE

1 Notions générales et rappel	35
<i>Formule de Sokhotski-pelmelj</i>	<i>36</i>
2 Problème d'Hilbert-Privalov.....	37
3 Equations intégrales de deuxième espèce à noyau de Cauchy	40

PROGRAMMES (En Pascal).....	43
------------------------------------	-----------

1 Equations de Volterra de seconde espèce

➤ Méthode des trapèze.....	44
➤ Méthode adaptative.....	45
➤ Méthode de Simpson modifiée.....	46

2 Equation de Fredholm de seconde espèce :

➤ Méthode de Gauss Seidel.....	47
➤ Méthode des itérations successives.....	48

CONCLUSION GENERALE.....	49
---------------------------------	-----------

BIBLIOGRAPHIE	50
----------------------------	-----------

❖ **Liste des exemples numériques**

Exemple 1	25
Exemple 2	28
Exemple 3	29
Exemple 4	30
Exemple 5	33

❖ **Liste des tableaux (résultats)**

Tableau 1	25
Tableau 2	27
Tableau 3	33

❖ **Liste des graphes**

Schéma 1. Exemple 1	28
Schéma 2. Exemple 2	29
Schéma 3. Exemple 3	29
Schéma 4. Exemple 4	30
Schéma 5. Exemple 4	31

INTRODUCTION

Les méthodes numériques de résolution des équations intégrales jouent un rôle très important dans plusieurs investigations scientifiques, avec l'avantage des machines de computation numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour attaquer les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles, à savoir impossible à résoudre dans le passé.

Ainsi, de ce qui concerne notre sujet il existe un grand nombre de méthodes numériques utilisées dans les différentes branches de la recherche scientifique, de ce fait, il est impossible alors de recouvrir le tout, ce qui rend notre présentation ne se veut ni exhaustive, ni trop théorique, cependant le but est d'insister sur la pluridisciplinarité des méthodes rencontrées que l'on peut regrouper selon trois axes :

- ♦ La théorie mathématique, essentiellement l'analyse fonctionnelle des équations intégrales qui permet d'analyser le problème, de prouver l'existence de solution et surtout d'exhiber des méthodes efficaces d'approximation.
- ♦ L'analyse numérique, qui étudie ces méthodes, principalement dans le cadre des mathématiques discrètes (approximation des quantités qui se présentent sous le signe intégrale via des règles de quadratures, interpolation polynomiale, ...) et la résolution itérative des systèmes linéaires.
- ♦ La programmation sur machine, qui retranscrit ses méthodes sous forme d'algorithmes efficaces.

Suivant ces axes normaux, notre travail est partagé en trois parties :

Chapitre I : Rappel sur la théorie des opérateurs intégraux, et plus précisément le théorème de Riesz, et celui de Fredholm concernant la solubilité des équations intégrales.

Chapitre II : Méthodes d'approximations pour les équations intégrales ; dont on a proposé une variété de méthodes avec leurs conditions d'approximations.

Chapitre III : C'est une partie purement pratique, elle met en oeuvre certaines techniques de résolutions des équations intégrales (celles de Volterra, et celles de Fredholm) par les méthodes de Nyström, du fait de leur popularité, dont on a proposés avec détail les étapes de discrétisation de l'équation intégrale de Volterra de second type avec l'application de trois méthodes (trapèzes [8], adaptative [14], et celle de Simpson modifiée qu'on propose)

Ensuite ces parties sont suivies d'une annexe, dans le but de prouver le lien qui existe entre le Problème d'Hilbert-Privalov et les équations intégrales singulières avec noyau de Cauchy.

1 Notions fondamentales et définitions :

Notons tout d'abord qu'on se place dans la majeure partie des cas dans l'espace $C[a, b]$ des fonctions continues de l'intervalle $[a, b]$ dans R ou C , muni du produit scalaire :

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx$$

et de la norme de convergence uniforme : $\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|$

1.1 Opérateur intégral linéaire :

Soit $K : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow R$ une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire sur $C[a, b]$ est défini par la formule suivante :

$$A : \varphi \in C[a, b] \rightarrow A\varphi \in C[a, b] \quad 1.1$$

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b \varphi(y)K(x, y)dy \quad 1.2$$

Dans ce contexte la fonction K s'appelle *noyau* de l'opérateur intégral A .

1.2 Opérateur adjoint :

On dit que deux opérateurs $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ et $B : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ sont *adjoints* s'ils vérifient :

$$\forall (\varphi, \psi) \in C[a, b]^2, \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, B\psi \rangle \quad 1.3$$

et on note l'adjoint de A par A^* .

1.3 Opérateur compact :

Soient E et F deux espaces normés, A un opérateur linéaire de E dans F , on dit que A est un *opérateur compact* si l'image de la boule unité $B(0, 1)$ de E (par A) est relativement compacte dans F , i.e. si $\overline{A(B(0, 1))}$ est compacte.

Autrement dit, A est *compact* si pour toute suite (φ_n) de $B(0, 1)$ de E , on peut extraire une sous suite (φ_{n_k}) que transforme A en une suite convergente $(A(\varphi_{n_k}))$ dans F .

Théorème 1 :

Soit un opérateur intégral A défini à partir d'un noyau K continu sur $[a, b] \times [a, b]$ par la formule

$$\forall x \in [a, b], A\varphi(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy \quad 1.4$$

Alors l'opérateur A admet un unique opérateur adjoint A^* pour le produit scalaire usuel de L^2 , défini par :

$$\forall x \in [a, b], A^* \psi(x) = \int_a^b K(y, x) \psi(y) dy \quad 1.5$$

Preuve :

Pour φ et ψ deux fonctions de $C[a, b]$ on écrit

$$\begin{aligned} \langle A(\varphi), \psi \rangle &= \langle \varphi, A^*(\psi) \rangle \Leftrightarrow \int_a^b \varphi(y) A^*(\psi(y)) dy = \int_a^b A(\varphi)(x) \psi(x) dx \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy \right] \psi(x) dx. \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Fubini relatif aux intégrales doubles, on établit que

$$\begin{aligned} \langle A(\varphi), \psi \rangle &= \int_a^b \int_a^b [K(x, y) \psi(x) dx] \varphi(y) dy \\ &= \int_a^b \varphi(y) \left[\int_a^b K(x, y) \psi(x) dx \right] dy = \int_a^b \varphi(y) A^*(\psi)(y) dy \end{aligned}$$

il en résulte que l'adjoint A^* est défini par

$$\forall x \in [a, b], A^* \psi(x) = \int_a^b K(y, x) \psi(y) dy. \quad [3]$$

Théorème 2 :

L'opérateur intégral défini en (1.1) est compact sur $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. [3]

Preuve :

Désignons par B la boule unité de $C[a, b]$, de montrer que notre opérateur est compact on s'inspire du théorème d'Ascoli, il suffit d'établir que

- $H = A(B)$ est équicontinu.

- pour tout $x \in [a, b]$, l'ensemble $H_x = \{\varphi(x) / \varphi \in H\}$ est relativement compact.

On remarque en premier que K est uniformément continue sur $[a, b] \times [a, b]$. Pour tout φ de B et tout x, x' de $[a, b]$ on écrit

$$\begin{aligned}
|A\varphi(x) - A\varphi(x')| &= \left| \int_a^b [K(x, y) - K(x', y)]\varphi(y)dy \right| \\
&\leq \int_a^b |K(x, y) - K(x', y)| |\varphi(y)| dy \\
&\leq \|\varphi\| \int_a^b |K(x, y) - K(x', y)| dy \\
&\leq \int_a^b |K(x, y) - K(x', y)| dy.
\end{aligned}$$

La continuité uniforme de K sur $[a, b] \times [a, b]$ permet d'associer à tout réel $\varepsilon > 0$ et autre réel $\alpha > 0$ de sorte que

$$|x - x'| \leq \alpha \Rightarrow |K(x, y) - K(x', y)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 / \forall x, x' \in [a, b] \quad |x - x'| \leq \alpha \Rightarrow |A(\varphi)(x) - A(\varphi)(x')| \leq \varepsilon \quad \forall \varphi \in B$,

ce qui signifie que H est équicontinu.

Passons à la seconde condition.

Pour que l'ensemble :

$$H_x = \{g(x) = A\varphi(x), \varphi \in B\}$$

soit relativement compact, il suffit qu'il soit borné.

calculons à cet effet :

$$|A\varphi(x)| = |g(x)| = \left| \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy \right| \leq \|\varphi\| \int_a^b \sup_{x, y \in [a, b]} |K(x, y)| dy \leq (b - a)M$$

où $M = \sup_{x, y \in [a, b]} |K(x, y)|$.

Il apparaît ainsi que H_x est borné, ce qui achève la démonstration.

1.4 Equations intégrales linéaires et leurs classifications :

On appelle *équation intégrale linéaire* une équation où la fonction inconnue figure sous le signe \int . C'est en générale l'équation par rapport à $\varphi(y)$

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_T K(x, y)\varphi(y)dy \quad 1.6$$

avec $f(x)$, $K(x, y)$ des fonctions connues, λ un paramètre numérique et $\varphi(y)$ la fonction inconnue. T un ensemble borné fermé d'un espace euclidien à n dimensions (x et y des points de cet espace), nous étudierons le cas unidimensionnel (i.e. les variables x et y parcourent un intervalle (a, b)), et $\lambda = 1$.

Une importante classification des équations intégrales existe, elles peuvent se mettre en *première espèce* comme en *seconde espèce*, *homogène* ou *non homogène*, aussi elles peuvent être de *Fredholm* ou bien de *Volterra*.

1.4.1 Equations intégrales de Fredholm :

On appelle *équation intégrale de Fredholm de seconde espèce* une équation de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy \quad 1.7$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $K(x, y)$ et $f(x)$ des fonctions données.

avec les notations précédente, dans une formule plus simple on écrit

$$\varphi(x) + f(x) = A\varphi(x)$$

Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.7) est dite *non homogène*, dans le cas contraire, l'équation intégrale (1.7) s'écrit

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy \quad 1.8$$

et on dit qu'elle est *homogène*.

Une équation intégrale de la forme

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy \quad 1.9$$

où la fonction inconnue $\varphi(x)$ n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle *équation intégrale de Fredholm de première espèce*.

1.4.2 Equations intégrales de Volterra :

Une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy \quad 1.10$$

est appelée *équation intégrale de Volterra de seconde espèce*, en fait c'est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau $K(x, y) = 0$ pour $x < y$.

Si $f(x) = 0$, l'équation (1.10) s'écrit

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy \quad 1.11$$

et s'appelle *équation homogène de Volterra de seconde espèce*

Une équation, à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$f(x) = \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy \tag{1.12}$$

est appelée *équation intégrale de Volterra de première espèce*.

1.4.3 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra :

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x)y = F(x) \tag{1.13}$$

à coefficients continus $a_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) avec les conditions initiales

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{n-1}(0) = c_{n-1} \tag{1.14}$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{d y}{dx} + a_2(x)y = F(x) \tag{1.15}$$

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1 \tag{1.16}$$

posons $\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x)$ 1.17

d'où, vu les conditions initiales (1.14), on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + c_1, \quad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + c_1(x) + c_0 \tag{1.18}$$

nous avons utilisé la formule

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z)dz$$

compte tenu de (1.17) et (1.18) mettons l'équation différentielle (1.15) sous la forme

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)dt + c_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt + c_1 x a_2(x) + c_0 a_2(x) = F(x)$$

ou

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\varphi(t)dt = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_0 a_2(x) \tag{1.19}$$

posant

$$K(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x - t)],$$

$$f(x) = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_0 a_2(x)$$

nous ramenons l'équation (1.12) à la forme suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt + f(x) \quad 1.20$$

i.e. nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Remarque :

L'unicité de la solution de l'équation (1.20) résulte de l'existence de la solution du problème de Cauchy (1.15), (1.16) pour l'équation différentielle linéaire à coefficients continus dans un voisinage du point $x = 0$.

Théorème 3 : (Théorème de Riesz)

Soit un opérateur compact $A : E \rightarrow E$ sur E un espace normé. Alors l'opérateur $L = I - A$, (l'opérateur étudié dans le cadre des équations intégrales) a les propriétés suivantes :

- $\text{Ker}(L)$ est de dimension finie.
- $\text{Im}(L)$ est fermé, et de co-dimension finie.
- Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ appelé nombre de Riesz de l'opérateur A tel que :

$$\{0\} = \text{Ker}(L^0) \subset \text{Ker}(L^1) \subset \dots \subset \text{Ker}(L^r) = \text{Ker}(L^{r+1}) = \dots$$

$$E = \text{Im}(L^0) \supset \text{Im}(L^1) \supset \dots \supset \text{Im}(L^r) = \text{Im}(L^{r+1}) = \dots$$

Et on a la somme directe $E = \text{Ker}(L^r) \oplus \text{Im}(L^r)$.

De plus, on a l'alternative de Fredholm :

$$\text{Im}(L) = \text{Ker}(L^*)^\perp, \text{ où } L^* \text{ est l'opérateur adjoint de } L. [2]$$

Nb : Les inclusions énoncées au dessus sont strictes.

Théorème 4 : (Alternative de Fredholm)

On considère les équations intégrales homogènes duales, l'une de l'autres, issues d'un noyau $K : [a, b]^2 \rightarrow R$, qui sont donc définies par :

$$\text{trouver } \varphi \in C[a, b] \text{ tel que } \varphi(x) - \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = 0 \quad 1.21$$

$$\text{trouver } \psi \in C[a, b] \text{ tel que } \psi(x) - \int_a^b K(y, x)\psi(y)dy = 0 \quad 1.22$$

On considère pour $f \in C[a, b]$ et $g \in C[a, b]$ les équations intégrales avec seconds membres

$$\text{trouver } \varphi \in C[a, b] \text{ tel que } \varphi(x) - \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad 1.23$$

$$\text{trouver } \psi \in C[a, b] \text{ tel que } \psi(x) - \int_a^b K(y, x)\psi(y)dy = g(x) \quad 1.24$$

Alors on a l'alternative :

- Ou bien les équations (1.21) et (1.22) n'ont que les solutions triviales $\varphi \equiv 0$ et $\psi \equiv 0$, et dans ces cas les équations (1.23) et (1.24) admettent une unique solution $\varphi \in C[a, b]$ et $\psi \in C[a, b]$ pour chaque $f \in C[a, b]$ et $g \in C[a, b]$.

- Ou bien les équations (1.21) et (1.22) ont le même nombre fini m de solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, les équations (1.23) et (1.24) sont résolubles si et seulement si pour toute solution φ de (1.21) et toute solution ψ de (1.22) on a

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx = 0 \quad 1.25$$

Dans ces conditions, la solution générale de (1.23) s'écrit sous la forme :

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i \quad 1.26$$

où $\tilde{\varphi}$ est une solution particulière de (1.23) et les $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq m}$ forme une famille libre de solution de (1.21). [9]

Introduction :

Un grand nombre de méthodes fondées sur des principes différents ont été proposées et sont pratiquement utilisées pour la résolution approchée des équations intégrales. Pour juger de l'efficacité et du bien-fondé de l'application de ces méthodes, il est nécessaire d'en entreprendre une étude théorique dans laquelle se posent dans un ordre croissant de précision et de complexité les trois problèmes suivants :

- a) établissement de la réalisabilité et de la convergence de l'algorithme.
- b) étude de la vitesse de convergence.
- c) estimation effective de l'erreur.

Dans ce chapitre nous citerons quelques méthodes d'approximations pour les équations intégrales. Et dans le but de mettre en œuvre et d'accumuler les conditions de proximité des solutions pour chaque méthode, on fait appel à certains théorèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle.

2.1 Méthodes Classiques :

2.1.1 Séries de Neumann :

Soit l'équation intégrale issue d'un noyau continu $K(x, y)$.

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad 2.1$$

Qu'on peut écrire aussi sous la forme :

$$\varphi - A(\varphi) = f \quad 2.2$$

(A désigne toujours l'opérateur intégral défini par 1.1)

La première remarque envisagée est que l'existence de la solution pour cette équation dépend de l'existence de l'inverse de l'opérateur $I - A$, (*i.e.* $(I - A)^{-1}$). Pour mener à bien notre étude, nous aurons besoin au théorème suivant :

Théorème 1 : (de Banach) [1]

Soit E un espace de Banach et A un opérateur linéaire continu de E dans E . Si $\|A\| \leq q < 1$,

Alors l'opérateur $I - A$ est inversible et son inverse $(I - A)^{-1}$ est donné par :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad 2.3$$

Et de plus

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q} \quad 2.4$$

Preuve :

Dans les conditions du théorème, c'est-à-dire $\|A\| < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ est convergente, il suffit d'appliquer la relation $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, $k=0,1,\dots$

Désignons par V la somme de cette série. On a

$$\begin{aligned} V(I - A) &= (I + A + \dots + A^k + \dots)(I - A) = \\ &= (I + A + \dots + A^k + \dots) - (A + A^2 + \dots + A^{k+1}) = I \end{aligned}$$

et de façon analogue

$$(I - A)V = I.$$

Donc $V = (I - A)^{-1}$.

$$\|V\| \leq \|I\| + \|A\| + \dots + \|A\|^{k+1} + \dots \leq 1 + q + \dots + q^k + \dots = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{c.q.f.d}$$

Grâce à ce théorème, sous la condition $\|A\| < 1$, l'unique solution φ^* de l'équation (2.2) est de la forme

$$\varphi^* = (I - A)^{-1}(f) = f + A(f) + A^2(f) + \dots + A^k(f) + \dots \quad 2.5$$

Cette série s'appelle *série de Neumann*.

D'une manière plus simple, on investit le caractère de convergence de cette série, on arrive à approcher la solution φ^* par $(\varphi_k = M_k f)$

où l'opérateur M_k est défini par : $M_k = \sum_{i=0}^k A^i$

Montrons que les opérateurs A^i sont intégraux au même titre que A . En effet, $v = A^2(\varphi)$ signifie que $v = A(w)$, où $w = A(\varphi)$, c'est-à-dire

$$v(x) = \int_a^b K(x, y)w(y)dy, \quad w(y) = \int_a^b K(y, t)\varphi(t)dt,$$

D'où

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_a^b K(x, y) \left[\int_a^b K(y, t) \varphi(t) dt \right] dy = \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(x, y) K(y, t) dy \right] \varphi(t) dt = \int_a^b K_2(x, t) \varphi(t) dt \\ &\quad \left(K_2(x, t) = \int_a^b K(x, y) K(y, t) dy \right). \end{aligned}$$

On peut montrer par récurrence que $v = A^i(\varphi)$ signifie que

$$v(x) = \int_a^b K_i(x, t) \varphi(t) dt \quad (i = 2, 3, \dots),$$

où $K_i(x, t)$ sont déterminés à partir de la relation récurrentielle

$$K_i(x, t) = \int_a^b K_{i-1}(x, y) K(y, t) dy \quad (i = 2, 3, \dots), \quad 2.6$$

dont le développement nous donne

$$K_i(x, t) = \int_a^b \dots \int_a^b K(x, y_1) K(y_1, y_2) \dots K(y_{i-1}, t) dy_1 dy_2 \dots dy_{i-1} \quad 2.7$$

Les fonctions $K_i(x, t)$ sont dites *noyaux itérés*.

La série de Neumann peut être maintenant écrite sous la forme détaillée :

$$\begin{aligned} \varphi^*(x) &= f(x) + \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \int_a^b K_2(x, y) f(y) dy + \dots + \int_a^b K_i(x, y) f(y) dy + \dots \\ &= f(x) + \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{\infty} K_i(x, y) \right) f(y) dy. \end{aligned} \quad 2.8$$

On a alors l'expression de φ_k suivante :

$$\varphi_k(x) = f(x) + \int_a^b m_k(x, y) f(y) dy, \quad \text{où } m_k(x, y) = \sum_{i=0}^k K_i(x, y) \quad 2.9$$

2.1.2 Méthode des approximations successives :

La méthode des *approximations successives* est l'une des méthodes les plus usuelles pour la résolution de l'équation (2.2). Son principe est le suivant : on donne un élément

quelconque $\varphi_0 \in C[a, b]$ appelé *approximation initiale* et on construit à partir de cet élément la suite (φ_n) des *solutions approchées* :

$$\varphi_{n+1} = f + A(\varphi_n) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad 2.10$$

Si l'on obtient une suite convergente dont la limite est la solution de l'équation considérée, on dit que le processus des approximations successives pour l'équation (2.2), d'élément initial φ_0 est convergent (vers la solution de l'équation (2.2)). Vu que l'opérateur intégral A est linéaire continu, le seul fait de la convergence de la suite (φ_n) implique que $\varphi^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$ est solution de l'équation (2.2). Pour s'en assurer il suffit de passer à la limite pour $n \rightarrow \infty$ dans (2.10)

La convergence d'approximations successives pour l'équation (2.2) est aussi rattachée à celle de la série

$$I + A + \dots A^n + \dots, \quad 2.11$$

On a le théorème suivant [1]

Théorème 2 :

Si la série (2.11) est convergente, le processus des approximations successives pour l'équation (2.2) converge vers l'unique solution φ^ de l'équation (2.2) quelque soit l'approximation initial φ_0 . De plus*

$$\|\varphi^* - \varphi_n\| \leq \|(I - A)^{-1}\| \|A^n\| \|\varphi_1 - \varphi_0\| \quad (n = 1, 2, \dots) \quad 2.12$$

En particulier, si l'on se place dans les conditions du théorème de Banach, cette majoration (de la vitesse de convergence) peut être remplacée par

$$\|\varphi^* - \varphi_n\| \leq \frac{q^n}{1 - q} \|\varphi_1 - \varphi_0\| \quad (n = 1, 2, \dots) \quad 2.13$$

Preuve :

En applique successivement la formule (2.10) on trouve

$$\varphi_n = f + A(f) + \dots + A^{n-1}(f) + A^n(\varphi_0), \quad (n = 1, 2, \dots). \quad 2.14$$

D'où il suit que si la série (2.11) est convergente, alors il existe

$$\varphi^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \sum_{i=1}^{\infty} A^i(f) = (I - A)^{-1}(f), \quad 2.15$$

Puisque $A^n(\varphi_0) \rightarrow 0$. La première partie du théorème est démontrée, puisque φ^* est manifestement solution de l'équation (2.2).

Pour obtenir la majoration (2.12), substituant φ^* à φ_0 dans (2.14). Alors il est clair de la formule (2.10) que $\varphi_n = \varphi^*$ ($n = 1, 2, \dots$). Donc nous sommes conduits à la relation

$$\varphi^* = f + A(f) + \dots + A^{n-1}(f) + A^n(\varphi^*), \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Si l'on soustrait l'égalité (2.14) dans cette relation et l'on passe aux normes on obtient

$$\|\varphi^* - \varphi_n\| \leq \|A^n\| \|\varphi^* - \varphi_0\|, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad 2.16$$

Posons $\tilde{\varphi} = \varphi^* - \varphi_0$. Vu que φ^* est solution de l'équation (2.2) et par suite $\varphi^* - A(\varphi^*) = f$,

On aura

$$\begin{aligned} (I - A)(\tilde{\varphi}) &= \tilde{\varphi} - A(\tilde{\varphi}) = \varphi^* - A(\varphi^*) - \varphi_0 + A(\varphi_0) = \\ &= f + A(\varphi_0) - \varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_0; \end{aligned}$$

D'où

$$\tilde{\varphi} = (I - A)^{-1}(\varphi_1 - \varphi_0). \quad 2.17$$

En utilisant ceci dans (2.16) on obtient la majoration annoncée.

2.1.3 Méthode de Nyström :

C'est l'une des méthodes les plus efficaces de résolution numérique des équations intégrales consiste à remplacer l'équation intégrale par un système algébrique d'équations linéaires moyennant une formule de quadrature.

Soit donnée l'équation

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad 2.18$$

On souhaite approximer l'opérateur intégral A défini par :

$$\forall x \in [a, b], (A\varphi)(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy \quad 2.19$$

Pour ce faire, on se donne des règles de quadrature (Q_n) pour calculer l'intégrale à noyau via des nœuds $(y_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n}$, ainsi que des poids $(w_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n}$, d'où l'introduction d'un nouvel opérateur A_n défini par :

$$\forall x \in [a, b], (A_n\varphi)(x) = \sum_{i=1}^n w_i^{(n)} K(x, y_i^{(n)})\varphi(y_i^{(n)}) \quad 2.20$$

Alors, on va approcher la solution φ^* de l'équation $\varphi - A\varphi = f$ par la solution φ_n du problème $\varphi_n - A_n\varphi_n = f$. c'est à dire :

$$\text{trouver } \varphi_n \text{ tel que } \varphi_n(x) - \sum_{i=1}^n w_i^{(n)} K(x, y_i^{(n)}) \varphi_i(y_i^{(n)}) = f(x) \quad 2.21$$

Ceci nous amène à une seconde discrétisation, mais cette fois-ci sur les x , donc pour $x = (y_j^n)_{1 \leq j \leq n}$, et avec les notations suivantes :

$$\varphi(y_j^{(n)}) = \varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$f(y_j^{(n)}) = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$K(y_j^{(n)}, y_i^{(n)}) = K_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

On obtient, le système algébrique de n équations linéaires :

$$\varphi_j - \sum_{i=1}^n w_i K_{ji} \varphi_i = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad 2.22$$

Où K_{ji}, w_i, f_j considérer comme quantités connues et φ_j comme inconnues.

La matrice associée à ce système est de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 - w_1 K_{11} & -w_2 K_{21} & \cdots & -w_n K_{n1} \\ -w_1 K_{12} & 1 - w_2 K_{22} & \cdots & -w_n K_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -w_1 K_{1n} & -w_2 K_{2n} & & 1 - w_n K_{nn} \end{bmatrix} \quad 2.23$$

Remarque :

Avec la méthode de Nyström et dans le cas d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce, on obtient une matrice triangulaire inférieure, c'est le cas qu'on établira dans la suite (à savoir le chapitre III).

Théorème 3 : [9]

On suppose que les règles de quadrature $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la méthode de Nyström sont convergentes (i.e. $\forall f \in C[a, b], Q_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$). Alors la méthode de Nyström est convergente point à point, i.e. $\forall \varphi \in C[a, b], A_n \varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \varphi$, mais ne converge pas nécessairement en norme.

2.2 Méthodes du noyau dégénéré :

Soit A l'opérateur intégral défini par la formule (1.1) sur l'espace $C[a, b]$ muni du même produit scalaire. La méthode du noyau dégénéré correspond à approximer le noyau K par une suite de noyaux dégénérés K_n de la forme :

$$K_n(x, y) = \sum_{j=1}^n p_j(x)q_j(y), \quad x, y \in [a, b] \quad 2.24$$

où $(p_j)_{1 \leq j < n}$ et $(q_j)_{1 \leq j < n}$ sont des familles d'éléments de $C[a, b]$, avec de plus la famille $(p_j)_{1 \leq j \leq n}$ est linéairement indépendante.

Dans ce cas l'opérateur intégral A est approximer par une suite d'opérateurs $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme :

$$A_n \varphi = \sum_{j=1}^n \langle \varphi, q_j \rangle p_j \quad 2.25$$

et par conséquence, l'équation (2.1) sera elle aussi approximer par

$$\varphi_n(x) - \sum_{j=1}^n z_j p_j(x) = f(x) \quad 2.26$$

où

$$z_j = \int_a^b q_j(y) \varphi(y) dy, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad 2.27$$

Aussi, on peut écrire :

$$z_i = \int_a^b q_i(x) \varphi(x) dx = \int_a^b q_i(x) f(x) dx + \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b q_i(x) p_j(x) dx \right) z_j.$$

Posons,

$$c_i = \int_a^b q_i(x) f(x) dx, \quad a_{ij} = \int_a^b q_i(x) p_j(x) dx, \quad 2.28$$

On obtient

$$z_i = c_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad 2.29$$

Finalement, on a le théorème suivant :

Théorème 4 : [6]

Les solutions de l'équation :

$$\varphi_n - \sum_{j=1}^n \langle \varphi, q_j \rangle p_j = f \quad 2.30$$

ont la forme :

$$\varphi_n = f + \sum_{i=1}^n z_i p_i \quad 2.31$$

où les coefficients z_1, z_2, \dots, z_n sont solution du système (2.29) :i.e.

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad z_i - \sum_{j=1}^n \langle p_j, q_i \rangle z_j = \langle f, q_i \rangle. \quad 2.32$$

2.2.1 Notions générales sur l'interpolation :

Définition :

Soient U_n un sous espace de $C[a, b]$, de dimension fini et x_1, x_2, \dots, x_n , n point de $[a, b]$ telle que la seule fonction $f \in U_n$ vérifiant $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, f(x_i) = 0$ soit la fonction nulle. On dit que notre ensemble est *unisolvant*.

Théorème 5 :

Etant donné U_n et les points $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ présentés au dessus, si on se donne une fonction $g \in C[a, b]$, il existe une unique fonction $u \in U_n$ qui interpole g aux points x_i , i.e.

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad u(x_j) = g(x_j) \quad 2.33$$

Remarque :

L'opérateur d'interpolation $P_n : C[a, b] \rightarrow U_n$ qui à g associé u est un opérateur de projection continu.

2.2.2 Interpolation polynomiale :

Théorème d'approximation de Weierstrass :

Si I est un intervalle compact de \mathbb{R} , alors l'ensemble des polynômes IP de fonction polynomiale sur I est dense dans $C(I)$.

D'où, pour toute $f \in C(I)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p sur I telle que

$$\|f - p\| = \sup\{|f(x) - p(x)| : x \in I\} < \varepsilon. \quad 2.34$$

Autrement dit, toute élément de $C(I)$ peut être uniformément approximer, avec le degré de précision qu'on veut, par une fonction polynomiale.

Théorème de Korovkin :

Soient I un intervalle compact de R et (L_n) suite d'opérateurs linéaires positifs dans $C(I)$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n p_k = p_k, k = 0, 1, 2 \quad 2.35$$

alors

$$L_n f \longrightarrow f \text{ Pour toute } f \in C(I) \quad 2.36$$

Théorème 6 :

On considère le polynôme d'interpolation p_n de $f \in C^{(n+1)}([a, b])$ en $n+1$ points de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 = x_0 + h < \dots < x_n = b \text{ avec } h = \frac{1}{n}$$

On a alors :

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty \quad 2.37$$

avec

$$\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad 2.38$$

Sans hypothèse sur la répartition des $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, on n'a pas forcément convergence uniforme des p_n quand le pas de la subdivision diminue.

2.2.3 Interpolation du noyau :

On peut appliquer cet opérateur d'interpolation pour construire une suite de noyaux dégénérés, pour expliquer la méthode, soit le problème de Fredholm du type

$$\text{Trouver } \varphi : [a, b] \rightarrow R \text{ tel que } \varphi(x) - \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad a \leq x \leq b$$

Pour approximer la solution φ^* , on va interpoler, pour chaque $y \in [a, b]$ la fonction $x \rightarrow K(x, y)$ aux points $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, ce qui donne un noyau dégénéré de la forme :

$$K_n(x, y) = \sum_{j=1}^n L_j(x) K(x_j, y) \quad 2.39$$

où $(L_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base de U_n dite d'interpolation, c'est-à-dire qu'elle vérifiant $L_k(x_j) = \delta_{kj}$, on l'appelle souvent base de Lagrange associée à U_n et aux x_j . [9]

2.3 Méthodes de la base finie :

Ces méthodes, aussi appelées méthode de projection, leurs intérêts par rapport aux méthodes de quadrature résident dans le fait qu'elles permettent un bon contrôle du compromis entre précision et simplicité de la mise en œuvre.

2.3.1 Méthodes de Projection :

Définition : Soit X un espace vectoriel normé, $U \subset X$ un sous espace non trivial. Un opérateur borné $P : X \rightarrow Y$ est appelé *projecteur* s'il vérifie :

$$\forall \varphi \in U, P\varphi = \varphi. \quad 2.40$$

Définition : (*Méthode de projection*)

On se donne X et Y deux espaces de Banach, ainsi que $A : X \rightarrow Y$ un opérateur borné injectif. Pour $f \in A(X) \subset Y$, on cherche à approximer la solution du problème :

$$\text{trouver } \varphi \in X \text{ tel que } A\varphi = f \quad 2.41$$

Pour se faire, on se donne une suite de sous espaces vectoriels $X_n \subset X$ et $Y_n \subset Y$ de dimension finie n , ainsi que des projecteurs $P_n : Y \rightarrow Y_n$. On considère le problème approché :

$$\text{trouver } \varphi_n \in X_n \text{ tel que } P_n A \varphi_n = P_n f \quad 2.42$$

Cette méthode de projection est dite *convergente* s'il existe un rang n_0 à partir duquel pour tout $f \in A(X)$, l'équation approché (2.42) admet une unique solution $\varphi_n \in X_n$ et que cette solution converge vers la solution φ de (2.41), i.e. $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi$

Cette condition de convergence peut s'exprimer simplement en fonction de l'opérateur $A_n = P_n A : X_n \rightarrow Y_n$. Elle signifie simplement qu'à partir d'un certain rang, cet opérateur est inversible, et que de plus, on a une convergence ponctuelle :

$$A_n^{-1}(P_n f) = A_n^{-1}(P_n(A\varphi)) = (P_n A)^{-1} P_n A \varphi \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi \quad 2.43$$

Avant d'étudier la convergence des méthodes de projection, nous allons citer certains théorèmes fondamentaux,

Théorème 7 : (*de Banach - Steinhaus*)

Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés $A_n : X \rightarrow Y$ entre deux espaces de Banach X et Y . On suppose que la suite est bornée ponctuellement, i.e. que pour tout $\varphi \in X$, il existe une constante C_φ telle que $\|A_n \varphi\|_Y \leq C_\varphi$. Alors, la suite est bornée uniformément en norme, i.e. il existe une constante C telle que $\|A_n \varphi\|_Y \leq C$.

Corollaire :

Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés $A_n : X \rightarrow Y$ entre deux espaces de Banach X et Y . On suppose que cette suite converge ponctuellement vers un opérateur $A : X \rightarrow Y$, i.e. que $\forall \varphi \in X, A_n \varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \varphi$. Alors l'opérateur A est borné.

Démonstration :

Soit $\varphi \in X$, alors la suite $\{A_n \varphi\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Y est convergente, donc bornée. En appliquant le théorème (7), on en déduit que la suite $\{\|A_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc sa limite $\|A\|$ aussi.

Théorème 8 :

Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés $A_n : X \rightarrow Y$ entre un espace normé X et un espace de Banach Y . On suppose que la suite converge ponctuellement vers un opérateur $A : X \rightarrow Y$ (borné, grâce au corollaire). Alors, la convergence est uniforme en norme sur tout ensemble compact $U \subset X$, i.e.

$$\sup_{\varphi \in U} \|A_n \varphi - A \varphi\|_Y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad 2.44$$

Démonstration :

On a d'après le corollaire, la convergence ponctuelle entraîne l'existence d'une borne uniforme C sur les normes $\|A_n\|$ ainsi que $\|A\|$.

Soit $\varepsilon > 0$, et on considère le recouvrement par des boules de rayon ε :

$U \subset \bigcup_{\varphi \in U} B(\varphi, \varepsilon)$, Comme U est compact, on en extrait un sous recouvrement fini :

$$U \subset \bigcup_{i=1}^m B(\varphi_i, \varepsilon),$$

Comme on a la convergence ponctuelle $A_n \varphi_i \rightarrow A \varphi_i$ pour un ensemble fini d'éléments $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, on peut trouver un entier N tel que pour $n \geq N$ on ait :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, \|A_n \varphi_j - A \varphi_j\|_Y \leq \varepsilon \quad 2.45$$

Donc, si on prend $\varphi \in U$ quelconque, comme cet élément se trouve dans une des boules ouvertes $B(\varphi_j, \varepsilon)$, on a :

$$\begin{aligned} \|A_n \varphi - A \varphi\|_Y &\leq \|A_n \varphi - A_n \varphi_j\|_Y + \|A_n \varphi_j - A \varphi_j\|_Y + \|A \varphi_j - A \varphi\|_Y \\ &\leq \|A_n\| \|\varphi - \varphi_j\| + \varepsilon + \|A\| \|\varphi - \varphi_j\| \\ &\leq (2C + 1)\varepsilon \end{aligned} \quad 2.46$$

Théorème 9 :

On considère une suite $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs bornés $L_n : Y \rightarrow Z$, avec Z un espace normé et Y un espace de Banach. On suppose de plus que la suite converge ponctuellement vers un opérateur $L : X \rightarrow Y$ (lui aussi borné). On se donne aussi un opérateur compact borné $A : X \rightarrow Y$, où X est espace vectoriel normé quelconque. Alors on a convergence en norme de la suite d'opérateurs bornés compacts $L_n A : Y \rightarrow Z$ vers l'opérateur LA , i.e :

$$\|(L_n - L)A\|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

Démonstration :

L'ensemble $\{\psi = A\varphi, \|\varphi\|_X \leq 1\}$ est relativement compact. Donc avec le théorème (2), la convergence ponctuelle $L_n \psi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L\psi$ est uniforme sur \bar{U} donc sur U , i.e. si on se donne $\varepsilon > 0$:

$$\forall \psi = A\varphi \in U, \|L_n A\varphi - LA\varphi\|_Z \leq \varepsilon.$$

ce qui est exactement dire que $\|(L_n - L)A\|_{\mathfrak{S}(X,Z)} \leq \varepsilon$.

Théorème 10 :

Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés $A_n : X \rightarrow Y$ entre deux espaces de Banach X et Y . On suppose que cette suite converge en norme vers un opérateur borné $A : X \rightarrow Y$ qui est à la fois inversible et tel que son inverse soit borné. Alors, à partir d'un certain rang, les opérateurs A_n sont eux aussi inversibles et d'inverses bornés.

Démonstration :

Il suffit d'écrire :

$$A_n = A[I + A^{-1}(A_n - A)]$$

Dans l'algèbre de Banach $\mathfrak{L}(X, Y)$, sous la condition $\|A^{-1}(A_n - A)\| < 1$, qui est réalisée à partir d'un certain rang, l'opérateur $I + B_n = I + A^{-1}(A_n - A)$ est inversible et d'inverse borné

(Considérer la série de Neumann $\sum_k B_n^k$). Comme A est aussi inversible d'inverse borné, on en déduit que A_n est inversible d'inverse borné à partir d'un certain rang.

Définition :

On dit qu'un sous espace X_n , d'un espace normé X possède la propriété de densité en norme si :

$$\forall \varphi \in X_n, \inf_{\psi \in X_n} \|\varphi - \psi\|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad 2.46$$

Théorème 11 : (CNS de convergence des méthodes de projection) [9]

On se place dans le cadre de la densité décrit par (2.46). Une méthode de projection pour un opérateur $A: X \rightarrow Y$ entre deux espaces de Banach X et Y converge si et seulement si il existe un rang n_0 à partir duquel les opérateurs de dimension finie $P_n A_n : X_n \rightarrow Y_n$ sont inversibles et si les opérateurs d'approximation $(P_n A)^{-1} P_n A : X \rightarrow X_n$ sont uniformément bornés, i.e.

$$\exists M > 0, \forall n \geq n_0, \|(P_n A)^{-1} P_n A\| \leq M. \quad 2.47$$

Dans ce cas, on a une estimation de l'erreur commise en approchant $\varphi \in X$ par la solution approchée $\varphi_n = (P_n A)^{-1} P_n A \varphi$:

$$\|\varphi - \varphi_n\|_X \leq (1 + M) \inf_{\psi \in X_n} \|\psi - \varphi\| \quad 2.48$$

Démonstration :

On a déjà dit que la convergence de la méthode de projection pour A équivalait, à partir d'un certain rang, à la convergence ponctuelle des opérateurs d'approximation $B_n = (P_n A)^{-1} P_n A : X \rightarrow X_n$

Dans un sens, si on suppose que la méthode de projection converge pour A , alors la convergence de (2.48) assure, avec le théorème (7), celui de Banach-Steinhaus, que les opérateurs B_n sont bornés uniformément en norme, ce qui donne bien (2.47). On écrit simplement :

$$\varphi_n - \varphi = (B_n - I)\varphi = ((P_n A)^{-1} P_n A - I)\varphi$$

Et comme, les éléments $\psi \in X_n$ sont invariant par B_n , on obtient :

$$\varphi_n - \varphi = (B_n - I)(\varphi - \psi) = ((P_n A)^{-1} P_n A - I)(\varphi - \psi)$$

D'où l'estimation (2.48) et le résultat voulu.

2.3.2 Méthode de Galerkin : [6]

Il s'agit là d'une méthode essentiellement hilbertienne, c'est-à-dire qu'elle met en jeu la projection de notre équation dans un espace plus petit que l'espace ambiant H .

Pour se faire, on se donne un espace vectoriel X_n de dimension finie n de base orthonormale $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$, on cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$ (i.e. $\varphi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$), proche de notre solution φ^* .

Donc pour le problème

$$\text{trouvé } \varphi \in H \text{ tel que } (I - A)\varphi = f$$

L'idée est de minimiser l'erreur

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (I - A)u_i - f \quad 2.49$$

d'où, on impose la condition d'orthogonalité suivante

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i (I - A)u_i - f, u_j \right\rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad 2.50$$

Ceci, mène au système d'équations linéaires suivant :

$$\sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \langle (I - A)u_i, u_j \rangle - \langle f, u_j \rangle \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad 2.51$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\langle u_i, u_j \rangle - \langle Au_i, u_j \rangle \right) = \langle f, u_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad 2.52$$

$$\Rightarrow \alpha_j - \sum_{i=1}^n \langle Au_i, u_j \rangle \alpha_i = \langle f, u_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad 2.53$$

de la forme $(I - M_n)\alpha = F$ où $F_i = \langle f, u_j \rangle$ et $m_{ij} = \langle Au_i, u_j \rangle$.

Introduction

Dans cette partie essentiellement pratique, nous exposerons en détail quelques méthodes très usuelles pour la résolution numérique des équations intégrales, tout en élucidant les étapes de la discrétisation de l'équation, et pour chaque méthode, on donne un exemple d'application numérique. Ainsi, dans l'objectif d'interpréter nos résultats, il est commode de l'est schématisés.

Tout d'abord, on commence par les

3.1 Equations intégrales de Volterra

3.1.1 Méthode des trapèzes : [8]

Rappelons que l'équation intégrale de Volterra, est donnée par

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt, \quad a \leq x \leq b \quad 3.1$$

Notre objectif est d'approximer la solution φ^* de cette équation sur un système de nœuds $x_0 = a < x_1 < \dots < x_j < \dots < x_n = b$, supposons que ce système est équidistant, i.e. $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, où h est le *pas* de la discrétisation voulue, pour se faire en exigeant que l'égalité (3.1) ait lieu uniquement en ces nœuds, donc l'équation (3.1) devient :

$$\varphi(x_j) = g(x_j) + \int_a^{x_j} k(x_j, t)\varphi(t)dt, \quad 3.2$$

La *méthode des trapèzes*, est usuelle dans le but d'approcher numériquement la quantité qui se présente sous forme intégrale dans cette équation, ceci nous amène à une seconde discrétisation par rapport à la variable d'intégration, t .

Si on pose $t = (x_i)_{0 \leq i \leq j}$, il vient :

$$\varphi(x_j) = g(x_j) + \left(\frac{h}{2} k(x_j, t_0)\varphi(t_0) + h \sum_{i=1}^{j-1} k(x_j, t_i)\varphi(t_i) + \frac{h}{2} k(x_j, t_j)\varphi(t_j) \right), \quad 3.3$$

avec les notations ; $\varphi_j = \varphi(x_j)$, $g_j = g(x_j)$, $k_{ji} = k(x_j, t_i)$ cette formule s'écrit :

$$\varphi_j = g_j + \left(\frac{h}{2} k_{j0}\varphi_0 + h \sum_{i=1}^{j-1} k_{ji}\varphi_i + \frac{h}{2} k_{jj}\varphi_j \right)$$

En général

$$\varphi_j \left(1 - \frac{h}{2} k_{jj} \right) = g_j + \left(\frac{h}{2} k_{j0} \varphi_0 + h \sum_{i=1}^{j-1} k_{ji} \varphi_i \right), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad 3.4$$

Il résulte immédiatement de l'équation (3.2), pour $j = 0$ la valeur de $\varphi(a) = g(a)$,

D'où :

$$\varphi_0 = g_0. \quad 3.5$$

Cette discrétisation nous a fournie alors un système d'équations algébriques linéaires, de la forme : $A\varphi = b$, où A est une matrice triangulaire inférieure i.e.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{h}{2} k_{10} & 1 - \frac{h}{2} k_{11} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -\frac{h}{2} k_{1n} & & \dots & 1 - \frac{h}{2} k_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^t, \quad b = (g_0, g_1, \dots, g_n)^t.$$

S'agissant de la solubilité du système (3.4), un rôle essentiel revient au déterminant de la matrice A ; étudions alors le comportement de ce dernier.

Cette matrice, elle a pour déterminant

$$\Delta = \left(1 - \frac{h}{2} k_{11} \right) \left(1 - \frac{h}{2} k_{22} \right) \dots \left(1 - \frac{h}{2} k_{nn} \right),$$

soit $M = \max_{1 \leq j \leq n} |k_{jj}|$. Il en résulte évidemment

$$\Delta \geq \left(1 - \frac{h}{2} M \right)^n = \left(1 - \frac{b-a}{2n} M \right)^n = \left(1 - \frac{h}{2} M \right)^{\frac{b-a}{h}}. \quad 3.6$$

le seconde membre de cette inégalité est non nul pour tout h suffisamment petit, il en croit avec la diminution de h . Ainsi, $\left(1 - \frac{h}{2} M \right)$ est pour h deux fois moindre :

$$\left(1 - \frac{h}{4} M \right)^2 = 1 - \frac{h}{2} M + \frac{h^2}{16} M^2$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, le seconde membre de (3.6) tend vers $e^{-\frac{(b-a)M}{2}}$

Algébriquement dit, le déterminant du système (3.4) est non nul et ne tend pas vers 0 avec h , ce qui prouve justement l'absence des valeurs propres de l'équation de Volterra.

3.1.2 Méthode adaptative : [14]

L'intérêt de cette méthode est de diminuer l'erreur de précision, dans le but d'obtenir une solution plus fine, pour ce faire et sans perdre lien avec les résultats obtenus par la méthode précédente, dans chaque étape j , qui correspond à une solution φ_j , on applique la même subdivision que la première méthode sur l'intervalle $[x_0, x_{j-1}]$, sauf sur le dernier sous intervalle (i.e. $[x_{j-1}, x_j]$), il intervient un nouveau nœud intermédiaire $x_{j-\frac{1}{2}}$, en fait cette méthode applique un raffinement plus fine sur la première méthode.

Soit

$$\varphi_j^f = g_j + \sum_{i=0}^{j-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_i, t) \varphi(t) dt + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-\frac{1}{2}}} k(x_j, t) \varphi(t) dt + \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_j} k(x_j, t) \varphi(t) dt. \quad 3.7$$

Utilisons la méthode des trapèzes,

$$\begin{aligned} \varphi_j^f &= g_j + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{2} (k_{ji+1} \varphi_{i+1} + k_{ji} \varphi_i) h + \\ &+ \frac{1}{2} (k_{jj-\frac{1}{2}} \varphi_{j-\frac{1}{2}} + k_{jj-1} \varphi_{j-1}) \frac{h}{2} + \frac{1}{2} (k_{jj} \varphi_j + k_{jj-\frac{1}{2}} \varphi_{j-\frac{1}{2}}) \frac{h}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_j^f &= g_j + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{2} h k_{ji} \varphi_i + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2} h k_{ji} \varphi_i + \\ &+ \frac{1}{2} (k_{jj-1} \varphi_{j-1} + 2k_{jj-\frac{1}{2}} \varphi_{j-\frac{1}{2}} + k_{jj} \varphi_j) \frac{h}{2} \end{aligned}$$

$$\varphi_j^f \left(1 - \frac{1}{4} h k_{jj} \right) = g_j + \frac{1}{2} h k_{j0} \varphi_0 + \sum_{i=1}^{j-2} h k_{ji} \varphi_i + \frac{3}{4} h k_{jj-1} \varphi_{j-1} + \frac{1}{2} h k_{jj-\frac{1}{2}} \varphi_{j-\frac{1}{2}}. \quad 3.8$$

de la même manière en détermine la valeur de $\varphi_{j-\frac{1}{2}}$.

$$\varphi_{j-\frac{1}{2}} = g_j + \sum_{i=0}^{j-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_{j-\frac{1}{2}}, t) \varphi(t) dt + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-\frac{1}{2}}} k(x_{j-\frac{1}{2}}, t) \varphi(t) dt \quad 3.9$$

Utilisons la méthode des trapèzes,

$$\varphi_{j-\frac{1}{2}} = g_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{2} (k_{j-\frac{1}{2}i+1} \varphi_{i+1} + k_{j-\frac{1}{2}i} \varphi_i) h + \frac{1}{2} (k_{j-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} \varphi_{j-\frac{1}{2}} + k_{j-\frac{1}{2}j-1} \varphi_{j-1}) \frac{h}{2} \quad 3.10$$

$$\varphi_{j-\frac{1}{2}} = g_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{2} h k_{j-\frac{1}{2}i} \varphi_i + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2} h k_{j-\frac{1}{2}i} \varphi_i + \frac{1}{4} (k_{j-\frac{1}{2}j-1} \varphi_{j-1} + k_{j-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} \varphi_{j-\frac{1}{2}}) h$$

$$\varphi_{j-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{4} h k_{j-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) = g_{j-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} k_{j-\frac{1}{2}, 0} \varphi_0 + \sum_{i=1}^{j-2} h k_{j-\frac{1}{2}, i} \varphi_i + \frac{3}{4} k_{j-\frac{1}{2}, j-1} \varphi_{j-1}. \quad 3.11$$

En substituant (3.11) dans (3.8), on obtient la valeur de φ_j^f .

Exemples numériques :

Exemple 1 :

Considérons l'équation

$$\varphi(x) = 2 - e^{x+1} + \int_{-1}^x e^{x-y} \varphi(y) dy \quad 3.12$$

La solution exacte de cette équation est

$$\varphi^*(x) = 1,$$

Avec l'application de la méthode des trapèzes et adaptative, on obtient les valeurs de l'erreur

$e_j = |\varphi_j - \varphi^*(x_j)|$ dans le tableau suivant :

x	h = 0.1		h = 0.05		h = 0.025	
	trapèzes	adaptative	trapèzes	adaptative	trapèzes	adaptative
-1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.8	2.049D-4	1.295D-4	5.123D-5	2.590D-4	1.280D-5	6.477D-5
-0.6	5.106D-4	7.022D-4	1.276D-4	1.748D-4	3.191D-5	4.455D-5
-0.4	9.688D-4	1.748D-4	2.416D-4	4.913D-5	6.042D-5	1.440D-5
-0.2	1.647D-3	6.134D-4	4.118D-4	1.384D-4	1.029D-4	3.059D-5
0.0	2.663D-3	1.789D-3	6.655D-4	4.181D-4	1.663D-4	9.771D-5
0.2	4.178D-3	3.544D-3	1.044D-3	8.356D-4	2.610D-4	1.978D-4
0.4	6.439D-3	6.162D-3	1.609D-3	1.458D-3	4.022D-4	3.472D-4
0.6	9.813D-3	1.006D-2	2.451D-3	2.387D-3	6.128D-4	5.701D-4
0.8	1.484D-2	1.859D-2	3.709D-3	3.773D-3	9.270D-4	9.025D-4
1.0	2.235D-2	2.459D-2	5.584D-3	5.841D-3	1.395D-3	1.398D-3

Tableau 1 : Exemple1, Les valeurs d'erreurs obtenues pour différents pas via la méthode des trapèzes et la méthode adaptative.

3.1.3 Méthode de Simpson Modifiée :

Dans cette partie, nous introduisons une nouvelle méthode appelée *méthode de Simpson modifiée*, c'est une adaptation de la formule de quadrature de Simpson aux équations intégrales, en particulier celle de Volterra de seconde espèce.

Considérons la même équation de Volterra

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt, \quad a \leq x \leq b \quad 3.13$$

et soit $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{2j-1} < x_{2j} < \dots < x_{2n} = b$, une subdivision équidistante d'un pas h suffisamment petit. Notre objectif alors, est d'approximer la solution de cette équation aux nœuds d'indices pairs (i.e. au point x_{2j}).

On procède de la même manière que la méthode des trapèzes, l'équation (3.13) devient

$$\begin{aligned} \varphi_{2j} &= g_{2j} + \int_a^{x_{2j}} k(x_{2j},t)\varphi(t)dt \\ &= g_{2j} + \sum_{i=1}^{j-1} \int_{t_{2i}}^{t_{2i+2}} k(x_{2j},t)\varphi(t)dt \end{aligned} \quad 3.14$$

Utilisons la formule de quadrature de Simpson

L'équation (3.14) devient

$$\varphi_{2j} = g_{2j} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{h}{3} (k_{2j2i}\varphi_{2i} + 4k_{2j2i+1}\varphi_{2i+1} + k_{2j2i+2}\varphi_{2i+2}) \quad 3.15$$

puisque h suffisamment petit, on approxime φ_{2i+1} par $\frac{\varphi_{2i} + \varphi_{2i+2}}{2}$

l'équation (3.15) devient

$$\begin{aligned} \varphi_{2j} &= g_{2j} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{h}{3} \left(k_{2j2i}\varphi_{2i} + 4k_{2j2i+1} \left[\frac{\varphi_{2i} + \varphi_{2i+2}}{2} \right] + k_{2j2i+2}\varphi_{2i+2} \right) \\ \varphi_{2j} &= g_{2j} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{h}{3} \left([k_{2j2i} + 2k_{2j2i+1}] \varphi_{2i} + [2k_{2j2i+1} + k_{2j2i+2}] \varphi_{2i+2} \right) \\ \varphi_{2j} &= g_{2j} + \frac{h}{3} \left(\sum_{i=0}^{j-1} [k_{2j2i} + 2k_{2j2i+1}] \varphi_{2i} + \sum_{i=0}^{j-1} [2k_{2j2i+1} + k_{2j2i+2}] \varphi_{2i+2} \right) \\ \varphi_{2j} &= g_{2j} + \frac{h}{3} \left(\sum_{i=0}^{j-1} [k_{2j2i} + 2k_{2j2i+1}] \varphi_{2i} + \sum_{i=1}^j [2k_{2j2i-1} + k_{2j2i}] \varphi_{2i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{2j} = & g_{2j} + \frac{h}{3}[k_{2j0} + 2k_{2j1}]\varphi_0 + \frac{h}{3}[2k_{2j2j-1} + k_{2j2j}]\varphi_{2j} + \\ & + \frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{j-1}[k_{2j2i-1} + k_{2j2i} + k_{2j2i+1}]\varphi_{2i}. \end{aligned} \quad 3.16$$

d'où, finalement

$$\begin{aligned} \varphi_{2j}\left(1 - \frac{h}{3}[2k_{2j2j-1} + k_{2j2j}]\right) = & g_{2j} + \frac{h}{3}[k_{2j0} + 2k_{2j1}]\varphi_0 + \\ & + \frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{j-1}[k_{2j2i-1} + k_{2j2i} + k_{2j2i+1}]\varphi_{2i} \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad 3.17$$

on obtient de (3.13) pour $j = 0$, $\varphi_0 = g_0 = g(a)$.

Dans l'objectif de voir l'efficacité de cette méthode considérons le même exemple précédent (Exemple 1),

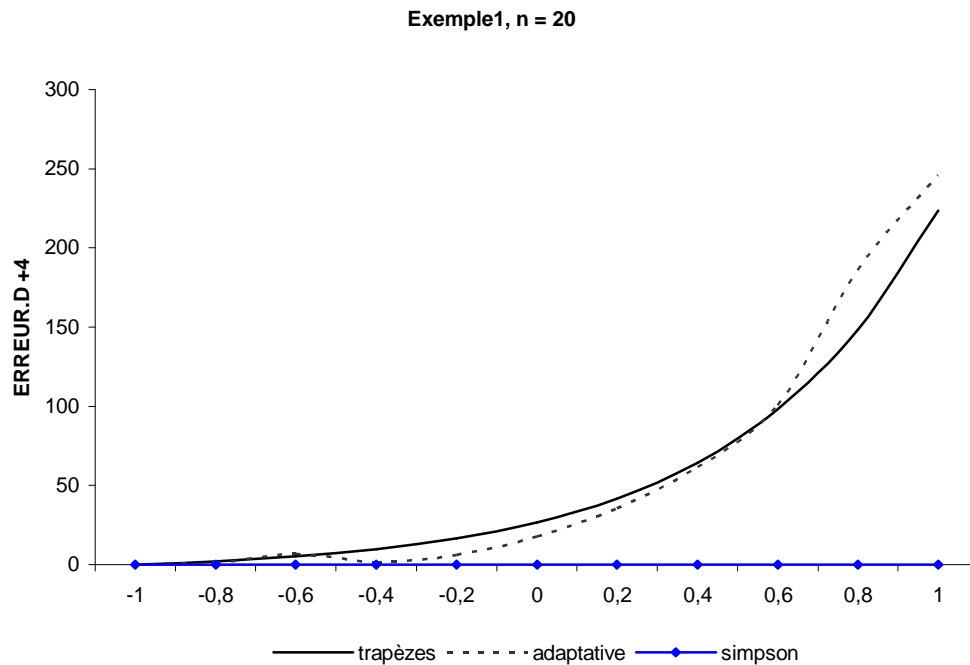
Du tableau suivant, on remarque que la méthode de Simpson modifiée à un ordre de convergence élevé.

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
-1.0	0.000	0.000	0.000
-0.8	1.375D -7	8.552D -9	5.329D -10
-0.6	3.433D -7	2.132D -8	1.327D -9
-0.4	6.512D -7	4.038D -8	2.521D -9
-0.2	1.111D -6	6.884D -8	4.292D -9
0.0	1.800D -6	1.113D -7	9.939D -9
0.2	2.830D -6	1.747D -7	1.088D -8
0.4	4.372D -6	2.694D -7	1.678D -8
0.6	6.678D -6	4.107D -7	2.556D -8
0.8	1.012D -5	6.216D -7	3.867D -8
1.0	1.528D -5	9.366D -7	5.828D -8

Tableau 2. Exemple 1 : Les valeurs d'erreurs $e_{2j} = |\varphi_{2j} - \varphi^*(x_{2j})|$, obtenus avec la méthode de Simpson aux nœuds d'indices pairs.

3.1.4 Etude comparative des trois méthodes :

Dans cette partie, nous allons tester l'efficacité d'une méthode par rapport à l'autre, le **premier exemple** nous a fourni le schéma suivant :



n : nombre de subdivisions

Schéma 1. Exemple1

(Variations de l'erreur pour les trois méthodes)

2. Sur un problème a solution oscillatoire :

On se donne l'exemple suivant :

Exemple 2 :

L'équation

$$\varphi(x) = \sin(\omega x) + \cos(\omega x)/\omega - \cos(\omega)/\omega + \int_{-1}^x \varphi(y) dy \quad 3.18$$

a pour solution exacte $\varphi^*(x) = \sin(\omega x)$,

où ω est une constante donnée.

Avec cet exemple, on a obtenu les résultats schématisés suivants :

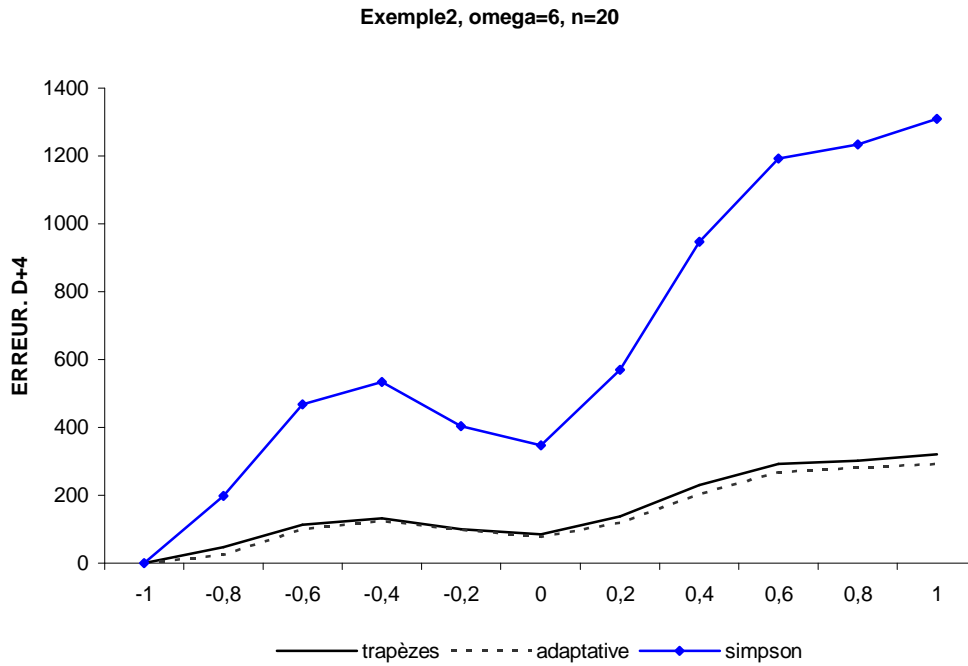


Schéma 2. Exemple 2

3. Sur un problème a solution quadratique polynomiale :

Exemple 3 :

L'équation

$$\varphi(x) = -x^6/30 + x^4 - x/5 - 1/6 + \int_{-1}^x (x-y)\varphi(y)dy \tag{3.19}$$

a pour solution exacte $\varphi^*(x) = x^4$.

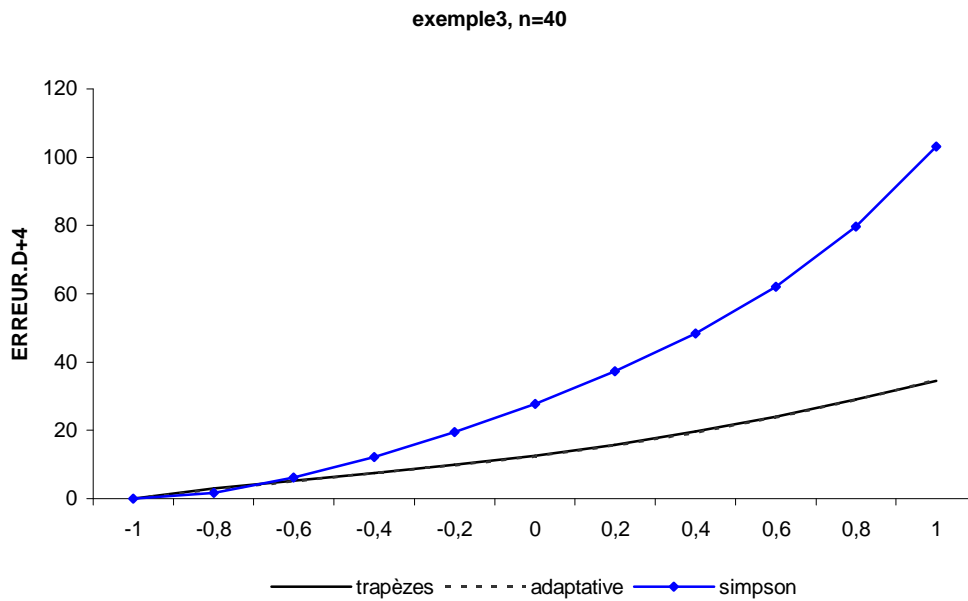


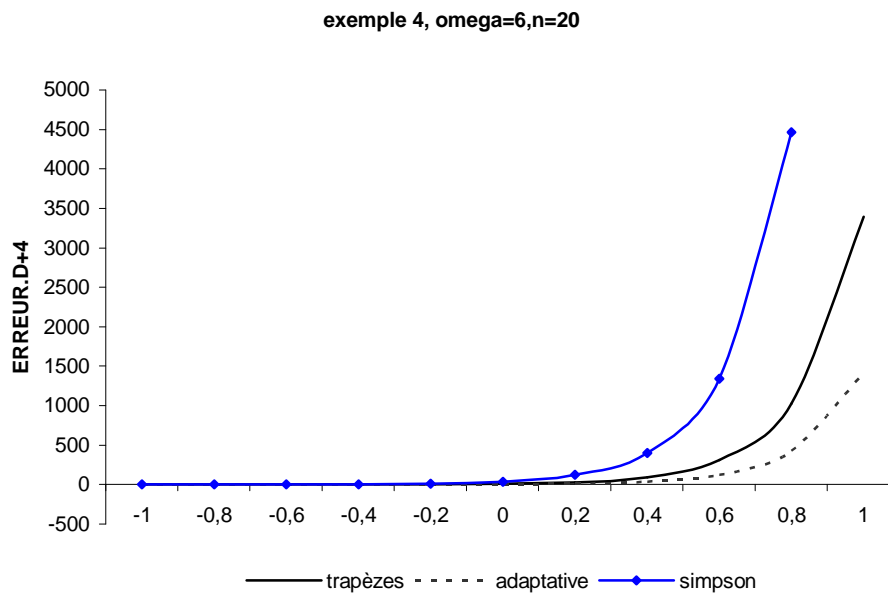
Schéma 3. Exemple 3

4. Sur un problème a solution exponentielle :

Exemple 4 :

L'équation

$$\varphi(x) = e^{\omega x} + (x+1)/\omega e^{\omega} - (e^{\omega x} - e^{-\omega})/\omega^2 + \int_{-1}^x (x-y)\varphi(y)dy \quad 3.20$$

a pour solution exacte $\varphi^*(x) = e^{\omega x}$.**Schéma 4. Exemple 4**

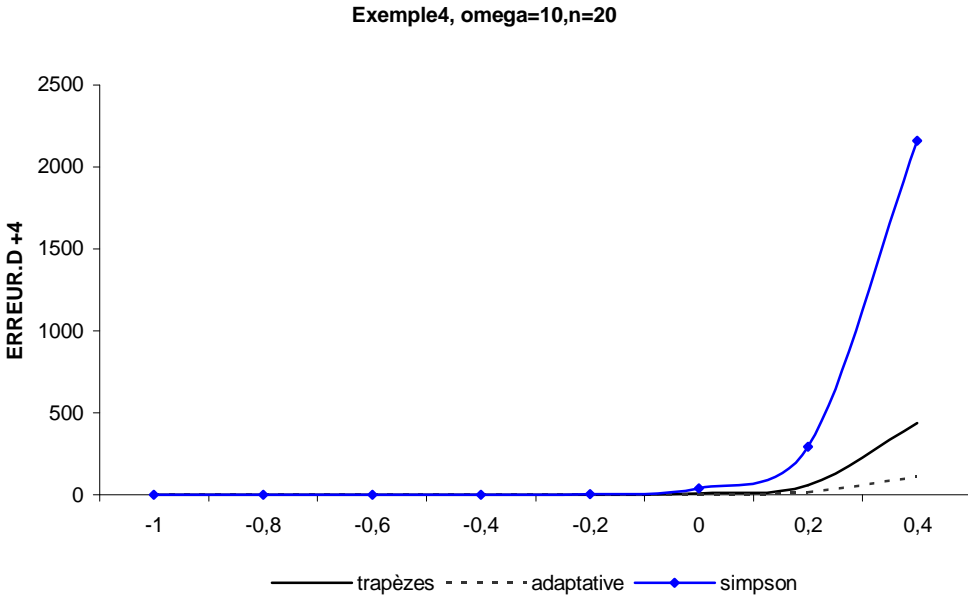


Schéma 5. Exemple 4

3.2 Equations intégrales de Fredholm

La résolution numérique de ce type d'équations est un peu différente de celle de Volterra, puisque, en effet la limite supérieure de l'intégrale est une constante, par conséquent, on travaille avec des matrices denses, et ceci se manifeste inversement sur l'approximation numérique désirée.

Aussi de même que précédemment, pour une telle méthode ils existent pratiquement plusieurs techniques de résolution, ceci dépend étroitement de la nature de l'équation à résoudre et de son espace d'approximation. Ici, nous allons donner deux méthodes classiques de résolution,

Première méthode : [12]

Considérons l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce :

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy, \quad x \in [a, b] \quad 3.21$$

où $g(x)$ et $k(x, y)$ sont des fonctions données.

Soit $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, une subdivision équidistante de l'intervalle $[a, b]$. Si on remplace l'intégrale de l'équation (3.21) par la formule composite des trapèzes

$$\int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h}{2} [k_i(x)\varphi_i + k_{i+1}(x)\varphi_{i+1}] \quad 3.22$$

avec

$$\begin{aligned} k_i(x) &= k(x, x_i), \\ \varphi_i &= \varphi(x_i), \end{aligned}$$

l'équation (3.21) devient

$$\varphi(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h}{2} [k_i(x)\varphi_i + k_{i+1}(x)\varphi_{i+1}] \quad 3.23$$

l'évaluation de (3.23) sur les x_j donne un système d'équations algébriques de la forme

$$\left(I - \frac{h}{2} K \right) \Phi = G \quad 3.24$$

où les vecteurs Φ et G définis respectivement par leurs composantes φ_j et $g_j = g(x_j)$,

les composantes de K sont données par $K_{ij} = k_i(x_j)$,

dans le but de résoudre le système (3.24), on utilise par exemple la méthode itérative de Gauss-Seidel, i.e.

$$\varphi_j^{(i+1)} = \frac{1}{q_{jj}} \left(g_j - \sum_{l=1}^{j-1} q_{jl} \varphi_l^{(i+1)} - \sum_{l=j+1}^N q_{jl} \varphi_l^{(i)} \right), \quad i = 0, 1, \dots, \quad 3.25$$

où

$$Q = \left(I - \frac{h}{2} K \right)$$

et l'approximation initiale

$$\varphi^{(0)} = G.$$

Remarques :

Une condition suffisante de convergence du processus itératif (3.25), est que la matrice Q soit à diagonale dominante. Ce qui équivaut à dire $\|Q\| < 1$.

Exemple 5 :

L'équation

$$\varphi(x) = e^{-10(x-0.5)^2} + \int_0^1 (x-0.5)(y-0.5)\varphi(y)dy \quad 3.26$$

a pour solution exacte, la fonction $\varphi^*(x) = e^{-10(x-0.5)^2}$,

pour une subdivision de $N = 40$ sous intervalle, après quatre itérations on a obtenu les résultats suivant :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$e \times D + 4$	2.141	1.606	1.070	0.535	0.000	0.535	1.070	1.606	1.141	2.670

Tableau 3. Exemple 5.

Deuxième méthode : [7]

Pour une équation de la forme (3.21), la présence de la fonction inconnue en dehors de l'intégrale, offre de bonnes opportunités pour une computation efficace.

Avec une formule de quadrature, l'approximation de (3.21) est donné par

$$\varphi_i = g_i + \sum_{j=1}^n w_j k(x_i, x_j) \varphi_j \quad 3.27$$

où $w_j, j = 1, 2, \dots, n$ sont les poids de la quadrature.

La motivation du schéma

$$\varphi_i^{(m)} = g_i + \sum_{j=1}^n w_j k(x_i, x_j) \varphi_j^{(m-1)}, m = 1, 2, \dots \quad 3.28$$

nous amène à l'approximation de φ^* .

Cette méthode converge, si la matrice des éléments $w_j k(x_i, x_j)$ est de norme inférieure à l'unité.

Le problème qui se pose pour le schéma (3.28), est l'initialisation, c'est-à-dire la bonne valeur de $\varphi^{(0)}$, car sinon le déroulement de cette méthode est lent, mais on peut résoudre ceci par l'algorithme suivant :

- Computer la solution φ_N sur N nœuds par la méthode directe.
- Remplacer N par $2N$.
- Générer $\varphi_{2N}^{(0)}$ par la formule

$$\varphi_{i,2N}^{(0)} = g(x_{i,2N}) + \sum_{j=1}^N w_{j,N} k(x_{i,2N}, x_{j,N}) \varphi_{j,N}$$

- Résoudre

$$\varphi_{i,2N} = g(x_{i,2N}) + \sum_{j=1}^{2N} w_{j,2N} k(x_{i,2N}, x_{j,2N}) \varphi_{j,2N},$$

par l'itération

$$\varphi_{i,2N}^{(m)} = g(x_{i,2N}) + \sum_{j=1}^{2N} w_{j,2N} k(x_{i,2N}, x_{j,2N}) \varphi_{j,2N}^{(m-1)},$$

- Répéter, avec le doublement de N , une fois la solution est trouvée.

CONCLUSION GENERALE

Nous proposons une nouvelle méthode numérique de résolution des équations intégrales. Notre objectif été de voir la performance de cette méthode et de contribuer à l'étude du comportement de l'erreur commise dans cette approche.

Dans une première étape, nous avons proposé deux méthodes efficaces de résolution pour les équations intégrales, celle des trapèzes et une méthode adaptative, nous avons calculé les erreurs commises par les trois méthodes sous forme de valeur absolue de la différence entre la solution exacte connue d'avance et la solution numérique qu'on a trouvée, pour un choix divers de problèmes sous forme d'exemples numériques. En suite on a schématisé ces résultats.

Enfin, la lecture de ces schémas, nous a donné une illusion générale sur la méthode ainsi proposée, dont il est clair que sur des problèmes a solution oscillatoires, quadratiques et exponentielle, notre méthode est moins consistante, mais sur des problèmes a solutions d'une variation lente, la méthode est très efficace. Cela donnera un avantage de plus à la résolution numérique des équations intégrales.

BIBLIOGRAPHIE:

- [1] L. Kantorovitch et G. Akilov. *Analyse fonctionnelle*, T1 & T2. Édition Mir, 1981.
 - [2] Haim Brezis, *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 1983.
 - [3] Mohamed. Hazi, *Introduction aux espaces normés*. O.P.U, 1994.
 - [4] Erhan Cinlar et Robert J. Vanderbei, *Mathematical methods of engineering analysis*, pub 2000.
 - [5] David Keffer, *Advanced analytical techniques for the solution of single and multi-dimontional integral equations*, article 1999.
 - [6] Michael Meylan, *Integral equations*, article: 160 733.
 - [7] Math 3203 scientific computation: Algorithmic design and implementation. *Section 9, introduction to integral equations*. The University of Queensland, article. 2001.
 - [8] Hongchang Tian. *Spectral methods for Volterra integral equations*, Harbin Institute of technology, Harbin, PR China. Thesis. 1995.
 - [9] Gabriel Peyré. *Résolution numérique d'équations intégrales*, Exemple de radiosité, article. 2001.
 - [10] Jacques Rappaz, Marco Picasso. *Introduction à l'analyse numérique*. Dunod, 1998.
 - [11] Alexander. Rogozhin. *Approximation methods for two classes of singular integral equations*. Universität Chemnitz genehmigte, Thesis (Dr.ner.nat.), 2002.
 - [12] Beni Neta. *Adaptive method for the numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind*. Texas Tech University Lubbock, article Texas 79409.
 - [13] I. Chtcherbatski. *Analyse numérique*, cours et problèmes, O.P.U
 - [14] Joshua H Gordis and Beni Neta. *An adaptive method for the numerical solution of Volterra integral equations*, article code ME / GO, CH 93943, USA.
 - [15] M. Krasnov, A. Kisselev et G. Makarenko, *Equation integrals*, Edition Mir, Moscou.1976.
 - [16] Joachim. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, edition Springer-Verlag, 1976.
-